

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Soluções auto-duais no modelo padrão
estendido e em modelos generalizados**

Guillermo Lazar Mentech

ORIENTADOR: RODOLFO ALVÁN CASANA SIFUENTES

SÃO LUÍS, DEZEMBRO DE 2016

Soluções auto-duais no modelo padrão estendido e em modelos generalizados

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Doutor em Física - UFMA

SÃO LUÍS, DEZEMBRO DE 2016

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Mentech, Guillermo Lazar.

Soluções auto-duais no modelo padrão estendido e em
modelos generalizados / Guillermo Lazar Mentech. - 2016.
137 f.

Orientador(a): Rodolfo Alván Casana Sifuentes.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em
Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão,
Universidade Federal do Maranhão, 2016.

1. Configurações auto-duais. 2. Modelos de Higgs
abelianos. 3. Modelos sigma não linear. 4. Violação da
simetria de Lorentz. I. Sifuentes, Rodolfo Alván Casana.
II. Título.

GUILLERMO LAZAR MENTECH

Soluções auto-duais no modelo padrão estendido e em modelos generalizados

Tese de Doutorado de apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida – UFC

Prof. Dr. Humberto Belich Júnior – UFES

Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes Dos Santos Filho – UFMA

Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro – UFMA

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes (Orientador) – UFMA

a Daniel, meu filho

Agradecimentos

- A Jônia e Daniel, meus companheiros de vida, pelo apoio e pela compreensão para comigo durante estes anos todos.
- A minha família, pelo incentivo ao estudo.
- Aos professores que contribuíram para a minha formação.
- Ao Grupo de Física Teórica de Partículas e Campos, e ao PPGF-UFMA pelas excelentes condições de trabalho fornecidas durante este tempo todo.
- Aos companheiros de remada.
- Aos servidores técnico-administrativos e terceirizados que fazem a UFMA funcionar.
- Aos colegas da Licenciatura em Ciências Naturais do Campus Bacabal-(UFMA) por votarem a favor do meu afastamento para poder concluir este doutorado em boa forma.
- Ao povo brasileiro, que por meio da CAPES financiou minha bolsa de estudos.
- A todos os que por mim torceram.
- Por último quero agradecer especialmente ao Prof. Rodolfo Casana, quem me acompanha desde a graduação com uma dedicação nunca vista. Me sinto privilegiado por ter tido ele como orientador. O Prof. Casana é um exemplo de profissional, um apaixonado pela arte de transferir conhecimento. Sem o trabalho, as idéias e a paciência do Prof. Casana este trabalho não seria possível. Poder trabalhar com este grande amigo, foi o melhor que me aconteceu em estes dez anos de UFMA. Saúde campeão !

Resumo

Estudamos as configurações auto-duais em modelos de gauge no contexto do Modelo Padrão Estendido e em modelos de Higgs abelianos generalizados. Primeiramente abordamos o modelo de Maxwell-Higgs provido com termos de violação da invariância de Lorentz (VL) em duas situações: No primeiro caso, adicionamos o termo de Carroll-Field-Jackiw (CPT-ímpar) ao setor de gauge e um outro termo CPT-par no setor de Higgs. No segundo caso, inserimos termos CPT-par em ambos os setores. Em todos os casos os termos da quebra de Lorentz modificam a parte cinética dos campos. As configurações na presença do termo de Carroll-Field-Jackiw (CFJ) tem carga elétrica total não nula, além de serem proporcionais ao fluxo magnético, enquanto que as configurações contendo somente termos CPT-par tem carga elétrica total nula. Contudo, as soluções obtidas quando consideramos o setor de gauge com coeficientes CPT-par de paridade-ímpar possuem campo elétrico não nulo. A implementação do formalismo BPS provê equações auto-duais cujas soluções tem energia total proporcional ao fluxo magnético. Estudamos em detalhe as soluções tipo vórtices axialmente simétricos usando o *ansatz* apropriado. Observamos que o fluxo magnético além de ser proporcional ao número de vorticidade, também depende dos coeficientes CPT-par do setor de Higgs. Mostramos que existem conjuntos de valores dos coeficientes CPT-par do setor de Higgs que reproduzem as configurações dos modelos de Higgs abelianos já estudados na literatura. Um outro resultado importante é a existência de um jogo de parâmetros envolvendo o caso puramente CPT-par cujos vórtices BPS (Bogomoln'yi-Prasad-Sommerfield) apresentam a inversão localizada tanto do campo magnético como do campo elétrico.

Ainda no contexto de VL, estudamos as configurações auto-duais num modelo não abeliano: o modelo $O(3)$ sigma não-linear acoplado a um campo de gauge. O modelo usual é modificado introduzindo o termo CPT-ímpar de CFJ no setor de gauge e um termo CPT-par no setor sigma, ambos modificando somente os setores cinéticos. As configurações tem carga total não nula proporcional ao fluxo magnético. O formalismo BPS fornece as equações auto-duais com configurações possuindo energia total proporcional à carga topológica do modelo. Em seguida, estudamos as soluções de vórtices axialmente simétricos. Estes possuem energia total proporcional à vorticidade e depende dos coeficientes VL pertencentes ao setor sigma. Essa dependência é refletida na carga topológica e no fluxo magnético. Similarmente ao caso anterior, existem conjuntos de valores dos coeficientes CPT-par do setor de sigma permitem interpolar as configurações dos modelos $O(3)$ sigma não-linear acoplado a um campo de gauge encontrados na literatura.

Finalmente, no contexto de teorias de campo invariantes de Lorentz, estudamos a existência de configurações auto-duais nos modelos de Higgs abelianos generalizados: Maxwell-Higgs, Born-Infeld-Higgs, Chern-Simons-Higgs e Maxwell-Chern-Simons-Higgs. A generalização modifica a parte cinética dos campos por meio de funções que dependem somente do campo de Higgs

(ϕ) . Durante o desenvolvimento da implementação do formalismo BPS, naturalmente surge a forma explícita da função que generaliza o termo cinético do campo de Higgs, $\lambda|\phi|^{2\lambda-2}$, $\lambda > 1$. Com isso, determinamos os potenciais auto-duais e as correspondentes equações de primeira ordem para cada modelo. Dentre as configurações auto-duais, estudamos as soluções tipo vórtice e encontramos que a partir de um determinado valor do parâmetro λ os perfis começam a adquirir forma semelhante as das soluções do tipo-*compactons*.

Palavras chave: Violação da simetria de Lorentz, configurações auto-duais, modelos de Higgs abelianos, modelos sigma não linear.

Abstract

We study self-dual configurations solutions for gauge models in the context of the Standard Model Extension and in abelian Higgs generalized models. First we approach the Maxwell-Higgs model provided with Lorentz symmetry violation (VL) terms in two situations: In the first case, we add the Carroll-Field-Jackiw (CPT-odd) term into the gauge sector and another CPT-even term in the Higgs sector. In the second case, we add CPT-even terms in both sectors. For both cases the Lorentz symmetry breaking terms modified the kinetic part of the field. The configurations in the presence of the Carroll-Field-Jackiw (CFJ) term have non-zero total electric charge as well as proportional to the magnetic flux, while the configurations containing only CPT-even terms have null electrical charge. However, the solutions obtained when we consider the gauge sector with CPT-even and parity-odd coefficients have non-zero electric field. The implementation of the BPS formalism provides self-dual equations whose solutions have total energy proportional to the magnetic flux. We have studied in detail the axially symmetrical vortices-like solutions using the appropriate *ansatz*. We note that the magnetic flux as well as being proportional to the winding number, also depends on the CPT-even coefficients of the Higgs sector. We show that there exist a sets of values for the CPT-even coefficients of Higgs sector that reproduce the configurations for the abelian Higgs models already studied in literature. Another important result is the existence of a set of parameters involving only the CPT-even case, in which the BPS (Bogomoln'yi-Prasad-Sommerfield) vortices exhibit localized inversion of both magnetic and electric field.

In the second chapter, still in the context of Lorentz invariance symmetry violation, we study the self-dual configurations in the $O(3)$ nonlinear sigma model coupled to a gauge field. The usual model is modified by introducing the CPT-odd term of CFJ in the gauge sector and a CPT-even term in the sigma sector, both modifying only the kinetic sectors. The configurations have non-null total charge and are proportional to the magnetic flux. The BPS formalism provides the self-dual equations with configurations having total energy proportional to the topological charge of the model. Then we study the axially symmetric vortices solutions. These have total energy proportional to the winding number and depends on the Lorentz violation coefficients belonging to the sigma sector. This dependence is reflected in the topological charge and in the magnetic flux. Similarly to the previous case, there exist a set of values for the CPT-even coefficients of the sigma sector that interpolate the configurations of usual $O(3)$ nonlinear sigma models coupled to a gauge field already found in literature.

On the third and final part of this manuscript we study the existence of self-dual configurations in models for abelian Higgs generalized models: Maxwell-Higgs, Born-Infeld-Higgs, Chern-Simons-Higgs and Maxwell-Chern-Simons-Higgs. The generalization modifies the kinetics of the fields by means of functions that depend only on the Higgs field (ϕ). During the development of the implementation of the BPS formalism, naturally arises the explicit function

that generalize the kinetic term of the Higgs field, $\lambda|\phi|^{2\lambda-2}$, $\lambda > 1$. Thus, we are able to determine the self-dual potential and the corresponding first order equations for each model. Among the self-dual configurations, we study the vortex-like solutions and found that from a given value of the parameter λ the profiles begin to acquire a shape similar to the form of *compactons*-like solutions.

Keywords: Lorentz violation, self-dual configurations, Abelian Higgs models, nonlinear $O(3)$ sigma models.

Sumário

Introdução	1
I Configurações auto-duais no modelo de Maxwell-Higgs com violação da simetria de Lorentz	6
1 Configurações autoduais nos modelos de Higgs abelianos: Uma revisão	8
1.1 Configurações auto-duais no modelo de Maxwell-Higgs	8
1.1.1 Formalismo BPS	10
1.1.2 Vórtices auto-duais no modelo MH	12
1.1.3 Comportamento nas fronteiras	14
1.1.4 Soluções numéricas para vórtices no modelo de MH	15
1.2 Configurações auto-duais no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs	17
1.2.1 Formalismo BPS	18
1.2.2 Vórtices auto-duais no modelo MCSH	21
1.2.3 Comportamento nas fronteiras	22
1.2.4 Soluções numéricas para vórtices no modelo de MCSH	23
2 Configurações auto-duais em modelos de Maxwell-Higgs com violação da simetria de Lorentz	27
2.1 Configurações auto-duais num modelo de Maxwell-Higgs CPT-ímpar	27
2.1.1 Formalismo BPS	29
2.1.2 Vórtices auto-duais no modelo MH CPT-ímpar	31
2.1.3 Comportamento nas fronteiras	33
2.1.4 Análise numérica	35
2.2 Configurações auto-duais num modelo de Maxwell-Higgs CPT-par	41
2.2.1 Formalismo BPS	42
2.2.2 Vórtices auto-duais no modelo de MH CPT-par	46
2.2.3 Comportamento nas fronteiras	47
2.2.4 Análise numérica	49

2.3	Comentários e conclusões	55
II	Configurações auto-duais no modelo de gauge sigma $O(3)$ com violação da simetria de Lorentz	58
3	Configurações auto-duais nos modelos sigma $O(3)$ interagindo com um campo de gauge: Uma revisão	61
3.1	Modelo de gauge Maxwell-sigma $O(3)$	61
3.2	Modelo de gauge Maxwell-Chern-Simons-sigma $O(3)$	66
4	Modelo de Maxwell-sigma $O(3)$ CPT-ímpar	72
4.1	Formalismo BPS	73
4.2	Vórtices auto-duais no modelo de Maxwell-sigma $O(3)$ CPT -ímpar	77
4.2.1	Comportamento dos campos nas fronteiras	79
4.2.2	Análise numérica	80
4.3	Comentários e conclusões	84
III	Configurações auto-duais do tipo vórtices compactos em modelos de Higgs Abelianos generalizados.	86
5	Configurações auto-duais no modelo generalizado de Maxwell-Higgs	89
5.1	Vórtices auto-duais compactos no modelo de MH generalizado	93
6	Configurações auto-duais no modelo generalizado de Born-Infeld-Higgs	97
6.1	Vórtices auto-duais compactos no modelo de BIH generalizado	100
7	Configurações auto-duais no modelo generalizado de Chern-Simons-Higgs	103
7.1	Vórtices auto-duais compactos no modelo de CSH generalizado	106
8	Configurações auto-duais no modelo generalizado de Maxwell-Chern-Simons-Higgs	109
8.1	Vórtices auto-duais compactos no modelo de MCSH generalizado	112
9	Comentários e conclusões	115

Conclusões finais e perspectivas	115
Referências Bibliográficas	118
Apêndices	125
A Cálculo de $ D_k\phi ^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j\phi)^* D_k\phi$	127
B Cálculo de $\left(D_i\vec{\phi}\right)^2 - (k_{\phi\phi})_{ij} D_i\vec{\phi} \cdot D_j\vec{\phi}$	130
C Cálculo de $\omega\epsilon_{ik}\partial_i J_k$	133
D Artigos publicados ou em fase final de redação	135

Introdução

As partículas elementares são descritas pela Teoria Quântica de Campos (TQC) como as excitações elementares de um campo quantizado. A TQC é uma teoria muito bem estabelecida que há décadas fornece resultados extremamente satisfatórios no que se refere às interações entre partículas. Notamos que em nenhum momento se fez necessária a inclusão do conceito do sóliton para o desenvolvimento da TQC, no entanto, as dificuldades encontradas na descrição perturbativa em determinados fenômenos de partículas, especialmente no domínio da interação forte, levou muitos físicos de partículas a reconsiderar, de uma nova perspectiva, as consequências das equações de movimento não-lineares. Neste contexto, as soluções tipo sólitons foram redescobertas na década dos 70. O termo sóliton caracteriza ondas não dispersivas que preservam sua forma durante a propagação. A partir desta característica poderia se pensar em sólitons como a estrutura matemática ideal para a descrição de partículas. Estas soluções solitônicas tipo-partícula não substituem as partículas elementares tradicionais, mas contribuem na descrição teórica em virtude da sua natureza não linear. Mas, de que forma estas soluções tipo-partículas, advindas de equações de campos clássicos, poderiam ser incluídas no contexto das interações elementares, conhecendo-se a natureza quântica do universo sub-microscópico? A quantização nos sólitons é de natureza diferente à quantização empregada pela TQC na descrição das partículas elementares. Esta surge naturalmente em alguns tipos particulares de soluções das equações (não lineares) de campo quando estes apresentam condições de fronteira não triviais. Desse modo dizemos que as configurações apresentam propriedades topológicas não triviais. O caráter topológico do campo é dado por um número inteiro, n , chamado de carga topológica ou em inglês, de *winding number* [1].

Assim, nas soluções que apresentam o caráter topológico, a densidade de energia é bem comportada e concentrada em uma região finita do espaço e as configurações de campo são chamadas de sólitons topológicos. Fisicamente, podemos dizer que um defeito topológico é a região de transição entre as fases distintas de um sistema, ou a região em que o sistema muda suas características.

Por exemplo, em sistemas unidimensionais surgem os seguintes defeitos topológicos: ondas solitárias, kinks e sólitons de sine-Gordon. Estes dos últimos se diferenciam nos possíveis valores do vácuo, sendo no caso do kink ϕ_+ e ϕ_- , por outro lado no caso de sine-Gordon o estado de vácuo é dado por $\phi = 2\pi n$, onde $n \in \mathbb{Z}$ [2]. A estabilidade do kink se deve a que este

conecta dois valores de vácuo diferentes e resulta impossível realizar uma deformação contínua ou *deformação homotópica* do kink, para este conectar um único valor de vácuo sem violar a condição essencial de termos uma energia finita.

No caso de sistemas bidimensionais, a situação mais elementar ocorre quando o estado de vácuo do sistema é caracterizado pelo campo complexo ϕ , não nulo e com módulo $|\phi| = \phi_0$. Esta equação admite uma infinita variedade de soluções na forma $\phi = e^{i\theta} \phi_0$, obtendo assim um contínuo de vácuos degenerados formando um círculo. Neste caso as configurações são caracterizadas pelo número de voltas ao redor do círculo, ou seja, a configuração com $0 < \theta < 2\pi$ será diferente da configuração com $0 < \theta < 4\pi$, e em geral daquela com $0 < \theta < 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Novamente, estamos frente a uma topologia não trivial pois é impossível deformar uma configuração na outra sem superar uma barreira de energia infinita. Portanto, o conjunto de todas as configurações de campo com energia finita é dividido em setores topológicos não equivalentes, onde cada setor é caracterizado por um valor diferente de $n \in \mathbb{Z}$.

Sólitons em duas dimensões, são realizados na física da matéria condensada, por exemplo, na teoria da supercondutividade. Dentro da teoria da supercondutividade, o fenômeno conhecido como efeito Meissner [3], proíbe a entrada de campo magnético de baixa intensidade dentro do material supercondutor. Podemos dizer, neste caso, que o supercondutor blinda o campo magnético externo. Experimentalmente, verifica-se que, quando a intensidade do campo magnético é aumentada, a supercondutividade desaparece. A partir deste mecanismo os supercondutores são divididos em dois tipos: Nos supercondutores do tipo-*I*, a supercondutividade desaparece via uma transição de fase de primeira ordem, que ocorre quando a intensidade do campo magnético externo ultrapassa o valor crítico H_C . Por outro lado, a supercondutividade do tipo-*II* é caracterizada pela formação de vórtices magnéticos quando é aplicado um campo magnético externo com um valor acima de H_{C1} . É verificado que à medida que aumenta o campo magnético externo, aumenta também a densidade de vórtices no supercondutor. Contudo, quando o campo magnético alcança valores maiores que o valor crítico H_{C2} , a supercondutividade é destruída completamente. Essa classificação foi proposta por Ginzburg e Landau (GL) [4] como resultado do seu modelo fenomenológico para descrever a supercondutividade. Vale ressaltar que a teoria de GL está incorporada em uma teoria mais geral denominada de teoria BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) [5], cuja descrição do fenômeno da supercondutividade leva em consideração a natureza microscópica da matéria. Foi Abrikosov [6] que estudando o modelo de GL, descobriu que o funcional de energia suportava sólitons topológicos, sendo estes, vórtices com fluxo magnético quantizado.

Dentro do contexto cosmológico, Nielsen e Olesen [7] usando uma teoria de campos (o modelo de Maxwell-Higgs) observaram que no limite de baixas energias é recuperada a expressão do funcional de energia de GL. Analogamente as transições de fase observadas nos supercondutores de GL, eles propuseram estruturas topológicas associados ao processo de transição de fase no universo primordial, quando a temperatura do mesmo diminuiu até um valor crítico T_c , gerando

objetos exóticos em escala cosmológica, denominados de cordas cósmicas.

Dentro do amplo contexto envolvendo os defeitos topológicos existe uma classe denominada de configurações auto-duais que, em teoria campos, correspondem a configurações possuindo mínima energia. Em teorias de campos, uma forma de procurar por configurações auto-duais é através da implementação do formalismo de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) [8]. Este procedimento permite obter um conjunto de equações diferenciais acopladas de primeira ordem, denominadas de equações BPS ou auto-duais, cujas soluções também resolvem as equações de campo de Euler-Lagrange. Um fato importante é a existência de uma íntima conexão entre as configurações BPS ou auto-duais e as teorias supersimétricas. Esta conexão foi primeiramente abordada em teorias supersimétricas contendo soluções de monopólos. Foi observado que existe uma relação de simetria entre um bóson eletricamente carregado com valor $q_0 = \pm e\hbar$, e o monopolo magnético com carga magnética $g_0 = \frac{4\pi\hbar}{q_0}$. Com base nesta observação, Montonen e Olive [9] propuseram que há duas formulações equivalentes para uma mesma teoria, sendo estas formulações duais uma com a outra. Na primeira, denominada de *Elétrica*, os bósons eletricamente carregados são partículas elementares enquanto os monopólos magnéticos são sólitons. Na segunda formulação, denominada de *Magnética*, as partículas elementares são os monopólos magnéticos enquanto os bósons são sólitons. esta simetria de dualidade é conhecida como dualidade de Montonen-Olive. No ano seguinte, Witten e Olive [10] observaram que no limite BPS a invariância na massa de Dyons (partículas hipotéticas que aparecem em teorias $(3 + 1) - D$ possuindo carga elétrica e magnética simultaneamente) pela dualidade de Montonen-Olive é uma consequência direta da álgebra supersimétrica, abrindo a possibilidade de determinar de forma exata a massa das partículas nos estados BPS. Posteriormente estes conceitos foram estendidos para todas as partículas e também tiveram grande importância no desenvolvimento da Teoria de Cordas.

Este texto foi dividido em três partes. As duas primeiras partes tratam de modelos abelianos suportando configurações auto-duais topológicas no contexto do Modelo Padrão Estendido (MPE), especificamente em teorias com quebra da simetria de Lorentz. Já a terceira parte do trabalho trata de modelos de Higgs Abelianos generalizados.

As teorias com violação da simetria de Lorentz (VL) surgiram no intuito de incorporar a Teoria da Relatividade Geral, encarregada de descrever a força gravitacional e as estruturas do Universo em grande escala à Teoria Quântica de Campos [11]. A invariância de Lorentz é quebrada nas teorias que tentam uma teoria física unificada, como por exemplo na Teoria de Cordas e em Loop Quantum Gravity. A implementação da quebra da simetria de Lorentz é incorporada nos modelos teóricos introduzindo termos contendo campos vetoriais e tensoriais de fundo, os quais independem das coordenadas do espaço-tempo. A Física no contexto das teorias com VL, tem sido uma área de interesse nas últimos anos, tanto no seu desenvolvimento teórico como no desenvolvimento experimental [12]-[15]. O MPE [16]-[18] é o marco teórico geral para o estudo dos efeitos da VL e é construído adicionando termos de VL em todos os

setores do Modelo Padrão. Particularmente, o setor abeliano do MPE é o foco principal na busca por efeitos da VL em sistemas físicos [19]–[25]. Recentemente, com a primeira detecção de ondas gravitacionais [26], os efeitos da VL foram estudados nas relações de dispersão e na birrefringência de ondas gravitacionais [27].

O estudo de defeitos topológicos no contexto de teorias VL tem sido realizado em diversos modelos, como por exemplo: sistemas escalares [28], monopolos abelianos [29], campos tensoriais [30], etc. A pesquisa por soluções auto-duais do tipo-vórtice no contexto do MPE foi recentemente realizado em [31]–[35].

Na primeira parte deste trabalho, após uma revisão das soluções auto-duais nos modelos abelianos de MH e Maxwell-Chern-Simons-Higgs (MCSH), abordamos o modelo de MH provido com termos de VL em duas situações: No primeiro caso, adicionamos o termo de Carroll-Field-Jackiw (CPT-ímpar) ao setor de gauge e um outro termo CPT-par no setor de Higgs. No segundo caso, inserimos termos CPT-par em ambos os setores. Em todos os casos os termos da quebra de Lorentz modificam a parte cinética dos campos. A partir dos modelos anteriormente descritos, foram obtidas configurações auto-duais e soluções numéricas do tipo vórtices topológicos, rendendo uma publicação de artigo científico [36].

Na segunda parte do trabalho, começamos fazendo uma revisão das soluções auto-duais nos modelos calibrados de Maxwell $\sigma - O(3)$ não-linear e $MCS\sigma - O(3)$ não-linear. Após esta revisão, realizamos o estudo das configurações auto-duais num modelo não abeliano com quebra da invariância de Lorentz. Especificamente, abordamos o modelo $\sigma - O(3)$ não-linear acoplado a um campo de gauge. O modelo usual é modificado introduzindo o termo CPT-ímpar de Carroll-Field-Jackiw (CFJ) no setor de gauge e um termo CPT-par no setor sigma, ambos modificando somente os setores cinéticos. O desenvolvimento das configurações auto-duais e as soluções numérica do tipo vórtices renderam ao trabalho a publicação de um artigo científico [37].

Na terceira parte do trabalho, no contexto de teorias de campo invariantes de Lorentz, estudamos a existência de configurações auto-duais nos modelos de Higgs abelianos generalizados: MH, Born-Infeld-Higgs (BIH), CSH e MCSH. Especificamente estudamos a formação de vórtices compactos. A generalização nos modelos estudados é fornecida por uma dinâmica não convencional para os campos de gauge e de Higgs. No setor de gauge a dinâmica não usual é introduzida por uma função escalar positiva $G(|\phi|)$, a qual pode ser vista como um tipo de permeabilidade magnética generalizada. No setor de Higgs a dinâmica não usual é introduzida por meio da função escalar, real e positiva $\omega(|\phi|)$, dependendo no campo de Higgs. Nestes modelos observamos que para valores grandes do parâmetro λ , contido na função generalizadora do setor de Higgs, os vórtices auto-duais obtidos são compactados, apresentando perfis semelhantes as estruturas de defeitos do tipo *compactons*.

Para todos os modelos aqui apresentados implementamos o formalismo de Bogomol'nyi, com o qual procuramos configurações auto-duais de mínima energia. Após termos encontrados

as equações auto-duais para cada modelo, estas serão projetadas no *ansatz* adequados para a obtenção de vórtices do tipo Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO). As equações BPS serão resolvidas numericamente utilizando o software Maple. Especificamente será utilizado o sub-método para resolver problemas com condições de contorno nas fronteiras denominado Midrich. Este método é uma junção do Método de Ponto Médio e o Método de Richardson para acelerar o raio de convergência de uma série. As soluções numéricas das equações são apresentadas graficamente na forma de perfis para vórtices para sua posterior análise. Após cada capítulo serão apresentadas as conclusões e os comentários.

Parte I

Configurações auto-duais no modelo de Maxwell-Higgs com violação da simetria de Lorentz

O objetivo deste capítulo é investigar como os termos de VL afetam a estrutura dos defeitos topológicos, particularmente, discutimos a estrutura de configurações BPS em modelos de MH. No desenvolvimento do capítulo será observado que a introdução de um termo de VL no setor de Higgs provê anisotropia à dinâmica do Hamiltoniano, de modo similar ao que aparece nos modelos de Ginzburg-Landau (GL) anisotrópicos e nos modelos de supercondutores em camadas [38, 39]

Assim, a principal motivação para o estudo de vórtices topológicos no contexto das teorias com VL, vem da semelhança com a estrutura matemática que descreve a física dos novos materiais supercondutores a altas temperaturas. Estas novas estruturas levam a uma forte anisotropia das propriedades magnéticas e dão origem a novos fenômenos, como a formação de vórtices bidimensionais e a existência de um novo tipo de rede de vórtices [39, 40].

Antes de abordarmos de cheio os modelos abelianos de MH suplementados com termos de VL, faremos uma breve revisão dos modelos abelianos de MH (MH) e MCSH (MCSH), os quais, posteriormente serão comparados com os modelos estendidos com termos que violam a invariância de Lorentz.

Após esta revisão será estudado o modelo abeliano de MH suplementado com o termo CPT-ímpar ou de CFJ e, um segundo modelo, sendo suplementado com um termo CPT-par no setor de gauge. Em ambas as situações, introduzimos um termo CPT-par no setor de Higgs. Como já é esperado, no primeiro modelo obteremos soluções eletricamente carregadas devido à presença do termo de CFJ, que se comporta de maneira análoga ao termo de Chern-Simons nos modelos de MCSH [41, 42]. Em relação ao segundo modelo, os setores elétricos e magnéticos se acoplam devido à presença de coeficientes de paridade-ímpar do termo CPT-par no setor de gauge. Nas seções seguintes, analisamos em detalhe ambos cenários de VL para vórtices do tipo Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO). Analisaremos o comportamento assintótico dos campos e as soluções numéricas das equações serão apresentadas em forma de perfis de vórtices.

Capítulo 1

Configurações autoduais nos modelos de Higgs abelianos: Uma revisão

1.1 Configurações auto-duais no modelo de Maxwell-Higgs

Em um trabalho publicado por H.B. Nielsen e P. Olesen no ano de 1973 [7], aparecem pela primeira vez, configurações de vórtices geradas através do formalismo da teoria de campos. Neste trabalho, os autores construíram uma teoria de campos para cordas duais utilizando o campo de gauge abeliano acoplado a um campo escalar complexo de Higgs. A continuação, mostraremos como implementar o formalismo de Bogomol'nyi para obter as equações auto-duais no modelo abeliano de MH. Posteriormente, utilizando um *ansatz* específico, obteremos numericamente perfis para vórtices auto-duais.

O modelo abeliano de MH em (1+2)-dimensões é descrito pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - U(|\phi|) , \quad (1.1)$$

no qual definimos a derivada covariante que acopla o campo de gauge ao campo complexo de Higgs da seguinte forma

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu , \quad (1.2)$$

sendo a carga elétrica elementar e , a constante de acoplamento entre os campos de gauge e de Higgs. Definimos também o tensor do campo eletromagnético usual de Maxwell,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (1.3)$$

Por último, $U(|\phi|)$ é um potencial tipo $\lambda|\phi|^4$ que provê as soluções auto-duais.

A equação de Euler-Lagrange para o campo de gauge,

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0 , \quad (1.4)$$

fornece a seguinte equação de movimento

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = eJ^\mu , \quad (1.5)$$

com a seguinte expressão para a corrente J^μ ,

$$J_\mu = i [\phi (D_\mu \phi)^* - \phi^* D_\mu \phi] = i (\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) - 2eA_\mu |\phi|^2 . \quad (1.6)$$

A respectiva equação de Euler-Lagrange para o campo de Higgs,

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = 0 , \quad (1.7)$$

proporciona a equação de movimento para o campo escalar complexo

$$D^\mu D_\mu \phi + \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0 . \quad (1.8)$$

Levando em consideração que estamos interessados em configurações auto-duais, sendo estas configurações estacionárias dos campos, portanto independentes do tempo, escrevemos a partir da equação de movimento para o campo de gauge (1.5), a lei de Gauss estacionária

$$\nabla^2 A_0 = 2e^2 A_0 |\phi|^2 , \quad (1.9)$$

e a lei de Ampère estacionária

$$\epsilon_{kj} \partial_j B = J_k , \quad (1.10)$$

$$\epsilon_{kj} \partial_j B + ie\phi^* \partial_k \phi - ie\phi \partial_k \phi^* + 2e^2 A_k |\phi|^2 = 0 , \quad (1.11)$$

onde o campo magnético em $(1+2)$ -dimensões é definido por $B = F_{12}$. Observamos na lei de Gauss estacionária (1.9) que a condição $A_0 = 0$, denominada de gauge temporal, é trivialmente satisfeita. Isto implica que as configurações obtidas a partir deste modelo terão carga elétrica total nula.

A equação estacionária para o campo escalar complexo é obtida a partir da Eq. (1.8), na qual já implementamos a condição $A_0 = 0$,

$$D_k D_k \phi - \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0 , \quad (1.12)$$

ou

$$\nabla^2 \phi - i2eA_j \partial_j \phi - e^2 (A_j)^2 \phi - \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0 . \quad (1.13)$$

onde usamos o calibre de Coulomb, $\partial_k A_k = 0$.

1.1.1 Formalismo BPS

O formalismo de Bogomol'nyi ou BPS [8] consiste em escrever a densidade de energia estacionária de uma teoria como uma soma de termos quadráticos (que posteriormente serão identicamente nulos) e termos contendo derivadas totais. No caso particular de modelos de MH, nos quais estamos interessados em configurações do tipo-vórtices auto-duais, desejamos também que a densidade de energia inclua um termo proporcional ao fluxo magnético.

Portanto, seguindo o formalismo BPS escrevemos a densidade de energia estacionária do modelo (na condição de gauge $A_0 = 0$):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}B^2 + |D_j\phi|^2 + U(|\phi|) . \quad (1.14)$$

A energia total estacionária é

$$E = \int d^2x \mathcal{E} . \quad (1.15)$$

O próximo passo consiste em escrever a densidade de energia como uma soma de quadrados mais uma derivada total e um termo proporcional ao campo magnético. Assim, introduzimos aqui a seguinte identidade

$$|D_j\phi|^2 = |D_\pm\phi|^2 \pm eB|\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{jk}\partial_j J_k , \quad (1.16)$$

onde

$$D_\pm\phi = D_1\phi \pm iD_2\phi . \quad (1.17)$$

Com isso podemos reescrever a energia da seguinte maneira

$$E = \int d^2x \left(\frac{1}{2}B^2 + |D_\pm\phi|^2 \pm eB|\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{jk}\partial_j J_k + U \right) . \quad (1.18)$$

Manipulando o primeiro e último termo obtemos

$$\frac{1}{2}B^2 + U = \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 \pm B\sqrt{2U} . \quad (1.19)$$

Substituindo na energia, ela pode ser expressa da seguinte forma

$$E = \int d^2x \left[\frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 + |D_\pm\phi|^2 \pm B \left(\sqrt{2U} + e|\phi|^2 \right) \pm \frac{1}{2}\epsilon_{jk}\partial_j J_k \right] . \quad (1.20)$$

Nosso objetivo é obter configurações auto-duais cuja energia seja proporcional ao campo magnético, com esse intuito escolhemos o potencial $U(|\phi|)$ para ser,

$$U(|\phi|) = \frac{1}{2}e^2 (v^2 - |\phi|^2)^2 . \quad (1.21)$$

Substituindo o potencial em (1.20) obtemos a seguinte expressão para a energia

$$E = \int d^2x \left\{ \pm ev^2 B + |D_\pm\phi|^2 + \frac{1}{2} [B \mp e(v^2 - |\phi|^2)]^2 \pm \frac{1}{2}\epsilon_{jk}\partial_j J_k \right\} . \quad (1.22)$$

Sob condições de contorno apropriadas a integral da divergência total terá contribuição nula para a energia. Por tanto, a energia total possui um limite inferior

$$E \geq \pm ev^2 \int d^2x B = \pm ev^2 \Phi_B , \quad (1.23)$$

proporcional ao fluxo magnético Φ_B . O limite inferior será saturado quando as seguintes equações, denominadas de equações BPS ou auto-duais, sejam satisfeitas pelas configurações de campo,

$$D_{\pm}\phi = 0 , \quad (1.24)$$

$$B = \pm e (v^2 - |\phi|^2) . \quad (1.25)$$

Agora, verificamos que estas equações reproduzem as equações de Euler-Lagrange. Aplicando o operador $D_{\mp}$ à primeira equação BPS (1.24) obtemos

$$D_{\mp}D_{\pm}\phi = 0 , \quad (1.26)$$

$$D_k D_k \phi \pm i [D_1, D_2] \phi = 0 . \quad (1.27)$$

Um cálculo rápido mostra que $[D_1, D_2] \phi = -ieB\phi$, logo,

$$D_k D_k \phi \pm eB\phi = 0 . \quad (1.28)$$

Usando a segunda equação BPS (1.25) que define o campo magnético, obtemos

$$D_k D_k \phi + e^2 (v^2 - |\phi|^2) \phi = 0 , \quad (1.29)$$

que resulta ser exatamente a equação (1.12) quando o potencial de auto-interação é dado pela expressão em (1.21).

Para reobter a lei de Ampère, aplicamos o operador $\epsilon_{kj}\partial_j$ à segunda equação BPS (1.25)

$$\epsilon_{kj}\partial_j B = \mp e \epsilon_{kj}\partial_j |\phi|^2 . \quad (1.30)$$

Aqui ressaltamos que a equação BPS (1.24) permite escrever o campo de calibre A_k e a corrente J_k em termos somente do campo de Higgs,

$$A_k = \frac{i}{2e|\phi|^2} (\phi \partial_k \phi^* - \phi^* \partial_k \phi) \pm \frac{1}{2e|\phi|^2} \epsilon_{kj}\partial_j |\phi|^2 , \quad (1.31)$$

$$J_k = \mp \epsilon_{kj}\partial_j |\phi|^2 . \quad (1.32)$$

Com isso, vemos que a equação (1.30) recupera a lei de Ampère (1.10).

1.1.2 Vórtices auto-duais no modelo MH

Em esta seção procuramos soluções descrevendo vórtices axialmente simétricos, para isto utilizamos o seguinte *ansatz*,

$$\phi = v g(r) e^{in\theta} \quad , \quad A_\theta = -\frac{a(r) - n}{er} \quad , \quad (1.33)$$

similares aos propostos por Abrikosov [6] na obtenção de vórtices em supercondutores de alta temperatura crítica T_c . No *ansatz* (1.33) as funções $a(r)$ e $g(r)$ são regulares na origem e no infinito e satisfazem as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \quad , \quad a(0) = n \quad , \\ g(\infty) &= 1 \quad , \quad a(\infty) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.34)$$

O número inteiro n , chamado de vorticidade, ou em língua inglesa de *winding number*, engloba o caráter topológico do campo devido a que a carga topológica é sempre proporcional a n . O caráter inteiro do número n está ligado a termos um campo de Higgs univocamente definido no plano complexo,

$$\begin{aligned} \phi(r, 0) &= \phi(r, 2\pi n) \quad , \\ 1 &= e^{i2\pi n} \quad , \end{aligned} \quad (1.35)$$

onde a segunda igualdade somente é satisfeita se os valores de n são números inteiros positivos ou negativos.

No *ansatz* (1.33) o campo magnético é expresso da seguinte forma

$$B(r) = -\frac{a'}{er} \quad , \quad (1.36)$$

onde o apóstrofe (') simboliza a derivada em relação à distância radial r .

Considerando o *ansatz* (1.33) podemos escrever as equações BPS do modelo (1.24) e (1.25) projetadas

$$g' = \pm \frac{ag}{r} \quad , \quad (1.37)$$

$$-\frac{a'}{er} = \pm ev^2 (1 - g^2) \quad . \quad (1.38)$$

Vale aqui lembrar que as equações auto-duais ou BPS correspondem a uma configuração de mínimo da energia. Portanto, estas equações diferencias de primeira ordem de Bogomoln'yi também são solução das equações de segunda ordem de Euler-Lagrange. De modo ilustrativo, mostraremos a partir de uma derivação nas equações BPS, como chegar as equações de segunda ordem de Euler-Lagrange, sendo estas últimas dadas a seguir, na sua forma projetada:

Lei de Ampère

$$B' + 2ev^2 \frac{ag^2}{r} = 0 , \quad (1.39)$$

equação para o campo de Higgs

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2 g}{r^2} - \frac{1}{2v^2} \frac{d}{dg} U(g) = 0 . \quad (1.40)$$

Para realizar a verificação começamos derivando a equação BPS para o campo de Higgs (1.37)

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2 g}{r^2} = \pm \frac{a' g}{r} . \quad (1.41)$$

Por outro lado, escrevemos o potencial BPS do modelo (1.21) no *ansatz*

$$U(g) = \frac{1}{2} e^2 v^4 (1 - g^2)^2 , \quad (1.42)$$

e com este escrevemos a equação de movimento para o campo de Higgs já implementando a derivada no potencial

$$g'' + \frac{g'}{r} - \frac{a^2 g}{r^2} = -e^2 v^2 g + e^2 v^2 g^3 . \quad (1.43)$$

Observamos a continuação que as equações (1.41) e (1.43) serão iguais quando a seguinte equação for satisfeita

$$\pm \frac{a' g}{r} = -e^2 v^2 g + e^2 v^2 g^3 . \quad (1.44)$$

Dividindo (1.44) pelo fator $(\mp eg)$ a equação pode ser escrita na forma

$$- \frac{a'}{er} = \pm ev^2 (1 - g^2) , \quad (1.45)$$

sendo esta última expressão a equação BPS para o campo magnético (1.38).

Agora começamos derivando a equação BPS para o campo magnético (1.38)

$$B' = \mp 2ev^2 gg' , \quad (1.46)$$

e substituindo g' pela equação BPS (1.37) chegamos à expressão para a lei de Ampère advinda da equação de Euler-Lagrange

$$B' + 2ev^2 \frac{ag^2}{r} = 0 , \quad (1.47)$$

ficando assim demonstrado que as equações BPS de primeira ordem estão contidas dentro das equações de segunda ordem de Euler-Lagrange.

Devido a que agora conhecemos os valores das funções escalares $a(r)$ e $g(r)$ nas fronteiras, podemos realizar a integração do fluxo magnético

$$\Phi_B = \int d\mathbf{x} B = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left(-\frac{a'}{er} \right) r dr d\theta = -\frac{2\pi}{e} \int_0^\infty da(r) = \frac{2\pi}{e} n , \quad (1.48)$$

verificando assim que ele é quantizado e proporcional a n . Do mesmo modo podemos escrever o valor para a energia BPS total do modelo,

$$E_{BPS} = 2\pi v^2 |n| . \quad (1.49)$$

1.1.3 Comportamento nas fronteiras

A modo de verificação das condições de contorno propostas em (1.34) e para observar em detalhe o comportamento assintótico dos campos, estudamos o comportamento dos campos na origem ($r = 0$) e no infinito ($r \rightarrow \infty$), a partir das equações BPS expressas no *ansatz*.

Para o estudo do comportamento assintótico na origem ($r \rightarrow 0$) usaremos o método das séries de potências. A partir das condições de contorno na origem (1.34), utilizamos a seguinte expansão para as funções escalares $g(r)$ e $a(r)$:

$$g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j r^j \quad , \quad a(r) = n - \sum_{j=1}^{\infty} A_j r^j \quad , \quad (1.50)$$

cujos primeiros termos são mostrados a seguir,

$$g(r) = G_n r^{|n|} - \frac{e^2 v^2 G_n}{4} r^{|n|+2} + \dots \quad , \quad (1.51)$$

$$a(r) = n - \frac{e^2 v^2}{2} r^2 + \frac{e^2 v^2 (G_n)^2}{2(|n|+1)} r^{2|n|+2} + \dots$$

A continuação estudamos o comportamento no infinito ($r \rightarrow \infty$), para isto, consideramos as condições de contorno (1.34) no infinito e expressamos os campos da seguinte maneira,

$$a \sim \delta a_1 \quad , \quad g \sim 1 - \delta g_1 \quad , \quad (1.52)$$

onde δa e δg se anulam no limite $r \rightarrow \infty$. A substituição nas equações BPS, (1.37) e (1.38) e a consideração de somente os termos lineares em δa e δg permite obter o seguinte sistema de equações diferenciais

$$(\delta a_1)'' - \frac{1}{r} (\delta a_1)' - 2e^2 v^2 (\delta a_1) = 0 \quad , \quad (1.53)$$

$$(\delta g_1)'' + \frac{1}{r} (\delta g_1)' - 2e^2 v^2 (\delta g_1) = 0 \quad . \quad (1.54)$$

A solução para este sistema de equações é dada a seguir:

$$\begin{aligned} \delta g_1(r) &= C_{(\delta g_1)} K_0 \left(ev\sqrt{2}r \right) \sim r^{-1/2} \exp \left(-rev\sqrt{2} \right) \quad , \\ \delta a_1(r) &= C_{(\delta a_1)} r K_1 \left(ev\sqrt{2}r \right) \sim r^{1/2} \exp \left(-rev\sqrt{2} \right) \quad , \end{aligned} \quad (1.55)$$

onde K_0 e K_1 são as funções modificadas de Bessel de segunda classe de ordem zero e um, respectivamente. O comportamento acima é exatamente o comportamento típico para vórtices de Abrikosov.

A quantidade $ev\sqrt{2}$ no argumento das funções de Bessel ou das exponenciais nas equações (1.55), representa a escala de massa dos bósons auto-duais do modelo de MH no limite de Bogomol'nyi, sendo esta igual a

$$m_G = m_H = \sqrt{2}ev \quad . \quad (1.56)$$

1.1.4 Soluções numéricas para vórtices no modelo de MH

Para realizar a análise numérica transformamos as equações BPS em equações adimensionais via a mudança de variável $\rho = evr$ e as seguintes redefinições

$$g(r) \rightarrow g(\rho) \quad , \quad a(r) \rightarrow a(\rho) \quad , \quad g(r) \rightarrow g(\rho) \quad , \quad (1.57)$$

$$B(r) \rightarrow ev^2 B(\rho) \quad , \quad \mathcal{E}_{BPS}(r) \rightarrow v^2 \mathcal{E}_{BPS}(\rho) \quad . \quad (1.58)$$

As equações BPS (1.37) e (1.38) na versão adimensional resultam

$$g' = \pm \frac{ag}{\rho} \quad , \quad (1.59)$$

$$\frac{a'}{\rho} = \mp (1 - g^2) \quad .$$

e a densidade de energia BPS adimensional fica representada por

$$\mathcal{E}_{BPS}(\rho) = B^2 + 2 \left(\frac{ag}{\rho} \right)^2 \quad . \quad (1.60)$$

As figuras 1.1–1.4 mostram os perfis das soluções para diferentes valores de n , obtidas a partir das equações BPS adimensionais (1.59) e a equação para a densidade de energia BPS adimensional (1.60).

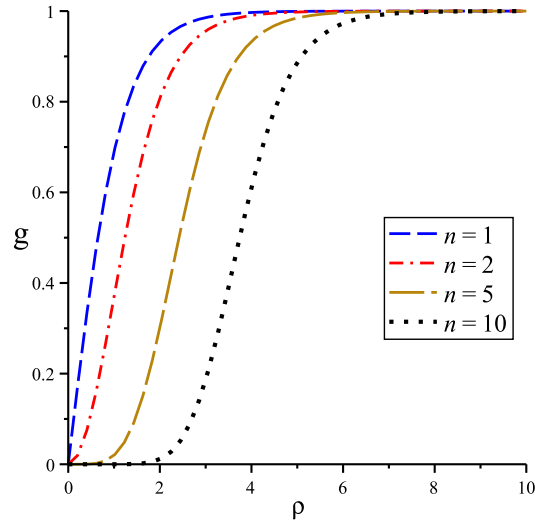


Figura 1.1: Campo escalar $g(\rho)$.

A Figura 1.1 apresenta os perfis para o campo escalar, observamos que o campo tende para o valor de vácuo à medida que nos afastamos do centro do vórtice. Por outro lado, notamos que o campo se anula na origem, como era de se esperar. Observamos também que à medida que n aumenta, os perfis para g se afastam gradativamente da origem, convergindo para o valor do vácuo de forma menos pronunciada.

A figura 1.2 mostra os perfis para o campo de gauge. Como é de se esperar devido ao valor do campo de gauge na origem notamos que seu valor neste ponto vê-se incrementado à medida que n aumenta. Ao contrário de que acontece com o campo escalar, o campo de gauge é localizado e este tende a zero à medida que nos afastamos da origem.

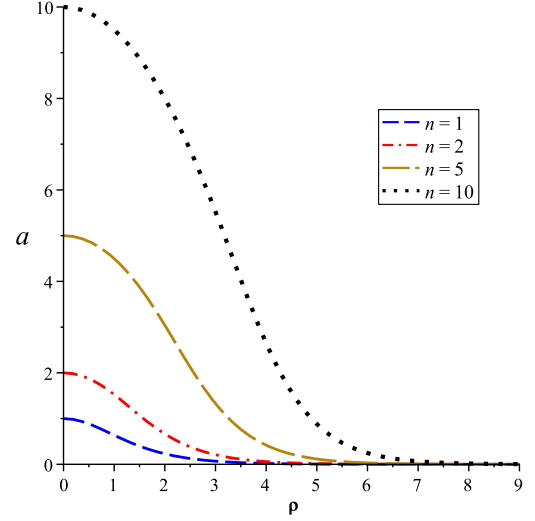


Figura 1.2: Potencial vetor $a(\rho)$.

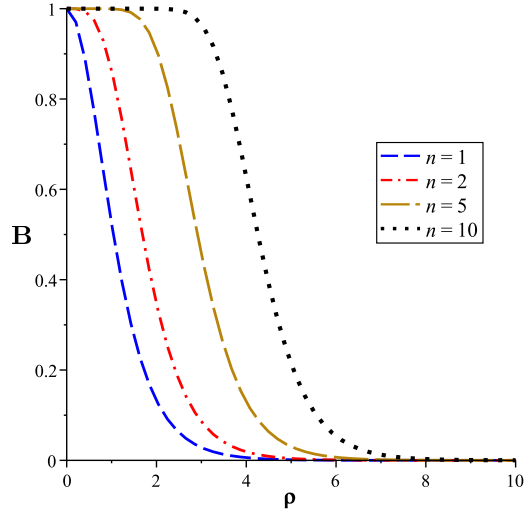


Figura 1.3: Campo magnético $B(\rho)$.

A figura 1.4 apresenta os perfis para a densidade de energia auto-dual do modelo. Observamos que somente para o caso de $n = 1$ teremos uma densidade de energia centrada na origem com a forma de "lump". Para soluções com $n > 1$, o valor da energia na origem é igual a 1, independente do valor do n . Notamos que para valores de $n > 1$ a densidade de energia tem uma pequena depressão na origem, posteriormente apresenta um máximo e após este máximo decai até se anular por completo.

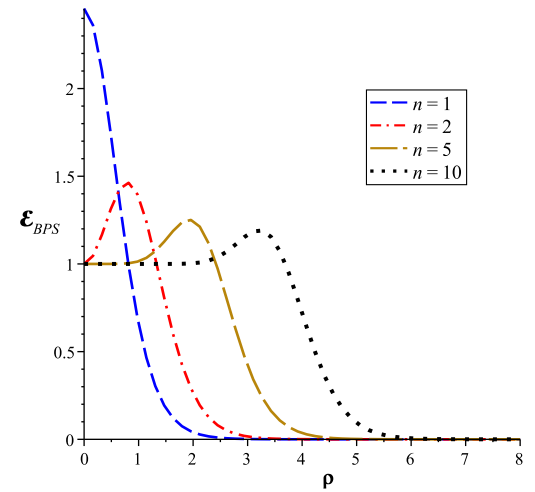


Figura 1.4: Densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$.

1.2 Configurações auto-duais no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs

Continuando a nossa revisão de configurações auto-duais em modelos de Higgs abelianos, abordaremos agora o modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs. Igualmente ao procedimento realizado na seção anterior, primeiramente implementaremos o formalismo BPS para a obtenção das equações auto-duais do modelo e posteriormente analisaremos os perfis para vórtices auto-duais implementando o *ansatz* axialmente simétrico.

O modelo de MCSH em (1+2)-dimensões é descrito pela seguinte densidade lagrangiana, lembrando que as teorias do tipo Chern-Simons são definidas somente para dimensões de espaço-tempo ímpares

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\kappa\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha F_{\beta\gamma} + |D_\mu\phi|^2 - U(|\phi|) . \quad (1.61)$$

As equações de movimento para os campo de gauge e de Higgs são dados respectivamente por

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + \frac{1}{2}\kappa\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\nu\alpha} = eJ^\mu , \quad (1.62)$$

$$D_\mu D^\mu\phi + \frac{\partial U}{\partial\phi^*} = 0 , \quad (1.63)$$

onde lembramos que a corrente J^μ (1.6) é dada pela expressão

$$J^\mu = i[\phi(D^\mu\phi)^* - \phi^*(D^\mu\phi)] = i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi) - 2eA^\mu|\phi|^2 .$$

Escrevemos a lei de Gauss no regime estacionário

$$\partial_k\partial_k A_0 - \kappa B = 2e^2 A_0 |\phi|^2 , \quad (1.64)$$

na qual definimos $B = F_{12}$. Notamos a partir da lei de Gauss que a condição de gauge temporal $A_0 = 0$ não é mais satisfeita devido ao aparecimento do parâmetro de Chern-Simons κ , que acopla os setores elétrico e magnético da teoria. Portanto, podemos inferir que as configurações auto-duais emergentes do modelo de MCSH serão eletricamente carregadas.

A lei de Ampère estacionária fica denotada por

$$\epsilon_{kj}\partial_j B - \kappa\epsilon_{kj}\partial_j A_0 = ei(\phi\partial_k\phi^* - \phi^*\partial_k\phi) - 2e^2 A_k |\phi|^2 , \quad (1.65)$$

e a equação para o campo de Higgs independente do tempo é dada pela seguinte equação

$$\partial_j\partial_j\phi - i2eA_j\partial_j\phi + e^2(A_0)^2 - e^2(A_j)^2\phi = \frac{\partial U}{\partial\phi^*} . \quad (1.66)$$

1.2.1 Formalismo BPS

Passamos agora a implementar o formalismo que permite obter as equações auto-duais ou BPS do modelo. Para este fim escrevemos a densidade de energia no regime estacionário,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\partial_k A_0)^2 + \frac{1}{2} B^2 + e^2 (A_0)^2 |\phi|^2 + |D_k \phi|^2 + U(|\phi|) , \quad (1.67)$$

e introduzindo a identidade

$$|D_k \phi|^2 = |D_\pm \phi|^2 \pm e B |\phi|^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{jk} \partial_j J_k ,$$

podemos escrever a energia da seguinte forma

$$E = \int d^2 x \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 \pm B \sqrt{2U} \pm B e |\phi|^2 + |D_\pm \phi|^2 \right. \\ \left. \pm \frac{1}{2} \epsilon_{jk} \partial_j J_k + \frac{1}{2} (\partial_k A_0)^2 + e^2 (A_0)^2 |\phi|^2 \right\} . \quad (1.68)$$

Agora utilizamos a lei de Gauss (1.64) podemos escrever os últimos dois termos em (1.68) na forma

$$\frac{1}{2} (\partial_k A_0)^2 + e^2 (A_0)^2 |\phi|^2 = \frac{1}{2} \partial_k (A_0 \partial_k A_0) - \frac{1}{2} \kappa B A_0 , \quad (1.69)$$

e substituindo esta última relação em (1.68) obtemos

$$E = \int d^2 x \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 \pm B \left(\sqrt{2U} + e |\phi|^2 \mp \frac{1}{2} \kappa A_0 \right) \right. \\ \left. + |D_\pm \phi|^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{jk} \partial_j J_k + \frac{1}{2} \partial_k (A_0 \partial_k A_0) \right\} . \quad (1.70)$$

Com o intuito de obtermos configurações auto-duais com energia proporcional ao fluxo magnético, impomos

$$\sqrt{2U} + e |\phi|^2 \mp \frac{1}{2} \kappa A_0 = e v^2 , \quad (1.71)$$

resultando na seguinte expressão para o potencial

$$U(|\phi|, A_0) = \frac{1}{2} \left[e (v^2 - |\phi|^2) \pm \frac{1}{2} \kappa A_0 \right]^2 . \quad (1.72)$$

Notamos que a presença do potencial escalar A_0 na equação (1.72) quebra a simetria de Lorentz e a simetria de calibre do modelo (1.61), sendo assim, um potencial inadequado para esta teoria.

Esta situação inconveniente foi contornada na referência [41], na qual foi introduzido o campo escalar neutro (Ψ), satisfazendo a mesma dinâmica que o potencial escalar.

Escrevemos a continuação a densidade lagrangiana do modelo de MCSH modificado com o campo neutro

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \kappa \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha F_{\beta\gamma} + |D_\mu \phi|^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \Psi)^2 - e^2 \Psi^2 |\phi|^2 - U(|\phi|, \Psi) , \quad (1.73)$$

com a qual podemos escrever a energia estacionária

$$E = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 \pm B \left(\sqrt{2U} + e |\phi|^2 \right) + |D_{\pm} \phi|^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{jk} \partial_j J_k \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\partial_k A_0)^2 + e^2 (A_0)^2 |\phi|^2 + \frac{1}{2} (\partial_k \Psi)^2 + e^2 \Psi^2 |\phi|^2 \right\} . \quad (1.74)$$

Observamos que a partir da equação (1.74) terminamos de escrever a energia na forma de Bogomol'nyi, ou seja,

$$E = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 \pm B \left(\sqrt{2U} + e |\phi|^2 \right) + |D_{\pm} \phi|^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{jk} \partial_j J_k \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [(\partial_k A_0) \pm (\partial_k \Psi)]^2 + e^2 |\phi|^2 (A_0 \pm \Psi)^2 \mp (\partial_k A_0) (\partial_k \Psi) \mp 2e^2 |\phi|^2 A_0 \Psi \right\} . \quad (1.75)$$

Utilizando agora a lei de gauss estacionária (1.64) multiplicada de ambos os lados por $\mp \Psi$ obtemos

$$\pm \kappa B \Psi = \pm \Psi \partial_k \partial_k A_0 \mp 2e^2 A_0 |\phi|^2 \Psi , \quad (1.76)$$

e posteriormente podemos escrever-la da seguinte maneira para obtermos os últimos dois termos na equação

$$\mp (\partial_k A_0) (\partial_k \Psi) \mp 2e^2 |\phi|^2 A_0 \Psi = \pm \kappa B \Psi \mp \partial_k (\Psi \partial_k A_0) . \quad (1.77)$$

Introduzindo (1.77) em (1.75) reescrevemos a energia da seguinte forma:

$$E = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 + |D_{\pm} \phi|^2 + \frac{1}{2} [(\partial_k A_0) \pm (\partial_k \Psi)]^2 + e^2 |\phi|^2 (A_0 \pm \Psi)^2 \right. \\ \left. \pm B \left(\sqrt{2U} + e |\phi|^2 + \kappa \Psi \right) \mp \partial_j \left(\Psi \partial_j A_0 - \frac{1}{2} \epsilon_{jk} J_k \right) \right\} . \quad (1.78)$$

Com o intuito de obtermos configurações auto-duais com energia proporcional ao fluxo magnético identificamos o potencial BPS

$$U(|\phi|, \Psi) = \frac{1}{2} (ev^2 - e |\phi|^2 - \kappa \Psi)^2 . \quad (1.79)$$

Substituindo a expressão para o potencial (1.79) na energia (1.78), escrevemos

$$E = \int d^2x \left\{ \pm ev^2 B + \frac{1}{2} [B \mp (ev^2 - e |\phi|^2 - \kappa \Psi)]^2 + |D_{\pm} \phi|^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [(\partial_k A_0) \pm (\partial_k \Psi)]^2 + e^2 |\phi|^2 (A_0 \pm \Psi)^2 \mp \partial_j \left(\Psi \partial_j A_0 - \frac{1}{2} \epsilon_{jk} J_k \right) \right\} . \quad (1.80)$$

Observamos aqui que ao realizarmos a integração na equação (1.80) sob condições de contorno apropriadas, o termo contendo a divergência não contribui para a energia total. Desta maneira a energia (1.80) tem um limite inferior dado por

$$E \geq \pm ev^2 \int d^2x B . \quad (1.81)$$

Este limite será saturado quando os campos satisfaçam as seguintes equações auto-duais ou BPS

$$D_{\pm}\phi = 0 , \quad (1.82)$$

$$B \mp (ev^2 - e|\phi|^2 - \kappa\Psi) = 0 , \quad (1.83)$$

$$(\partial_k A_0) \pm (\partial_k \Psi) = 0 , \quad (1.84)$$

$$A_0 \pm \Psi = 0 . \quad (1.85)$$

Notamos que a relação $A_0 = \mp\Psi$, resolve identicamente as duas últimas equações (1.84) e (1.85). Portanto as equações BPS que descrevem as configurações auto-duais do modelo de MCSH são:

$$D_{\pm}\phi = 0 , \quad (1.86)$$

$$B = \pm (ev^2 - e|\phi|^2) + \kappa A_0 , \quad (1.87)$$

juntamente com a lei de Gauss estacionária

$$\partial_k \partial_k A_0 - \kappa B = 2e^2 A_0 |\phi|^2 . \quad (1.88)$$

Vejamos agora de que maneira as equações BPS (1.86) e (1.87) reproduzem as equações de movimento (1.63) e (1.65).

Começamos esta verificação aplicando o operador $D_{\mp}$ na equação (1.86)

$$D_{\mp} D_{\pm} \phi = 0 , \quad (1.89)$$

$$D_k D_k \phi \pm i [D_1, D_2] \phi = 0 . \quad (1.90)$$

e utilizando a relação $[D_1, D_2] \phi = -ieB\phi$, podemos escrever

$$D_k D_k \phi \pm eB\phi = 0 . \quad (1.91)$$

Com o auxílio da segunda equação BPS (1.87) substituímos a expressão para o campo magnético em (1.91)

$$D_k D_k \phi + e\phi [e(v^2 - |\phi|^2) \pm \kappa A_0] = 0 . \quad (1.92)$$

No segundo termo desta última equação identificamos a expressão para o potencial (1.79) e juntamente com a condição $A_0 = \mp \Psi$, obtemos a equação de movimento para o campo de Higgs

$$D_k D_k \phi - \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0 .$$

Agora, para reobtermos a lei de Ampère, aplicamos o operador $\epsilon_{kj} \partial_j$ à segunda equação BPS (1.87)

$$\epsilon_{kj} \partial_j B - \kappa \epsilon_{kj} \partial_j A_0 = \mp e \epsilon_{kj} \partial_j |\phi|^2 , \quad (1.93)$$

introduzindo a equação que relaciona a corrente com o campo escalar (1.32)

$$J_k = \mp e \epsilon_{kj} \partial_j |\phi|^2 ,$$

obtemos a lei de Ampère do modelo

$$\epsilon_{kj} \partial_j B - \kappa \epsilon_{kj} \partial_j A_0 = e J_k .$$

1.2.2 Vórtices auto-duais no modelo MCSH

Com o intuito de encontrarmos soluções do tipo vórtices auto-duais, projetamos as equações do modelo no *ansatz* axialmente simétrico

$$\phi = v g(r) e^{in\theta} , \quad A_\theta = -\frac{a(r) - n}{er} , \quad A_0 = A_0(r) , \quad (1.94)$$

os quais satisfazem as seguintes condições de contorno

$$a(0) = n , \quad g(0) = 0 , \quad A'_0(0) = 0 , \quad (1.95)$$

$$a(\infty) = 0 , \quad g(\infty) = 1 , \quad A_0(\infty) = 0 . \quad (1.96)$$

As condições de contorno para o potencial escalar (A_0) apresentadas serão mostradas explicitamente por meio do estudo do comportamento assintótico dos campos na origem e no infinito (vide Sec. 1.2.3).

A continuação reescrevemos as equações BPS (1.86) e (1.87),

$$g' = \pm \frac{ag}{r} , \quad (1.97)$$

$$\frac{a'}{r} = \mp e^2 v^2 (1 - g^2) - e \kappa A_0 , \quad (1.98)$$

e a lei de Gauss (1.64)

$$A''_0 + \frac{A'_0}{r} + \kappa \frac{a'}{er} = 2e^2 v^2 g^2 A_0 . \quad (1.99)$$

A densidade de energia BPS também pode ser escrita de uma forma positivo-definida, como uma soma de termos elevados ao quadrados da seguinte maneira,

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + 2v^2 \left(\frac{ag}{r} \right)^2 + 2e^2 v^2 (gA_0)^2 + (A'_0)^2 , \quad (1.100)$$

Conhecendo o valor das funções que descrevem os campos na origem e no infinito, podemos integrar a expressão para o campo magnético em (1.81), com o que obtemos novamente um valor para a energia BPS total proporcional ao módulo do *winding number* n .

$$E_{BPS} = 2\pi v^2 |n| . \quad (1.101)$$

1.2.3 Comportamento nas fronteiras

Para observar em detalhe o comportamento assintótico dos campos, estudamos o comportamento dos campos na origem ($r = 0$) e no infinito ($r \rightarrow \infty$), a partir das equações BPS expressas na *ansatz*.

Para o estudo do comportamento assintótico na origem ($r \rightarrow 0$) usaremos o método das séries de potências. A partir das condições de contorno na origem (1.95), utilizamos a seguinte expansão para as funções escalares $g(r)$, $a(r)$ e $A(r)$:

$$g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j r^j , \quad a(r) = n - \sum_{j=1}^{\infty} A_j r^j , \quad A_0(r) = \omega_0 + \sum_{j=1}^{\infty} W_j r^j , \quad (1.102)$$

sendo ω_0 o valor do potencial escalar na origem, $\omega_0 = A_0(0)$. Estas expansões em série de potências serão implementadas nas equações BPS que descrevem as configurações auto-duais e na lei de Gauss estacionárias (1.97-1.99).

Analisando os coeficientes da expansão ordem a ordem obtemos o seguinte comportamento para as funções escalares na origem:

$$\begin{aligned} g(r) &= G_n r^n + \dots , \\ a(r) &= n - \frac{1}{2} e (\pm e v^2 + \kappa \omega_0) r^2 + \dots , \\ A_0(r) &= \omega_0 + \frac{1}{4} \kappa (\pm e v^2 + \kappa \omega_0) r^2 + \dots , \end{aligned} \quad (1.103)$$

que são compatíveis com as condições de contorno impostas em (1.95). A partir da expansão para o potencial escalar podemos observar que o campo elétrico na origem é nulo, $A'_0(0) = 0$.

Para obter o comportamento das funções em $r \rightarrow \infty$, definimos o comportamento dos campos por

$$a \sim \delta a , \quad g \sim 1 - \delta g , \quad A_0 \sim \delta \omega , \quad (1.104)$$

onde δg , δa e $\delta \omega$ são funções infinitesimais. A partir deste comportamento linearizamos as equações BPS e a lei de Gauss, resultando em um sistema de três equações diferenciais acopladas, representado a continuação

$$\begin{aligned} (\delta g)' \pm \frac{\delta a}{r} &= 0 , \\ \frac{(\delta a)'}{r} \pm 2e^2 v^2 (\delta g) + e\kappa (\delta \omega) &= 0 , \\ (\delta \omega)'' + \frac{(\delta \omega)'}{r} + \frac{\kappa (\delta a)'}{e r} - 2e^2 v^2 (\delta \omega) &= 0 . \end{aligned} \quad (1.105)$$

Tendo em vista que estamos interessados em vórtices, cujo comportamento seja igual ao dos vórtices de Abrikosov [6], queremos que as funções tenham o seguinte decaimento exponencial,

$$\delta g \sim r^{-1/2} e^{-\beta r} , \quad \delta a \sim r^{1/2} e^{-\beta r} , \quad \delta \omega \sim r^{-1/2} e^{-\beta r} . \quad (1.106)$$

O parâmetro de massa β , é obtido resolvendo o determinante da matriz formada pelos coeficientes das variáveis no sistema de equações diferenciais, cujo valor é

$$\beta = \frac{\sqrt{\kappa^2 + 8(ev)^2} - \kappa}{2} . \quad (1.107)$$

Observamos que este comportamento é compatíveis com as condições de contorno impostas em (1.96). No limite quando $\kappa \rightarrow \infty$, obtemos

$$\beta \simeq \frac{2(ev)^2}{\kappa} ,$$

que representa o comportamento das soluções do modelo de Chern-Simons-Higgs [43].

1.2.4 Soluções numéricas para vórtices no modelo de MCSH

As equações BPS (1.97), (1.98) e a lei de Gauss (1.99), podem ser escritas em uma estrutura adimensional via a introdução da variável adimensional, $\rho = evr$, tal que

$$g(r) \rightarrow g(\rho) , \quad a(r) \rightarrow a(\rho) , \quad A_0(r) \rightarrow v A_0(\rho) , \quad (1.108)$$

$$\kappa \rightarrow ev\kappa , \quad B(r) \rightarrow ev^2 \bar{B}(\rho) , \quad \mathcal{E}_{BPS}(r) \rightarrow v^2 \mathcal{E}_{BPS}(\rho) . \quad (1.109)$$

Dessa forma, as equações que representam as configurações auto-duais adimensionais são:

$$g' = \pm \frac{ag}{\rho} , \quad (1.110)$$

$$\frac{a'}{\rho} = \mp (1 - g^2) - \kappa A_0 , \quad (1.111)$$

$$A_0'' + \frac{A_0'}{\rho} + \kappa \frac{a'}{\rho} = 2g^2 A_0. \quad (1.112)$$

A densidade de energia BPS do modelo (1.100) pode também ser reescrita na forma adimensional da seguinte maneira,

$$\mathcal{E}_{BPS}(\rho) = B^2 + 2 \left(\frac{ag}{\rho} \right)^2 + 2 (A_0 g)^2 + (A_0')^2. \quad (1.113)$$

As figuras 1.5–1.10, apresentadas a continuação, mostram os perfis das soluções para diferentes valores de n , obtidas a partir das equações adimensionais (1.110)–(1.113).

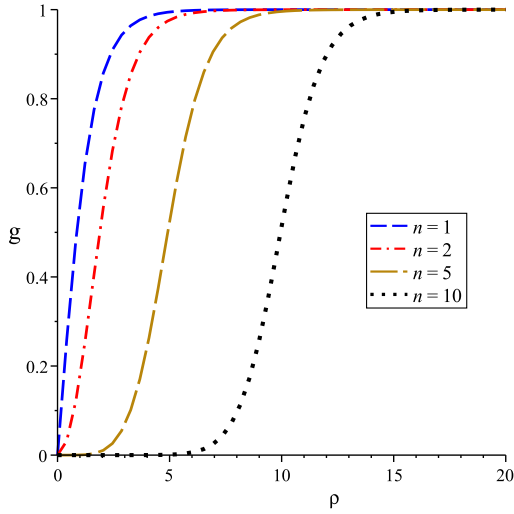


Figura 1.5: Campo escalar $g(\rho)$.

A figura 1.5 apresenta os perfis para o campo escalar. Observamos que o campo escalar tem um comportamento similar ao do modelo de MH, tendendo para o valor do vácuo à medida que nos afastamos da origem, e convergindo assintoticamente para zero na origem. Uma diferença notória com o modelo anterior é que neste modelo os vórtices tem largura maior, abarcando uma área significativamente maior.

A figura 1.6 mostra os perfis para o potencial vetor. Observamos que estes tendem assintoticamente a zero à medida que nos afastamos da origem e para o valor n na origem. Uma diferença importante em relação ao modelo de MH é que o campo de gauge permanece no seu valor máximo por uma distância radial maior. Este comportamento é bem apreciável para valores de n grandes. Por outro lado o decaimento dos perfis é muito mais acentuado para estes valores.

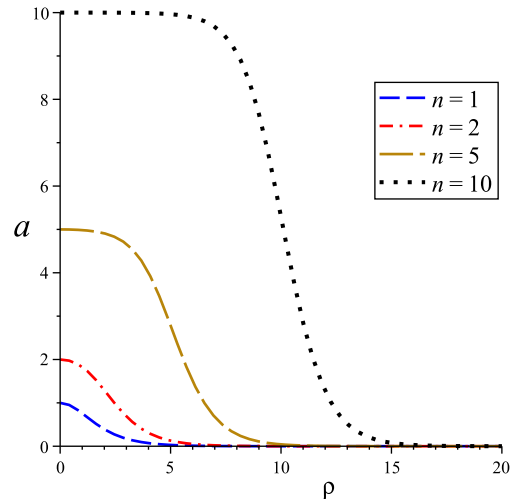


Figura 1.6: Potencial vetor $a(\rho)$.

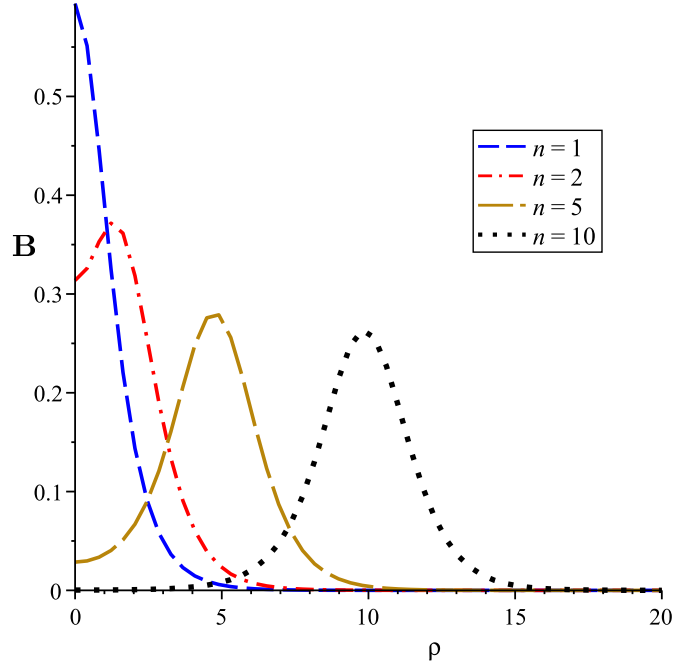


Figura 1.7: Campo magnético $B(\rho)$.

A figura 1.8 mostra os perfis para o potencial escalar. Lembrando que o modelo de MCSH fornece estruturas auto-duais eletricamente carregadas, teremos um potencial escalar finito na origem, sendo o seu valor maior à medida que n aumenta. A partir do *rescaling* adotado na análise numérica obtemos a relação $B = 1 + A_0$, entre o campo magnético e o potencial escalar.

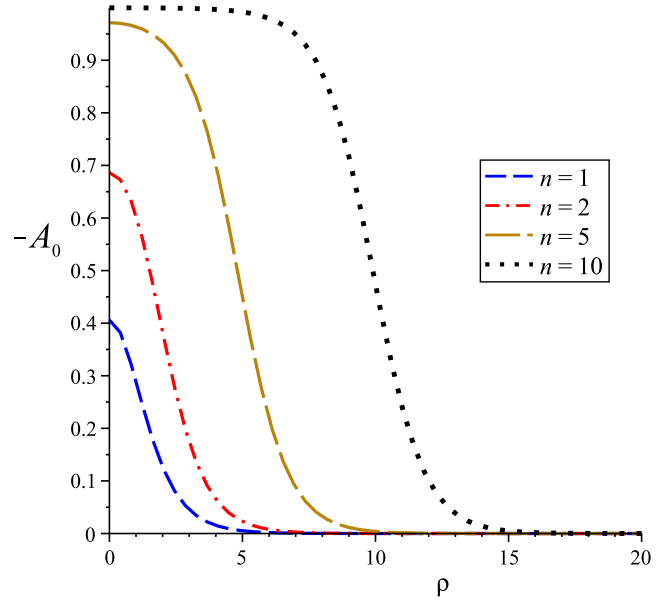


Figura 1.8: Potencial escalar $A_0(\rho)$.

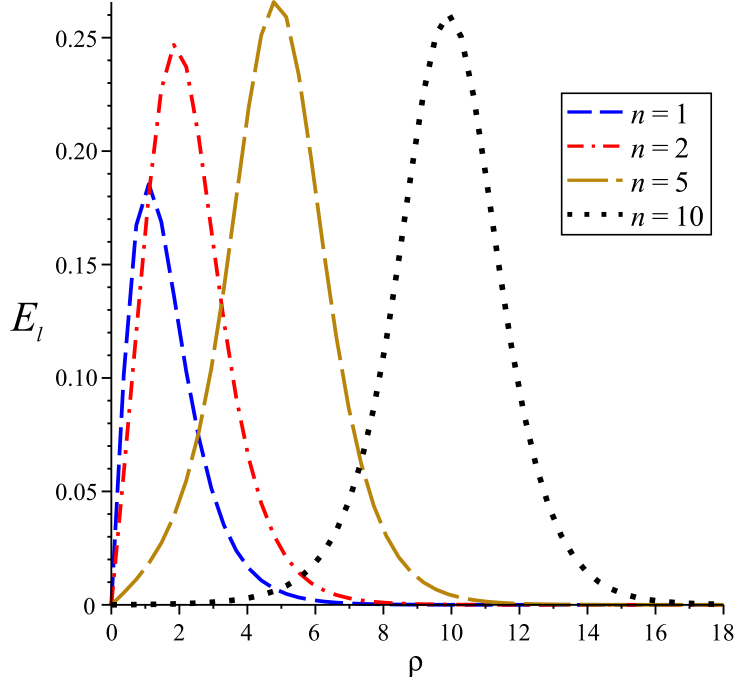


Figura 1.9: Campo elétrico $E_t(\rho) = -A'_0(\rho)$.

A figura 1.10 mostra os perfis para a densidade de energia BPS. A densidade de energia se apresenta como um máximo pronunciado e centrado na origem para $n = 1$, enquanto que para valores de $n > 1$ são formados anéis, bem localizados, cujo raio aumenta à medida que n aumenta. O valor na origem para a energia será nulo para valores de $n > 2$.

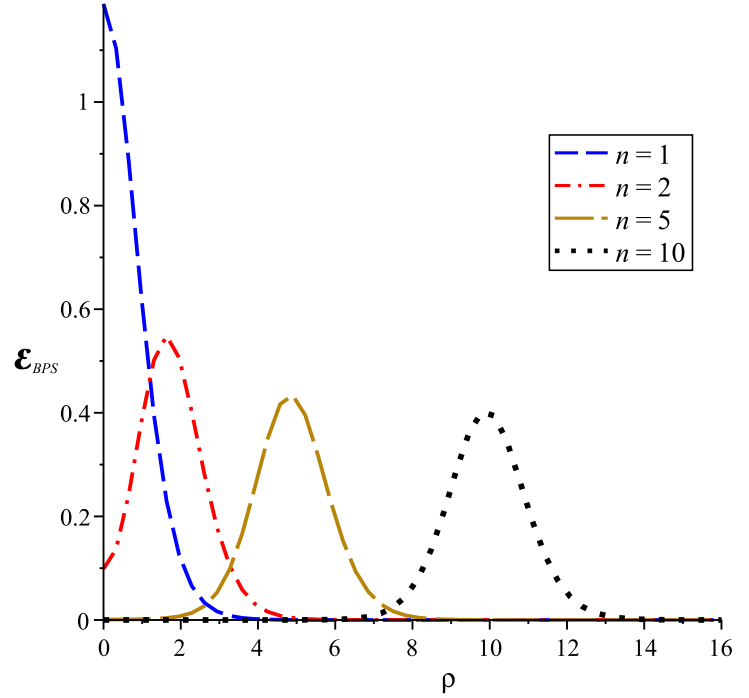


Figura 1.10: Densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$.

Capítulo 2

Configurações auto-duais em modelos de Maxwell-Higgs com violação da simetria de Lorentz

2.1 Configurações auto-duais num modelo de Maxwell-Higgs CPT-ímpar

Consideramos um setor abeliano do MPE, que corresponde ao modelo de MH suplementado com termos de violação de Lorentz [17]. Numa primeira análise adicionamos ao setor fotônico apenas o termo CPT-ímpar ou de CFJ [19], enquanto o setor de Higgs é modificado por um termo CPT-par,

$$\mathcal{L}_{(3+1)} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(k_{AF})_{\alpha}A_{\beta}F_{\rho\sigma} + |D_{\mu}\phi|^2 + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu}(D_{\mu}\phi)^*(D_{\nu}\phi) - U(|\phi|) \quad , \quad (2.1)$$

onde A_{μ} é o campo abeliano de gauge, e $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ é o tensor usual do campo eletromagnético de Maxwell. O vetor $(k_{AF})_{\alpha}$ representa o vetor de fundo de CFJ com dimensão de massa igual a $(+1)$. O campo de gauge é acoplado minimamente ao campo escalar complexo de Higgs (ϕ) através da derivada covariante $D_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi - ieA_{\mu}\phi$, onde e é a carga elétrica elementar. A violação de Lorentz no setor de Higgs é regida por um termo CPT-par, contendo este o tensor adimensional, real e simétrico $(k_{\phi\phi})^{\mu\nu}$.

Similarmente ao que acontece no modelo de MCSH [41, 42], como foi explicitamente mostrado na seção (1.2.2), devemos modificar o modelo (2.1) introduzindo o campo escalar neutro Ψ de modo tal que o novo modelo contendo soluções auto-duais é descrito pela seguinte densidade

de lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(3+1)} = & -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(k_{AF})_{\alpha}A_{\beta}F_{\rho\sigma} + |D_{\mu}\phi|^2 + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu}(D_{\mu}\phi)^*(D_{\nu}\phi) \\ & + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\Psi\partial^{\mu}\Psi - e^2[1 + (k_{\phi\phi})_{00}]\Psi^2|\phi|^2 - U(|\phi|, \Psi) . \end{aligned} \quad (2.2)$$

A equação de movimento para o campo de gauge é

$$\partial_{\nu}F^{\nu\mu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(k_{AF})_{\nu}F_{\alpha\beta} = e\mathcal{J}^{\mu} \quad (2.3)$$

onde $\mathcal{J}^{\mu}$ é a corrente conservada ($\partial_{\mu}\mathcal{J}^{\mu} = 0$) definida como

$$\mathcal{J}^{\mu} = J^{\mu} + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu}J_{\nu}, \quad (2.4)$$

sendo que J_{μ} dada por

$$\begin{aligned} J_{\mu} &= i[\phi(D_{\mu}\phi)^* - \phi^*D_{\mu}\phi] \\ &= i[\phi(\partial_{\mu}\phi)^* - \phi^*(\partial_{\mu}\phi)] - 2eA_{\mu}|\phi|^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

a densidade de corrente conservada na ausência de violação de Lorentz.

Estamos interessados em soluções auto-duais em (1+2)-dimensões do modelo (2.2). Para cumprir este propósito, vamos implementar a projeção no plano fazendo: $\partial_3\phi = 0$, $A_3 = 0$ e $\partial_3A_{\mu} = 0$ onde $\mu = 0, 1, 2$. Desta forma, a partir da equação de movimento (2.3), extraímos a lei de Gauss estacionária a qual é dada por

$$\partial_j\partial_jA_0 - (k_{AF})_3B = -e\mathcal{J}_0, \quad (2.6)$$

onde $B = F_{12}$ e onde $\mathcal{J}_0$ é

$$\mathcal{J}_0 = [1 + (k_{\phi\phi})_{00}]J_0 - (k_{\phi\phi})_{0i}J_i. \quad (2.7)$$

A lei de Gauss (2.6) mostra nitidamente que o campo vetorial de fundo $(k_{AF})_3$ junto aos coeficientes $(k_{\phi\phi})_{0i}$ são os responsáveis pelo acoplamento entre o setor elétrico e magnético. De forma análoga ao observado na seção (1.2.2) a fixação do gauge temporal $A_0 = 0$ não é solução da lei de Gauss (2.6), permitindo a ocorrência de configurações eletricamente carregadas. Vale ressaltar que os coeficientes $(k_{\phi\phi})_{0i}$ deverão ser nulos para a correta implementação do formalismo BPS, como mostraremos mais adiante.

O potencial $U(|\phi|, \Psi)$ em (2.2), ainda desconhecido, deverá fornecer mínimos globais ao sistema, e deverá apresentar quebra espontânea de simetria, além de dar suporte à implementação do formalismo BPS no modelo. Apresentamos a continuação o formalismo BPS.

2.1.1 Formalismo BPS

Para implementarmos o formalismo BPS começamos escrevendo a densidade de energia do modelo

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} (F_{0k})^2 + \frac{1}{4} (F_{jk})^2 + \frac{1}{2} (\dot{\Psi})^2 + \frac{1}{2} (\partial_k \Psi)^2 + |D_j \phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j \phi)^* (D_k \phi) \\ & + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |D_0 \phi|^2 + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \Psi^2 |\phi|^2 + U(|\phi|, \Psi) , \end{aligned} \quad (2.8)$$

e lembrando que estamos interessados em soluções estacionários, reescrevemos a energia na versão independente do tempo

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} (\partial_k A_0)^2 + \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} (\partial_k \Psi)^2 + |D_j \phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j \phi)^* (D_k \phi) \\ & + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] e^2 |\phi|^2 (A_0)^2 + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \Psi^2 |\phi|^2 + U(|\phi|, \Psi) , \end{aligned} \quad (2.9)$$

continuando introduzimos a seguinte identidade (vide Apêndice A)

$$|D_j \phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j \phi)^* (D_k \phi) = \left| \tilde{D}_{\pm} \phi \right|^2 \pm (\det \mathbb{M}) e B |\phi|^2 \pm \frac{1}{2} (\det \mathbb{M}) \epsilon_{jk} \partial_j J_k , \quad (2.10)$$

onde o determinante da matriz $\mathbb{M}$ é dado por

$$\det \mathbb{M} = \sqrt{[1 - (k_{\phi\phi})_{11}] [1 - (k_{\phi\phi})_{22}] - [(k_{\phi\phi})_{12}]^2} . \quad (2.11)$$

Seguindo o procedimento de Bogomol'nyi, escrevemos a energia do modelo como uma soma de termos quadráticos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 + \left| \tilde{D}_{\pm} \phi \right|^2 + \frac{1}{2} [\partial_k A_0 \pm \partial_k \Psi]^2 + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] e^2 |\phi|^2 (A_0 \pm \Psi)^2 \\ & \pm B \left[\sqrt{2U} + (\det \mathbb{M}) e |\phi|^2 \right] \pm \frac{1}{2} (\det \mathbb{M}) \epsilon_{jk} \partial_j J_k \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\mp (\partial_k A_0) (\partial_k \Psi) \mp 2e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (A_0 \Psi) |\phi|^2 .$$

A lei de Gauss (2.6) escrita explicitamente é

$$\partial_j \partial_j A_0 - (k_{AF})_3 B = 2e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] A_0 |\phi|^2 + e (k_{\phi\phi})_{0i} J_i , \quad (2.13)$$

multiplicamos por Ψ e obtemos

$$\mp 2e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] (A_0 \Psi) |\phi|^2 = \mp \Psi \partial_j \partial_j A_0 \pm (k_{AF})_3 B \Psi \pm e (k_{\phi\phi})_{0i} \Psi J_i .$$

Substituindo na densidade de energia (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 + \left| \tilde{D}_\pm \phi \right|^2 + \frac{1}{2} [\partial_k A_0 \pm \partial_k \Psi]^2 + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] e^2 |\phi|^2 (A_0 \pm \Psi)^2 \\ & \pm B \left[\sqrt{2U} + (\det \mathbb{M}) e |\phi|^2 + (k_{AF})_3 \Psi \right] \pm \partial_j \mathbb{J}_j \pm e (k_{\phi\phi})_{0i} \Psi J_i , \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde definimos a corrente $\mathbb{J}_j$ como

$$\mathbb{J}_j = \frac{1}{2} (\det \mathbb{M}) \epsilon_{jk} J_k - (A_0 \partial_j \Psi) . \quad (2.15)$$

Com o intuito de obter soluções auto-duais, cuja energia total seja proporcional ao fluxo magnético, impomos que o termo que está multiplicando o campo magnético em (2.14) seja uma constante, ou seja,

$$\sqrt{2U} + (\det \mathbb{M}) e |\phi|^2 + (k_{AF})_3 \Psi = ev^2 . \quad (2.16)$$

Essa condição permite estabelecer o potencial auto-dual $U(|\phi|, \Psi)$,

$$U(|\phi|, \Psi) = \frac{1}{2} \left[e (\det \mathbb{M}) \left(\frac{v^2}{\det \mathbb{M}} - |\phi|^2 \right) - (k_{AF})_3 \Psi \right]^2 . \quad (2.17)$$

Observamos na expressão para o potencial (2.17) que o valor esperado do vácuo recebe contribuições dos coeficientes de paridade par de violação de Lorentz pertencentes ao setor de Higgs, inseridos dentro da matriz $\mathbb{M}$. Com o potencial em mãos reescrevemos a energia do modelo a partir da integração na densidade de energia

$$\begin{aligned} E = & \int d^2x \left\{ \pm ev^2 B + \left| \tilde{D}_\pm \phi \right|^2 + \frac{1}{2} [B \mp (ev^2 - e |\phi|^2 \det \mathbb{M} - (k_{AF})_3 \Psi)]^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} [\partial_k A_0 \pm \partial_k \Psi]^2 + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] e^2 |\phi|^2 (A_0 \pm \Psi)^2 \pm \partial_k \mathbb{J}_k \pm e (k_{\phi\phi})_{0i} \Psi J_i \right\} . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Observamos agora que a energia do sistema (2.18) está composta por um termo proporcional ao campo magnético, termos quadráticos, um termo contendo uma divergência e um termo indesejado para a implementação do formalismo BPS, contendo os coeficientes de paridade-ímpar e CPT-pares do setor de Higgs. Portanto este último termo deverá ser descartado para termos configurações BPS, levando a fixar $(k_{\phi\phi})_{0i} = 0$.

Assim, após a integração de (2.18) sob condições de contorno apropriadas, a energia BPS total do sistema possui um valor mínimo,

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int dx^2 B = ev^2 |\Phi| , \quad (2.19)$$

proporcional ao fluxo magnético total. Tal mínimo é atingido quando os campos satisfazem as seguintes equações auto-duais:

$$\tilde{D}_\pm \phi = 0 , \quad (2.20)$$

$$B = \pm e \left[v^2 - (\det \mathbb{M}) |\phi|^2 \right] \mp (k_{AF})_3 \Psi , \quad (2.21)$$

$$\partial_k A_0 \pm \partial_k \Psi = 0 , \quad (2.22)$$

$$A_0 \pm \Psi = 0 . \quad (2.23)$$

Observamos que a condição $A_0 = \mp \Psi$ satisfaz automaticamente as duas últimas equações (2.22) e (2.23), portanto as equações BPS são:

$$\tilde{D}_\pm \phi = 0 , \quad (2.24)$$

$$B = \pm e \left[v^2 - (\det \mathbb{M}) |\phi|^2 \right] + (k_{AF})_3 A_0 , \quad (2.25)$$

as quais, em conjunto com a lei de Gauss estacionária

$$\partial_j \partial_j A_0 - (k_{AF})_3 B = 2e^2 \left[1 + (k_{\phi\phi})_{00} \right] A_0 |\phi|^2 . \quad (2.26)$$

descrevem as configurações auto-duais do modelos.

2.1.2 Vórtices auto-duais no modelo MH CPT-ímpar

Nesta seção estamos interessados na configuração de vórtices. Para isto projetamos as nossas equações utilizando o *ansatz* modificado por coeficientes de violação de Lorentz pertencentes ao setor de Higgs introduzido em [31],

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{v}{\sqrt{\eta}} g(r) \exp \left(i\theta \frac{n}{\Lambda} \right) , \\ A_\theta &= -\frac{1}{er} \left(a(r) - \frac{n}{\Lambda} \right) , \\ A_0 &= A_0(r) , \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde n corresponde ao número de vorticidade (ou *winding number*), o qual expressa o caráter topológico dos campos.

O parâmetro Λ depende unicamente nos coeficientes de paridade par da matriz que rege a VL no setor de Higgs, e é dado por

$$\Lambda = \sqrt{\frac{1 - (k_{\phi\phi})_{\theta\theta}}{1 - (k_{\phi\phi})_{rr}}} . \quad (2.28)$$

$$\eta = \sqrt{[1 - (k_{\phi\phi})_{rr}] [1 - (k_{\phi\phi})_{\theta\theta}]} \quad (2.29)$$

As funções escalares $g(r)$, $a(r)$ e $A_0(r)$ são bem comportadas, e satisfazem as seguintes condições de contorno na origem e no infinito

$$g(0) = 0 \quad , \quad a(0) = \frac{n}{\Lambda} \quad , \quad A'_0(0) = 0 \quad , \quad (2.30)$$

$$g(\infty) = 1 \quad , \quad a(\infty) = 0 \quad , \quad A_0(\infty) = 0 .$$

As condições de contorno para o potencial escalar (A_0) apresentadas serão mostradas explicitamente por meio do estudo do comportamento assintótico dos campos na origem e no infinito (vide Sec. 2.1.3).

Com o *ansatz* modificado (2.27), a lei de Gauss (2.26) agora pode ser escrita da seguinte forma

$$A''_0 + \frac{A'_0}{r} - (k_{AF})_3 B = 2e^2 v^2 \Lambda \Delta A_0 g^2 , \quad (2.31)$$

onde o campo magnético é dado por $B(r) = -\frac{a'}{er}$, e o parâmetro de violação de Lorentz Δ é dado por

$$\Delta = \frac{1 + (k_{\phi\phi})_{00}}{\Lambda \eta} > 0 . \quad (2.32)$$

Para a análise numérica do modelo escrevemos as equações BPS (2.24) e (2.25) devidamente projetadas respectivamente

$$g' = \pm \Lambda \frac{ag}{r} , \quad (2.33)$$

$$B = -\frac{a'}{er} = \pm ev^2 (1 - g^2) + (k_{AF})_3 A_0 , \quad (2.34)$$

as quais, em conjunto com a lei de Gauss (2.31) descrevem configurações eletricamente carregadas, que chamaremos de vórtices CPT-ímpar.

Utilizando as condições de contorno (2.30) podemos integrar a densidade de energia BPS do modelo, obtendo a energia BPS total, sendo esta

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int d^2r B = \pm 2\pi v^2 \frac{n}{\Lambda} . \quad (2.35)$$

Observamos aqui novamente que a energia BPS é proporcional ao fluxo magnético, o qual é também proporcional à vorticidade. Igualmente observamos que o fluxo magnético depende explicitamente dos coeficientes de paridade par de LV pertencentes ao setor de Higgs.

Com as equações BPS e com a lei de Gauss podemos reescrever a densidade de energia BPS como uma soma de termos quadráticos

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + 2\Lambda v^2 \left(\frac{ag}{r} \right)^2 + 2e^2 v^2 \Lambda \Delta (A_0 g)^2 + (A'_0)^2 , \quad (2.36)$$

que será positivo-definida sempre que $\Lambda, \Delta > 0$.

A partir da lei de Gauss em (2.31) podemos observar uma relação direta entre a carga elétrica total dos vórtices e o fluxo magnético

$$Q = 2\pi \int_0^\infty dr r q_0 = \frac{(k_{AF})_3}{e} \Phi = 2\pi \frac{(k_{AF})_3}{e} \frac{n}{\Lambda} , \quad (2.37)$$

onde $q_0 = -2ev^2 \Lambda \Delta \omega g^2$, é a densidade de carga elétrica. Pode ser observado também que a carga elétrica total, da mesma forma que o fluxo magnético é proporcional à fração n/Λ .

2.1.3 Comportamento nas fronteiras

O comportamento assintótico é estudado resolvendo os campos em $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Para isto utilizamos as equações BPS juntamente com a lei de Gauss em coordenadas polares

$$g' = \pm \Lambda \frac{ag}{r} , \quad (2.38)$$

$$-\frac{a'}{er} = \pm ev^2 (1 - g^2) + (k_{AF})_3 A_0 , \quad (2.39)$$

$$A_0'' + \frac{A_0'}{r} - (k_{AF})_3 B = 2e^2 v^2 \Lambda \Delta A_0 g^2 . \quad (2.40)$$

Para estudar comportamento dos campos na origem ($r \rightarrow 0$) usamos as expansões

$$g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j r^j , \quad a(r) = a_0 - \sum_{j=1}^{\infty} A_j r^j , \quad A_0 = A_0(0) + \sum_{j=1}^{\infty} W_j r^j , \quad (2.41)$$

de tal modo que após substituídas nas equações (2.38)–(2.40), obtemos as expressões:

$$g(r) = G_n r^n + \dots , \quad (2.42)$$

$$a(r) = \frac{n}{\Lambda} - \frac{1}{2} [e^2 v^2 + e (k_{AF})_3 A_0(0)] r^2 + \dots , \quad (2.43)$$

$$A_0(r) = A_0(0) + \frac{1}{4} [ev^2 + (k_{AF})_3 A_0(0)] (k_{AF})_3 r^2 + \dots \quad (2.44)$$

A equação (2.43) descrevendo o comportamento do campo $a(r)$ na origem justifica a escolha do novo *ansatz* imposto na equação (2.27). A terceira equação, permite impor a seguinte condição de contorno para o potencial escalar apresentada em (2.30). Portanto as condições de contorno em $r = 0$ para os campos são:

$$g(0) = 0 \quad , \quad a(0) = \frac{n}{\Lambda} \quad , \quad A'_0(0) = 0 \quad . \quad (2.45)$$

Na sequência, analisamos o comportamento assintótico em $r \rightarrow \infty$, para o qual os campos tem a seguinte forma

$$1 - g \sim r^{-1/2} e^{-\beta r} \quad , \quad a \sim r^{1/2} e^{-\beta r} \quad , \quad A_0 \sim r^{-1/2} e^{-\beta r} \quad ,$$

que é o comportamento esperado para vórtices do tipo ANO, onde o parâmetro β está relacionado com a extensão espacial dos vórtices no espaço, sendo dado por

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{[(k_{AF})_3]^2 + 2e^2 v^2 \Lambda (\sqrt{\Delta} + 1)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{[(k_{AF})_3]^2 + 2e^2 v^2 \Lambda (\sqrt{\Delta} - 1)^2} \quad , \quad (2.46)$$

com Δ sendo definido na equação (2.32).

A escala de massa β depende explicitamente dos parâmetros da VL pertencentes a ambos os setores, sendo assim responsáveis por controlar o comportamento assintótico dos campos no infinito.

Portanto, as condições de contorno satisfeitas pelos campos no infinito são:

$$g(\infty) = 1 \quad , \quad a(\infty) = 0 \quad , \quad A_0(\infty) = 0 \quad . \quad (2.47)$$

A expressão para o parâmetro de decaimento (2.46) nos mostra que para um $(k_{AF})_3$ fixo, o comportamento assintótico dos vórtices é regido pelos parâmetros de VL pertencentes ao setor de Higgs. A partir disso temos dois casos de interesse: O primeiro ocorre quando $\Delta = 1$ e $\Lambda = 1$, neste caso, β resulta em

$$\beta \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{[(k_{AF})_3]^2 + 8e^2 v^2} - \frac{1}{2} |(k_{AF})_3| \quad , \quad (2.48)$$

sendo este resultado exatamente igual ao obtido no comportamento assintótico para vórtices no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs Ref.[41] (com $(k_{AF})_3 = \kappa$). Um segundo caso de interesse acontece para valores suficientemente grandes de Δ , ($\Delta \gg (k_{AF})_3$),

$$\beta \rightarrow ev\Lambda^{1/2}\sqrt{2} \quad , \quad (2.49)$$

sendo este o resultado correspondente ao modelo usual de MH com violação de Lorentz somente no setor de Higgs, verificado explicitamente em Ref. [31]. Neste limite a massa dos bósons auto-duais é comandada pelo parâmetro Λ .

Por outro lado, fixando os parâmetros de VL no setor de Higgs e para valores suficientemente grandes de $(k_{AF})_3$, β se comporta da seguinte forma

$$\beta \rightarrow \frac{2e^2 v^2}{(k_{AF})_3} \Lambda \sqrt{\Delta} , \quad (2.50)$$

que é a escala de massa para o modelo de Chern-Simons-Higgs [43], com violação de Lorentz somente no setor de Higgs.

2.1.4 Análise numérica

Com a finalidade de fazer a análise numérica e deixar as equações numa forma adimensional, usamos a seguinte mudança de escala

$$\rho = ev\Lambda^{1/2}r , \quad (2.51)$$

com a qual reescrevemos os campos e as funções a serem plotadas, a saber

$$g(r) \rightarrow g(\rho) , \quad a(r) \rightarrow \frac{a(\rho)}{\Lambda} , \quad A_0(r) \rightarrow \frac{v}{\Lambda^{1/2}} A_0(\rho) , \quad (2.52)$$

$$(k_{AF})_3 \rightarrow ev\Lambda^{1/2}\kappa , \quad B(r) \rightarrow ev^2 B(\rho) , \quad \mathcal{E}_{BPS}(r) \rightarrow \frac{v^2}{\Lambda} \mathcal{E}_{BPS}(\rho) .$$

Com esta mudança de escala, podemos escrever as equações BPS e a lei de Gauss em uma forma adimensional

$$g' = \pm \frac{ag}{\rho} , \quad (2.53)$$

$$-\frac{a'}{\rho} = \pm (1 - g^2) + \kappa A_0 , \quad (2.54)$$

$$A_0'' + \frac{A_0'}{\rho} + \kappa \frac{a'}{\rho} = 2\Delta A_0 g^2 . \quad (2.55)$$

Este conjunto de equações seria exatamente igual ao que descreve os vórtices do modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs Refs. [41, 42] se $\Delta = 1$.

As equações adimensionais serão resolvidas utilizando as seguintes condições de contorno

$$g(0) = 0, \quad a(0) = n, \quad A_0'(0) = 0, \quad (2.56)$$

$$g(\infty) = 1, \quad a(\infty) = 0, \quad A_0(\infty) = 0.$$

A escala de massa na sua forma adimensional é escrita da seguinte maneira

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\kappa^2 + 2\Lambda (\sqrt{\Delta} + 1)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\kappa^2 + 2\Lambda (\sqrt{\Delta} - 1)^2}, \quad (2.57)$$

e a densidade de energia BPS adimensional é identificada como

$$\mathcal{E}_{BPS}(\rho) = B^2 + 2 \left(\frac{ag}{\rho} \right)^2 + 2\Delta (A_0 g)^2 + (A_0')^2. \quad (2.58)$$

Em seguida apresentamos os perfis obtidos a partir da solução numérica das Eqs. (2.53–2.55) com as condições de contorno (2.30) para $\kappa = 1$, $n = 1$ e alguns valores específicos de Δ . Devido a que a densidade de energia BPS (2.58) é positivo-definida para $\Delta > 0$, consideramos duas regiões de valores para Δ , sendo estas, $0 < \Delta < 1$ (linhas verdes) e $\Delta > 1$ (linhas vermelhas). Há dois valores interessantes para Δ , que permitem obter dois modelos já conhecidos: O primeiro acontece quando $\Delta = 1$ (linha preta sólida) cujos perfis correspondem ao modelo de MCSH e o segundo valor limite acontece para $\Delta \rightarrow \infty$, quando é obtido o modelo de MH (linha azul sólida).

A figura 2.1 mostra os perfis para o campo de Higgs. Observa-se que este atinge seu valor assintótico rapidamente para $\Delta > 1$, e satura mais lentamente para $\Delta < 1$, tal como é esperado a partir da Eq. (2.57) para κ fixo. Notamos que os perfis são mais estreitos quando $\Delta > 1$, e o estreitamento máximo é atingido quando $\Delta \rightarrow \infty$ (linha azul sólida) onde é recuperado o modelo de MH.

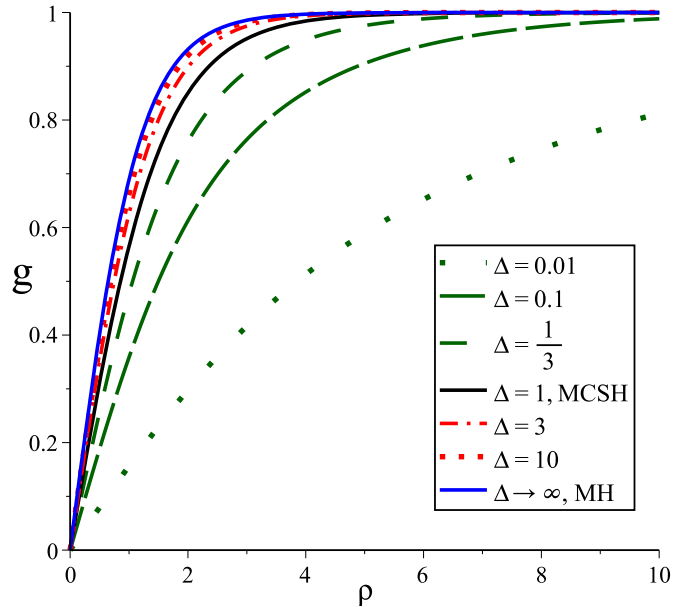


Figura 2.1: Campo de Higgs $g(\rho)$ para $n = 1$.

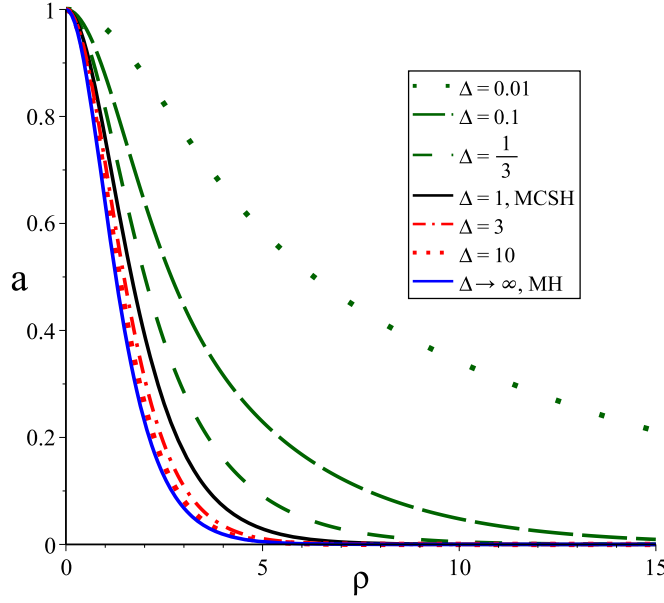


Figura 2.2: Campo vetorial $a(\rho)$ para $n = 1$.

A figura 2.3 mostra os perfis para o campo magnético na forma de *lumps* centrados na origem. Para valores crescentes de Δ , os perfis são mais estreitos e têm maior amplitude, de maneira tal que o estreitamento e a intensidade são máximos quando $\Delta \rightarrow \infty$ (linha azul sólida). Para $0 < \Delta < 1$, os perfis tem intensidades menores e se apresentam mais espalhados quando $\Delta \rightarrow 0$. Amplitudes maiores são obtidos para os valores $1 < \Delta < \infty$. No infinito o campo magnético anula-se rapidamente à medida que Δ aumenta.

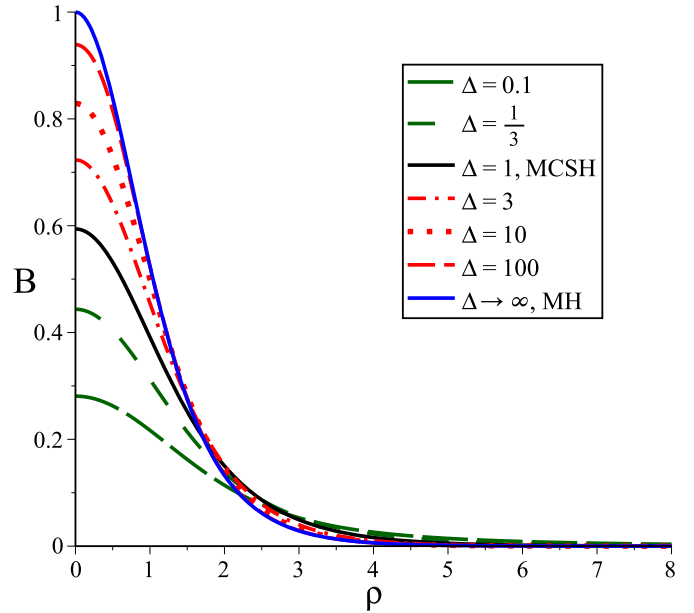


Figura 2.3: Campo magnético $B(\rho)$ para $n = 1$.

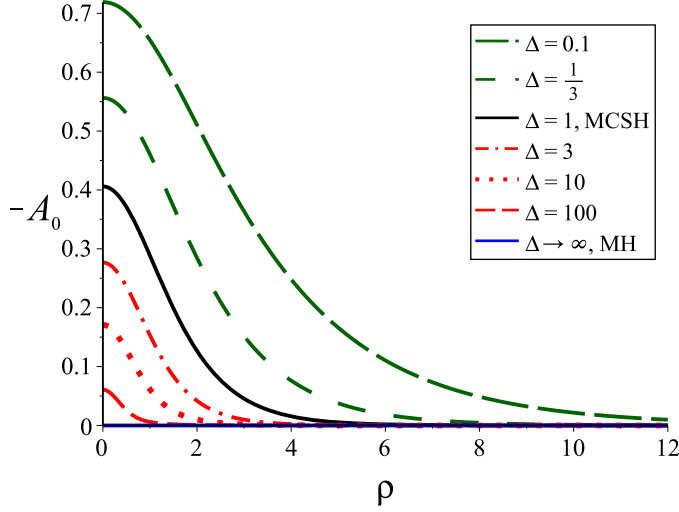


Figura 2.4: Potencial escalar $A_0(\rho)$ para $n = 1$.

A figura 2.4 descreve os perfis para o potencial escalar. Para $\Delta > 1$, o parâmetro de CFJ torna-se menos relevante à medida que Δ aumenta, de tal modo que os perfis apresentam-se menores, e no limite $\Delta \rightarrow \infty$ (linha azul sólida) o perfil sobrepõe-se o eixo horizontal. Neste limite os vórtices tornam-se eletricamente nulos, tal como acontece no modelo de MH. Por outro lado, no intervalo $0 < \Delta < 1$, os perfis para o potencial escalar são mais estendidos e com maior intensidade na origem. Quando $\Delta \rightarrow 0$, o parâmetro de CFJ torna-se mais relevante.

A figura 2.5 descreve o comportamento para o campo elétrico. Para $n = 1$, a intensidade máxima do campo elétrico é atingida quando $\Delta = 1$ (linha preta sólida), correspondente ao modelo de MCSH. Observa-se que o campo elétrico é mais espalhado para valores decrescentes de Δ . Por outro lado, para $\Delta > 1$, o campo elétrico está localizado mais perto da origem e decai rapidamente para valores crescentes de Δ . No limite $\Delta \rightarrow \infty$, o campo elétrico desaparece, o que está em concordância, com os resultados de modelos com vórtices eletricamente descarregados.

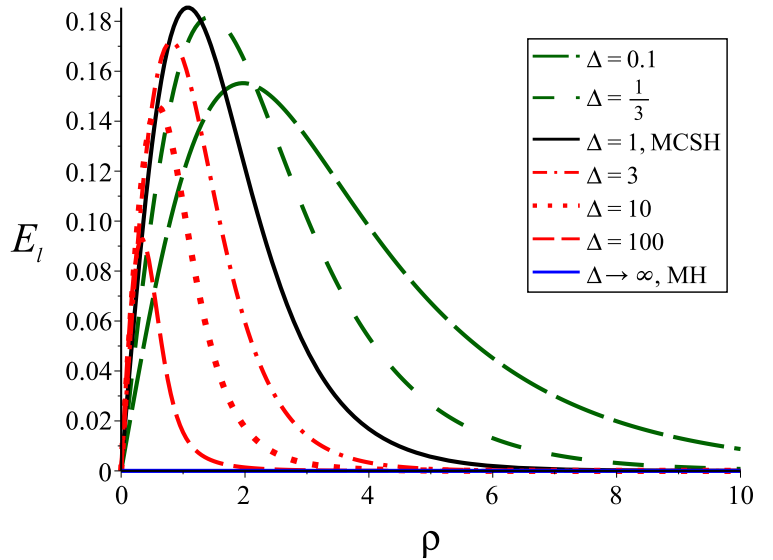


Figura 2.5: Campo elétrico $E_l(\rho) = -A'_0(\rho)$, $n = 1$.

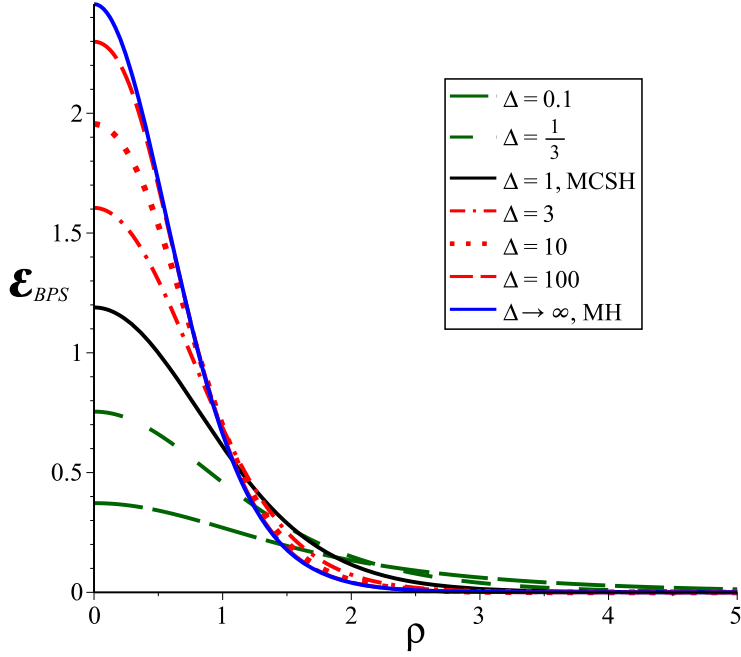


Figura 2.6: Densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$ para $n = 1$.

Finalizando este primeiro modelo, apresentaremos na figura 2.7 a modo de exemplo, os perfis do campo magnético e da densidade de energia BPS para o número de vorticidade $n = 3$. A motivação para apresentarmos estes perfis consiste em observar de que maneira as soluções de vórtices auto-duais se comportam para um valor de $n \neq 1$ e de que maneira a vorticidade influi na localização dos defeitos topológicos aqui abordados.

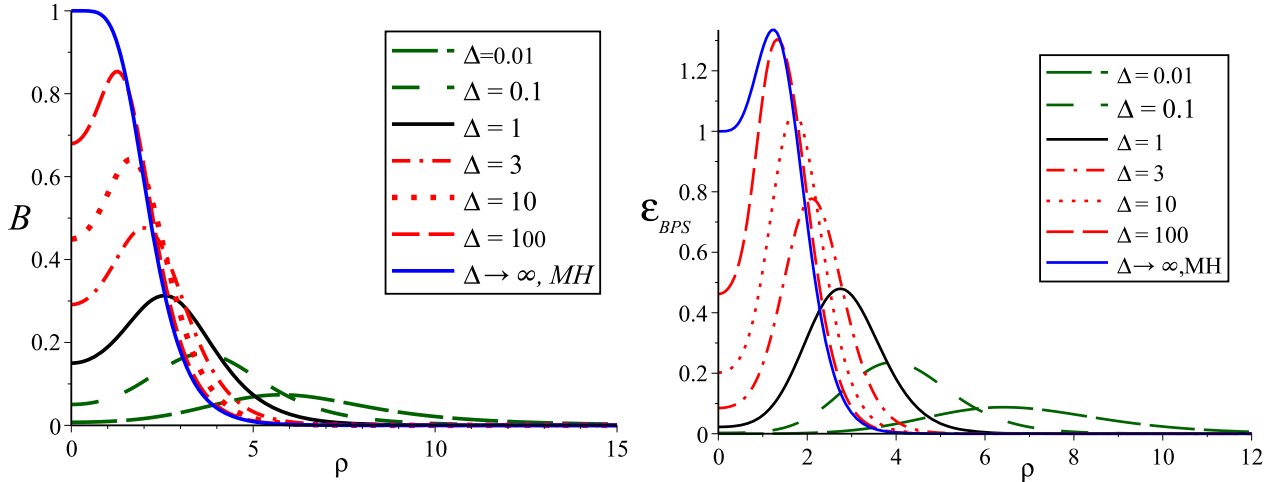


Figura 2.7: Campo magnético $B(\rho)$ à esquerda e densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$ à direita para $n = 3$.

Como pode ser visualizado no gráfico, para $n = 3$, o parâmetro Δ causa igual efeito que

para $n = 1$, ou seja, à medida que Δ é aumentada os vórtices aparecem mais localizados e concentrados próximos à origem. De forma análoga, a amplitude na origem é incrementada por grandes valores de Δ . Uma diferença importante que aparece ao modificarmos o valor de n é que os perfis adquirem forma de anel. Este comportamento é igualmente identificado no modelo usual de MCSH, sem quebra da simetria de Lorentz. O efeito do parâmetro Δ nos perfis é manter o comportamento tipo anel ($0 < \Delta < 1$) ou tentar levar ao formato tipo “lump” ($\Delta \geq 1$).

2.2 Configurações auto-duais num modelo de Maxwell-Higgs CPT-par

Nesta seção investigamos as configurações auto-duais, portadoras de campo elétrico mas eletricamente neutras e com fluxo magnético fracionário para um modelo de MH, no qual ambos o campo de gauge e o campo de Higgs, contém termos CPT-par, apresentados primeiramente na referência [17]. O termo CPT-par apresenta o tensor adimensional $(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$ representado por 19 parâmetros independentes, sendo nove destes pertencentes ao setor não-birrefringente. O fenômeno da birrefringência é usualmente a decomposição da luz propagando-se em um meio anisotrópico em duas componentes diferentes. Podemos chamar também de birrefringência a propagação de diferentes modos de polarização com diferentes velocidades.

O tensor do termo CPT-par apresenta as mesmas simetrias que o tensor de Riemann

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = -(k_F)_{\nu\mu\alpha\beta} \quad , \quad (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = -(k_F)_{\mu\nu\beta\alpha} \quad , \quad (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = (k_F)_{\alpha\beta\mu\nu} \quad , \quad (2.59)$$

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} + (k_F)_{\mu\alpha\beta\nu} + (k_F)_{\mu\beta\nu\alpha} = 0 \quad , \quad (2.60)$$

apresentando também duplo traço nulo,

$$(k_F)^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} = 0 \quad . \quad (2.61)$$

Nesta seção, analisamos especificamente o setor não-birrefringente, descrito somente por nove componentes do tensor $(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$, contidas num tensor simétrico e de traço nulo $\kappa^{\rho\alpha}$, definido pela contração $\kappa^{\rho\alpha} = (k_F)^{\rho\nu\alpha}_{\nu}$. Esta análise é uma generalização natural de trabalhos anteriores apresentados em [31, 32].

O modelo estudado é descrito pela seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa^{\rho\alpha}F_{\rho\sigma}F_{\alpha}^{\sigma} + |D_{\mu}\phi|^2 + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu}(D_{\mu}\phi)^*(D_{\nu}\phi) - U \quad . \quad (2.62)$$

A equação de movimento para o campo de gauge fornece as leis de Gauss e de Ampère, as quais são dadas pelas seguintes expressões:

Lei de Gauss

$$L_{ij}\partial_i\partial_j A_0 + \epsilon_{ija}\kappa_{0i}\partial_j B_a = -e\mathcal{J}_0 \quad , \quad (2.63)$$

Lei de Ampère

$$M_{jbc}\partial_b B_c - \kappa_{0i}\partial_j\partial_j A_0 + \kappa_{0j}\partial_j\partial_i A_0 = e\mathcal{J}_i \quad , \quad (2.64)$$

onde definimos a matriz simétrica e positivo-definida L_{ij} ,

$$L_{ij} = (1 + \kappa_{00})\delta_{ij} - \kappa_{ij} \quad , \quad (2.65)$$

carregando os coeficientes CPT-par de paridade-par do setor de gauge. Na lei de Ampère definimos o tensor

$$M_{jbc} = (\epsilon_{jbc} - \epsilon_{jac} \kappa_{ab} - \kappa_{ja} \epsilon_{abc}) . \quad (2.66)$$

As densidades de corrente $\mathcal{J}_\mu$ e J_μ foram definidas nas equações (2.4) e (2.5), respectivamente.

A partir da lei de Gauss (2.63), notamos que os parâmetros de paridade ímpar (κ_{0i}) do termo CPT-par no setor de gauge, são responsáveis pelo acoplamento dos setores elétrico e magnético do modelo. A partir disto podemos dizer que estes parâmetros cumprem um papel parecido ao realizado pelo parâmetro de Chern-Simons abordado na seção (1.2.2). Portanto, de maneira análoga à apresentada na Ref. [32], o modelo (2.62) deve ser modificado com a introdução do campo escalar neutro Ψ para suportar soluções BPS

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \kappa^{\rho\alpha} F_{\rho\sigma} F_\alpha^\sigma + |D_\mu \phi|^2 + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu} (D_\mu \phi)^* (D_\nu \phi) \\ & + \frac{1}{2} (1 + \kappa_{00}) \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi + \frac{1}{2} \kappa^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] \Psi^2 |\phi|^2 - U . \end{aligned} \quad (2.67)$$

O potencial U , ainda será determinado de modo tal que seja compatível com a implementação do formalismo BPS.

Estamos interessados em soluções auto-duais em (1+2)-dimensões do modelo (2.67). Para cumprir este propósito, vamos implementar a projeção no plano fazendo: $\partial_3 \phi = 0$, $A_3 = 0$, $\partial_3 A_\mu = 0$ ($\mu = 0, 1, 2$). Desta forma, a partir da equação de (2.63), extraímos a lei de Gauss estacionária a qual é dada por

$$L_{ij} \partial_i \partial_j A_0 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j B = -e \mathcal{J}_0 , \quad (2.68)$$

onde $B = F_{12}$, os índices Latinos $i, j = 1, 2$ e $\mathcal{J}_0 = [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] J_0 - (k_{\phi\phi})_{0i} J_i$. Observamos que os coeficientes de paridade ímpar κ_{0i} e $(k_{\phi\phi})_{0i}$, são os responsáveis pelo acoplamento entre os setores elétrico e magnético. Com isso, sabemos *a priori*, que as configurações auto-duais a serem obtidas em este modelo possuirão campo elétrico mas, como veremos logo, serão eletricamente neutras. Similarmente, ao que acontece no caso CPT-ímpar, aqui também, os coeficientes $(k_{\phi\phi})_{0i}$ devem ser nulos, $(k_{\phi\phi})_{0i} = 0$, para a correta implementação do formalismo BPS.

2.2.1 Formalismo BPS

Com o intuito de implementar o formalismo BPS começamos escrevendo o hamiltoniano do

modelo

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = & \frac{1}{2}L_{ij}F_{0i}F_{0j} + \frac{1}{2}(1 - \kappa_{ii})B^2 + [1 + (k_{\phi\phi})_{00}]|D_0\phi|^2 + |D_j\phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{ij}(D_i\phi)^*(D_j\phi) \\ & + \frac{1}{2}(1 + 2\kappa_{00})\dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2}L_{ij}\partial_i\Psi\partial_j\Psi + e^2[1 + (k_{\phi\phi})_{00}]\Psi^2|\phi|^2 + U(|\phi|, \Psi) ,\end{aligned}\quad (2.69)$$

onde $\kappa_{ii} = \kappa_{11} + \kappa_{22}$. Lembrando que as configurações auto-duais correspondem à estados de mínima energia do sistema, portanto são configurações de equilíbrio independentes do tempo, escrevemos a energia estacionária do modelo (2.67)

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = & \frac{1}{2}(1 - \kappa_{ii})B^2 + U(|\phi|, \Psi) + |D_k\phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{ij}(D_i\phi)^*(D_j\phi) \\ & + \frac{1}{2}L_{ij}(\partial_i A_0)(\partial_j A_0) + \frac{1}{2}L_{ij}(\partial_i \Psi)(\partial_j \Psi) + e^2[1 + (k_{\phi\phi})_{00}][(A_0)^2 + \Psi^2]|\phi|^2.\end{aligned}\quad (2.70)$$

A energia será definida positiva sempre que $\kappa_{ii} < 1$ e $(k_{\phi\phi})_{00} > -1$.

Introduzimos agora a mesma identidade utilizada no modelo anterior (2.10)

$$|D_j\phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk}(D_j\phi)^*(D_k\phi) = \left|\tilde{D}_{\pm}\phi\right|^2 \pm (\det \mathbb{M})eB|\phi|^2 \pm \frac{1}{2}(\det \mathbb{M})\epsilon_{jk}\partial_j J_k , \quad (2.71)$$

e quadrando os termos para a implementação do formalismo BPS temos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = & \frac{1}{2}(1 - \kappa_{ii})\left(B \mp \sqrt{\frac{2U}{1 - \kappa_{ii}}}\right)^2 + \left|\tilde{D}_{\pm}\phi\right|^2 + \frac{1}{2}L_{ij}(\partial_i A_0 \pm \partial_i \Psi)(\partial_j A_0 \pm \partial_j \Psi) \\ & + e^2[1 + (k_{\phi\phi})_{00}]|\phi|^2(A_0 \pm \Psi)^2 \pm B\sqrt{2(1 - \kappa_{ii})U} \pm (\det \mathbb{M})eB|\phi|^2 \\ & \pm \frac{1}{2}(\det \mathbb{M})\epsilon_{jk}\partial_j J_k \mp L_{ij}(\partial_i A_0)(\partial_j \Psi) \mp 2e^2[1 + (k_{\phi\phi})_{00}]|\phi|^2 A_0 \Psi .\end{aligned}\quad (2.72)$$

Com o auxílio da lei de Gauss (2.68) podemos escrever o último termo como

$$\mp 2e^2[1 + (k_{\phi\phi})_{00}]|\phi|^2 A_0 \Psi = \mp L_{ij}\Psi\partial_i\partial_j A_0 \mp \epsilon_{ij}\kappa_{0i}\Psi\partial_j B , \quad (2.73)$$

resultando assim a seguinte forma para a densidade de energia (2.72)

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = & \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) \left(B \mp \sqrt{\frac{2U}{1 - \kappa_{ii}}} \right)^2 + \left| \tilde{D}_{\pm} \phi \right|^2 + \frac{1}{2} L_{ij} (\partial_i A_0 \pm \partial_i \Psi) (\partial_j A_0 \pm \partial_j \Psi) \\
& + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |\phi|^2 (A_0 \pm \Psi)^2 \pm B \sqrt{2(1 - \kappa_{ii})U} \pm (\det \mathbb{M}) e B |\phi|^2 \\
& \pm \frac{1}{2} (\det \mathbb{M}) \epsilon_{jk} \partial_j J_k \mp L_{ij} (\partial_i A_0) (\partial_j \Psi) \mp L_{ij} \Psi \partial_i \partial_j A_0 \mp \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \Psi \partial_j B .
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Vamos agora reescrever os três últimos termos na equação anterior (2.74) a partir de termos contendo derivadas totais, dados a seguir

$$L_{ij} (\partial_i A_0) (\partial_j \Psi) + L_{ij} \Psi \partial_i \partial_j A_0 = L_{ij} \partial_i (\Psi \partial_j A_0) ,$$

$$\epsilon_{ij} \kappa_{0i} \Psi \partial_j B = \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j (\Psi B) - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} B \partial_j \Psi .$$

Com estas substituições, a densidade de energia estacionária do modelo fica representada da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = & \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) \left(B \mp \sqrt{\frac{2U}{1 - \kappa_{ii}}} \right)^2 + \left| \tilde{D}_{\pm} \phi \right|^2 + \frac{1}{2} L_{ij} (\partial_i A_0 \pm \partial_i \Psi) (\partial_j A_0 \pm \partial_j \Psi) \\
& + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |\phi|^2 (A_0 \pm \Psi)^2 \pm B \left[\sqrt{2(1 - \kappa_{ii})U} + (\det \mathbb{M}) e |\phi|^2 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi \right] \\
& \pm \frac{1}{2} (\det \mathbb{M}) \epsilon_{jk} \partial_j J_k \mp L_{ij} \partial_j (\Psi \partial_i A_0) \mp \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j (\Psi B) .
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Escolhemos aqui o termo que multiplica o campo magnético com a finalidade de termos uma densidade de energia proporcional ao fluxo magnético

$$\sqrt{2(1 - \kappa_{ii})U} + (\det \mathbb{M}) e |\phi|^2 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi = e v^2 , \tag{2.76}$$

desta forma obtemos o potencial adequado para a obtenção de configurações auto-duais

$$U(|\phi|, \Psi) = \frac{1}{2(1 - \kappa_{ii})} [e(v^2 - |\phi|^2 \det \mathbb{M}) - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi]^2 . \tag{2.77}$$

Inserindo o potencial obtido anteriormente em (2.75) a energia fica denotada da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
E = \int d^2x \left\{ \pm ev^2 B + \left| \tilde{D}_\pm \phi \right|^2 + \frac{1}{2} (1 - \kappa_{ii}) \left[B \mp \frac{ev^2 - (\det \mathbb{M}) e |\phi|^2 - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi}{1 - \kappa_{ii}} \right]^2 \right. \\
\left. + \frac{1}{2} L_{ij} (\partial_i A_0 \pm \partial_i \Psi) (\partial_j A_0 \pm \partial_j \Psi) + e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |\phi|^2 (A_0 \pm \Psi)^2 \pm \partial_j \mathbb{J}_j \right\},
\end{aligned} \tag{2.78}$$

onde foi definida a seguinte densidade de corrente

$$\mathbb{J}_j = \frac{1}{2} (\det \mathbb{M}) \epsilon_{jk} J_k - L_{ij} \Psi \partial_i A_0 - \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \Psi B. \tag{2.79}$$

Impondo condições de contorno apropriadas para os campos, obtemos que a energia total do modelo será limitada inferiormente, sendo este limite proporcional ao fluxo magnético

$$E \geq \pm ev^2 \int d^2x B = \pm ev^2 \Phi. \tag{2.80}$$

As equações auto-duais que saturam o limite da energia (2.78) são as seguintes:

$$\tilde{D}_\pm \phi = 0, \tag{2.81}$$

$$B = \pm \frac{e (\det \mathbb{M})}{1 - \kappa_{ii}} \left(\frac{v^2}{\det \mathbb{M}} - |\phi|^2 \right) \mp \frac{\epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j \Psi}{1 - \kappa_{ii}}, \tag{2.82}$$

$$\partial_i A_0 \pm \partial_i \Psi = 0, \tag{2.83}$$

$$A_0 \pm \Psi = 0.$$

A condição $\Psi = \mp A_0$, resolve simultaneamente as duas últimas equações. Portanto as equações BPS que descrevem as configurações auto-duais que saturam o limite inferior da energia (2.78) são

$$\tilde{D}_\pm \phi = 0, \tag{2.84}$$

$$B = \pm \frac{e (\det \mathbb{M})}{1 - \kappa_{ii}} \left(\frac{v^2}{\det \mathbb{M}} - |\phi|^2 \right) + \frac{\epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j A_0}{1 - \kappa_{ii}}, \tag{2.85}$$

juntamente com a lei de Gauss,

$$L_{ij} \partial_i \partial_j A_0 + \epsilon_{ij} \kappa_{0i} \partial_j B = 2e^2 [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] |\phi|^2 A_0. \tag{2.86}$$

2.2.2 Vórtices auto-duais no modelo de MH CPT-par

Com o intuito de obtermos configurações de vórtices, projetamos as nossas equações utilizando o *ansatz* modificado pelos coeficientes de violação de Lorentz pertencentes ao setor de Higgs (2.27) introduzido na seção anterior

$$\phi = \frac{v}{\sqrt{\eta}} g(r) \exp\left(i\theta \frac{n}{\Lambda}\right) \quad , \quad A_\theta = -\frac{1}{er} \left(a(r) - \frac{n}{\Lambda}\right) \quad , \quad A_0 = A_0(r) \quad ,$$

onde lembramos que o parâmetro Λ , apresentado na seção (2.1.2), depende unicamente nos coeficientes de paridade par da matriz que rege a VL no setor de Higgs, e é dado por

$$\Lambda = \sqrt{\frac{1 - (k_{\phi\phi})_{\theta\theta}}{1 - (k_{\phi\phi})_{rr}}} \quad .$$

As funções escalares $g(r)$, $a(r)$ e $A_0(r)$ são bem comportadas, as duas primeiras satisfazem as seguintes condições de contorno na origem e no infinito

$$g(0) = 0 \quad , \quad a(0) = \frac{n}{\Lambda} \quad , \quad A'_0(0) = \frac{ev^2 \kappa_{0\theta}}{\kappa_{0\theta}^2 + (1-s)(1+\lambda_r)} \quad , \quad (2.87)$$

$$g(\infty) = 1 \quad , \quad a(\infty) = 0 \quad , \quad A_0(\infty) = 0 \quad .$$

onde $\lambda_r = \kappa_{00} - \kappa_{rr}$.

Igualmente ao realizado nos modelos anteriores as condições de contorno para o potencial escalar (A_0) apresentadas em (2.87) serão mostradas explicitamente, por meio do estudo do comportamento assintótico dos campos na origem e no infinito (vide Sec. 2.2.3). A continuação escrevemos as equações BPS (2.24) e (2.25) projetadas no *ansatz*

$$g' = \pm \Lambda \frac{ag}{r} \quad , \quad (2.88)$$

$$B = -\frac{a'}{er} = \pm \frac{ev^2}{1-s} (1 - g^2) - \frac{\kappa_{0\theta}}{1-s} A'_0 \quad , \quad (2.89)$$

onde $s = \kappa_{ii}$. A lei de Gauss (2.86) projetada no *ansatz* é escrita na forma

$$(1 + \lambda_r) \left(A''_0 + \frac{A'_0}{r} \right) - \kappa_{0\theta} \frac{(rB)'}{r} = 2e^2 v^2 \Lambda \Delta A_0 g^2 \quad . \quad (2.90)$$

Com a lei de Gauss projetada em mãos, realizamos uma rápida integração em (2.90), levando em consideração as condições de contorno dos campos (2.87), obtemos

$$Q = 4\pi ev^2 \Lambda \Delta \int_0^\infty dr \, r A_0 g^2 = 0 \quad , \quad (2.91)$$

no qual ao considerar o espaço todo observamos que este modelo suporta configurações eletricamente neutras, que chamaremos de vórtices CPT-par.

Dadas as condições de contorno satisfeitas pelos campos (2.87) e integrando a equação (2.80), observamos que a energia além de ser quantizada pelo número de vorticidade n , ela também terá dependência explícita nos coeficientes de violação de Lorentz do setor de Higgs,

$$E_{BPS} = 2\pi v^2 \frac{n}{\Lambda} . \quad (2.92)$$

onde os elementos diagonais da matriz de quebra de simetria no setor de Higgs $(k_{\phi\phi})_{rr}$ e $(k_{\phi\phi})_{\theta\theta}$, são os responsáveis por esta dependência.

Veamos também que com a utilização das equações BPS projetadas (2.88) e (2.89), juntamente com a lei de Gauss (2.90), a densidade de energia BPS pode ser escrita da forma positivo-definida

$$\mathcal{E}_{BPS} = (1-s) B^2 + 2\Lambda v^2 \left(\frac{ag}{r} \right)^2 + 2e^2 v^2 \Lambda \Delta (gA_0)^2 + (1+\lambda_r) (A'_0)^2 , \quad (2.93)$$

quando $s < 1$, $\lambda_r > -1$ e $\Lambda, \Delta > 0$.

2.2.3 Comportamento nas fronteiras

O comportamento dos campos na origem é obtido resolvendo as equações BPS projetadas (2.88) e (2.89) e a lei de Gauss (2.90) em $r = 0$, resultando no seguinte comportamento,

$$g(r) = G_n r^n + \dots , \quad (2.94)$$

$$a(r) = \frac{n}{\Lambda} - \frac{1}{2} \frac{e^2 v^2 (1+\lambda_r)}{\kappa_{0\theta}^2 + (1-s)(1+\lambda_r)} r^2 + \dots , \quad (2.95)$$

$$A_0(r) = A_0(0) + \frac{ev^2 \kappa_{0\theta}}{\kappa_{0\theta}^2 + (1-s)(1+\lambda_r)} r + \dots . \quad (2.96)$$

Estas equações permitem impor as seguintes condições de contorno em $r = 0$

$$g(0) = 0 \quad , \quad a(0) = \frac{n}{\Lambda} \quad , \quad A'_0(0) = \frac{ev^2 \kappa_{0\theta}}{\kappa_{0\theta}^2 + (1-s)(1+\lambda_r)} . \quad (2.97)$$

Isso mostra que a existência de vórtices carregados somente é possível se $\kappa_{0\theta}$ for não nulo.

Na sequência, analisamos o comportamento assintótico em $r \rightarrow \infty$, para o qual os campos tem a seguinte forma

$$1-g \sim r^{-1/2} e^{-\beta r} \quad , \quad a \sim r^{1/2} e^{-\beta r} \quad , \quad A_0 \sim r^{-1/2} e^{-\beta r} , \quad (2.98)$$

que é o comportamento esperado para vórtices do tipo ANO, onde o parâmetro β está relacionado com a extensão espacial dos vórtices no espaço sendo dado por

$$\beta = ev\Lambda^{1/2} \sqrt{\frac{\beta_1 \pm \beta_2}{\Sigma}} , \quad (2.99)$$

onde

$$\beta_1 = (1 + \lambda_r) + \Delta (1 - s) , \quad (2.100)$$

$$(2.101)$$

$$\beta_2 = \sqrt{[(1 + \lambda_r) - \Delta (1 - s)]^2 - 4\Delta (\kappa_{0\theta})^2} , \quad (2.102)$$

são números reais e positivos. Para β_2 , a condição $4\Delta (\kappa_{0\theta})^2 \leq [(1 + \lambda_r) - \Delta (1 - s)]^2$, deve ser satisfeita para termos β real. Os sinais serão utilizados do seguinte modo: $+$ ($-$) para $(1 + \lambda_r) - \Delta (1 - s) > 0$ (< 0).

Portanto, verificamos as condições de contorno no infinito como sendo

$$g(\infty) = 1 \quad , \quad a(\infty) = 0 \quad , \quad A_0(\infty) = 0 . \quad (2.103)$$

Observamos que para $\kappa_{0\theta} = 0$, a equação (2.99) recupera a escala de massa de vórtices BPS eletricamente descarregados

$$\beta = ev\Lambda^{1/2} \sqrt{\frac{2}{1 - s}} , \quad (2.104)$$

os quais foram obtidos na referência [31].

Por outro lado, quando $\beta_2 = 0$, o coeficiente de paridade ímpar pode ser expresso em termos dos coeficientes de paridade par

$$\kappa_{0\theta} = \pm \frac{|1 + \lambda_r - \Delta (1 - s)|}{2\sqrt{\Delta}} , \quad (2.105)$$

e a escala de massa pode ser escrita como

$$\beta = ev\Lambda^{1/2} \sqrt{\frac{4\Delta}{(1 + \lambda_r) + \Delta (1 - s)}} . \quad (2.106)$$

Outra possibilidade interessante aparece fazendo $s = 0$ e $\lambda_r = 0$ na equação (2.99), isto é, podemos considerar nulos os coeficientes eletromagnéticos de paridade par, obtendo

$$\beta = ev\Lambda^{1/2} \sqrt{\frac{1 + \Delta \pm \sqrt{(1 - \Delta)^2 - 4\Delta (\kappa_{0\theta})^2}}{1 + (\kappa_{0\theta})^2}} , \quad (2.107)$$

com sinal $+$ ($-$) para $1 - \Delta > 0$ (< 0), respectivamente. Esta situação também fornece soluções de vórtices do tipo ANO quando a condição

$$(1 - \Delta)^2 \geq 4\Delta (\kappa_{0\theta})^2 , \quad (2.108)$$

for satisfeita. Observamos que, na ausência de VL no setor de Higgs ($\Delta = 1$) (veja Ref. [32]) é impossível obter vórtices ANO quando s e λ_r são nulos, porque a escala de massa (2.107) torna-se um número complexo.

2.2.4 Análise numérica

Utilizando a mesma transformação de escala e redefinições dos campos realizada em (2.52) e fazendo $\kappa_{0\theta} \rightarrow \kappa$, as equações BPS e a lei de Gauss na forma adimensional são reescritas de seguinte forma

$$g' = \pm \frac{ag}{\rho} , \quad (2.109)$$

$$-\frac{a}{\rho} = \pm \frac{(1 - g^2)}{(1 - s)} - \frac{\kappa}{(1 - s)} A_0' , \quad (2.110)$$

$$(1 + \lambda_r) \left(A_0'' + \frac{A_0'}{\rho} \right) - \kappa \frac{(\rho B)'}{\rho} = 2\Delta g^2 A_0 . \quad (2.111)$$

Observamos que para a transformação $\kappa \rightarrow -\kappa$, as soluções mudam da seguinte maneira $g \rightarrow g$, $a \rightarrow a$, $\omega \rightarrow -\omega$.

A densidade de energia BPS adimensional

$$\mathcal{E}_{BPS}(\rho) = (1 - s) B^2 + 2 \left(\frac{ag}{\rho} \right)^2 + 2\Delta (gA_0)^2 + (1 + \lambda_r) (A_0')^2 , \quad (2.112)$$

deverá ser sempre positivo-definida, levando a $s < 1$, $\Delta > 0$, $\lambda_r > -1$.

Uma configuração para vórtices no modelo de MH CPT-par

Consideramos a seguinte configuração para resolver numericamente as equações adimensionais (2.109)-(2.111):

$$\lambda_r = 0 \quad , \quad s = 0 \quad , \quad \kappa = \frac{\Delta - 1}{2\sqrt{\Delta}} \quad , \quad \Delta > 0, \quad (2.113)$$

onde escolhemos $\beta_2 = 0$ em (2.99) para definir κ em termos de Δ . Neste caso as condições de contorno ficam expressas da seguinte forma:

$$g(0) = 0 \quad , \quad a(0) = n \quad , \quad A_0'(0) = \frac{2(\Delta - 1)\sqrt{\Delta}}{(1 + \Delta)^2}, \quad (2.114)$$

$$g(\infty) = 1 \quad , \quad a(\infty) = 0 \quad , \quad A_0(\infty) = 0.$$

Sob as condições específicas analisadas para esta configuração a densidade de energia BPS é escrita da seguinte maneira na sua forma adimensional

$$\mathcal{E} = B^2 + 2 \left(\frac{ag}{\rho} \right)^2 + 2\Delta (gA_0)^2 + (A_0')^2, \quad (2.115)$$

que é positivo-definida para todo $\Delta > 0$.

A escala de massa β para esta configuração é dada por

$$\beta = 2\sqrt{\frac{\Delta}{(1 + \Delta)}}, \quad (2.116)$$

e vemos que para $\Delta \ll 1$, o defeito atinge o seu valor assintóticos lentamente, e quando $\Delta \sim 1$, o comportamento é próximo ao dos perfis de MH (veja a seguir as Figs. 2.8–2.14, linha sólida preta) devido a que $\beta \rightarrow \sqrt{2}$, ou seja, a escala de massa do modelo de MH. Por outro lado, quando $\Delta \rightarrow \infty$, a escala de massa adquire o seu valor máximo $\beta \rightarrow 2$ (veja nas figuras 2.8–2.14, linha sólida azul).

A seguir, descrevemos os perfis obtidos a partir das soluções numéricas das Eqs. (2.109)-(2.111) sob as condições de contorno (2.114). Sem perda de generalidade vamos fixar $n = 1$. Devido a que a densidade de energia BPS (2.115) é definida positiva para $\Delta > 0$, consideramos duas regiões $0 < \Delta < 1$ (linhas verdes) e $\Delta > 1$ (linhas vermelhas) nas quais o comportamento das soluções é diferentes. As soluções são sempre comparadas com os perfis de modelo de MH (linha preto sólida).

A figura 2.8 mostra os perfis do campo de Higgs. Para $\Delta \ll 1$, eles são muito largos e atingem o seu valor assintótico lentamente. Mas quando $\Delta \rightarrow 1$, os perfis são mais estreitas e atingem o estado de vácuo mais rapidamente. Para $0 \leq \Delta \leq 1$, os perfis são limitados pela solução usual de MH $\Delta = 1$ (linha preta sólida). Para $\Delta > 1$, os perfis são mais largos do que para o modelo de MH, mas este incremento é limitado pelo perfil obtido quando $\Delta \rightarrow \infty$ (linha azul sólida).

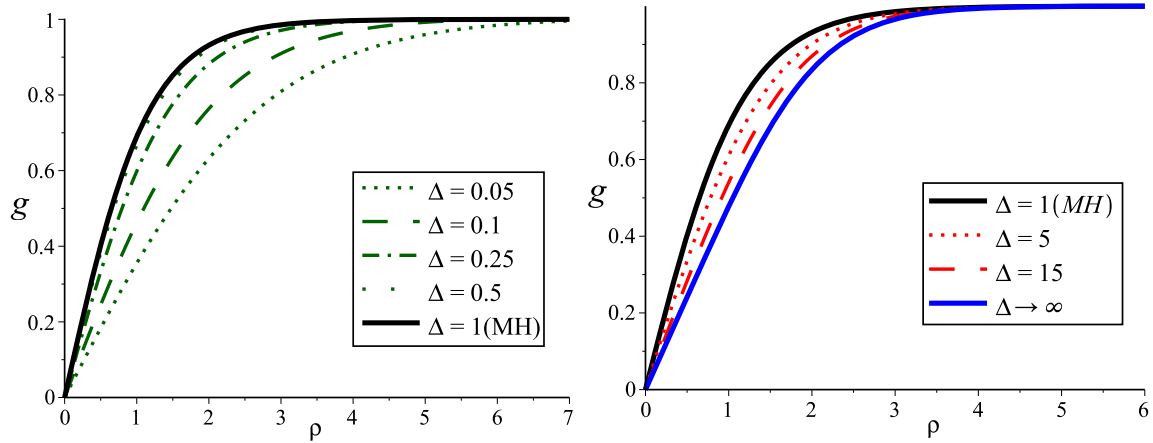


Figura 2.8: Campo de Higgs $g(\rho)$ para $0 \leq \Delta \leq 1$ à esquerda e para $\Delta \geq 1$ à direita para $n = 1$.

Figura 2.9 descreve os perfis do potencial vetor. Para $0 < \Delta < 1$, os perfis são mais largos quando $\Delta \rightarrow 0$, e mais estreitos quando $\Delta \rightarrow 1$. O máximo estreitamento é atingido em $\Delta = 1$, onde o modelo de MH (linha preta sólida) é recuperado. Para $\Delta > 1$, os perfis se tornam mais largos à medida que Δ aumenta, mas este incremento é limitado quando $\Delta \rightarrow \infty$ (linha azul sólida).

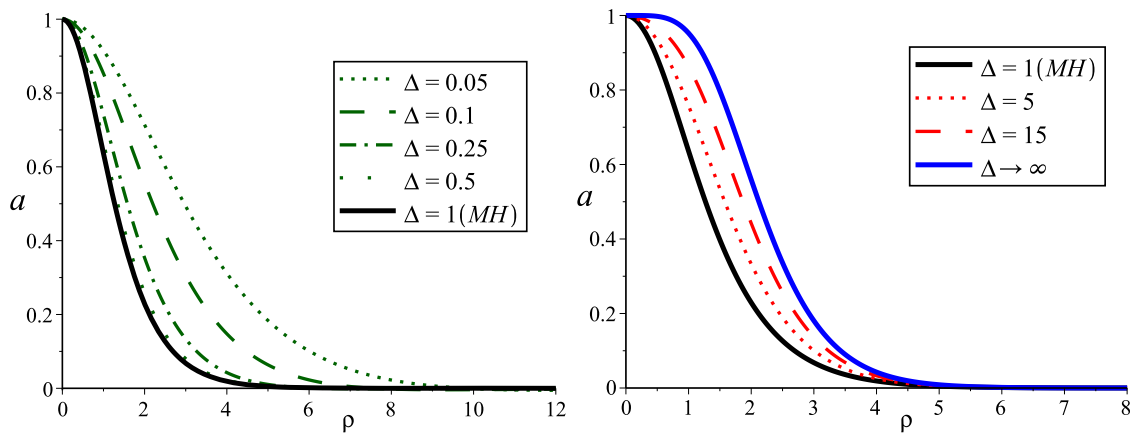


Figura 2.9: Potencial vetor $a(\rho)$ para $0 \leq \Delta \leq 1$ à esquerda e para $\Delta \geq 1$ à direita para $n = 1$.

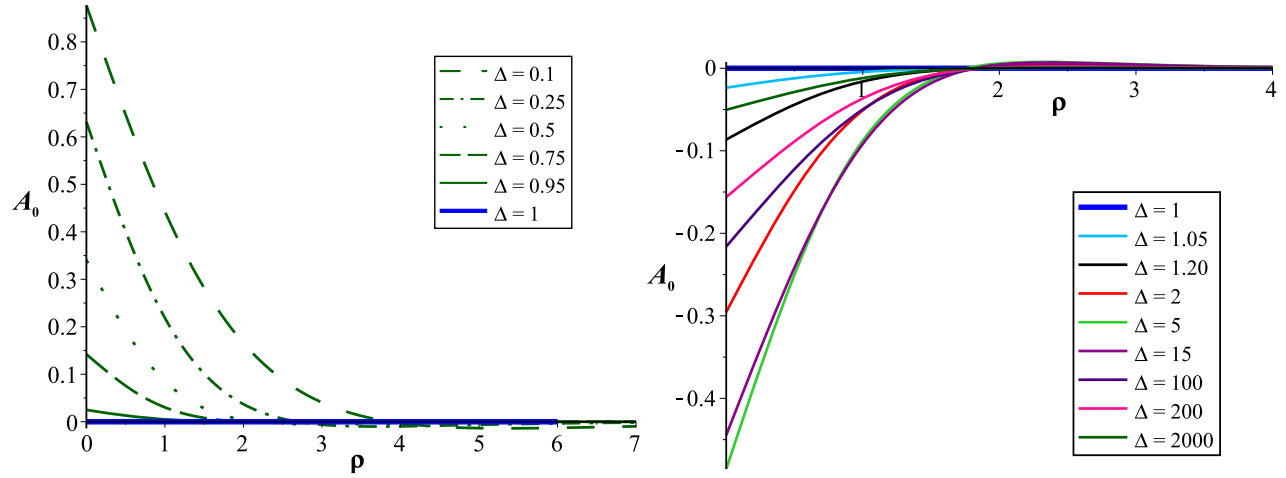


Figura 2.10: Potencial elétrico $A_0(\rho)$ para $0 \leq \Delta \leq 1$ à esquerda e para $\Delta \geq 1$ à direita, $n = 1$.

A figura 2.10 mostra os perfis para o potencial elétrico $A_0(\rho)$. Observamos que o potencial elétrico atinge seu valor máximo na origem quando $\Delta \rightarrow 0$. À medida que o valor do parâmetro Δ aumenta o valor na origem diminui. Para $\Delta = 1$, reculeramos o modelo eletricamente neutro de MH. Na figura à direita, à medida que Δ aumenta o valor do potencial elétrico na origem aumenta até um certo limite. Para valores de Δ acima deste limite o valor do potencial elétrico na origem se aproxima gradativamente a zero.

A figura 2.11 mostra os perfis para o campo elétrico, sendo estes *lumps* centrados na origem, cujas amplitudes são dadas pela Eq. (2.114). Os perfis adquirem valores negativos quando $0 < \Delta < 1$, sendo o seu valor mínimo $-1/2$, quando $\Delta = 3 - 2\sqrt{2} \sim 0.172$, e são positivos para $\Delta > 1$, sendo o seu valor máximo $1/2$, quando $\Delta = 3 + 2\sqrt{2} \sim 5.828$. O campo elétrico é nulo quando $\Delta \rightarrow 0, 1, \infty$.

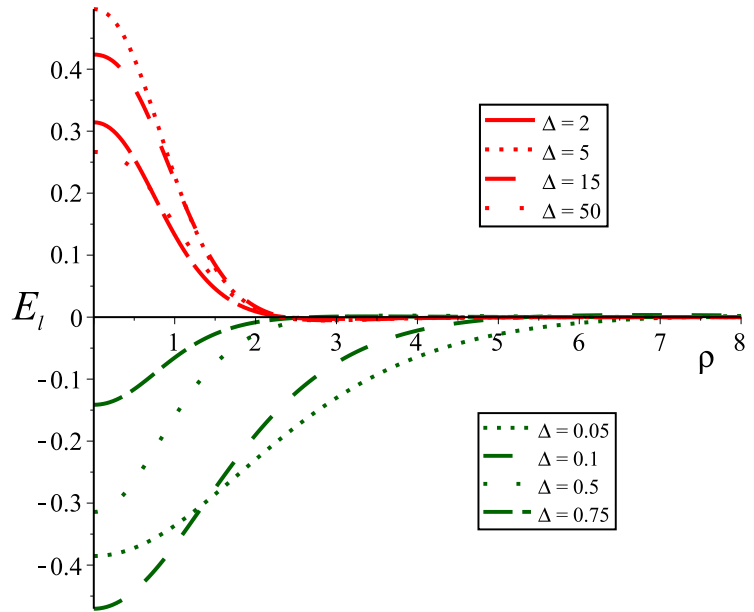


Figura 2.11: Campo elétrico $E_l(\rho) = -A'_0(\rho)$, $n = 1$.

Os perfis para o campo magnético são mostrados na Fig. 2.12, cujas amplitudes na origem são dadas por $4\Delta/(\Delta + 1)^2$. Para valores entre $0 < \Delta \leq 1$ (linhas verdes), eles são *lumps* centrados na origem com amplitudes crescentes para Δ crescente, cujo valor máximo é alcançado para $\Delta = 1$ (modelo MH). Para $\Delta > 1$, a amplitude diminui quando Δ aumenta continuamente. Um facto interessante é observada em torno de $\Delta \sim 6$: o formato de *lumps* do campo magnético começa se deformar, transformando-se em um perfil em forma de anel. No limite $\Delta \rightarrow \infty$, os perfis tem valor nulo na origem, de tal modo que os anéis se assemelham aos dos modelos de CSH e MCSH.

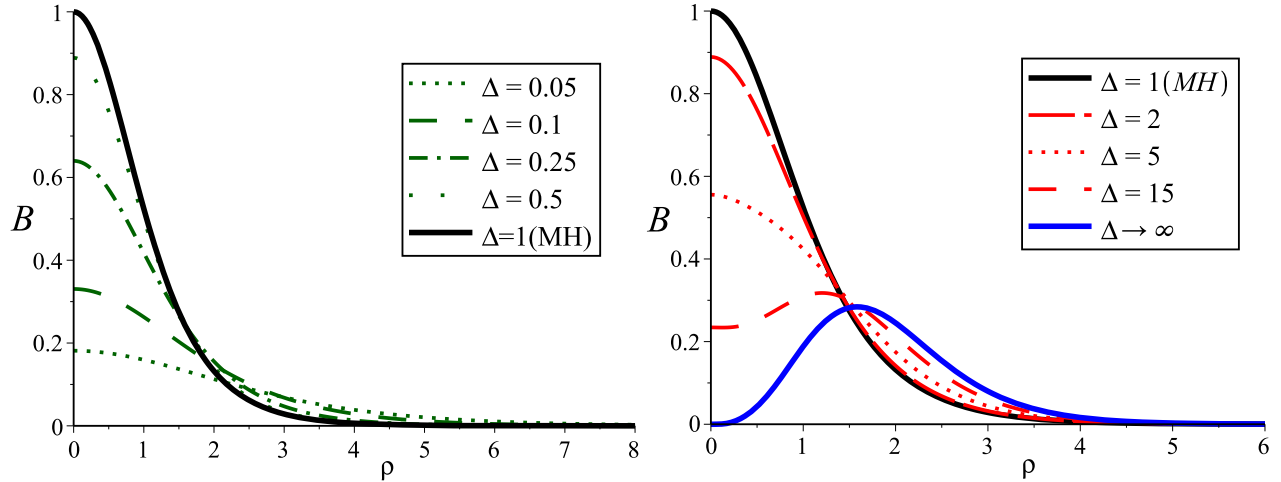


Figura 2.12: Campo magnético $B(\rho)$ para $0 \leq \Delta \leq 1$ à esquerda e para $\Delta \geq 1$ à direita para $n = 1$.

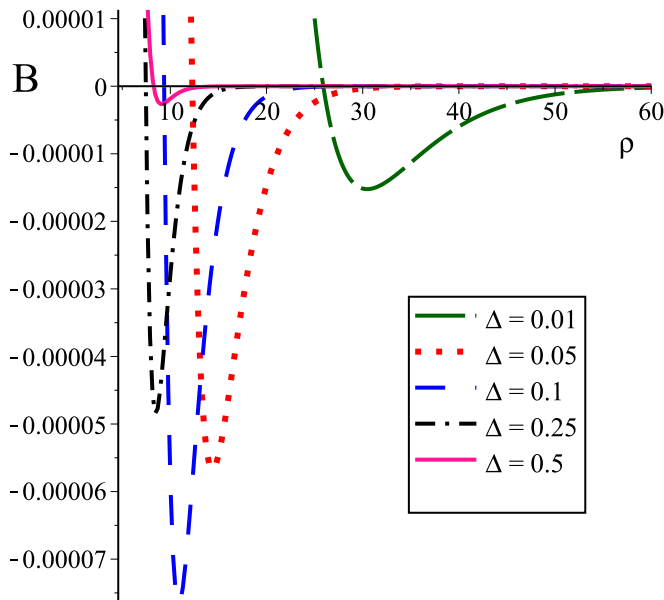


Figura 2.13: Inversão de campo magnético.

O modelo apresenta inversão de fluxo magnético localizada quando $0 \leq \Delta < 1$, tal como é mostrado na Fig. 2.13, onde foi realizado um zoom para os perfis nos valores $0.01 \leq \Delta \leq 0.5$. Pode-se observar claramente a inversão de fluxo magnético localizada, a qual é mais acentuada para valores de $\Delta < 0.5$. Para $\Delta > 0.5$, tal inversão não existe. Esta peculiaridade também foi observada no modelo de MH com violação de Lorentz somente no setor de gauge [32]. Desta maneira, podemos dizer que a inversão de fluxo magnético localizada é um efeito próprio dos termos CPT par de violação de Lorentz.

A figura 2.14 apresenta os perfis para a densidade de energia BPS, os quais são semelhantes aos do campo magnético devido à relação direta entre energia e fluxo magnético. Para $0 < \Delta < 1$, eles são *lumps* centrados na origem cuja amplitude aumenta na medida que Δ aumenta, atingindo o seu valor máximo em $\Delta = 1$, o qual reproduz a densidade de energia BPS do modelo MH. Para $\Delta > 1$, os *lumps* tem suas amplitudes diminuídas e em torno $\Delta \sim 6$, eles se transformam em anéis. Tal comportamento de anel é mantido para todos os valores de $\Delta > 6$, e suas amplitudes na origem diminuem sempre que Δ aumenta continuamente, de tal modo que no limite $\Delta \rightarrow \infty$, a amplitude é ~ 0.46 (mas para $n > 1$, a amplitude na origem é zero). O comportamento em forma de anel, semelhante aos modelos de CSH e MCSH é um efeito interessante de violação de Lorentz no setor de Higgs.

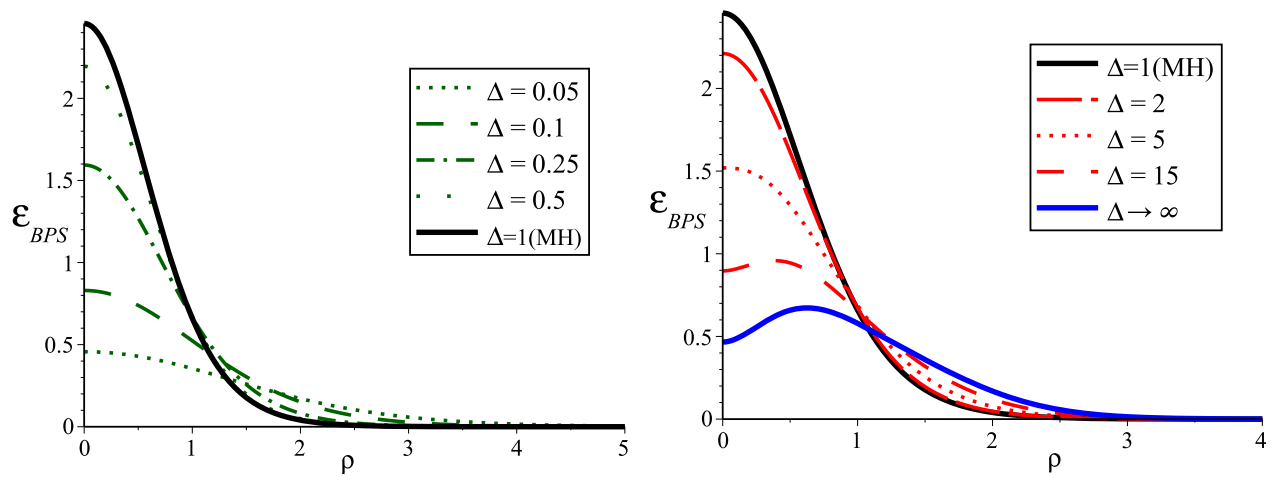


Figura 2.14: Densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$ para $n = 1$.

Analisaremos a continuação o efeito causado pela utilização de um número de vorticidade com um valor de $n \neq 1$. Especificamente, escolhemos o número de vorticidade $n = 3$ e apresentamos os perfis para o campo magnético e para a densidade de energia BPS na figura 2.15 a seguir:

Nos perfis para o campo magnético, podemos observar que para valores grandes de Δ , os perfis começam-se espalhar e formam anéis. Vemos que à medida que o valor de Δ aumenta, a intensidade do campo magnético na origem diminui. Vale aqui lembrar que no modelo de Maxwell-Higgs usual, os perfis para o campo magnético sempre apresentam o formato de *lumps* centrados na origem, independentemente do valor de n . Portanto a formação de anéis nos perfis do campo magnético é uma consequência exclusiva da introdução dos parâmetros de violação de Lorentz no setor de Higgs. No limite $\Delta \rightarrow \infty$, recuperamos o comportamento usual para vórtices de MH onde o perfil adquire forma de *lump*. Nos perfis para a densidade de energia observamos que o comportamento se repete, ou seja, à medida que Δ aumenta a intensidade dos vórtices diminui na origem e formam-se anéis cada vez mais espalhados do centro.

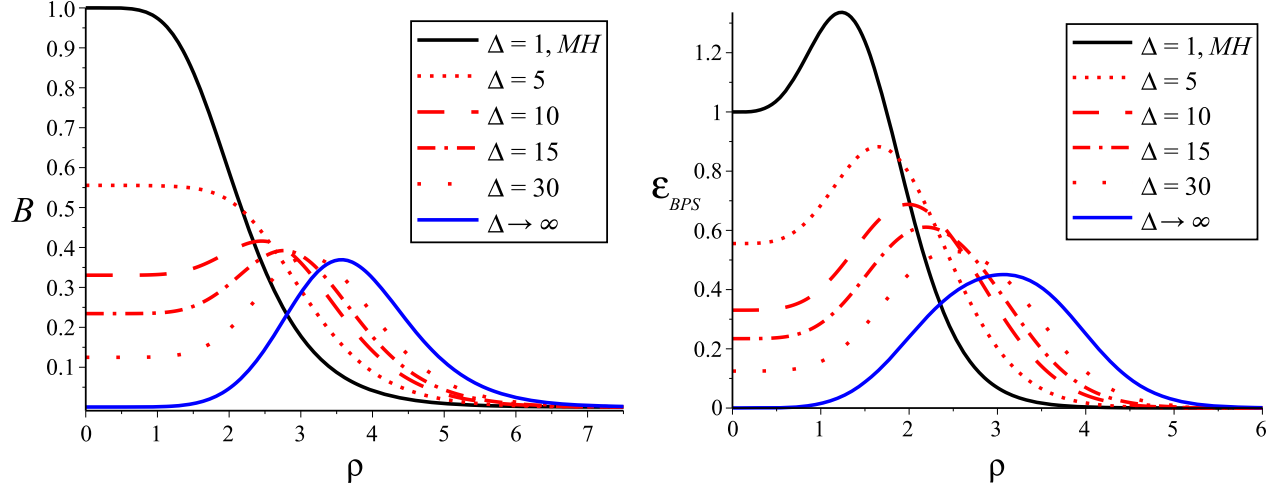


Figura 2.15: Campo magnético $B(\rho)$ à esquerda e densidade de energia $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$ à direita para $n = 3$.

2.3 Comentários e conclusões

Efetuamos uma análise abrangente sobre a formação de configurações auto-duais ou BPS portadoras de campo elétrico no contexto do Modelo Padrão Estendido. Dois casos foram estudados separadamente. Em primeiro lugar, estudamos o modelo Abelian de MH suplementado com o termo de CFJ no setor eletromagnético e um termo CPT-par no setor de Higgs. O segundo caso analisado foi também o modelo Abelian de MH, mas desta vez suplementado com termos CPT-par tanto no setor de Higgs como no setor fotônico. Verificamos que para suportar soluções de BPS eletricamente carregadas os modelos originais devem ser modificados através da introdução de um campo escalar neutro Ψ , com dinâmica adequada. Este procedimento é semelhante ao que acontece no modelo de MCSH. Não obstante, existem algumas diferenças entre as soluções CPT-ímpar e CPT-par: No caso CPT-ímpar, tanto a densidade de carga como a carga total são não nulas, no caso CPT-par, a densidade de carga é diferente de zero, mas a carga elétrica total é nula. Outro resultado importante envolve o fluxo magnético, que além de ser proporcional ao *winding number*, também depende explicitamente nos coeficientes de violação de Lorentz pertencentes ao setor de Higgs, tal como apresentado nas equações. (2.35) e (2.92). Este resultado foi obtido, em primeiro lugar, no contexto de vórtices BPS não carregadas no MPE [31], e parece ser um efeito geral produzido pelo termo CPT-par do setor de Higgs.

Uma das observações já feitas em Ref.[31] é a mudança no *ansatz* para vórtices (2.27) descrevendo os perfis dos campos de gauge e de Higgs. Este é um fato importante porque a condição de contorno satisfeita pelo campo de gauge na origem [ver Eqs. (2.114) e (2.45)] é modificada pelo termo de violação de Lorentz pertencente ao setor de Higgs. Sem a devida modificação no *ansatz*, as soluções das equações auto-duais não seriam topológicas nem satisfariam a condição

primordial de possuírem energia finita. Tais alterações nas condições de contorno do campo de gauge, são cruciais para a nova característica apresentada pelo fluxo magnético quantizado, ou seja, a sua dependência nos coeficientes de VL no setor de Higgs.

Foi observado, a partir do estudo de diferentes limites nos coeficientes de VL no parâmetro de massa que a presença de VL no setor de Higgs permite interpolar vórtices CPT-ímpar entre perfis muito largos para $0 < \Delta < 1$, para outros mais localizadas, quando $\Delta \rightarrow 1$. Para $1 \leq \Delta < \infty$, os perfis passam de soluções do modelo de MCSH ($\Delta = 1$) para soluções de MH ($\Delta \rightarrow \infty$). Para os vórtices CPT-par, os perfis na região $0 < \Delta \leq 1$, são mais largos e mais espalhados à medida que Δ decresce e para este caso o valor $\Delta = 1$, representa soluções de vórtices no modelo de MH. Para $\Delta > 1$ e aumentando os valores de Δ , os perfis dos vórtices estão confinados entre o modelo de MH (linha preta sólida) e o perfil obtido quando ($\Delta \rightarrow \infty$) (linha azul sólida). Um fato interessante nos vórtices CPT-par é o aparecimento de perfis em forma de anel (para o campo magnético e a densidade de energia BPS) para valores suficientemente grandes de parâmetro Δ , como explicitamente mostrado nas figuras. 2.12 e 2.14, respectivamente. Uma outra particularidade encontrada foi a inversão localizada de fluxo magnético, a qual pode também ser observada na ausência de VL no setor de Higgs na Ref. [32]. Esta propriedade parece ser um efeito típico de termos CPT-par do setor fotônico.

Uma observação acerca de considerar grandes valores para coeficientes de violação de Lorentz: No contexto do MPE, os parâmetros de VL devem ser suficientemente pequenos, no entanto, como a positividade de energia é preservada sempre que $\Delta > 0$, podemos considerar grandes valores de Δ dentro de um modelo efetivo que descreve a eletrodinâmica de um possível meio material.

Neste contexto, também podemos comentar acerca da implicação destes modelos com violação de Lorentz na Física dos materiais supercondutores. Os novos materiais, que apresentem supercondutividade de alta temperatura, possuem também anisotropias, sendo constituídos a maior parte destes por estruturas em camadas. O modelo de GL mais simples acontece para um supercondutor uniaxial, cuja densidade de energia livre é escrita como

$$\mathcal{F} = \frac{B^2}{8\pi} + \alpha |\phi|^2 + \frac{\beta}{2} |\phi|^2 + \gamma_{jk} \left(i\hbar \partial_j \phi^* - \frac{2e}{c} A_j \phi^* \right) \left(-i\hbar \partial_k \phi - \frac{2e}{c} A_k \phi \right), \quad (2.117)$$

onde β é uma constante e α depende da temperatura, mudando o seu sinal na temperatura crítica $T = T_c$. No funcional de energia (2.117) γ_{jk} é um tensor constante acoplado aos eixos do cristal.

Vale destacar que é possível estabelecer uma conexão entre os modelos com VL cujas densidades de energia são dadas pelas equações (2.9) e (2.70), com a energia livre (2.117) descrevendo um supercondutor a altas temperaturas. A ligação entre estes modelos é fornecida pelo termo $[\delta_{ij} - (k_{\phi\phi})_{ij}] (D_i \phi)^* (D_j \phi)$, que permite relacionar a matriz $\delta_{ij} - (k_{\phi\phi})_{ij}$, com o tensor γ_{jk} . Como pode ser observado em ambos os modelos com VL, os coeficientes não dependem da

temperatura, como acontece no modelo fenomenológico de Ginzburg-Landau. As possíveis contribuições para a supercondutividade, podem ser obtidas por meio do estudo dos limites não-relativísticos a temperatura finita, de ambos os modelos com VL aqui abordados. Dita abordagem permitiria analisar, por exemplo, os efeitos da violação de Lorentz na energia livre de London, no efeito Josephson, na interação de vórtices com a estrutura cristalina (pinagem intrínseca de vórtices) e a resistividade, entre outros.

Desenvolvimentos futuros podem ser orientados para analisar a influência da violação Lorentz na existência de defeitos topológicos no setor não-Abeliano do Model Padrão – ou seja, monopólos magnéticos e vórtices não-abelianos no contexto Modelo Padrão Estendido.

Parte II

Configurações auto-duais no modelo de gauge sigma $O(3)$ com violação da simetria de Lorentz

No início dos anos sessenta Gell-Mann e Levy [44], com base nos trabalhos de J. Schwinger [45] e J. C. Polkinghorne [46], construíram uma teoria de campo renormalizável para os novos mésons escalares σ com spin isotópico nulo, sendo esta teoria denominada de modelo sigma. Na segunda parte do mesmo trabalho, Gell-Mann e Levy consideraram a possibilidade de modificar o modelo sigma supondo-o composto por píons, em lugar de descrever uma nova partícula, dando origem assim ao modelo sigma não-linear ($\text{NL}\sigma\text{M}$)(do inglês: non linear sigma model). Historicamente, o modelo sigma não-linear foi a primeira teoria de campos onde os valores do campo ficaram restritos a uma *variedade*. Posteriormente o modelo foi dotado com a simetria $O(3)$, sendo denominado por $O(3)\text{NL}\sigma\text{M}$ [47]. Este modelo ganhou especial atenção e foi amplamente aplicado no estudo de diferentes aspectos da teoria de campos e na física da matéria condensada [1].

O modelo sigma $O(3)$ também chama a atenção devido a que fornece soluções do tipo sólitons topológicos, cujas equações são exatamente integráveis no limite BPS. Este modelo, no entanto, tem um sério inconveniente devido a que suas soluções são invariantes de escala, impossibilitando a sua implementação na descrição de partículas localizadas [48]. Uma forma de quebrar a invariância de escala do modelo foi realizada adicionando o sub-grupo $U(1)$, juntamente com um potencial que provia a quebra espontânea de simetria. Este mecanismo foi proposto em [49], onde foi introduzido um termo de Maxwell controlando a dinâmica do campo de gauge. Desta forma o modelo fornece soluções do tipo sólitons topológicos com fluxo magnético quantizado. Um mecanismo semelhante foi implementado em [50], onde o setor de gauge é controlado pelo termo Abelian de Chern-Simons, implicando no aparecimento de sólitons topológicos e não-topológicos. Estas duas abordagens citadas anteriormente, produzem sólitons topológicos infinitamente degenerados num determinado setor topológico. Tal degenerescência foi contornada nos trabalhos [51, 52], por meio da introdução de um potencial de auto-interação possuindo mínimos com quebra espontânea de simetria. Este potencial induz uma nova topologia, na qual, um círculo infinito do espaço físico é mapeado na circunferência equatorial do espaço interno, de modo que os sólitons são classificadas pelo primeiro grupo homotópico $\Pi_1(S_1) = \mathbb{Z}$.

O modelo sigma $O(3)$ também tem sido abordado com a dinâmica do campo de gauge sendo regida em conjunto, pelos termos de Maxwell e de Chern-Simons [53], nestes trabalhos soluções de vórtices BPS axialmente simétricos, foram encontradas e analisadas. Um outro estudo também foi realizado envolvendo o campo de gauge acoplado não-minimamente, no qual foram encontradas soluções de vórtices eletricamente carregados [54], revelando fluxo magnético quantizado somente para o setor topológico.

A continuação faremos uma revisão de modelos de gauge Abelianos acoplados com o modelo $O(3)$ sigma. Estamos interessados em apresentar modelos que apresentem estruturas auto-duais, cujas equações BPS serão posteriormente projetadas utilizando o *ansatz* usuais para

vórtices. As equações auto-duais de primeira ordem serão resolvidas numericamente e suas soluções apresentadas na forma de gráficos, para sua posterior análise e comparação. Especificamente, em esta revisão abordaremos os modelos Abelianos de gauge Maxwell $O(3)$ sigma ($M\sigma M$) e Maxwell-Chern-Simons $O(3)$ sigma ($MCS\sigma M$).

Após dita revisão apresentamos a nossa contribuição, na qual analisamos os efeitos da violação da invariância de Lorentz nas soluções tipo-vórtices auto-duais, no modelo sigma $O(3)$. Nesta direção, um trabalho pioneiro foi realizado na citação [55], no qual os efeitos dos termos CPT -par de quebra da invariância de Lorentz foram estudados. Em [55] foi verificado que os coeficientes de paridade ímpar são os responsáveis pelo acoplamento entre os setores elétrico e magnético, resultando em configurações de vórtices auto-duais apresentando fluxo magnético e densidade de carga não nula. Na mesma linha que no trabalho anteriormente citado, estudamos neste capítulo, os efeitos da introdução do termo CPT -ímpar de CFJ, ao mesmo tempo em que um termo de paridade CPT -par foi incluído no setor do campo sigma.

A implementação adequada do formalismo BPS permite encontrar as equações auto-duais, cujas soluções correspondem a um ponto de mínima energia, sendo esta, proporcional à carga topológica. Em particular estudamos as soluções das equações auto-duais para vórtices axialmente simétricos.

Os perfis das soluções são resolvidos numericamente e comparados com as soluções invariantes de Lorentz. Alguns dos limites do modelo são discutidos e ao final do capítulo apresentamos nossas observações e conclusões.

Capítulo 3

Configurações auto-duais nos modelos sigma $O(3)$ interagindo com um campo de gauge: Uma revisão

3.1 Modelo de gauge Maxwell-sigma $O(3)$

O modelo de gauge de Maxwell $O(3)$ sigma (M σ M) introduzido nos Refs.[49, 52] é definido em $(1 + 2)$ -dimensões pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D^\mu\vec{\phi} \cdot D_\mu\vec{\phi} - U , \quad (3.1)$$

onde A_μ é o campo de gauge e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ o tensor Abelian do campo de Maxwell. O campo $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ que descreve o modelo $O(3)$ sigma não linear ($O(3)$ NL σ M), forma um tripleto de campos escalares reais que definem um vetor no espaço interno, possuindo norma fixa e unitária,

$$\phi_a = \hat{n}_a \cdot \vec{\phi} \quad (a = 1, 2, 3) , \quad (3.2)$$

$$\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = \phi_a \phi_a = 1 , \quad (3.3)$$

onde $\hat{n}_a$ forma uma base ortonormal no espaço interno. O grupo abeliano $U(1)$ é acoplado minimamente pela seguinte derivada covariante

$$D_\mu\vec{\phi} = \partial_\mu\vec{\phi} - A_\mu\hat{n}_3 \times \vec{\phi} , \quad (3.4)$$

sendo $\hat{n}_3$ um vetor unitário ao longo da direção-3 no espaço do campo sigma.

As equações de Euler-Lagrange para o modelo (3.1) são encontradas após a introdução do vínculo em (3.3), para posteriormente aplicar a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Desta forma encontramos a equação de movimento para o campo de gauge

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu , \quad (3.5)$$

onde a densidade conservada de corrente é expressa na forma

$$j^\mu = \hat{n}_3 \cdot \left(\vec{\phi} \times D^\mu \vec{\phi} \right) . \quad (3.6)$$

Lembrando que estamos interessados em soluções estacionárias escrevemos o funcional da densidade de energia independente do tempo

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(D_i \vec{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} B^2 + U , \quad (3.7)$$

onde o campo magnético é definido por $B = F_{12}$. Para aplicarmos o formalismo de Bogomol'nyi utilizamos a seguinte identidade

$$\frac{1}{2} \left(D_j \vec{\phi} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(D_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jk} \vec{\phi} \times D_k \vec{\phi} \right)^2 \pm \vec{\phi} \cdot \left(D_1 \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi} \right) , \quad (3.8)$$

e inserindo-la na expressão (3.7) escrevemos o funcional de energia na forma

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4} \left(D_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jk} \vec{\phi} \times D_k \vec{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 \pm B \sqrt{2U} \pm \vec{\phi} \cdot \left(D_1 \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi} \right) . \quad (3.9)$$

Realizando a correspondente operação vetorial o último termo na equação anterior (3.9) é escrito da seguinte maneira

$$\vec{\phi} \cdot \left(D_1 \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi} \right) = \vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right) + \epsilon_{ik} \partial_i (A_k \phi_3) - \phi_3 B , \quad (3.10)$$

por último, substituímos (3.10) em (3.9), o que leva a seguinte expressão para a densidade de energia

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{4} \left(D_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jk} \vec{\phi} \times D_k \vec{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 \\ & \pm B \left(\sqrt{2U} - \phi_3 \right) \pm \vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right) \pm \epsilon_{ik} \partial_i (A_k \phi_3) . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para que o campo magnético fique univocamente definido em (3.11), impomos que o potencial satisfaça a condição

$$\sqrt{2U} - \phi_3 = 0 , \quad (3.12)$$

obtendo desta maneira o potencial adotado em [52], carregando quebra espontânea de simetria.

$$U(\phi) = \frac{1}{2}\phi_3^2. \quad (3.13)$$

Notamos que o valor mínimo do potencial acontece quando

$$\phi_3 = 0 \quad \text{e} \quad \phi_1^2 + \phi_2^2 = 1, \quad (3.14)$$

que corresponde a quebra espontânea de simetria em (3.1).

Introduzindo o potencial (3.13) na densidade de energia (3.11) podemos escrever a energia total do modelo da seguinte maneira

$$E = 4\pi T_0 + \int d^2x \left[\frac{1}{2} (B \mp \phi_3)^2 \pm \vec{\phi} \cdot (\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi}) \pm \epsilon_{ik} \partial_i (A_k \phi_3) \right], \quad (3.15)$$

onde foi introduzida a expressão para a carga topológica do modelo,

$$T_0 = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left[\vec{\phi} \cdot (\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi}) + \epsilon_{ik} \partial_i (A_k \phi_3) \right], \quad (3.16)$$

sendo esta, a integral espacial da componente temporal da corrente topológica do modelo [52], dada por

$$K_\mu = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\mu\alpha\beta} \left[\vec{\phi} \cdot (D^\alpha \vec{\phi} \times D^\beta \vec{\phi}) + F^{\alpha\beta} \phi_3 \right], \quad (3.17)$$

sendo K_μ uma corrente conservada, $\partial^\mu K_\mu = 0$. Vale aqui ressaltar que a corrente topológica K_μ não está relacionada a uma quantidade conservada de Noether, mas sim ao caráter topológico dos campos.

Observamos que a utilização de um potencial com quebra espontânea de simetria (3.13) cria uma nova configuração topológica. Existe um resultado advindo da topologia que diz que todos os mapeamentos não-singulares (sem buracos), de uma superfície esférica S_2 em uma outra superfície esférica S_2 , podem ser classificados em setores homotópicos [1]. Mapeamentos dentro de um mesmo setor homotópico, podem ser continuamente deformados uns nos outros. Cada uma destas classes homotópicas pode ser caracterizada por um número inteiro. No modelo sigma usual, as soluções topológicas são caracterizadas pela segunda homotopia, denotada por: $\Pi_2(S_2) = \mathbb{Z}$, a qual caracteriza um mapeamento dos campos desde o espaço físico bidimensional para o espaço interno bidimensional (superfície esférica). Por outro lado, no modelo aqui apresentado, as soluções topológicas estáveis são classificadas de acordo com a primeira homotopia, $\Pi_1(S_1) = \mathbb{Z}$, onde um círculo infinito no espaço plano é mapeado no círculo equatorial da esfera do espaço interno, formando desta forma um *manifold* no espaço interno que representa o vácuo do potencial.

Esta nova topologia do espaço influencia os possíveis valores para a carga topológica dada pela equação (3.16). Isto pode ser observado da seguinte maneira: O segundo termo do lado direito em (3.16) se anula na fronteira para o limite $\phi_3 \rightarrow 0$. Já o primeiro termo do lado

direito na equação (3.16) fornece o número de vezes que o espaço físico envolve o espaço interno esférico.

A partir de estas considerações observamos que a energia (3.15) será limitada inferiormente, sendo este valor

$$E \geq \pm 4\pi T_0 . \quad (3.18)$$

O limite para a energia será saturado quando os campos satisfaçam as equações de Bogomol'ny que minimizam a energia em cada setor topológico

$$D_i \vec{\phi} \pm \epsilon_{ij} \vec{\phi} \times D_j \vec{\phi} = 0 , \quad (3.19a)$$

$$B = \pm \phi_3 . \quad (3.20)$$

A seguir analisamos as equações BPS em um *ansatz* particular para a descrição de vórtices axialmente simétricos. Tendo em vista que o espaço interno apresenta simetria esférica, é conveniente adotar uma parametrização esférica para descrever o campo sigma, juntamente com a parametrização usual para o campo de gauge, dependendo unicamente na coordenada radial

$$\phi_1 = \sin g(r) \cos n\theta , \quad \phi_2 = \sin g(r) \sin n\theta , \quad \phi_3 = \cos g(r) , \quad A_\theta = -\frac{1}{r} [a(r) - n] . \quad (3.21)$$

As funções $g(r)$ e $a(r)$, são bem comportadas e satisfazem as seguintes condições nas fronteiras:

$$g(0) = 0 , \quad a(0) = n , \quad (3.22)$$

$$g(\infty) = \frac{\pi}{2} , \quad a(\infty) = 0 .$$

Os valores das funções nas fronteiras são compatíveis com as configurações para o vácuo do potencial no limite $r \rightarrow \infty$, ao mesmo tempo que prevêm soluções regulares, ou seja, livres de divergências para os campos em $r = 0$. Lembramos que n é um inteiro não nulo correspondendo à vorticidade das soluções auto-duais, mais conhecido em inglês como *winding number*.

O campo magnético B , projetado no *ansatz* (3.21), é reescrito como

$$B(r) = -\frac{a'}{r} , \quad (3.23)$$

e as equações BPS (3.19a) e (3.20), projetadas no *ansatz* (3.21), adquirem a seguinte forma:

$$g' = \pm \frac{a}{r} \sin g , \quad (3.24)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm \cos g . \quad (3.25)$$

Inserindo as equações BPS do modelo em (3.15), juntamente com as condições de contorno dadas em (3.22), podemos realizar a integração na carga topológica (3.16)

$$T_0 = \frac{n}{2} , \quad (3.26)$$

e com este resultado escrevemos a energia BPS total do modelo (3.18)

$$E_{BPS} = \pm 2\pi n , \quad (3.27)$$

onde observamos a sua quantização topológica, sendo seu valor proporcional à vorticidade n . Ao implementar o *ansatz*, encontramos também a seguinte expressão positivo-definida para a densidade de energia BPS

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + \left(\frac{a}{r} \sin g \right)^2 . \quad (3.28)$$

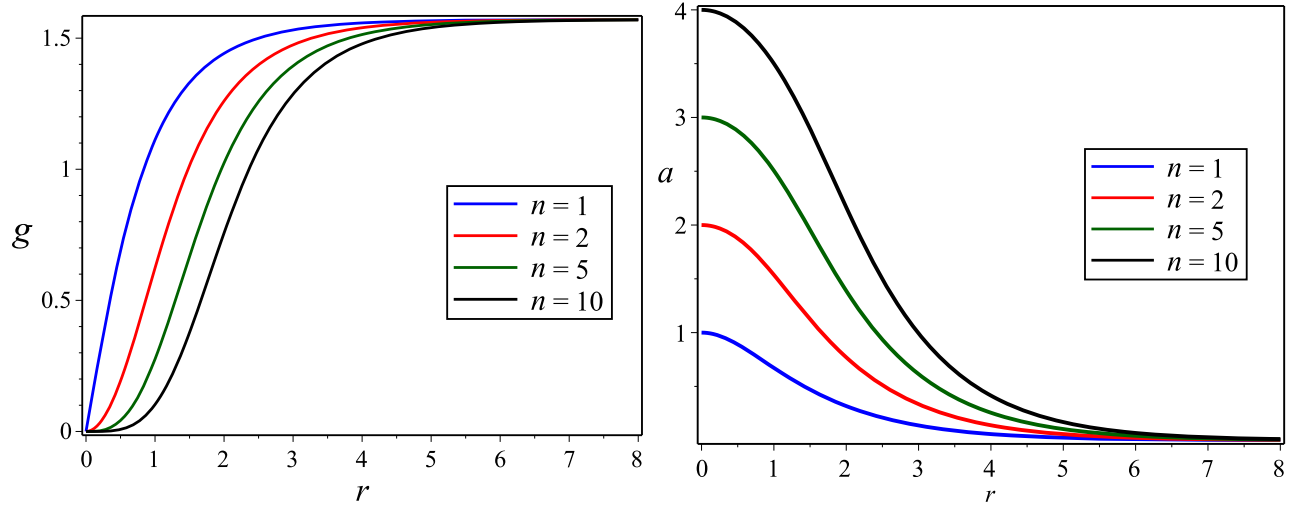


Figura 3.1: Perfis para o campo sigma $g(r)$ (esquerda) e para o campo de gauge $a(r)$ (direita) para diferentes valores de n .

Apresentamos na figura 3.1 os perfis para o campo sigma e para o campo de gauge para diferentes valores de n . Nos perfis para o campo sigma (à esquerda) observamos que à medida que n aumenta os perfis se afastam da origem gradualmente. Nos perfis para o campo de

gauge (à direita), observamos que à medida que n aumenta a intensidade do campo na origem é aumentada, como é de se esperar, a partir das condições de contorno (3.22).

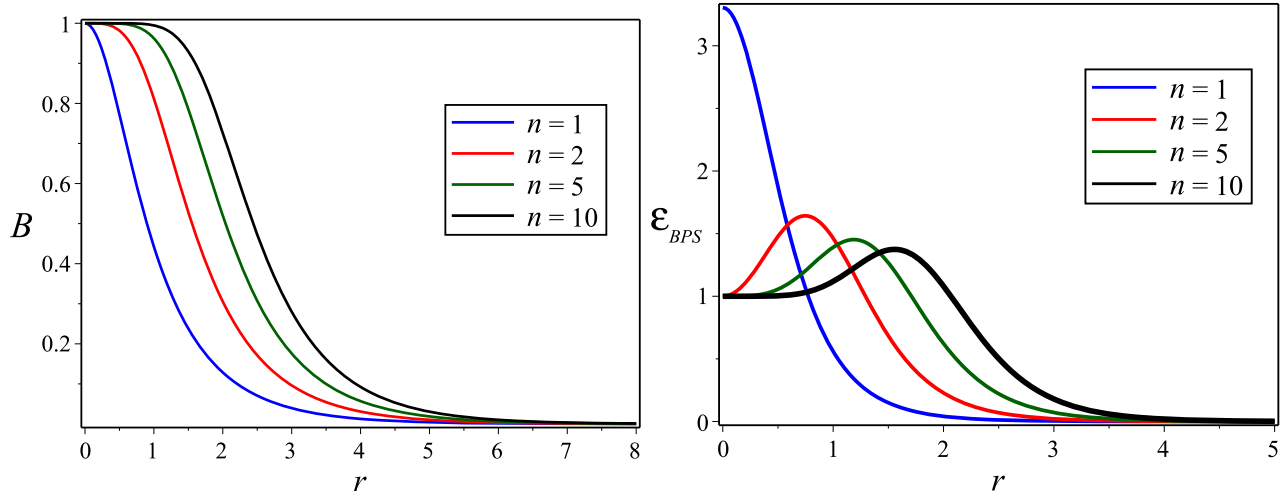


Figura 3.2: Perfis para o campo magnético $B(r)$ (esquerda) e para a densidade de energia BPS para diferentes valores de n .

Na figura 3.2 à esquerda, apresentamos os perfis do campo magnético para diferentes valores de n . Diferentemente ao que foi observado no caso do campo de gauge, vemos que o campo magnético conserva o mesmo valor na origem, independentemente do número de vorticidade. Pode ser notado que à medida que n aumenta, os perfis para o campo magnético se afastam da origem e ocupam uma área maior. Nos perfis para a densidade de energia BPS vemos que para valores de $n > 1$ os perfis tem sempre o mesmo valor na origem, e estes perdem a forma de *lumps*. Observamos também que a intensidade máxima dos vórtices diminui à medida que n aumenta e os perfil apresentam-se mais espalhados, ocupando uma área maior.

3.2 Modelo de gauge Maxwell-Chern-Simons-sigma $O(3)$

O segundo modelo a ser apresentado nesta revisão é o modelo de gauge de Maxwell-Chern-Simons $O(3)$ sigma (MCS σ M), dado pela densidade lagrangiana a seguir

$$\mathcal{L}_{(2+1)} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\kappa\epsilon^{\beta\rho\sigma}A_{\beta}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}D^{\alpha}\vec{\phi}\cdot D_{\alpha}\vec{\phi} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\Psi\partial^{\mu}\Psi - \frac{1}{2}[(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2]\Psi^2 - U, \quad (3.29)$$

onde o parâmetro κ corresponde à massa de Chern-Simons, $U(|\phi|, \Psi)$ é o potencial que provê soluções auto-duais e Ψ é um campo escalar neutro. Como foi mostrado na seção (1.2.2) introduzimos também neste modelo o campo escalar neutro Ψ para obter as configurações auto-duais.

Como usualmente acontece em modelos contendo o termo de Chern-Simons, pode ser observado através da lei de Gauss estacionária dada a seguir

$$\partial_k \partial_k A_0 - \kappa B = [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] A_0 , \quad (3.30)$$

que o gauge temporal ($A_0 = 0$), não será satisfeito. Como resultado de termos $A_0 \neq 0$, as estruturas topológicas advindas a partir de (3.29), deverão ser eletricamente carregadas.

Com o intuito de encontrarmos soluções auto-duais para este modelo, escrevemos a densidade de energia estacionária

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \left(D_i \vec{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} B^2 + U + \frac{1}{2} (\partial_j A_0)^2 + \frac{1}{2} (\partial_j \Psi)^2 \\ & + \frac{1}{2} [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] (A_0)^2 + \frac{1}{2} [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] \Psi^2 , \end{aligned} \quad (3.31)$$

e introduzindo a identidade (3.8), escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{4} \left(D_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jk} \vec{\phi} \times D_k \vec{\phi} \right)^2 \pm \vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right) \pm \epsilon_{ik} \partial_i (A_k \phi_3) \mp \phi_3 B + \frac{1}{2} B^2 + U \\ & + \frac{1}{2} (\partial_j A_0)^2 + \frac{1}{2} (\partial_j \Psi)^2 + \frac{1}{2} [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] (A_0)^2 + \frac{1}{2} [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] \Psi^2 . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Com o intuito de implementarmos o procedimento de Bogomol'ny, utilizamos a lei de Gauss estacionária (3.30) para substituir o último termo na equação anterior (3.32), podendo desta maneira escrever a expressão para a densidade de energia como uma soma de termos quadráticos, mais uma derivada total e um termo proporcional à carga topológica (3.16)

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{4} \left(D_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jk} \vec{\phi} \times D_k \vec{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 \pm \vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right) \pm \epsilon_{ik} \partial_i (A_k \phi_3) \\ & \pm B \left(\sqrt{2U} - \phi_3 + \kappa \Psi \right) + \frac{1}{2} [\partial_j A_0 \pm \partial_j \Psi]^2 + \frac{1}{2} [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] [A_0 \pm \Psi]^2 \mp \partial_j (\Psi \partial_j A_0) . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Observamos que o primeiro termo na segunda linha em (3.33) está impedindo a aplicação do formalismo BPS. Este inconveniente será contornado anulando o termo proporcional ao campo magnético. De esta maneira encontramos o potencial específico que fornece as soluções auto-duais

$$U(\phi) = \frac{1}{2} (\phi_3 - \kappa \Psi)^2 . \quad (3.34)$$

Com a expressão para o potencial BPS em mãos, escrevemos a energia total do modelo da seguinte forma

$$\begin{aligned}
E = 4\pi T_0 + \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} [B \mp (\phi_3 - \kappa\Psi)]^2 \pm \vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right) \pm \epsilon_{ik} \partial_i (A_k \phi_3) \right. \\
\left. + \frac{1}{2} [\partial_j A_0 \pm \partial_j \Psi]^2 + \frac{1}{2} [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] [A_0 \pm \Psi]^2 \mp \partial_j (\Psi \partial_j A_0) \right\} .
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Observamos que a energia em (3.35) está limitada inferiormente

$$E \geq \pm 4\pi T_0 , \tag{3.36}$$

e este limite estará saturado quando as relações dadas a seguir sejam satisfeitas:

$$D_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jm} \vec{\phi} \times D_m \vec{\phi} = 0 , \tag{3.37}$$

$$B = \pm (\phi_3 - \kappa\Psi) , \tag{3.38}$$

$$\partial_j A_0 \pm \partial_j \Psi = 0 , \tag{3.39}$$

$$A_0 \pm \Psi = 0 . \tag{3.40}$$

Levando em consideração que a relação $A_0 = \mp \Psi$, satisfaz simultaneamente es equações (3.39) e (3.40), obtemos as equações BPS do modelo MCS σ ,

$$D_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jm} \vec{\phi} \times D_m \vec{\phi} = 0 , \tag{3.41}$$

$$B = \pm \phi_3 + \kappa A_0 , \tag{3.42}$$

que saturam a energia, quando a relação $A_0 = \mp \Psi$, é satisfeita. Nesta configuração a energia das configurações auto-duais é dada por

$$E_{BPS} = 4\pi T_0 . \tag{3.43}$$

Inserindo as equações (3.41) e (3.42) em (3.35) podemos integrar a energia utilizando o *ansatz* (3.21) juntamente com as condições de contorno (3.22), obtemos a energia BPS do modelo

$$E_{BPS} = \pm 2\pi n . \tag{3.44}$$

Observamos em (3.44) que a quantização da energia BPS se deve ao caráter topológico dos campos.

Também observamos que a partir da lei de Gauss estacionária do modelo (3.30), obtemos uma relação de proporcionalidade entre a carga total e o fluxo magnético,

$$Q = \kappa \Phi . \quad (3.45)$$

Levando em consideração que estamos interessados em soluções para vórtices, utilizamos o *ansatz* axialmente simétrico apresentados em (3.21). A partir da projeção em duas dimensões, podemos escrever as equações BPS e a lei de Gauss do modelo da seguinte forma

$$g' = \pm \frac{a}{r} \sin g , \quad (3.46)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm \cos g + \kappa A_0 , \quad (3.47)$$

$$A_0'' + \frac{A_0'}{r} - \kappa B = A_0 \sin^2 g , \quad (3.48)$$

juntamente com a densidade de energia BPS, denotada explicitamente de forma positiva

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + \left(\frac{a}{r} \sin g \right)^2 + (A_0 \sin g)^2 + (A_0')^2 . \quad (3.49)$$

A continuação, apresentamos na forma de perfis de vórtices, a solução numérica para as equações BPS, para diferentes valores n .

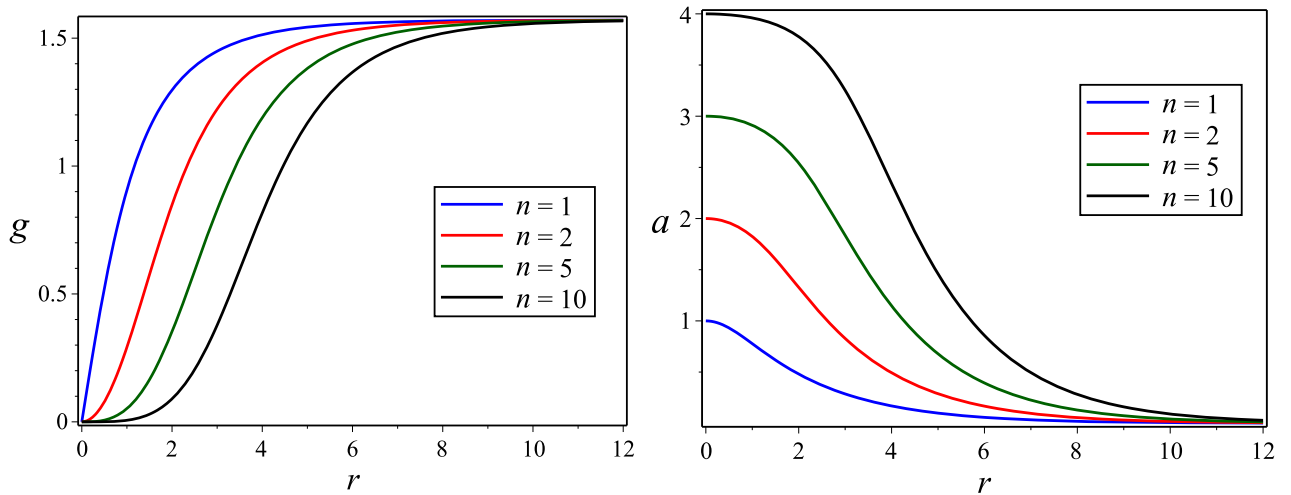


Figura 3.3: Perfis para o campo sigma $g(r)$ (esquerda) e para o campo de gauge $a(r)$ (direita) para diferentes valores de n .

No gráfico à esquerda na figura 3.3, observamos que o campo sigma se afasta radialmente da origem à medida que n aumenta, deixando um “buraco” que será preenchido pelo campo de gauge, como podemos observar na figura à direita em 3.3. Observamos também que a intensidade do campo de gauge na origem aumenta à medida que n aumenta, como é de se esperar devido as condições nas fronteiras (3.22). Observamos que aumentando a vorticidade, os perfis ocupam uma área maior com maior intensidade para o campo de gauge.

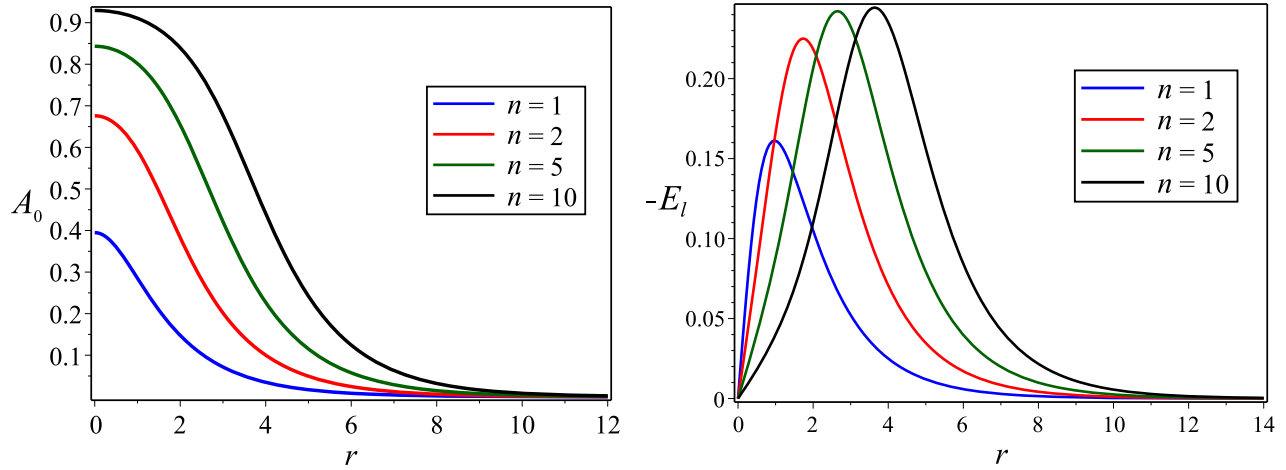


Figura 3.4: Perfis para o potencial escalar $A_0(r)$ (esquerda) e para o campo elétrico $E_l(r)$ (direita) para diferentes valores de n .

Apresentamos à esquerda da figura 3.4 os perfis para o potencial elétrico dos vórtices. Pode ser visto que à medida que n aumenta a intensidade do potencial elétrico é aumentada na origem. Já no perfil para o campo elétrico, figura à direita em 3.4, os perfis se anulam na origem independentemente do valor de n . Observamos também que à medida que n aumenta, a intensidade do campo elétrico é aumentada, e este é deslocado radialmente afastando-se da origem, espalhando-se e ocupando uma área maior.

Na figura 3.5 encontramos uma grande diferencia em relação ao modelo $M\sigma$ apresentado anteriormente.

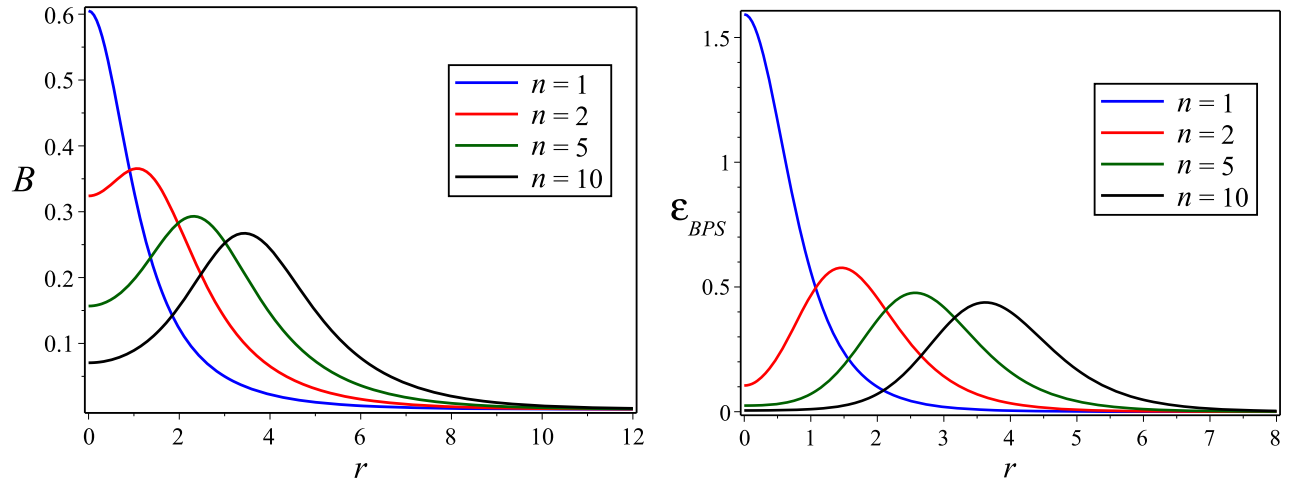


Figura 3.5: Perfis para o campo magnético $B(r)$ (esquerda) e para a densidade de energia BPS $\epsilon_{BPS}(r)$ para diferentes valores de n .

Especificamente observamos no gráfico à esquerda que os perfis para o campo magnético diminuem sua intensidade na origem à medida que n aumenta, tendo seu valor máximo para $n = 1$. No gráfico à direita na figura 3.5 observamos que para valores de $n > 1$ os perfis para a densidade de energia BPS formam anéis, sendo estes cada vez mais espalhados e com intensidades menores à medida que n aumenta.

Capítulo 4

Modelo de Maxwell-sigma $O(3)$ CPT -ímpar

Apresentamos a seguir a nossa contribuição original deste capítulo, onde abordamos o modelo Abeliano de Maxwell $O(3)$ sigma, no qual modificamos a dinâmica do setor de gauge com o termo CPT -ímpar de Carroll-Field-Jackiw [19], e também modificamos o setor sigma, incluindo um termo de paridade CPT -par de quebra da invariância de Lorentz. Trabalhamos com a seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_{(1+3)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(k_{AF})_{\mu}A_{\nu}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}D^{\mu}\vec{\phi} \cdot D_{\mu}\vec{\phi} + \frac{1}{2}(k_{\phi\phi})^{\mu\nu}D_{\mu}\vec{\phi} \cdot D_{\nu}\vec{\phi} - U, \quad (4.1)$$

onde o quadri-vetor $(k_{AF})_{\alpha}$, representa o vetor de fundo de CFJ com dimensão de massa +1. O tensor adimensional $(k_{\phi\phi})^{\mu\nu}$ é real e simétrico, contendo os parâmetros de violação de Lorentz CPT -par no setor sigma. O potencial U , ainda a ser determinado, descreve um tipo de interação conveniente para a obtenção de configurações auto-duais. Este modelo também pode ser visto como uma extensão dimensional do modelo de $MCS\sigma$ (3.29) incrementado pelo termo CPT -par de violação de Lorentz no setor sigma.

A partir da densidade lagrangiana (4.1), a equação de movimento para o campo de gauge é dada por

$$\partial_{\nu}F^{\nu\mu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\rho\sigma}(k_{AF})_{\alpha}F_{\rho\sigma} = j^{\mu}, \quad (4.2)$$

onde definimos a densidade de corrente conservada dentro do contexto com violação da invariância de Lorentz

$$j^{\mu} = [g^{\mu\nu} + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu}]\hat{n}_3 \cdot (\vec{\phi} \times D_{\nu}\vec{\phi}), \quad (4.3)$$

que, como pode ser observado, é a contrapartida da densidade de corrente usual, na ausência de VL apresentada em (3.6).

A equação do movimento para o campo sigma é dada pela seguinte expressão

$$[g^{\mu\nu} + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu}] D_\mu D_\nu \vec{\phi} = \left(\vec{\phi} \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{\phi}} \right) \vec{\phi} - \frac{\partial U}{\partial \vec{\phi}} + [g^{\mu\nu} + (k_{\phi\phi})^{\mu\nu}] \left(\vec{\phi} \cdot D_\mu D_\nu \vec{\phi} \right) \vec{\phi} . \quad (4.4)$$

De maneira análoga ao procedimento adotado no primeiro capítulo, introduzimos ao modelo (4.1) uma dinâmica para o campo escalar neutro Ψ . Portanto, reescrevemos a densidade de lagrangiana do nosso modelo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} (k_{AF})_\alpha A_\beta F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} D^\alpha \vec{\phi} \cdot D_\alpha \vec{\phi} + \frac{1}{2} (k_{\phi\phi})^{\alpha\beta} D_\alpha \vec{\phi} \cdot D_\beta \vec{\phi} \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi - \frac{1}{2} [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] \Psi^2 - U(|\phi|, \Psi) , \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $U(|\phi|, \Psi)$ é um potencial conveniente para prover configurações auto-duais.

Estamos interessados nas configurações topológicas auto-duais, decorrentes da versão (1+2)-dimensional do modelo (4.1). Para cumprir este propósito, vamos implementar a projeção no plano fazendo: $\partial_3 \vec{\phi} = 0$, $A_3 = 0$ e $\partial_3 A_\mu = 0$ com $\mu = 0, 1, 2$. Desta forma, a partir da equação de movimento (4.2), a lei de Gauss planar estacionária é expressa por

$$\partial_j \partial_j A_0 - (k_{AF})_3 B = [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] A_0 , \quad (4.6)$$

e a lei de Ampère planar estacionária tem a seguinte forma

$$\epsilon_{ij} \partial_j B - (k_{AF})_3 \epsilon_{ij} \partial_j A_0 = -[\delta_{ij} - (k_{\phi\phi})_{ij}] \hat{n}_3 \cdot (\vec{\phi} \times D_j \vec{\phi}) . \quad (4.7)$$

As equações (4.6) e (4.7) mostram claramente que o vetor de fundo de CFJ $(k_{AF})_3$ é o responsável pelo acoplamento entre os setores elétrico e magnético, permitindo em princípio, a ocorrência de configurações eletricamente carregadas. Observamos que o coeficiente $(k_{AF})_3$ nas leis de Gauss e Ampère, cumpre o mesmo papel que a massa de Chern-Simons em (1+2)-dimensões no modelo de MCS σ .

4.1 Formalismo BPS

Estamos interessados em encontrar para este modelo as equações diferenciais de Bogomol'ny de primeira ordem, cujas soluções são configurações de mínima energia e que ao mesmo tempo, resolvem as equações de segunda ordem de Euler-Lagrange. Para realizar o procedimento BPS, primeiramente escrevemos a densidade de energia estacionária da versão (1+2)-dimensional do modelo (4.5), dada a seguir

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = & \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} - (k_{\phi\phi})_{ij} \right] D_i \vec{\phi} \cdot D_j \vec{\phi} + \frac{1}{2} B^2 + U + \frac{1}{2} (\partial_j A_0)^2 + \frac{1}{2} (\partial_j \Psi)^2 \\
& + \frac{1}{2} [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] (A_0)^2 + \frac{1}{2} [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] \Psi^2,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

que é definida positiva, enquanto

$$\delta_{jk} - (k_{\phi\phi})_{jk} > 0, \quad (k_{\phi\phi})_{00} > -1. \tag{4.9}$$

Com o intuito de avançar no procedimento de Bogomol'ny, definimos a seguinte transformação: $\tilde{D}_k \vec{\phi} = M_{kj} D_j \vec{\phi}$, a qual permite escrever

$$\left[\delta_{ij} - (k_{\phi\phi})_{ij} \right] D_i \vec{\phi} \cdot D_j \vec{\phi} = \tilde{D}_k \vec{\phi} \cdot \tilde{D}_k \vec{\phi}, \tag{4.10}$$

$$\tilde{D}_k \vec{\phi} \cdot \tilde{D}_k \vec{\phi} = M_{ki} M_{kj} D_i \vec{\phi} \cdot D_j \vec{\phi}, \tag{4.11}$$

sendo M_{ij} os elementos da matriz $\mathbb{M}$ englobando os parâmetros espaciais de VL no setor sigma, sendo definidos da seguinte forma

$$M_{ki} M_{kj} = \delta_{ij} - (k_{\phi\phi})_{ij}. \tag{4.12}$$

Com a ajuda da identidade apresentada a seguir (e desenvolvida explicitamente no Apêndice B), poderemos escrever a energia como uma soma de quadrados, para assim conseguir implementar o formalismo BPS,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \tilde{D}_k \vec{\phi} \cdot \tilde{D}_k \vec{\phi} = & \frac{1}{4} \left(\tilde{D}_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jm} \vec{\phi} \times \tilde{D}_m \vec{\phi} \right)^2 \mp (\det \mathbb{M}) \phi_3 B \\
& \pm (\det \mathbb{M}) \epsilon_{ik} \partial_i (A_k \phi_3) \pm (\det \mathbb{M}) \vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Desta forma, a densidade de energia (4.8) é expressa da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = & \frac{1}{4} \left(\tilde{D}_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jm} \vec{\phi} \times \tilde{D}_m \vec{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 + \frac{1}{2} (\partial_j A_0 \pm \partial_j \Psi)^2 \\
& \frac{1}{2} [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] [A_0 \pm \Psi]^2 \pm (\det \mathbb{M}) \left[\vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right) + \epsilon_{ik} \partial_i (A_k \phi_3) \right] \\
& \pm B \sqrt{2U} \mp (\det \mathbb{M}) \phi_3 B \mp (\partial_j \Psi) (\partial_j A_0) \mp [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] A_0 \Psi.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Multiplicando ambos os lados da lei de Gauss (4.6) por Ψ , os últimos dois termos na equação anterior são escritos por

$$\mp (\partial_j \Psi) (\partial_j A_0) \mp [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] A_0 \Psi = \mp \partial_j (\Psi \partial_j A_0) \pm (k_{AF})_3 B \Psi , \quad (4.15)$$

de modo que a densidade de energia pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{4} \left(\tilde{D}_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jm} \vec{\phi} \times \tilde{D}_m \vec{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(B \mp \sqrt{2U} \right)^2 + \frac{1}{2} (\partial_j A_0 \pm \partial_j \Psi)^2 \\ & + \frac{1}{2} [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] [A_0 \pm \Psi]^2 \pm (\det \mathbb{M}) \left[\vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right) + \epsilon_{ik} \partial_i (A_k \phi_3) \right] \\ & \pm B \left[\sqrt{2U} - (\det \mathbb{M}) \phi_3 + (k_{AF})_3 \Psi \right] \mp \partial_j (\Psi \partial_j A_0) . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Lembramos que estamos em busca de uma expressão para a densidade de energia, que seja descrita por uma soma de quadrados e derivadas totais. Para tal propósito, na última linha requeremos que o factor multiplicando o campo magnético seja nulo, o que conduz à forma adequada para o potencial BPS

$$U(|\phi|, \Psi) = \frac{1}{2} [(\det \mathbb{M}) \phi_3 - (k_{AF})_3 \Psi]^2 . \quad (4.17)$$

A integração do último termo na segunda linha em (4.16)

$$T_0 = \frac{(\det \mathbb{M})}{4\pi} \int d^2 x \left[\vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right) + \epsilon_{ik} \partial_i (A_k \phi_3) \right] , \quad (4.18)$$

fornece a carga topológica do modelo, a qual mostra a dependência nos coeficientes de violação de Lorentz pertencentes ao setor sigma [55]. Como também foi relatado em [55], a corrente topológica conservada é dada pela seguinte expressão,

$$K_\mu = \frac{(\det \mathbb{M})}{8\pi} \epsilon_{\mu\alpha\beta} \left[\vec{\phi} \cdot \left(D^\alpha \vec{\phi} \times D^\beta \vec{\phi} \right) + F^{\alpha\beta} \phi_3 \right] , \quad (4.19)$$

cuja componente K_0 , sempre que integrada ao longo do espaço, reproduz a carga topológica conservada (4.18).

Ao considerar os campos Ψ e A_0 indo para o valor zero no infinito, observamos que no último termo na equação (4.16) a integração fornece contribuição nula para a energia. Com estas observações, a energia total do modelo se torna

$$\begin{aligned} E = & 4\pi T_0 + \int d^2 x \frac{1}{2} \left\{ (B \mp [(\det \mathbb{M}) \phi_3 - (k_{AF})_3 \Psi])^2 + \frac{1}{4} \left(\tilde{D}_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jm} \vec{\phi} \times \tilde{D}_m \vec{\phi} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\partial_j A_0 \pm \partial_j \Psi)^2 + \frac{1}{2} [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] [A_0 \pm \Psi]^2 \right\} . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Esta equação nos permite estabelecer um limite inferior para a energia dado por

$$E \geq \pm 4\pi T_0 , \quad (4.21)$$

sendo proporcional à carga topológica. Este limite será atingido sempre que os campos satisfaçam as seguintes equações BPS:

$$\tilde{D}_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jm} \vec{\phi} \times \tilde{D}_m \vec{\phi} = 0 , \quad (4.22)$$

$$B = \pm [(\det \mathbb{M}) \phi_3 - (k_{AF})_3 \Psi] , \quad (4.23)$$

$$\partial_i A_0 \pm \partial_i \Psi = 0 , \quad (4.24)$$

$$A_0 \pm \Psi = 0 . \quad (4.25)$$

A condição $\Psi = \mp A_0$ satura as duas últimas equações, de modo que as configurações auto-duais são descritas somente pelas equações

$$\tilde{D}_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jm} \vec{\phi} \times \tilde{D}_m \vec{\phi} = 0 , \quad (4.26)$$

$$B = \pm (\det \mathbb{M}) \phi_3 + (k_{AF})_3 A_0 , \quad (4.27)$$

em conjunto com a lei de Gauss do modelo

$$\partial_j \partial_j A_0 - (k_{AF})_3 B = [1 + (k_{\phi\phi})_{00}] [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] A_0 . \quad (4.28)$$

Como pode ser claramente observado, ao fazermos nulos todos os parâmetros de violação de Lorentz, recuperamos as equações BPS do modelo de gauge sigma $O(3)$ (3.1). Do mesmo modo, como já foi mencionado ao começo deste capítulo, anulando os parâmetros de VL somente no setor sigma recuperamos o modelo de Maxwell-Chern-Simons $O(3)$ sigma (3.29) com a devida substituição $(k_{AF})_3 \rightarrow \kappa$. Além disso, a lei de Gauss (4.28) implica na seguinte relação de proporcionalidade

$$Q = \frac{(k_{AF})_3}{1 + (k_{\phi\phi})_{00}} \Phi , \quad (4.29)$$

entre a carga total (Q) das configurações auto-duais e o fluxo magnético total (Φ), definidos na forma

$$Q = - \int d^2x [(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2] A_0 , \quad (4.30)$$

$$\Phi = \int d^2x B . \quad (4.31)$$

4.2 Vórtices auto-duais no modelo de Maxwell-sigma $O(3)$ CPT-ímpar

Para termos energia finita, o campo $\vec{\phi}$ deve tender assintoticamente para uma configuração de mínimo do potencial, dado pela equação (4.17). Isto é alcançado seguindo o *ansatz* introduzido na referência [55], para vórtices axialmente simétricos na presença de violação de Lorentz,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sin g(r) \cos\left(\frac{n}{\Lambda}\theta\right) , & \phi_2 &= \sin g(r) \sin\left(\frac{n}{\Lambda}\theta\right) , \\ \phi_3 &= \cos g(r) , & A_\theta &= -\frac{1}{r} \left[a(r) - \frac{n}{\Lambda} \right] , & A_0 &= A_0(r) , \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde as funções, $g(r)$, $a(r)$ e $A_0(r)$ são bem comportadas e satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 , & a(0) &= \frac{n}{\Lambda} , & A'_0(0) &= 0 , \\ g(\infty) &= \frac{\pi}{2} , & a(\infty) &= 0 , & A_0(\infty) &= 0 . \end{aligned} \quad (4.33)$$

As condições de contorno para o potencial escalar (A_0) apresentadas em (4.33) serão mostradas explicitamente por meio do estudo do comportamento assintótico dos campos na origem e no infinito (vide Sec. 4.2.1). Estas condições de fronteira devem ser compatíveis com as configurações de vácuo do potencial para $r \rightarrow \infty$, ao mesmo tempo que fornecem soluções regulares em $r = 0$. A constante Λ é definida em termos dos parâmetros de violação de Lorentz pertencentes ao setor sigma,

$$\Lambda = \sqrt{\frac{1 - (k_{\phi\phi})_{\theta\theta}}{1 - (k_{\phi\phi})_{rr}}} . \quad (4.34)$$

No *ansatz* (4.32), o campo magnético B é dado por

$$B(r) = -\frac{a'}{r} , \quad (4.35)$$

e as equações BPS (4.26) e (4.27), projetadas no *ansatz* (4.32), adquirem a seguinte forma

$$g' = \pm \Lambda \frac{a}{r} \sin g , \quad (4.36)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm \eta \cos g + (k_{AF})_3 A_0 , \quad (4.37)$$

enquanto a lei de Gauss (4.28), fica representada da seguinte maneira

$$A_0'' + \frac{A_0'}{r} - (k_{AF})_3 B = \eta \Lambda \Delta A_0 \sin^2 g , \quad (4.38)$$

com os parâmetros Δ e η dados pelas expressões a seguir

$$\Delta = \frac{1 + (k_{\phi\phi})_{00}}{\eta \Lambda} , \quad (4.39)$$

$$\eta = \det \mathbb{M} \sqrt{[1 - (k_{\phi\phi})_{\theta\theta}] [1 - (k_{\phi\phi})_{rr}]} . \quad (4.40)$$

Podemos utilizar as equações BPS do modelo juntamente com a lei de Gauss para expressar a densidade de energia BPS como

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + \eta \Lambda \left(\frac{a}{r} \sin g \right)^2 + \eta \Lambda \Delta (A_0 \sin g)^2 + (A_0')^2 , \quad (4.41)$$

que será positivo-definida quando as condições $\eta, \Lambda, \Delta > 0$, sejam satisfeitas.

Substituindo o *ansatz* (4.32) e as condições de contorno (4.33) na equação (4.18), a carga topológica resultante assume o valor

$$T_0 = \frac{n}{2} \frac{\eta}{\Lambda} , \quad (4.42)$$

sendo esta quantizada e modificada pelos parâmetros de quebra da simetria de Lorentz no setor sigma.

Por outro lado, sob as condições de contorno (4.33), o fluxo magnético (4.31) e a carga elétrica (4.30) se tornam

$$\Phi = 2\pi \frac{n}{\Lambda} , \quad (4.43)$$

$$Q = 2\pi \frac{(k_{AF})_3}{\eta \Lambda \Delta} \frac{n}{\Lambda} , \quad (4.44)$$

sendo ambas proporcional à vorticidade.

A carga topológica (4.42) e o fluxo magnético (4.43) diferem dos modelos sem quebra da simetria de Lorentz, $T_0 = n/2$ e $\Phi = 2\pi n$, pelos fatores de violação de Lorentz η/Λ e $1/\Lambda$ respectivamente.

4.2.1 Comportamento dos campos nas fronteiras

A continuação estudamos o comportamento assintótico das funções escalares que parametrizam os campos do nosso modelo. Isto é realizado seguindo a técnica implementada da seção (1.2.3) a partir das equações BPS e a lei de Gauss (4.36-4.38) nos limites $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Perto da origem obtemos os seguintes comportamentos

$$g(r) \sim G_n r^n + \dots, \quad (4.45)$$

$$a(r) \sim \frac{n}{\Lambda} - \frac{[1 + (k_{AF})_3 A_0(0)]}{2} e r^2 + \dots, \quad (4.46)$$

$$A_0(r) \sim A_0(0) + \frac{[1 + (k_{AF})_3 A_0(0)]}{4} (k_{AF})_3 r^2 + \dots. \quad (4.47)$$

Observamos que a equação (4.46) justifica a implementação do *ansatz* modificado (4.33), e fornece o valor esperado para $a(0)$. A constante $A_0(0)$ em (4.47) é determinada numericamente para cada n . Por outro lado, a partir de (4.47) fica claro que o campo elétrico na origem deve ser nulo, $A'(0) = 0$, como foi visto na equação (4.33).

Para $r \rightarrow \infty$, as funções apresentam o seguinte comportamento assintótico:

$$g(r) \sim \frac{\pi}{2} - C_\infty \frac{e^{-mr}}{\sqrt{r}} + \dots, \quad (4.48)$$

$$a(r) \sim \frac{m C_\infty}{\Lambda} \sqrt{r} e^{-mr} + \dots, \quad (4.49)$$

$$A_0(r) \sim \frac{C_\infty (m^2 - \eta \Lambda)}{\Lambda (k_{AF})_3} \frac{e^{-mr}}{\sqrt{r}} + \dots, \quad (4.50)$$

onde C_∞ é uma constante positiva determinada numericamente. Portanto, vemos que os vórtices tem um comportamento similar aos vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen [6, 7], onde o parâmetro m , real e positivo, é dado pela seguinte expressão

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{(k_{AF})_3^2 + \eta \Lambda (1 + \sqrt{\Delta})^2} - \frac{1}{2} \sqrt{(k_{AF})_3^2 + \eta \Lambda (1 - \sqrt{\Delta})^2}. \quad (4.51)$$

Passamos a analisar o comportamento da massa dos campos, para isto estudamos alguns valores para os parâmetros de VL envolvidos na equação (4.51). Para $(k_{AF})_3$ fixo, o comportamento dos perfis dos vórtices é governado pelos coeficientes de VL pertencentes ao setor sigma. Em este cenário duas situações de interesse podem ser analisadas: a primeira ocorre para $\Delta = 1$, provendo

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{(k_{AF})_3^2 + 4\eta\Lambda} - \frac{1}{2} |(k_{AF})_3| , \quad (4.52)$$

sendo esta a massa que o modelo de MCS σ [53] teria, na presença de violação de Lorentz somente no setor sigma. Com efeito, para $\eta = \Lambda = 1$ (ausência de termos de LV no setor sigma), se torna

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{(k_{AF})_3^2 + 4} - \frac{1}{2} |(k_{AF})_3| , \quad (4.53)$$

que coincide com a massa do modelo de Maxwell-Chern-Simons $O(3)$ sigma [53].

Um outro limite a ser ressaltado acontece quando Δ tem valores suficientemente grandes ($\Delta \gg (k_{AF})_3$):

$$m \rightarrow \sqrt{\eta\Lambda} , \quad (4.54)$$

correspondendo à massa dos bósons no modelo de gauge $O(3)$ sigma da referência [55] com violação de Lorentz somente no setor sigma.

Uma outra situação de interesse acontece fixando os parâmetros de VL no setor sigma e consideramos valores suficientemente grandes de $(k_{AF})_3$, resultando em

$$m \rightarrow \frac{\eta\Lambda\sqrt{\Delta}}{(k_{AF})_3} , \quad (4.55)$$

correspondendo à massa que os vórtices auto-duais do modelo de Chern-Simons $O(3)$ sigma [50] teriam, considerando termos com violação de Lorentz somente no setor sigma. Neste limite, tomando $(k_{\phi\phi})_{\mu\nu} = 0$ ou $\eta = \Lambda = \Delta = 1$ conduz à massa do modelo invariante de Lorentz, $1/(k_{AF})_3$.

4.2.2 Análise numérica

A seguir, apresentamos os perfis obtidos a partir das soluções numéricas das equações (4.36-4.38), sob as condições de contorno (4.33), para o número de vorticidade $n = 1$. Para implementar esta análise, temos fixado os parâmetros de violação de Lorentz: $\Lambda = 1.25$, $\eta = 2$ e $(k_{AF})_3 = 1.5$, permitindo que o parâmetro Δ seja livre. Devido a que a densidade de energia (4.41) é definida positiva para $\Delta > 0$, consideramos duas regiões: $0 < \Delta < 1$ (linhas azuis), e $\Delta > 1$ (linhas laranja), nas quais o comportamento das soluções são diferentes.

Existem dois valores limites interessantes para Δ que permitem recuperar o comportamento de dois modelos conhecidos na presença de coeficientes de VL. O primeiro é $\Delta = 1$ (linha magenta sólida), cujos perfis correspondem ao modelo de Maxwell-Chern-Simons $O(3)$ sigma com violação de Lorentz somente no setor sigma (ver comentário depois da equação (4.52)). O segundo, é o limite para $\Delta \rightarrow \infty$ (linha preta sólida), que reproduz o modelo de gauge $O(3)$ sigma com violação de Lorentz somente no setor da sigma [55] (veja o comentário após a equação

(4.54)). Também temos realizado os perfis simétricos correspondentes aos seguintes modelos: (i) Maxwell-Chern-Simons $O(3)$ sigma (3.29) (linha verde contínua), com $\kappa = (k_{AF})_3 = 1.5$ e $(k_{\phi\phi})_{\mu\nu} = 0$, (ii) Gauge Maxwell $O(3)$ sigma (3.1) (linha vermelha sólida) que corresponde à ausência total de VL $[(k_{AF})_\mu = 0, (k_{\phi\phi})_{\mu\nu} = 0]$. Estes dois casos servirão como base de comparação para os perfis com violação de Lorentz.

A figura 4.1 descreve os perfil para o campo sigma. Para $0 < \Delta < 1$, os perfis se apresentam mais espalhados e alcançam o valor assintótico $\pi/2$ mais rapidamente quando $\Delta \rightarrow 0$ (linha azul). Por outro lado, para $\Delta > 1$, os perfis estreitam-se progressivamente para valores crescentes de Δ (linha laranja), o estreitamento máximos dos perfis é alcançado no limite $\Delta \rightarrow \infty$ (linha preta sólida). Portanto, para valores $\Delta > 1$ os perfis são confinados entre os modelos descritos por $\Delta = 1$ e $\Delta \rightarrow \infty$.

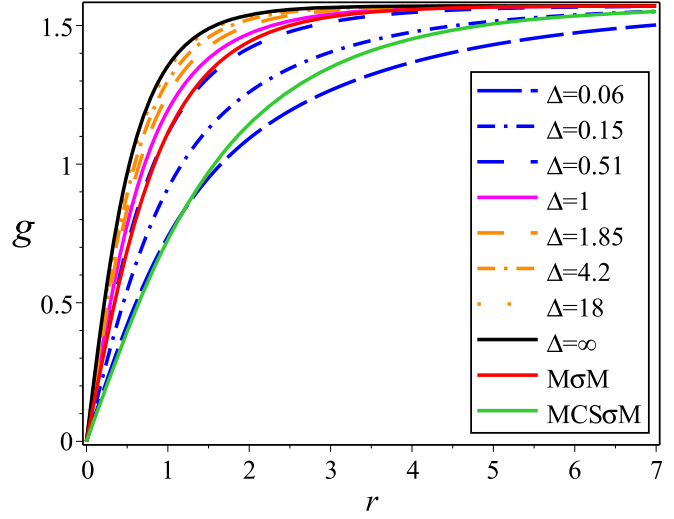


Figura 4.1: Campo sigma $g(r)$ para $n = 1$.

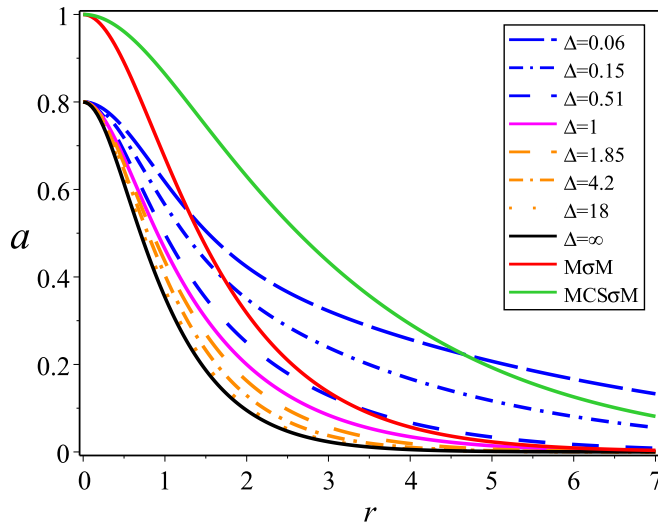


Figura 4.2: Potencial vetor $a(r)$ para $n = 1$.

Uma descrição similar pode ser realizada para os perfis do potencial vetor $a(r)$, apresentado na figura 4.2. Observamos aqui que o valor do campo de gauge na origem varia de $a(0) = n$ (na ausência de VL) ate $a(0) = n/\Lambda$ (na presença de VL no setor sigma), o que fica evidente neste gráfico.

A figura 4.3 descreve os perfis para o potencial escalar. Para $0 < \Delta < 1$ (linha azul), os perfis são mais estendidos e com maior intensidade na origem. A influência do parâmetro de CFJ, $(k_{AF})_3$, é mais acentuada para $\Delta \rightarrow 0$, enquanto que para $\Delta > 1$ (linha laranja) seus efeitos ficam menos relevantes à medida que Δ aumenta. Portanto, para grandes valores de Δ , os perfis tornam-se cada vez menores, sobrepondo-se ao eixo horizontal no limite $\Delta \rightarrow \infty$ (linha preta sólida). Isto significa que os vórtices tornam-se eletricamente nulos, assim como os vórtices usuais dos modelos de gauge sigma $O(3)$ invariante de Lorentz, para este limite.

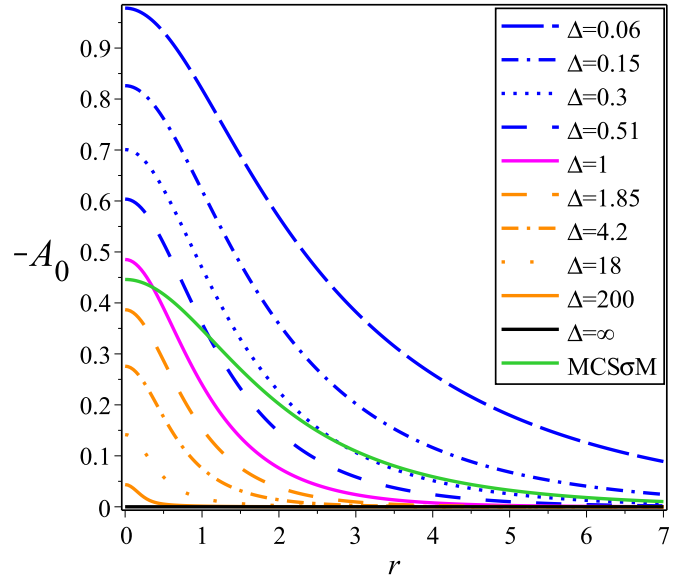


Figura 4.3: Potencial escalar $A_0(r)$ para $n = 1$.

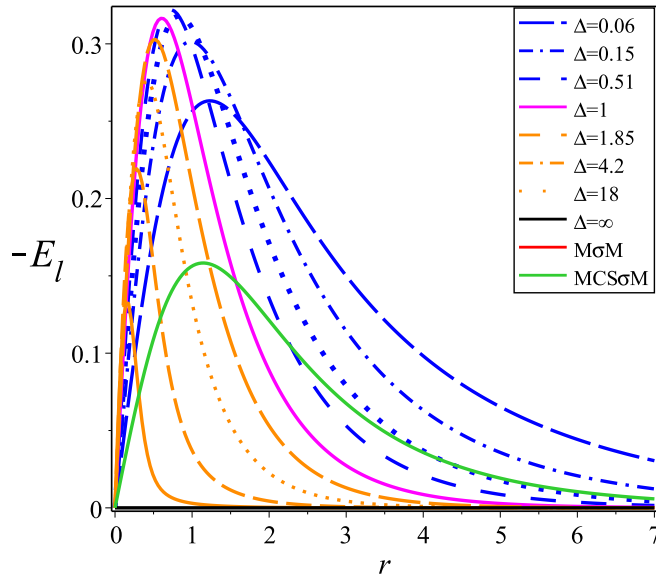


Figura 4.4: Campo elétrico $E_l(r) = -A'_0(r)$ para $n = 1$.

A figura 4.4 descreve o comportamento para o campo elétrico. Para $n = 1$, a amplitude máxima do campo elétrico é alcançada para alguns valores de Δ , especificamente $0.5 < \Delta < 1$. Para $0 < \Delta < 1$, os perfis tornam-se radialmente mais espalhados para valores decrescentes de Δ . Por outro lado, para $\Delta > 1$, os perfis são localizados perto da origem, sendo estreitado e com amplitude decaindo rapidamente à medida que os valores de Δ aumentam. No limite $\Delta \rightarrow \infty$, o campo elétrico desaparece, coincidindo assim com configurações de vórtices eletricamente descarregados.

A figura 4.5 mostra os perfis para o campo magnético, cuja forma são *lumps* centrados na origem para $n = 1$. Para $0 < \Delta < 1$ (linha azul), os perfis são mais espalhados e sua amplitude na origem decresce continuamente quando $\Delta \rightarrow 0$. Para $\Delta > 1$ (linhas laranjas), os perfis tornam-se estreitos e adquirem amplitudes maiores à medida que Δ aumenta progressivamente. Desta forma, os estreitamentos e amplitudes máximas são alcançadas para o valor limite $\Delta \rightarrow \infty$ (linha preta sólida). De modo similar ao ocorrido com os campos sigma e o campo de gauge, os perfis para o campo magnético estão localizados entre os modelos definidos por $\Delta = 1$ e $\Delta \rightarrow \infty$. O campo magnético na origem, $B(0)$ pode ser incrementado ou diminuído com relação ao caso simétrico.

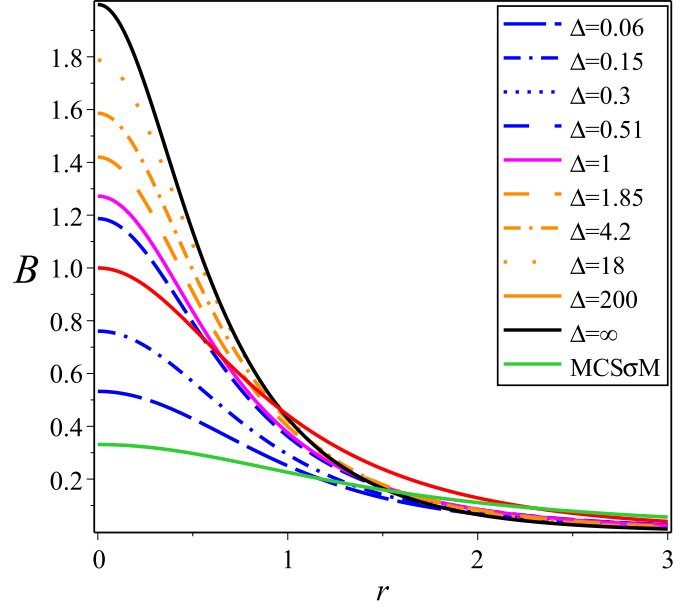


Figura 4.5: Campo magnético $B(r)$ para $n = 1$.

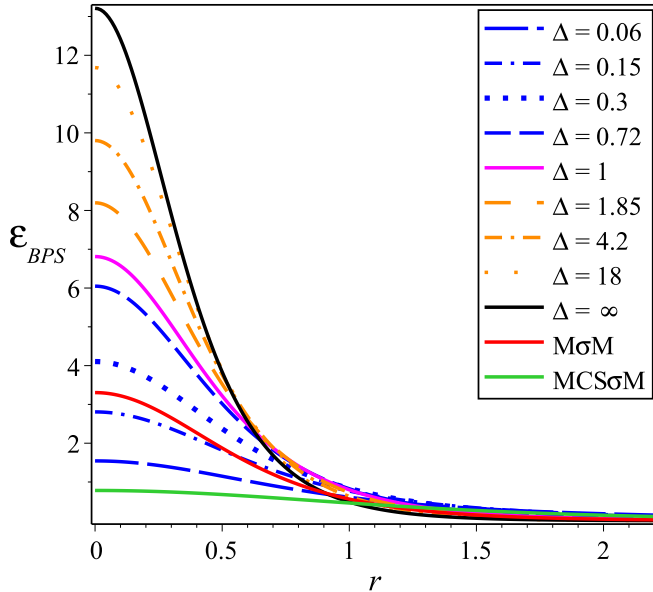


Figura 4.6: Densidade de energia $\varepsilon_{BPS}(r)$ para $n = 1$.

Para $n = 1$, os perfis da densidade de energia BPS (veja figura 4.6) são *lumps* centrados na origem, ao igual que os do campo magnético. Para valores maiores de Δ , a amplitude é aumentada na origem, e os vórtices tornam-se mais localizados que os do caso simétrico (linhas verdes ou vermelhas sólidas). Ao igual que acontece com o campo magnético, os estreitamentos e as amplitudes máximas ocorrem no limite $\Delta \rightarrow \infty$.

Também pode ser observado que quando analisamos os perfis para o campo magnético e a densidade de energia BPS para $n > 1$ e Δ finito, considerando a simetria axial, surgem configurações tipo-anel, cujos valores na origem e amplitudes máximas aumentam à medida que Δ aumenta. A estrutura do tipo-anel do campo magnético, assemelha-se ao comportamento característico dos modelos contendo o termo de Chern-Simons no setor de gauge, modificando o valor e o comportamento na origem e próximo dela.

4.3 Comentários e conclusões

Efetuamos o estudo de configurações auto-duais eletricamente carregadas no modelo de gauge $O(3)$ sigma não-linear, acrescido com o termo de violação de Lorentz CPT -ímpar de Carroll-Field-Jackiw no setor de gauge, e um termo de violação de Lorentz CPT -par no setor sigma. Verificamos que para termos soluções BPS carregadas, o modelo original deve ser modificado introduzindo um campo escalar neutro com sua dinâmica apropriada, de modo análogo ao que acontece nos modelos de gauge de MCSH e Maxwell-Chern-Simons $O(3)$ sigma. Conseguimos implementar o formalismo de Bogomol'ny-Prasad-Sommerfeld (BPS), encontrando desta forma as equações diferenciais de primeira ordem descrevendo as configurações auto-duais do modelo e que ao mesmo tempo satisfazem as equações de segunda ordem de Euler-Lagrange. Foi observado que a energia total é proporcional à carga topológica do modelo, a qual ganha contribuições de violação de Lorentz pertencentes ao setor sigma. Também foi observado que a carga elétrica total e o fluxo magnético total estão relacionados na forma mostrada pela equação (4.29). Estas configurações auto-duais carregadas são soluções para campos clássicos relacionados com uma extensão supersimétrica da teoria [10], em um contexto com violação de Lorentz.

Em particular, realizamos uma análise das soluções auto-duais para vórtices axialmente simétricos, demonstrando que a energia BPS total, o fluxo magnético e a carga elétrica são quantizadas (proporcionais ao número de vorticidade) e ademais, proporcionais aos coeficientes de violação de Lorentz introduzidos no setor sigma. Vale ressaltar que escolhendo alguns limites para os valores dos parâmetros de VL, é possível reproduzir outros modelos de gauge $O(3)$ sigma na presença de violação de Lorentz. Os modelos interpolados foram o modelo de gauge de Maxwell-Chern-Simons $O(3)$ sigma quando ($\Delta = 1$) e o modelo de gauge $O(3)$ sigma quando ($\Delta \rightarrow \infty$) ou o modelo de Chern-Simons $O(3)$ sigma (para valores muito grandes de $(k_{AF})_3$), todos eles modificados pela violação de Lorentz somente no setor sigma. De forma geral, a VL gera soluções alteradas em relação aos perfis de MCS σ M e M σ M, como pode ser visto explicitamente nas figuras (4.1)-(4.6). Especificamente, a violação de Lorentz afeta o comportamento do campo magnético e a densidade de energia BPS na origem e próximo da origem: a amplitude aumenta com Δ , alcançando seu desvio máximo no limite $\Delta \rightarrow \infty$, enquanto a largura decresce, implicando em perfis de vórtices mais compactos, portanto mais

localizados (para valores grandes de Δ). Assim, os defeitos topológicos na presença de violação de Lorentz tem a suas amplitudes mais pronunciadas próximo à origem, e são bastante mais localizados daqueles defeitos em modelos invariantes de Lorentz. Uma possível continuação para este trabalho, no que se refere a modelos de defeitos topológicos dentro do contexto das teorias com violação da simetria de Lorentz, poderia ser abordado o estudo dinâmico dos vórtices.

Parte III

Configurações auto-duais do tipo
vórtices compactos em modelos de
Higgs Abelianos generalizados.

O estudo de defeitos topológicos em modelos contendo termos dinâmicos generalizados tem sido uma área de pesquisa importante nos últimos anos [56]-[58]; esses modelos generalizados são denominados de *k-models*. Uma forma de generalização é incluir derivadas com potências de ordem superior a 2 no termo cinético do modelo. Inicialmente estas teorias surgiram como modelos efetivos de evolução cosmológica em cenários inflacionários [59]. Posteriormente, os modelos *k*-generalizados foram permeando outros aspectos da Teoria de Campos e da Cosmologia, como por exemplo, podem ser encontrados em estudos acerca de matéria escura [60], ondas gravitacionais fortes [61], dentro do contexto da matéria taquiônica [62] e dos condensados fantasmas [63]. Vale ressaltar que teorias com derivadas com ordem superior surgem naturalmente dentro do contexto da Teoria das Cordas. Uma outra forma de representar modelos contendo termos dinâmicos generalizados é introduzir um funcional ou um parâmetro no termo cinético do modelo. Este será o mecanismo de generalização utilizado para o desenvolvimento deste capítulo.

Um aspecto de interesse a ser analisado nestes modelos generalizados é no que se refere a sua estrutura topológica. Neste contexto, diversos estudos tem sido realizados, mostrando que as teorias generalizadas suportam soluções tipo-sólitons em modelos contendo campos de matéria assim como em modelos com campo de gauge [64]-[72]. As soluções solitônicas para estes modelos apresentam características de interesse, como por exemplo, as suas extensões características, que não necessariamente serão as mesmas que nos modelos usuais [73],[74].

Neste capítulo apresentamos um conjunto de modelos Abelianos com termos dinâmicos generalizados. Especificamente estudamos as configurações auto-duais modificadas pela generalização dos seguintes modelos: MH, Born-Infeld-Higgs (BIH), CSH e MCSH. Devido a que estes modelos tem diversas implicações na física da matéria condensada, desenvolvemos nossa análise em $(2 + 1)$ dimensões do espaço-tempo. As equações auto-duais para cada modelo são obtidas a partir da implementação consistente do método de Bogomol'nyi [8] para soluções de mínima energia. Uma das principais diferenças entre o desenvolvimento aqui efetuado para os trabalhos já existentes na literatura, é que aqui não será necessária a projeção das equações de movimento (utilizando um *ansatz* específico), para encontrarmos as equações auto-duais de primeira ordem. As equações BPS do modelo, cujas soluções correspondem a um ponto de mínimo na energia, serão obtidas no espaço das configurações. Portanto, no lugar de obtermos uma solução específica para um determinado sistema de coordenadas, nossas soluções auto-duais serão válidas em qualquer sistema de coordenadas. Isto reforça a existência de extensões supersimétricas dos modelos aqui apresentados [10], independentemente do sistema de coordenadas adotado. Um outro fato de interesse decorrente da nossa análise ocorre quando projetamos as equações BPS no plano, onde encontramos soluções de vórtices auto-duais para uma família específica do funcional generalizador. Ressaltamos também que para cada um dos modelos aqui desenvolvidos, os perfis para vórtices são condensados à medida que um parâmetro na função

generalizadora é aumentado. Esta condensação é observada até um certo limite superior para este parâmetro, a partir do qual, os comportamentos assintóticos dos perfis para os vórtices são totalmente modificados, aparecendo estruturas semelhantes aos defeitos do tipo-*Compactons*.

Os defeitos do tipo-*Compactons* foram definidos no trabalho pioneiro [75] como sólitons com comprimento de onda finito. Diferentemente com os sólitons usuais, cujos comportamentos assintóticos fazem que estes se estendam até o infinito, os *compactons* demarcam uma região muito bem definida do espaço, eliminando desta forma a superposição de sólitons. Esta é uma característica importante quando se quer implementar um modelo efetivo para partículas.

Capítulo 5

Configurações auto-duais no modelo generalizado de Maxwell-Higgs

O modelo de MH é uma teoria de campo clássica onde o campo de gauge é controlado pelo termo de Maxwell e o campo de matéria é representado pelo campo escalar complexo de Higgs, o qual está minimamente acoplado ao campo de gauge através da derivada covariante. Como já foi visto no primeiro capítulo desta tese (1.1), este modelo apresenta soluções de vórtices quando é dotado com um potencial escalar de quarta ordem, o qual também introduz não-linearidade e quebra espontânea de simetria.

Embora este modelo seja comparativamente simples, nele são encontrados os mesmos resultados que no modelo fenomenológico de Ginzburg-Landau, para a descrição da supercondutividade [6] e do comportamento do He^4 . As aplicações de este modelo vão além da física da matéria condensada e também podem ser aplicado no contexto das teorias cosmologia inflacionárias [76] como uma teoria efetiva de cordas cósmicas [7].

A generalização do modelo de MH foi primeiramente estudada em [77], no qual soluções de vórtices BPS foram encontradas projetando as equações de movimento dos campos utilizando o *ansatz* axialmente simétrico [6]. Recentemente foram encontradas soluções auto-duais para vórtices compactos no modelo generalizado de MH [78], no qual foi estudada a influência da generalização no termo de Maxwell.

Em esta seção estudamos o modelo generalizado de MH em (1+2)-dimensões, o qual é descrito pela seguinte densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{G(|\phi|)}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \omega(|\phi|)|D_\mu\phi|^2 - V(|\phi|) . \quad (5.1)$$

A dinâmica não convencional para o campo de gauge é introduzida por uma função escalar positiva $G(|\phi|)$, a qual pode ser vista como um tipo de permeabilidade magnética generalizada. No setor de Higgs a dinâmica não usual é introduzida por meio da função escalar, real e positiva $\omega(|\phi|)$, dependendo no campo de Higgs. O campo de gauge A_μ é o campo usual de Maxwell e

$D_\mu\phi$ define a derivada covariante para o campo de Higgs

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi \quad , \quad \mu = 0, 1, 2 . \quad (5.2)$$

A função $V(|\phi|)$ é um potencial escalar de auto-interação a ser determinado.

A partir da ação (5.1), a equação de movimento para o campo de gauge é dada por

$$\partial_\nu (GF^{\nu\mu}) = e\omega J^\mu , \quad (5.3)$$

onde $J^\mu = i[\phi(D^\mu\phi)^* - \phi^*(D^\mu\phi)]$ é a densidade de corrente usual e ωJ^μ é a corrente conservada do modelo, $\partial_\mu(\omega J^\mu) = 0$.

Ao longo do restante deste capítulo, estamos interessados em configurações auto-duais de mínima energia, portanto procuramos por configurações estáveis e independentes do tempo. Com esta finalidade a partir da equação de movimento (5.3), obtemos a lei de Gauss estacionária

$$\partial_k (G\partial_k A_0) = 2e^2\omega A_0 |\phi|^2 , \quad (5.4)$$

e a lei de Ampère estacionária

$$\epsilon_{kj}\partial_j (GB) = e\omega J_k . \quad (5.5)$$

É evidente a partir da lei de Gauss que $e\omega J_0$ representa a densidade de carga elétrica, de modo que a carga elétrica total das configurações é

$$Q = 2e^2 \int d^2x \omega A_0 |\phi|^2 , \quad (5.6)$$

sendo esta nula ($Q = 0$) após uma integração na lei de Gauss com as condições de contorno apropriadas para os campos no infinito, sendo estas, $A_0 \rightarrow 0$, $\phi \rightarrow cte$ e $G(|\phi|)$ uma função bem comportada. Portanto, as configurações dos campos serão eletricamente neutras, como acontece no modelo usual de MH (1.1).

O fato das configurações de campo sejam eletricamente neutras é compatível com a condição do gauge temporal, $A_0 = 0$, o qual satisfaz trivialmente a lei de Gauss (5.4). Com a escolha do gauge temporal, as configurações estáticas e eletricamente neutras são descritas pela lei de Ampère (5.5) e a equação reduzida para o campo de Higgs

$$D_k (\omega D_k \phi) - \frac{1}{2} B^2 \frac{\partial G}{\partial \phi^*} - \frac{\partial \omega}{\partial \phi^*} |D_k \phi|^2 - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0 . \quad (5.7)$$

Com o intuito de implementar o formalismo BPS, primeiramente escrevemos a densidade de energia estacionária do modelo utilizando o gauge temporal, sendo esta dada por

$$\mathcal{E} = \frac{G}{2} B^2 + \omega |D_k \phi|^2 + V . \quad (5.8)$$

Para prosseguir utilizamos a identidade fundamental

$$|D_i \phi|^2 = |D_\pm \phi|^2 \pm eB |\phi|^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ik} \partial_i J_k , \quad (5.9)$$

onde $D_\pm \phi = D_1 \phi \pm i D_2 \phi$. Utilizando (5.9), podemos reescrever a densidade energia (5.8) da seguinte forma

$$\mathcal{E} = \frac{G}{2} B^2 + V(|\phi|) + \omega |D_\pm \phi|^2 \pm e\omega B |\phi|^2 \pm \frac{1}{2} \omega \epsilon_{ik} \partial_i J_k . \quad (5.10)$$

Podemos observar que a função $\omega(|\phi|)$ no termo $\omega \epsilon_{ik} \partial_i J_k$, impede-nos de implementar o formalismo BPS, isto é, de expressar a integral como uma soma de termos quadráticos, além de um termo na forma de derivada total e um termo proporcional ao fluxo magnético. Este inconveniente foi observado em [79], onde para contornar o problema foram estudadas soluções axialmente simétricas. Neste trabalho, adotaremos o procedimento introduzido em [80] para contornar o problema.

A questão fundamental é encontrar uma expressão para o funcional $\omega(|\phi|)$ que permita implementar adequadamente o formalismo BPS. No apêndice C, mostramos passo a passo o procedimento algébrico que nos permite sair deste impasse, chegando a seguinte expressão para o último termo na equação (5.10)

$$\frac{1}{2} \omega \epsilon_{ik} \partial_i J_k = \frac{1}{2\lambda} \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) - e \frac{\lambda - 1}{\lambda} \omega B |\phi|^2 , \quad (5.11)$$

com o a seguinte forma para o funcional $\omega(|\phi|)$,

$$\omega = C |\phi|^{2\lambda-2} , \quad (5.12)$$

onde a constante C será escolhida convenientemente para reproduzir o valor esperado do vácuo.

Inserindo a relação (5.11) na expressão para a energia (5.10), podemos reescrever a última da seguinte forma

$$\mathcal{E} = \frac{G}{2} B^2 + V(|\phi|) + \omega |D_\pm \phi|^2 \pm \frac{1}{\lambda} e\omega B |\phi|^2 \pm \frac{1}{2\lambda} \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) . \quad (5.13)$$

A continuação manipulamos os dois primeiros termos de maneira tal que a energia pode ser reescrita na forma a seguir:

$$\mathcal{E} = \frac{G}{2} \left(B \mp \sqrt{\frac{2V}{G}} \right)^2 + \omega |D_\pm \phi|^2 \pm B \left(\sqrt{2GV} + \frac{1}{\lambda} e\omega |\phi|^2 \right) \pm \frac{1}{2\lambda} \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) . \quad (5.14)$$

Com o objetivo de que no integrando apareça um termo proporcional ao campo magnético, impomos que o fator que o multiplica seja a seguinte constante

$$\sqrt{2GV} + \frac{1}{\lambda} e\omega |\phi|^2 = ev^2 , \quad (5.15)$$

e escolhendo a função $\omega(|\phi|)$ na equação (5.12) convenientemente com a constante $C = \lambda v^{2(1-\lambda)}$, de modo que o valor esperado do vácuo para o campo de Higgs seja $|\phi| = v$.

Consequentemente, o potencial auto-dual $V(|\phi|)$ torna-se

$$V(|\phi|) = \frac{1}{G} U^{(\lambda)}(|\phi|) , \quad (5.16)$$

onde temos definido o potencial $U^{(\lambda)}(|\phi|)$ na forma

$$U^{(\lambda)}(|\phi|) = \frac{e^2 v^4}{2} \left(1 - \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} \right)^2 . \quad (5.17)$$

Podemos aqui notar que para $\lambda = 1$ recuperamos o potencial que fornece as soluções auto-duais para o modelo de MH.

Portanto, a energia em (5.14) lê-se

$$E = \int d^2x \left\{ \pm ev^2 B + \omega |D_{\pm} \phi|^2 + \frac{G}{2} \left(B \mp \frac{\sqrt{2U^{(\lambda)}}}{G} \right)^2 \pm \frac{1}{2\lambda} \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) \right\} . \quad (5.18)$$

Impondo condições de contorno apropriadas, a contribuição da derivada total na energia será nula e esta terá um limite inferior proporcional à magnitude do fluxo magnético

$$E \geq \pm ev^2 \int d^2x B = ev^2 |\Phi| , \quad (5.19)$$

onde escolhemos o sinal superior para fluxo positivo e o sinal inferior para fluxo negativo.

O limite inferior para a energia é saturado quando os campos satisfazem as equações de primeira ordem de Bogomol'nyi [8]

$$D_{\pm} \phi = 0 , \quad (5.20)$$

$$B = \pm \frac{ev^2}{G} \left(1 - \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} \right) . \quad (5.21)$$

A fim de que o campo magnético seja finito em todo o plano, será requerida a finitude da função $G(|\phi|)$, por exemplo, comportamento aceitável na origem pode ser $|\phi|^{-\delta}$ com $\delta \geq 0$, e para $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ poderia ser da forma $(v - |\phi|)^{-\eta}$ com $\eta \geq 0$.

Utilizando as equações BPS na equação (5.8) encontramos que a densidade de energia BPS é dada por

$$\mathcal{E}_{BPS} = \frac{2U^{(\lambda)}}{G} + \lambda \frac{|\phi|^{2\lambda-2}}{v^{2\lambda-2}} |D_k \phi|^2 , \quad (5.22)$$

e será definida-positiva para valores de $\lambda > 0$. No entanto, para soluções de vórtices a finitude é garantida por $\lambda \geq 1$.

5.1 Vórtices auto-duais compactos no modelo de MH generalizado

Com as equações auto-duais em mãos (5.20) e (5.21), procuramos por soluções axialmente simétricas de acordo com o *ansatz* usual para vórtices introduzido por Nielsen e Olesen [7].

$$\phi = vg(r)e^{in\theta}, \quad (5.23)$$

$$A_\theta = -\frac{a(r) - n}{er}, \quad (5.24)$$

onde $n \in \mathbb{Z}$, como foi mostrado na equação (1.35) da secção (1.1), correspondendo à vorticidade da solução. As perfis $g(r)$ e $a(r)$ são funções escalares regulares que descrevem soluções com energia finita e satisfazem as seguintes condições nas fronteiras,

$$g(0) = 0, \quad a(0) = n, \quad (5.25)$$

$$g(\infty) = 1, \quad a(\infty) = 0. \quad (5.26)$$

No *ansatz* o campo magnético é representado por

$$B(r) = -\frac{1}{er} \frac{da}{dr}. \quad (5.27)$$

A densidade de energia auto-dual (5.22) no *ansatz* lê-se

$$\mathcal{E}_{BPS} = \frac{e^2 v^4}{G} (1 - g^{2\lambda})^2 + 2\lambda v^2 g^{2\lambda-2} \left(\frac{ag}{r}\right)^2, \quad (5.28)$$

e será definida-positivo para $\lambda \geq 1$. A energia total da solução auto-dual é dada pelo limite inferior (5.19), $E_{BPS} = \pm ev^2 \Phi_B = \pm 2\pi v^2 n$, sendo este proporcional à vorticidade n como é esperado.

As equações BPS (5.20) e (5.21) projetadas no *ansatz* são representadas pelas equações dadas a seguir:

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (5.29)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm \frac{e^2 v^2}{G(g)} (1 - g^{2\lambda}). \quad (5.30)$$

O sinal superior (inferior) corresponde a solução para vórtices (anti-vórtices) com número de vorticidade $n > 0$ ($n < 0$). Neste ponto, devemos escolher uma forma para o funcional $G(g)$ que forneça campo magnético e densidade de energia BPS finitos. Com o fim de obtermos soluções

de vórtices cujos comportamentos sejam semelhantes aos vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen, consideramos a função $G(g)$ cujo comportamento para $r \rightarrow 0$ é

$$G(g) = g^{-2\delta} (\alpha_0 + \alpha_1 g + \alpha_2 g^2 + \dots), \quad \delta \geq 0, \quad (5.31)$$

e para $r \rightarrow \infty$ tem o seguinte comportamento

$$G(g) = \gamma_0 + \gamma_1 (1 - g) + \gamma_2 (1 - g)^2 + \dots. \quad (5.32)$$

O comportamento assintótico de $g(r)$ e $a(r)$ próximo as fronteiras pode ser determinado resolvendo as equações auto-duais (5.29) e (5.30) entorno das condições de contorno (5.25) e (5.26). Desta maneira, próximo a origem os perfis das funções escalares tem a seguinte forma

$$g(r) \approx C_n r^n + \dots, \quad (5.33)$$

$$a(r) \approx n - \frac{e^2 v^2 (C_n)^{2\delta}}{2\alpha_0 (n\delta + 1)} r^{2n\delta+2} + \dots, \quad (5.34)$$

onde a constante $C_n > 0$ é computada numericamente.

Por outro lado, quando $r \rightarrow \infty$ o comportamento assintótico é dado por

$$g(r) \approx 1 - \frac{C_\infty}{\sqrt{r}} e^{-mr}, \quad (5.35)$$

$$a(r) \approx m C_\infty \sqrt{r} e^{-mr}, \quad (5.36)$$

onde a constante C_∞ é determinada numericamente e m , a massa auto-dual, é dada por

$$m = ev \sqrt{\frac{2\lambda}{\gamma_0}}, \quad (5.37)$$

lembrando que $ev\sqrt{2}$ é a escala de massa usual para o modelo de MH. A generalização na escala de massa, determinada pelo parâmetro λ , explica a variação no tamanho dos vórtices. Quando maior o valor de λ em (5.37), maior será a massa dos campos bosônicos no limite BPS. Portanto teremos perfis de vórtices com decaimento maior para grandes valores de λ , como pode ser observado a partir do comportamento assintótico (5.36) e mostrado explicitamente nas figuras (5.1) e (5.2).

As soluções numéricas foram realizadas escolhendo os sinais superiores, fixando as constantes $e = v = 1$, e para uma configuração com vorticidade $n = 1$. Para estudarmos exclusivamente a influência do termo generalizador no setor de Higgs, realizamos a análise numérica escolhendo $G(g) = 1$. Os perfis para os campos de Higgs e de gauge são apresentados na Fig. (5.1) e os

perfis correspondentes ao campo magnético e a densidade de energia auto-dual são apresentados na Fig. (5.2).

Podemos observar no perfil para o campo de Higgs (5.1) (à esquerda) que o incremento no valor de λ faz com que os perfis se aproximem da origem, ao mesmo tempo que tendem assintoticamente mais rápido para o valor de vácuo, como pode ser visto na escala de massa do modelo na equação (5.37). No caso do campo de gauge (5.1) (à direita) temos um comportamento similar, com um deslocamento para o centro dos vórtices à medida que λ aumenta. Observamos também que para grandes valores de λ temos um decaimento abrupto do campo.

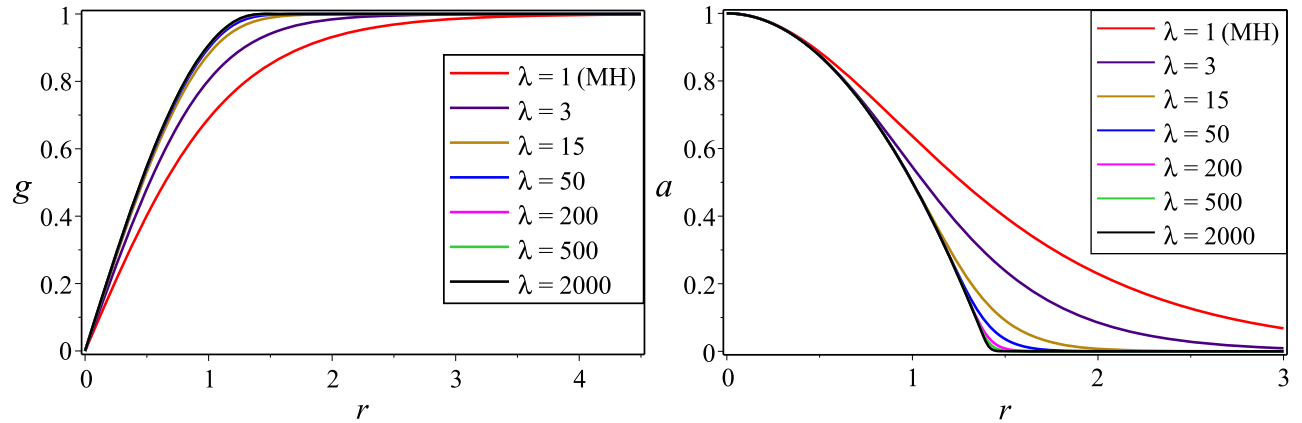


Figura 5.1: Perfis para $g(r)$ (esquerda) e $a(r)$ (direita) do modelo (5.1) fixando $G(g) = 1$ e variando $\lambda \geq 1$.

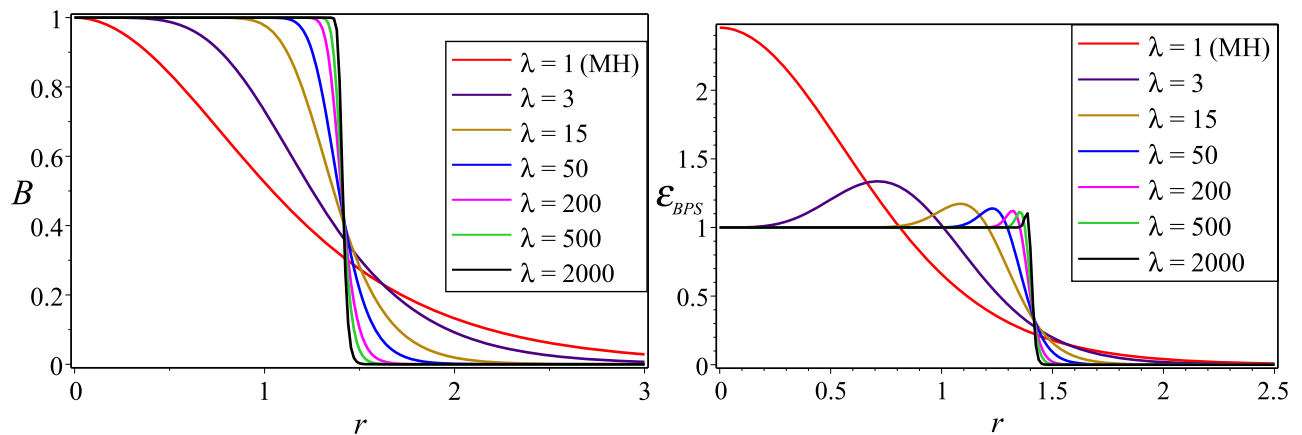


Figura 5.2: Perfis para o campo magnético $B(r)$ (esquerda) e a densidade de energia BPS $\epsilon_{BPS}(r)$ (direita) do modelo (5.1) fixando $G(g) = 1$ e alguns valores para $\lambda \geq 1$.

Na figura 5.2 (à esquerda) observamos os perfis para o campo magnético. Chamamos a atenção aqui para a mudança na forma dos perfis à medida que λ aumenta. Observamos que para valores de λ próximos de 1, os perfis ainda preservam a forma característica dos *lumps*

próprios do modelo de Maxwell-Higgs usual. Mas para valores elevados de λ os perfis tornam-se extremamente localizados e carecem de “cauda” a partir de um r suficientemente grande. Na figura 5.2 (à direita) apresentamos os perfis para a densidade de energia BPS. Verificamos que somente para o valor $\lambda = 1$ o perfil aparece centrado na origem, já para valores maiores de λ os máximos deixam de ser na origem e se afastam do centro do defeito à medida que λ aumenta. Para valores grandes de λ observamos que os vórtices ficam extremamente localizados, apresentando um comportamento assintótico abrupto no qual tende rapidamente a zero. Para estes valores os perfis que caracterizam os vórtices são totalmente perdidos e as soluções tornam-se similares aos perfis de defeitos do tipo-*compactons*. Os vórtices ficam localizados de maneira tal que para valores ainda maiores do parâmetro λ não é possível continuar estreitando os perfis.

Capítulo 6

Configurações auto-duais no modelo generalizado de Born-Infeld-Higgs

A teoria de Born-Infeld [81] representa uma eletrodinâmica não-linear, a qual foi introduzida para remover a divergência da auto-energia do elétron na eletrodinâmica clássica. Isto foi alcançado através da introdução de uma raiz quadrada na densidade de Lagrangiana, substituindo o termo usual de Maxwell. No que se refere a formação de defeitos topológicos no modelo de Born-Infeld-Higgs, soluções de vórtices foram encontrados em [82]. A generalização do modelo de Born-Infeld-Higgs foi primeiramente estudada em [83], mas em dita referência, não foram encontradas soluções auto-duais. Finalmente, soluções auto-duais do tipo vórtices topológicos foram estudadas no modelo generalizado de Born-Infeld-Higgs [84], no qual, para encontrar as equações BPS do modelo, as equações de movimento foram projetadas em duas dimensões espaciais utilizando o habitual *ansatz* axialmente simétrica.

De uma forma similar à efetuada no modelo anterior, obteremos aqui as equações auto-duais do modelo generalizado de Born-Infeld-Higgs sem a utilização de um sistema de coordenadas em particular, tendo o resultado encontrado validade geral.

A densidade Lagrangiana do modelo de Born-Infeld-Higgs generalizado $(2+1)$ -dimensional é escrita por

$$\mathcal{L} = \beta^2 (1 - \mathcal{R}) + \omega (|\phi|) |D_\mu \phi|^2 - W(|\phi|) , \quad (6.1)$$

no qual definimos

$$\mathcal{R} = \sqrt{1 + \frac{G(|\phi|)}{2\beta^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} , \quad (6.2)$$

$$W(|\phi|) = \beta^2 [1 - V(|\phi|)] . \quad (6.3)$$

O potencial generalizado $W(|\phi|)$, sendo uma função não-negativa, herda a sua estrutura a partir da função $V(|\phi|)$, que é limitada pela condição $0 < V(|\phi|) \leq 1$, portanto $W(|\phi|) > 0$.

O parâmetro β de Born-Infeld, fornece uma dinâmica tanto para o campo escalar como para o campo de gauge, enriquecendo ainda mais a família de modelos possíveis. A função $\omega(|\phi|)$ que generaliza o setor de Higgs é dada pela equação (5.12)

$$\omega = C|\phi|^{2\lambda-2} .$$

Da densidade Lagrangiana (6.1) temos a equação do campo de gauge dada por

$$\partial_\nu \left(\frac{G}{\mathcal{R}} F^{\nu\mu} \right) = e\omega J^\mu . \quad (6.4)$$

No regime estacionário a equação (6.4) fornece a lei de Gauss correspondente,

$$\partial_j \left(\frac{G}{\mathcal{R}} \partial_j A_0 \right) = 2\omega e^2 A_0 |\phi|^2 , \quad (6.5)$$

a qual comporta trivialmente o gauge temporal $A_0 = 0$. Desde modo, vemos que a versão estacionária do modelo, no gauge temporal, suporta soluções magnéticas eletricamente neutras. Sob estas condições, a partir da equação (6.4) escrevemos a lei de Ampère da seguinte forma

$$\epsilon_{kj} \partial_j \left(\frac{G}{\mathcal{R}} B \right) - e\omega J_k = 0 , \quad (6.6)$$

juntamente com a equação de movimento do campo de Higgs, dada a seguir

$$0 = \omega (D_j D_j \phi) + (\partial_j \omega) D_j \phi - \frac{\partial \omega}{\partial \phi^*} |D_j \phi|^2 - \frac{B^2}{2\mathcal{R}} \frac{\partial G}{\partial \phi^*} - \frac{\partial W}{\partial \phi^*} , \quad (6.7)$$

onde nas duas últimas equações o parâmetro $\mathcal{R}$ pode ser denotado na forma

$$\mathcal{R} = \left(1 + \frac{G}{\beta^2} B^2 \right)^{1/2} . \quad (6.8)$$

A densidade de energia do sistema, no regime estacionário e implementando o gauge temporal $A_0 = 0$, será dada por

$$\mathcal{E} = \beta^2 (\mathcal{R} - V) + \omega |D_k \phi|^2 , \quad (6.9)$$

e será positivo-definida sempre que a condição $\mathcal{R} \geq V$ seja satisfeita.

Para proseguirmos com o formalismo BPS, utilizamos as identidades (5.9) e (5.11) juntamente com a expressão para ω dada pela equação (5.12), de modo que podemos reescrever a equação Eq. (6.9) na forma a seguir

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \pm ev^2 B + \omega |D_\pm \phi|^2 \pm \frac{1}{2\lambda} \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) \\ & + \frac{\mathcal{R}}{2G} \left(\frac{G}{\mathcal{R}} B \mp \sqrt{2U^{(\lambda)}} \right)^2 + \beta^2 (\mathcal{R} - V) - \frac{1}{2} \frac{GB^2}{\mathcal{R}} - \frac{\mathcal{R}}{G} U^{(\lambda)} , \end{aligned} \quad (6.10)$$

onde temos introduzido o potencial $U^{(\lambda)}(|\phi|)$ calculado na secção anterior, dado pela equação (5.17) com o intuito de obtermos um termo proporcional ao campo magnético ev^2B .

O procedimento de Bogomol'nyi será completado se requeremos que os seguintes termos na segunda linha em (6.10) sejam nulos

$$\beta^2 (\mathcal{R} - V) - \frac{1}{2} \frac{GB^2}{\mathcal{R}} - \frac{\mathcal{R}}{G} U^{(\lambda)} = 0 , \quad (6.11)$$

e utilizando a equação (6.8) obtemos a seguinte relação

$$V + \frac{\mathcal{R}U^{(\lambda)}}{\beta^2 G} = \frac{1}{2} \mathcal{R} + \frac{1}{2\mathcal{R}} , \quad (6.12)$$

a qual fornece uma relação entre as funções V , G e $\mathcal{R}$. Vale aqui ressaltar que a equação (6.12) não é arbitrária, porque como veremos mais adiante, no limite BPS torna-se equivalente a condição fornecida pelo traço do tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$: $T_{11} + T_{22} = 0$, proposta por Schaposnik e Vega [85] para a obtenção de configurações auto-duais.

Portanto, a condição (6.12) permite escrever a energia (6.9) na forma de Bogomol'nyi, ou seja, como uma soma de termos quadráticos, um termo proporcional ao fluxo magnético e um termo contendo uma derivada total,

$$E = \int d^2x \left[\omega |D_{\pm}\phi|^2 + \frac{\mathcal{R}}{2G} \left(\frac{G}{\mathcal{R}} B \mp \sqrt{2U^{(\lambda)}} \right)^2 \pm ev^2 B \pm \frac{1}{2\lambda} \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) \right] . \quad (6.13)$$

Sob condições de contorno apropriadas a integração da derivada total em (6.13) fornece contribuição nula para a energia. Portanto, fica evidente que a energia possui um limite inferior

$$E \geq ev^2 |\Phi| , \quad (6.14)$$

sendo Φ o fluxo magnético total. O limite inferior na energia será saturado quando os campos satisfaçam as equações auto-duais ou equações BPS

$$D_{\pm}\phi = 0 , \quad (6.15)$$

$$\frac{G}{\mathcal{R}} B = \pm ev^2 \left(1 - \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} \right) . \quad (6.16)$$

Utilizando as equações BPS na equação (6.12) computamos o potencial auto-dual $V(|\phi|)$

$$V = \frac{1}{\mathcal{R}} = \sqrt{1 - \frac{2U^{(\lambda)}}{\beta^2 G}} . \quad (6.17)$$

Desta forma a segunda das equações BPS (6.16) pode ser reescrita na forma

$$B = \pm \frac{ev^2}{GV} \left(1 - \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} \right) . \quad (6.18)$$

Com o auxílio das equações BPS podemos reescrever a expressão para a densidade de energia (6.9) e encontramos uma expressão para a densidade de energia BPS, dada por

$$\mathcal{E}_{BPS} = \frac{2U^{(\lambda)}}{GV} + \lambda \frac{|\phi|^{2\lambda-2}}{v^{2\lambda-2}} |D_k \phi|^2 , \quad (6.19)$$

que será definida-positiva para $\lambda > 0$.

6.1 Vórtices auto-duais compactos no modelo de BIH generalizado

Para a seguinte análise primeiramente projetamos as equações BPS (6.15) e (6.16) no *ansatz*,

$$g' = \pm \frac{ag}{r} , \quad (6.20)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm \frac{e^2 v^2}{G} \frac{(1 - g^{2\lambda})}{\sqrt{1 - \frac{e^2 v^4}{\beta^2 G} (1 - g^{2\lambda})^2}} . \quad (6.21)$$

De maneira análoga ao apresentado no modelo anterior, consideramos a função $G(g)$, cujo comportamento é definido próximo as fronteiras pelas equações (5.31) e (5.32). O comportamento dos perfis para as funções $g(r)$ e $a(r)$ perto das fronteiras é determinado resolvendo as equações auto-duais (6.20) e (6.21). Desta maneira, próxima da origem, apresentam o seguinte comportamento assintótico

$$g(r) \approx C_n r^n + \dots , \quad (6.22)$$

$$a(r) \approx n - \frac{e^2 v^2 \beta}{2\sqrt{(\alpha_0 \beta)^2 - \alpha_0 e^2 v^4}} r^2 + \dots, \text{ para } \delta = 0 , \quad (6.23)$$

$$a(r) \approx n - \frac{e^2 v^2 (C_n)^{2\delta}}{2\alpha_0 (n\delta + 1)} r^{2n\delta+2} + \dots, \text{ para } \delta > 0 . \quad (6.24)$$

Por outro lado, para $r \rightarrow \infty$ se comportam como

$$g(r) \approx 1 - \frac{C_\infty}{\sqrt{r}} e^{-mr} , \quad (6.25)$$

$$a(r) \approx C_\infty m \sqrt{r} e^{-mr} . \quad (6.26)$$

onde m , a massa auto-dual, é dada por

$$m = ev\sqrt{\frac{2\lambda}{\gamma_0}}, \quad (6.27)$$

sendo este valor igual ao obtido para o modelo generalizado de MH analisado na seção anterior.

Para implementar a solução numérica escolhemos o sinal superior, fixamos as constantes $e = 1$, $v = 1$ e $\beta = 3/\sqrt{5}$, e estudamos o vórtice fundamental para $n = 1$. Os perfis para o campos de Higgs e de gauge são apresentados na figura 6.1, e os perfis correspondentes ao campo magnético e a densidade de energia auto-dual são descritos na figura 6.2.

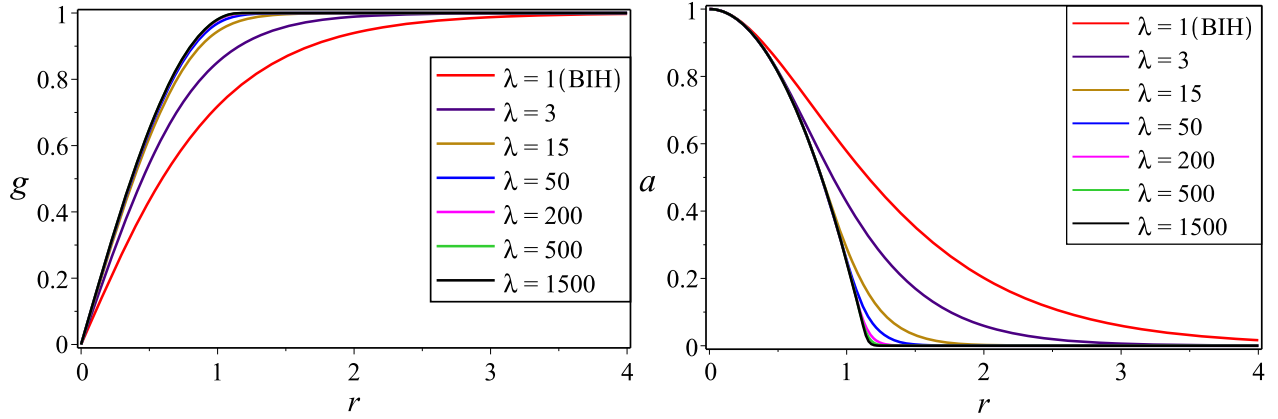


Figura 6.1: Perfis para o campo de Higgs $g(r)$ (esquerda) e para o campo de gauge $a(r)$ (direita) advindos do modelo (6.1) fixando $G(g) = 1$ para alguns valores de $\lambda \geq 1$.

A figura 6.1 mostra os perfis para o campo de Higgs (à esquerda) e para o campo de gauge (à direita). Como pode ser observado o comportamento dos campos assemelha-se ao do modelo generalizado de Maxwell-Higgs, onde temos decaimentos pronunciados para valores grandes do parâmetro λ .

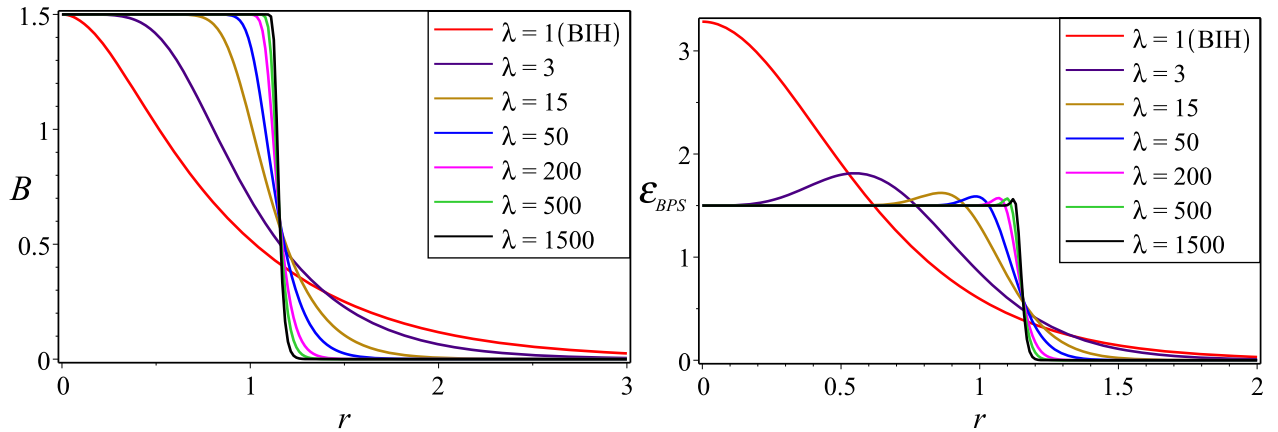


Figura 6.2: Perfis para o campo magnético $B(r)$ (esquerda) e para a densidade de energia BPS $\epsilon_{BPS}(r)$ (direita) correspondentes ao modelo (6.1) fixando $G(g) = 1$ para alguns valores de $\lambda \geq 1$.

A figura 6.2 mostra os perfis para o campo magnético (à esquerda) e para a densidade de energia (à direita). Nos perfis para o campo magnético observamos que à medida que λ aumenta, o máximo de intensidade é mantido por uma área maior, decaindo posteriormente de maneira abrupta até anular-se, sem deixar a cauda usual característica dos perfis para vórtices de Abrikosov. Nos perfis para a densidade de energia BPS observamos que para valores de $\lambda > 1$, todos os perfis apresentam o mesmo valor na origem (1.5). Observamos que à medida que λ aumenta os vórtices são cada vez menos estendidos, transformando-se em perfis do tipo vórtices compactos para valores grandes de λ .

Capítulo 7

Configurações auto-duais no modelo generalizado de Chern-Simons-Higgs

Nesta seção procuramos soluções auto-duais para o modelo Abelian e generalizado de Chern-Simons-Higgs (CSH). A física em duas dimensões está intimamente ligada à teoria de Chern-Simons (CS), a qual além de ter importância teórica, tem aplicações práticas em vários fenômenos da matéria condensada, como por exemplo, na física dos Anions e na sua relação com o efeito Hall quântico fracionário [2]. Pode ser encontrada uma extensa literatura a respeito da teoria de CS, alguns dos trabalhos pioneiros envolvendo soluções topológicas e não-topológicas, assim como modelos relativísticos e não-relativísticos podem ser encontrados em [86]-[91]. Existe também uma conexão estreita entre a teoria de CS e supersimetria. Esta conexão foi primeiramente apresentada em [92] onde, a partir de uma extensão supersimétrica $N = 2$ de CS, foi encontrado o potencial específico fornecendo as equações de Bogomol'nyi, as quais surgem naturalmente.

O modelo generalizado de CSH contido em três dimensões do espaço-tempo é descrito pela seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{(2+1)} = \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} + \omega(|\phi|) |D_\mu \phi|^2 - V(|\phi|) , \quad (7.1)$$

e a partir desta computamos a equação de movimento para o campo de gauge

$$\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - e\omega J^\mu = 0 , \quad (7.2)$$

com a qual obtemos a lei de Gauss

$$\kappa B = e\omega J_0 . \quad (7.3)$$

À diferença com o modelo anterior, observamos que o gauge temporal não é mais satisfeito ($A_0 \neq 0$). Notamos também que a lei de Gauss do modelo também é modificada pela função

ω , de tal modo que agora a carga conservada associada com a simetria global $U(1)$, será dada por

$$Q = \int d^2x \, e\omega J_0 . \quad (7.4)$$

No entanto, como acontece no modelo usual de CSH, a carga elétrica é não nula e proporcional ao fluxo magnético

$$Q = \kappa \int d^2x \, B = \kappa \Phi . \quad (7.5)$$

Portanto, independentemente da forma funcional da função generalizada ω , as soluções sempre serão eletricamente carregadas.

Considerando as configurações para campos independentes do tempo, temos a densidade de energia do modelo

$$\mathcal{E} = -\kappa A_0 B - e^2 \omega A_0^2 |\phi|^2 + \omega |D_i \phi|^2 + V(|\phi|) . \quad (7.6)$$

A partir da lei de Gauss estacionária obtemos a relação

$$A_0 = -\frac{\kappa}{2e^2} \frac{B}{\omega |\phi|^2} , \quad (7.7)$$

a qual substituímos na equação (7.6) levando à seguinte expressão para a densidade de energia

$$\mathcal{E} = \frac{\kappa^2}{4e^2} \frac{B^2}{\omega |\phi|^2} + \omega |D_i \phi|^2 + V(|\phi|) . \quad (7.8)$$

Para continuar introduzimos a identidade fundamental (5.9) e reescrevemos a densidade de energia na forma

$$\mathcal{E} = \frac{\kappa^2}{4e^2} \frac{B^2}{\omega |\phi|^2} + V(|\phi|) + \omega |D_{\pm} \phi|^2 \pm e\omega B |\phi|^2 \pm \frac{1}{2} \omega \epsilon_{ik} \partial_i J_k . \quad (7.9)$$

Assim como foi realizado nos modelos anteriores, substituímos o último termo da expressão anterior pelos termos introduzidos na equação (5.11)

$$\mathcal{E} = \frac{\kappa^2}{4e^2} \frac{B^2}{\omega |\phi|^2} + V(|\phi|) + \omega |D_{\pm} \phi|^2 \pm \frac{1}{\lambda} e\omega B |\phi|^2 \pm \frac{1}{2\lambda} \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) . \quad (7.10)$$

Agora escrevemos os dois primeiros termos em (7.10) da seguinte forma

$$\frac{\kappa^2}{4e^2} \frac{B^2}{|\phi|^2 \omega} + V = \frac{\kappa^2}{4e^2} \frac{1}{|\phi|^2 \omega} \left(B \mp \frac{2e}{\kappa} |\phi| \sqrt{\omega V} \right)^2 \pm \frac{\kappa B}{e|\phi|} \sqrt{\frac{V}{\omega}} , \quad (7.11)$$

e substituindo em (7.10), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = & \frac{\kappa^2}{4e^2} \frac{1}{|\phi|^2 \omega} \left(B \mp \frac{2e|\phi|}{\kappa} \sqrt{\omega V} \right)^2 + \omega |D_{\pm} \phi|^2 \\ & \pm B \left(\frac{\kappa}{e|\phi|} \sqrt{\frac{V}{\omega}} + \frac{1}{\lambda} e \omega |\phi|^2 \right) \pm \frac{1}{2\lambda} \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) .\end{aligned}\tag{7.12}$$

A forma do potencial $V(|\phi|)$ a ser escolhida, é motivada pelo desejo de encontrar soluções auto-duais. Portanto, escolhemos a seguinte forma para o potencial

$$V(|\phi|) = \frac{e^4}{\kappa^2} \omega |\phi|^2 \left(v^2 - \frac{1}{\lambda} \omega |\phi|^2 \right)^2 ,\tag{7.13}$$

e introduzindo a forma explícita de $\omega(|\phi|)$ dada pela equação (5.12), o potencial adquire a seguinte forma

$$V(|\phi|) = \lambda \frac{e^4 v^6}{\kappa^2} \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} \left(1 - \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} \right)^2 ,\tag{7.14}$$

onde temos escolhido $C = \lambda v^{2-2\lambda}$ para que o valor esperado do vácuo do campo de Higgs seja $|\phi| = v$. Assim a partir da equação (7.12) realizando uma integração no espaço, podemos denotar a energia total do sistema

$$E = \int d^2 x \left\{ \pm e v^2 B \pm \frac{1}{2\lambda} \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) + \omega |D_{\pm} \phi|^2 + \frac{\kappa^2}{4e^2 |\phi|^2 \omega} \left[B \mp \frac{2e^3 v^4}{\kappa^2} \lambda \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} \left(1 - \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} \right) \right]^2 \right\} .\tag{7.15}$$

A derivada total na expressão anterior fornece contribuição nula à energia total sob condições de contorno apropriadas. Portanto a energia será limitada inferiormente por um múltiplo da magnitude do fluxo magnético

$$E \geq \pm e v^2 \int d^2 x B = e v^2 |\Phi| .\tag{7.16}$$

Este limite é obtido quando as equações de Bogomol'nyi ou auto-duais são satisfeitas

$$D_{\pm} \phi = 0 ,\tag{7.17}$$

$$B = \pm \frac{2e^3 v^4}{\kappa^2} \lambda \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} \left(1 - \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} \right) ,\tag{7.18}$$

lembrando que para que o campo magnético seja não-singular na origem é necessário que $\lambda > 0$.

Substituindo as equações BPS na equação (7.8) encontramos a seguinte expressão para a densidade de energia BPS

$$\mathcal{E}_{BPS} = 2\lambda \frac{e^4 v^6}{\kappa^2} \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} \left(1 - \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}}\right)^2 + \lambda \frac{|\phi|^{2\lambda-2}}{v^{2\lambda-2}} |D_k \phi|^2, \quad (7.19)$$

a qual será positivo-definida sempre que $\lambda > 0$. Para o caso de soluções para vórtices auto-duais, a finitude acontece para $\lambda \geq 1$.

7.1 Vórtices auto-duais compactos no modelo de CSH generalizado

As equações BPS (7.17) e (7.18), projetadas no *ansatz* usual para vórtices de Avrokov, são reescritas do seguinte modo

$$g' = \pm \frac{ag}{r}, \quad (7.20)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm \frac{2e^4 v^4}{\kappa^2} \lambda g^{2\lambda} (1 - g^{2\lambda}), \quad (7.21)$$

O comportamento assintótico das funções $g(r)$ e $a(r)$ é realizado resolvendo as equações auto-duais (7.20) e (7.21) perto das fronteiras dadas em (5.25) e (5.26). Desta forma, perto da origem, os perfis das funções se comportam da seguinte maneira

$$g(r) \approx C_n r^n + \dots, \quad (7.22)$$

$$a(r) \approx n \mp \frac{\lambda e^4 v^4}{(n\lambda + 1) \kappa^2} (C_n)^{2\lambda} r^{2n\lambda+2} + \dots, \quad (7.23)$$

onde a constante $C_n > 0$ é determinada numericamente.

Por outro lado, para $r \rightarrow \infty$ se comportam como

$$g(r) \approx 1 - \frac{C_\infty}{\sqrt{r}} e^{-mr}, \quad (7.24)$$

$$a(r) \approx C_\infty m \sqrt{r} e^{-mr}. \quad (7.25)$$

onde a constante C_∞ é computada numericamente e m é a massa auto-dual

$$m = \frac{2\lambda e^2 v^2}{\kappa}, \quad (7.26)$$

onde $2e^2 v^2 / \kappa$ corresponde a massa auto-dual dos bósons no modelo de Chern-Simons-Higgs usual.

Observamos que a massa auto-dual aumenta linearmente com λ . Para implementarmos a solução numérica do modelo, escolhemos o sinal superior nas equações BPS, fixamos as constantes $e = 1$, $v = 1$, $\kappa = -1$ e a vorticidade $n = 1$. Os perfis para os campos de Higgs e

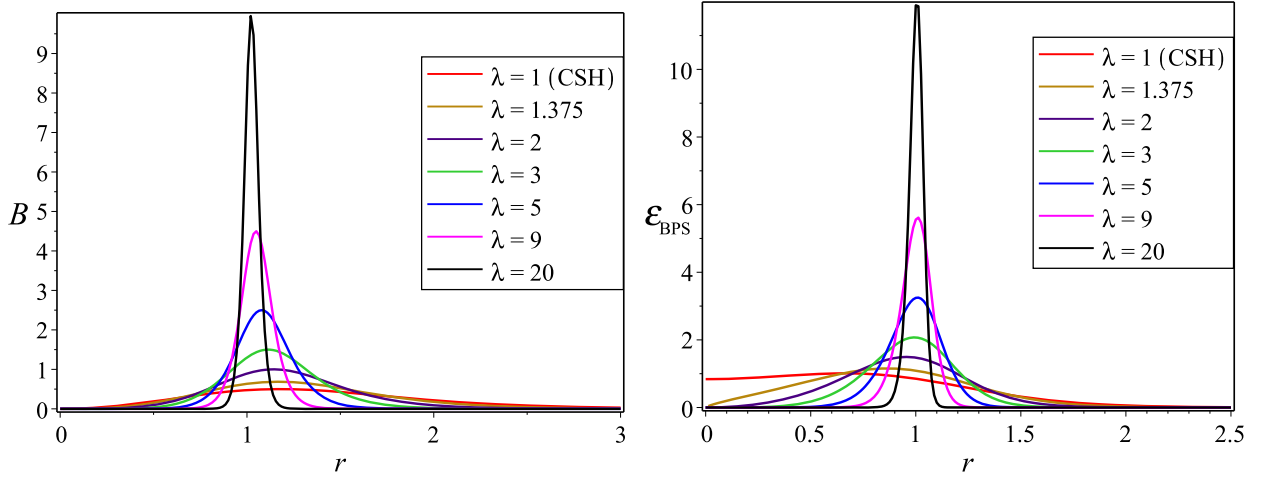


Figura 7.2: Perfis para o campo magnético $B(r)$ (esquerda) e a densidade de energia BPS $\varepsilon_{BPS}(r)$ (direita) para o modelo (7.1) fixando $G(g) = 1$ para alguns valores de $\lambda \geq 1$.

de gauge são apresentados na figura 7.1, e os perfis correspondentes ao campo magnético e a densidade de energia BPS são apresentados na figura 7.2.

A figura 7.1 mostra os perfis para o campo de Higgs (à esquerda) e para o campo de gauge (à direita). Como pode ser observado o comportamento para o campo de Higgs é semelhante aos dos modelos anteriores, exceto que o mesmo comportamento acontece para valores de λ menores, sem a necessidade inserir grandes valores de λ para visualizar o comportamento. Diferentemente aos outros modelos, neste caso os perfis para o campo de gauge tendem para o valor nulo abruptamente para grandes valores de $\lambda > 5$.

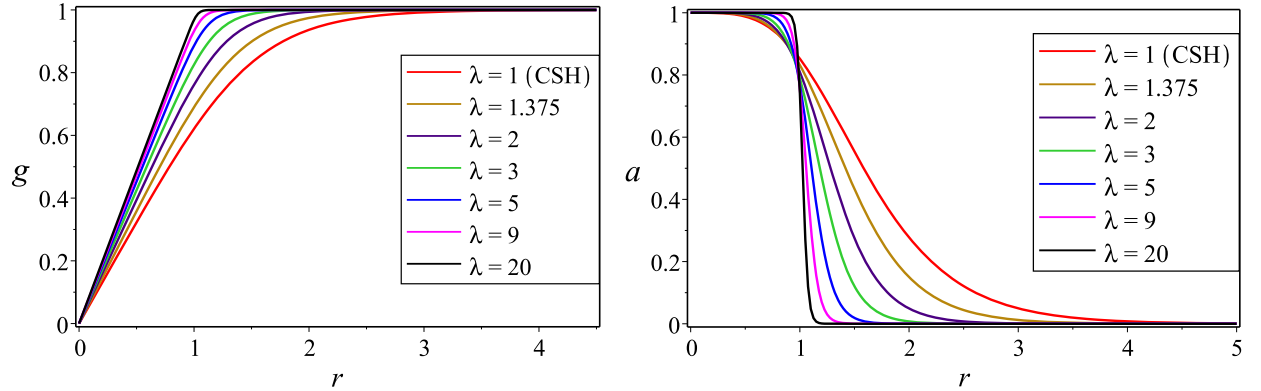


Figura 7.1: Perfis para o campo de Higgs $g(r)$ (esquerda) e para o campo de gauge $a(r)$ (direita) advindos do modelo (7.1) fixando $G(g) = 1$ para alguns valores de $\lambda \geq 1$.

A figura 7.2 mostra os perfis para o campo magnético (à esquerda) e para a densidade de energia (à direita). Observamos que os perfis para o campo magnético formam anéis, como

usualmente acontece nas configurações auto-duais em modelos de Chern-Simons, como o proposto por R. Jackiw e E. J. Weinberg [89]. Podemos observar que à medida que λ aumenta, o campo magnético torna-se mais localizado e a sua intensidade máxima aumenta formando um pico de intensidade no perfil em $\lambda = 20$, por exemplo. Nos perfis para a densidade de energia observamos a formação de anéis para valores de $\lambda > 1$, os quais aumentam a sua intensidade máxima à medida que λ aumenta.

Capítulo 8

Configurações auto-duais no modelo generalizado de Maxwell-Chern-Simons-Higgs

Vórtices eletricamente carregados foram encontrados pela primeira vez em um modelo Abelian de Higgs por S. K. Paul e A. Khare [93], onde foi estudado o modelo abeliano de MCSH. A inclusão do termo de Chern-Simons foi uma criativa forma de evitar o gauge temporal $A_0 \neq 0$, obtendo assim soluções topológicas eletricamente carregadas. Uma outra característica para este modelo é que o parâmetro de Chern-Simons, permite o acoplamento entre o setor elétrico e magnético. Este modelo foi generalizado multiplicando uma função dielétrica (escalar) no termo cinético de Maxwell [94],[95] produzindo soluções topológicas e não topológicas que satisfazem o limite de Bogomol'nyi.

O modelo generalizado de MCSH é descrito pela seguinte densidade de Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(2+1)} = & -\frac{G(|\phi|)}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} + \omega(|\phi|) |D_\mu \phi|^2 \\ & + \frac{G(|\phi|)}{2} \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi - e^2 \omega(|\phi|) \Psi^2 |\phi|^2 - V(|\phi|) , \end{aligned} \quad (8.1)$$

na qual temos introduzido o campo escalar real Ψ , pelo mesmo motivo apresentado na seção (1.2.2). A partir da Lagrangiana (8.1) calculamos a equação de movimento para o campo de gauge

$$\partial_\nu (G F^{\nu\mu}) + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - e\omega J^\mu = 0 , \quad (8.2)$$

e escrevemos a lei de Gauss estacionária

$$\partial_k (G \partial_k A_0) - \kappa B = 2e^2 \omega A_0 |\phi|^2 . \quad (8.3)$$

Do mesmo modo obtemos também a equação de movimento para o campo de Higgs

$$0 = D_\mu (\omega D^\mu \phi) + \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi \right) \frac{\partial G}{\partial \phi^*} - \frac{\partial \omega}{\partial \phi^*} |D_\mu \phi|^2 + 2e^2 \omega \Psi |\phi|^2 + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} . \quad (8.4)$$

Da mesma forma que nos modelos anteriormente descritos, o nosso foco concentra-se em soluções estáticas para sólitons, que assegurem energia finita para o modelo (8.1). A densidade de energia para campos independentes do tempo é escrita da seguinte forma

$$\mathcal{E} = \frac{G}{2} B^2 + \frac{G}{2} (\partial_j A_0)^2 + e^2 \omega (A_0)^2 |\phi|^2 + \omega |D_j \phi|^2 + \frac{G}{2} (\partial_j \Psi)^2 + e^2 \omega \Psi^2 |\phi|^2 + V(|\phi|) . \quad (8.5)$$

Introduzimos a identidade fundamental (5.9) em (8.5) juntamente com a relação (5.11), e reescrevemos a densidade de energia na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{G}{2} B^2 + V(|\phi|) + \frac{G}{2} (\partial_j A_0)^2 + \frac{G}{2} (\partial_j \Psi)^2 + e^2 \omega (A_0)^2 |\phi|^2 \\ & + e^2 \omega \Psi^2 |\phi|^2 + \omega |D_\pm \phi|^2 \pm \frac{1}{\lambda} e \omega B |\phi|^2 \pm \frac{1}{2\lambda} \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) . \end{aligned} \quad (8.6)$$

Passamos agora e realizar o procedimento de Bogomol'nyi, escrevendo a densidade de energia (8.6) como uma soma de termos quadráticos e termos contendo derivadas totais

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \omega |D_\pm \phi|^2 + \frac{G}{2} \left(B \mp \sqrt{\frac{2V}{G}} \right)^2 + \frac{G}{2} (\partial_j A_0 \pm \partial_j \Psi)^2 + e^2 \omega |\phi|^2 (A_0 \pm \Psi)^2 \\ & \pm B \left(\sqrt{2GV} + \frac{1}{\beta} e \omega |\phi|^2 + \kappa \Psi \right) \mp \partial_j (\Psi G \partial_j A_0) \pm \frac{1}{2\beta} \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) . \end{aligned} \quad (8.7)$$

De modo análogo ao realizado nos modelos anteriores, escolhemos o potencial $V(|\phi|)$ de forma tal que a energia das configurações auto-duais seja limitada inferiormente, sendo esta proporcional ao fluxo magnético

$$V(|\phi|) = \frac{1}{2G} \left(ev^2 - \frac{1}{\lambda} e \omega |\phi|^2 - \kappa \Psi \right)^2 , \quad (8.8)$$

substituindo a forma explícita de $\omega(|\phi|)$ dada pela equação (5.12), o potencial é escrito na forma

$$V(|\phi|) = \frac{1}{2G} \left(ev^2 - ev^2 \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} - \kappa \Psi \right)^2 , \quad (8.9)$$

onde foi escolhido $C = \lambda v^{2-2\lambda}$ para termos o valor esperado do vácuo para o campo de Higgs sendo $|\phi| = v$. Incluindo a expressão do potencial (8.9) em (8.7), podemos reescrever a densidade de energia da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \pm ev^2 B + \omega |D_{\pm} \phi|^2 + \frac{G}{2} \left[B \mp \frac{1}{G} \left(v^2 - \frac{|\phi|^{2\beta}}{v^{2\beta}} - \kappa \Psi \right) \right]^2 \\ & + \frac{G}{2} (\partial_j A_0 \pm \partial_j \Psi)^2 + e^2 \omega |\phi|^2 (A_0 \pm \Psi)^2 \mp \partial_j (\Psi G \partial_j A_0) \pm \frac{1}{2\beta} \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) . \end{aligned} \quad (8.10)$$

Considerando que o campo de gauge é zero no infinito e, por conseguinte, não contribui para a energia total do modelo, esta é limitada inferiormente por um múltiplo da magnitude do fluxo magnético

$$E \geq \pm ev^2 \int d^2 x B = ev^2 |\Phi| . \quad (8.11)$$

Este limite é alcançado quando os campos satisfazem as equações de primeira ordem de Bogomol'nyi

$$D_{\pm} \phi = 0 , \quad (8.12)$$

$$B = \pm \frac{ev^2}{G} \left(1 - \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} \right) \mp \kappa \frac{\Psi}{G} , \quad (8.13)$$

$$\partial_j A_0 \pm \partial_j \Psi = 0 , \quad (8.14)$$

$$A_0 \pm \Psi = 0 . \quad (8.15)$$

Novamente, para evitar singularidades no campo magnético na origem, é requerido que $\lambda > 0$, e $G(|\phi|)$ deve ser finito, ou seja, se comportar como $|\phi|^{-\delta}$ com $\delta > 0$.

A condição $\Psi = \mp A_0$ satisfaz as duas últimas equações (8.14) e (8.15), portanto, as equações auto-duais do modelo generalizado de MCSH serão as seguintes

$$D_{\pm} \phi = 0 , \quad (8.16)$$

$$B = \pm \frac{ev^2}{G} \left(1 - \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} \right) + \kappa \frac{A_0}{G} , \quad (8.17)$$

juntamente com a lei de Gauss estacionária

$$\partial_k (G \partial_k A_0) - \kappa B = 2e^2 v^2 \lambda \frac{|\phi|^{2\lambda}}{v^{2\lambda}} A_0 . \quad (8.18)$$

A densidade de energia BPS para o modelo pode ser explicitamente escrita de forma positivo-definida pela seguinte equação

$$\mathcal{E}_{BPS} = GB^2 + G (\partial_j A_0)^2 + \omega |D_j \phi|^2 + 2e^2 \omega |\phi|^2 (A_0)^2 . \quad (8.19)$$

8.1 Vórtices auto-duais compactos no modelo de MCSH generalizado

Implementando os ansatz axialmente simétricos nas equações BPS (8.16) e (8.17) temos

$$g' = \pm \frac{ag}{r} , \quad (8.20)$$

$$-\frac{a'}{r} = \pm \frac{e^2 v^2}{G} (1 - g^{2\lambda}) + e\kappa \frac{A_0}{G} , \quad (8.21)$$

juntamente com a lei de Gauss (8.18) projetada

$$\frac{1}{r} (rGA_0')' - \kappa B = 2\lambda e^2 v^2 g^{2\lambda} A_0 . \quad (8.22)$$

definem as equações a ser analisadas numericamente.

Analisamos a continuação o comportamento assintótico dos perfis $g(r)$, $a(r)$ e $A_0(r)$ considerando a função $G(g)$, cujo comportamento é dado pela equações (5.31) e (5.32). Desta forma, para $r \rightarrow 0$, os perfis tem o seguinte comportamento na origem

$$g(r) \approx C_n r^n + \dots , \quad (8.23)$$

$$a(r) \approx n - \frac{e[ev^2 + \kappa A_0(0)]}{2\alpha_0(n\delta + 1)} (C_n)^{2n\delta} r^{2+2n\delta} + \dots , \quad (8.24)$$

$$A_0(r) \approx A_0(0) + \frac{\kappa[ev^2 + \kappa A_0(0)]}{4} r^2 + \dots, \delta = 0 , \quad (8.25)$$

$$A_0(r) \approx A_0(0) + A_0^{(\delta)} r^{2n\delta} + \dots, \delta \geq 1/2 , \quad (8.26)$$

onde as constantes $C_n > 0$, $A_0(0)$ e $A_0^{(\delta)}$ são determinadas numericamente para qualquer n . O comportamento na origem para $A_0(r)$ fornece a seguinte condição para o campo elétrico

$$A_0'(0) = 0 . \quad (8.27)$$

Por outro lado, no infinito $r \rightarrow \infty$ os perfis tem o seguinte comportamento assintótico

$$g(r) \approx 1 - \frac{C_\infty}{\sqrt{r}} e^{-mr}, \quad (8.28)$$

$$a(r) \approx C_\infty m \sqrt{r} e^{-mr}, \quad (8.29)$$

$$A_0(r) \approx -\frac{|\kappa|}{\kappa} \frac{m}{e} \frac{C_\infty}{\sqrt{r}} e^{-mr}. \quad (8.30)$$

A constante C_∞ será determinada numericamente e m é a massa auto-dual,

$$m = \frac{1}{2\gamma_0} \sqrt{\kappa^2 + 8\gamma_0 \lambda e^2 v^2} - \frac{|\kappa|}{2\gamma_0}. \quad (8.31)$$

Para $\lambda = 1$ e $\gamma_0 = 1$, recuperamos a massa auto-dual dos bósons do modelo de MCSH usual. Desta maneira, obtemos a partir da equação (8.30) a condição na fronteira para $A_0(r)$ quando $r \rightarrow \infty$:

$$A_0(\infty) = 0. \quad (8.32)$$

Com o intuito de calcular as soluções numericamente, escolhemos os sinais superiores, $e = 1$, $v = 1$, $\kappa = -1$ e o número de vorticidade $n = 1$. Os perfis do campo de Higgs e do campo de gauge são dados na Fig. 8.1. Os correspondentes ao campo magnético e a densidade de energia BPS são mostrados na Fig. 8.2.

A figura (8.1) mostra os perfis para o campo de Higgs (à esquerda) e para o campo de gauge (à direita). Observamos que o campo de Higgs tende para o valor do vácuo mais rapidamente à medida que λ é aumentado. O mesmo pode ser observado nos perfis para o campo de gauge, mas neste caso sem o comportamento abrupto dos perfis campo

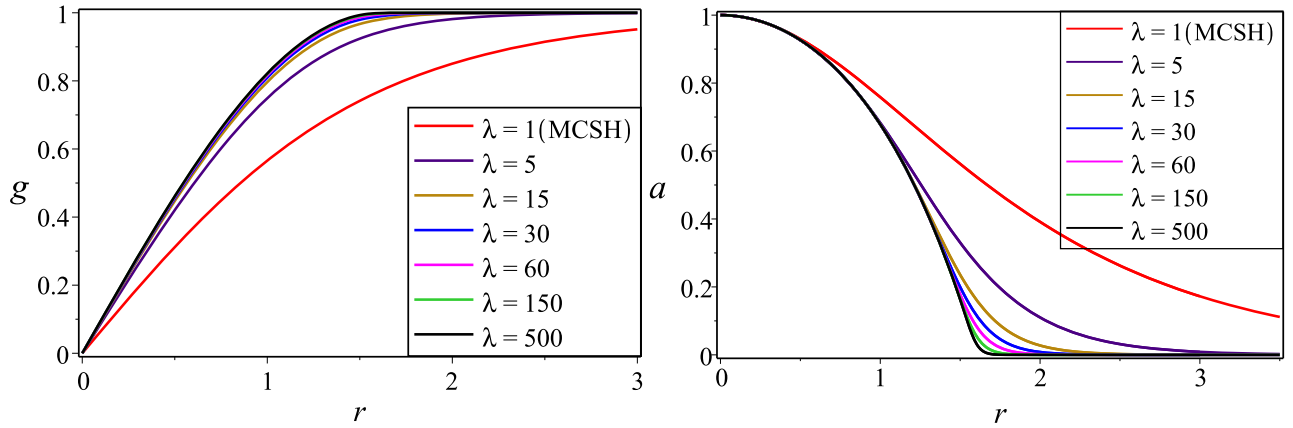


Figura 8.1: Perfis para o campo de Higgs $g(r)$ (esquerda) e para o campo de gauge $a(r)$ (direita) advindos do modelo (8.1) fixando $G(g) = 1$ para alguns valores de $\lambda \geq 1$.

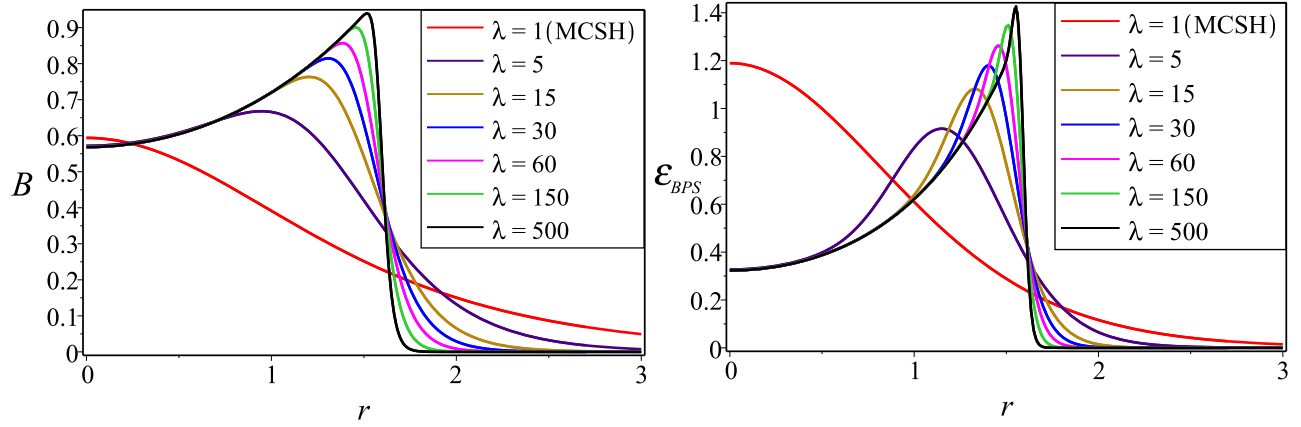


Figura 8.2: Perfis para o campo magnético $B(r)$ (esquerda) e para a densidade de energia BPS $\varepsilon_{BPS}(r)$ (direita) advindos do modelo (8.1) fixando $G(g) = 1$ para alguns valores de $\lambda \geq 1$.

A figura 8.2 mostra os perfis para o campo magnético (à esquerda) e para a densidade de energia (à direita). Pode ser observado nos perfis para o campo magnético que a intensidade na origem para $\lambda = 1$ é levemente superior à intensidade na origem para valores de $\lambda > 1$. Observamos que à medida que λ aumenta os perfis aumentam sua intensidade e depois decaem rapidamente para valores grandes do parâmetro, representando soluções bem compactas para estes valores. Nos perfis para a densidade de energia observamos que para $\lambda > 1$ a intensidade na origem é menor do que para $\lambda = 1$. Notamos também que a intensidade na energia é aumentada à medida que λ aumenta e o decaimento é bem pronunciado para estes valores do parâmetro. Desta forma obtemos soluções muito bem localizadas numa certa região do espaço, como acontece nos defeitos do tipo vórtices compactos.

Capítulo 9

Comentários e conclusões

A implementação direta do formalismo BPS para encontrar configurações auto-duais, é permitido encontrar uma forma funcional explícita para a função generalizadora da dinâmica do campo de Higgs dada pela equação (5.12):

$$\omega(|\phi|) = \lambda \frac{|\phi|^{2\lambda-2}}{v^{2\lambda-2}}. \quad (9.1)$$

Chamamos a atenção para a importância de encontrar as equações BPS nos modelos generalizados sem implementar qualquer sistema de coordenadas específico. A ligação entre as soluções clássicas auto-duais e suas extensões supersimétricas analisada por Witten e Olive [10] ganha maior importância por ser independente do sistema de coordenadas. Vale ressaltar que encontrar as equações BPS de um modelo em um sistema específico de coordenadas não garante a existência de uma extensão supersimétrica do modelo. Por outro lado, aqui nós garantimos a existência destas equações em qualquer sistema de coordenadas, sendo este o resultado principal de este capítulo.

Destacamos também que a partir das configurações BPS projetadas no plano, obtivemos perfis do tipo vórtices compactos para todos os quatro modelos abordados no capítulo. Portanto, estes resultados poderão ser utilizados futuramente em modelos efetivos onde se procure eliminar a interação dos sólitons e se procurem estruturas muito bem localizadas e com dimensões definidas. Em esta direção estudos acerca de colisões e espalhamento destas estruturas poderiam ser abordados em um próximo trabalho.

Conclusões finais e perspectivas

Em este trabalho foi apresentada uma variedade de modelos contendo soluções de defeitos topológicos auto-duais. Para cada um dos modelos apresentados, foi construído um roteiro para a implementação do formalismo BPS para a obtenção das equações auto-duais. Apesar da diversidade dos modelos aqui desenvolvidos, é justamente este roteiro que concatena os modelos apresentados. Um dos feitos fundamentais deste trabalho, é o de obter as equações auto-duais no espaço das configurações, sem a necessidade *a priori* de trabalhar em um sistema de coordenadas específico, ou em um determinado *ansatz*. A motivação principal para esta abordagem, radica na busca por resultados gerais, cuja aplicação e abrangência será maior daquelas com resultados específicos e pontuais. Novamente ressaltamos que encontrar as equações auto-duais de um modelo em um sistema específico de coordenadas não garante a existência de uma extensão supersimétrica do modelo. Por outro lado, vale lembrar que a independência das leis da Física perante os sistemas de coordenadas motiva também este tipo de abordagem. Uma outra característica em comum para os modelos aqui apresentados é que a partir dos modelos usuais, introduzimos expressões que modificam a sua dinâmica.

No primeiro modelo abordado, foi incrementado o campo vetorial de fundo de CFJ no setor de gauge, além de um campo tensorial, cujos coeficientes não dependem das coordenadas do espaço-tempo, quebrando desta maneira a invariância da simetria de Lorentz no setor de Higgs. No segundo modelo apresentado, ainda no primeiro capítulo, a mudança no setor de gauge foi implementada adicionando um campo tensorial de paridade CPT-par, cujos coeficientes independem das coordenadas do espaço-tempo no setor de gauge, além do campo tensorial de violação de Lorentz no setor de Higgs. No segundo capítulo, os termos adicionados coincidem com o do primeiro modelo, mas em este caso, foi analisado campo sigma $O(3)$ não-Abeliano. Por último, nos modelos generalizados apresentados no terceiro capítulo, a generalização é realizada através de funções de natureza escalar, representando funções dielétricas no contexto de uma eletrodinâmica modificada. Destacamos que neste caso as funções generalizadoras têm dependência nas coordenadas do espaço-tempo, preservando assim a invariância de Lorentz.

Para a primeira parte do trabalho, concluímos que as configurações na presença do termo de CFJ tem carga elétrica total não nula, além de serem proporcionais ao fluxo magnético, enquanto que as configurações contendo somente termos CPT-par tem carga elétrica total nula. Contudo, as soluções obtidas quando consideramos o setor de gauge com coeficientes CPT-par de paridade-ímpar possuem campo elétrico não nulo. Vimos também que implementação do formalismo BPS provê equações auto-duais cujas soluções tem energia total proporcional ao fluxo magnético. Estudamos em detalhe as soluções tipo-vórtices axialmente simétricos usando o *ansatz* apropriado, contendo coeficientes de violação de Lorentz pertencentes ao setor de Higgs. Foi observamos que o fluxo magnético além de ser proporcional ao número de vorticidade, também depende dos coeficientes CPT-par do setor de Higgs. Mostramos que existem conjuntos de valores dos coeficientes CPT-par do setor de Higgs que reproduzem as configurações dos

modelos de Higgs abelianos já estudados na literatura. Um outro resultado importante é a existência de um jogo de parâmetros envolvendo o caso puramente CPT-par cujos vórtices BPS apresentam a inversão localizada tanto do campo magnético como do campo elétrico.

Em relação à segunda parte do trabalho, concluímos que as configurações auto-duais tem carga total não nula proporcional ao fluxo magnético. A implementação do formalismo BPS fornece as equações auto-duais com configurações possuindo energia total proporcional à carga topológica do modelo. Foram estudadas as soluções de vórtices axialmente simétricos utilizando o *ansatz* adequados incorporando coeficientes pertencentes a matriz de violação de Lorentz do setor sigma. Estes possuem energia total proporcional à vorticidade e depende dos coeficientes VL pertencentes ao setor sigma. Essa dependência é refletida na carga topológica e no fluxo magnético. Similarmente ao caso anterior, existem conjuntos de valores dos coeficientes CPT-par do setor de sigma permitem interpolar as configurações dos modelos $O(3)$ sigma não-linear acoplado a um campo de gauge encontrados na literatura.

No terceira e último parte do trabalho, observamos a partir da implementação do formalismo BPS que a forma explícita da função que generaliza o termo cinético do campo de Higgs surge naturalmente: $\lambda|\phi|^{2\lambda-2}$, $\lambda > 1$. Com isso, determinados os potenciais auto-duais e as correspondentes equações de primeira ordem para cada modelo. Dentre as configurações auto-duais, estudamos as soluções tipo vórtice e encontramos que para os quatro modelos estudados neste capítulo, a partir de um determinado valor do parâmetro λ os perfis começam adquirir a forma das soluções do tipo vórtices compactos. Este tipo de soluções compactas são concentradas em uma região muito bem determinada do espaço. À diferença para os perfis de vórtices usuais, o seu decaimento acontece de maneira abrupta, sendo possível construir uma rede para este tipo de defeito sem aparecer o problema da superposição.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland Publishing Company, (1982).
- [2] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall Effects*, second edition, World Scientific, (2008).
- [3] W. Meissner, R. Ochsenfeld, *Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit*, Naturwissenschaften, **21** (44) 787–788 (1933).
- [4] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, *On the theory of superconductivity*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 1064 (1950).
- [5] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, *Theory of superconductivity*, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [6] A. Abrikosov, *On the magnetic properties of superconductors of the second group*, Sov. Phys. JETP **5**, 1174 (1957).
- [7] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Vortex line models for dual strings*, Nucl. Phys. B **61**, 45 (1973).
- [8] E. B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **23**, 355 (1976); M. Prasad and C. Sommerfield, *Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*, Phys. Rev. Lett. **35**, 760-762 (1975).
- [9] C. Montonen and D. Olive, *Magnetic monopoles as gauge particles*, Phys. Lett. B **72**, 117 (1977).
- [10] E. Witten and D. Olive, *Supersymmetry algebras that include topological charges*, Phys. Lett. B **78**, 97 (1978).
- [11] H. Belich, T. Costa-Soares, M.A. Santos e M.T.D. Orlando, *Violação da simetria de Lorentz*, Revista Brasileira de Ensino de Física, **29**, n. 1, p. 57, (2007).
- [12] EXO-200 Collaboration: J.B. Albert et al., *First Search for Lorentz and CPT Violation in Double Beta Decay with EXO-200*, Phys. Rev. D **93**, 072001 (2016).

- [13] M. Nagel et al., *Direct Terrestrial Test of Lorentz Symmetry in Electrodynamics to 10^{-18}* , Nature Commun. **6**, 8174 (2015).
- [14] T. Pruttivarasin et al., *A Michelson-Morley Test of Lorentz Symmetry for Electrons*, Nature **517**, 592 (2015).
- [15] Super-Kamiokande Collaboration: K. Abe et al., *Test of Lorentz invariance with atmospheric neutrinos*, Phys. Rev. D **91**, 052003 (2015).
- [16] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *CPT violation and the standard model*, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997).
- [17] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Lorentz-violating extension of the standard model*, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).
- [18] S. R. Coleman and S. L. Glashow, *High-energy tests of Lorentz invariance*, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999).
- [19] S.M. Carroll, G.B. Field, and R. Jackiw, *Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics*, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [20] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Cosmological constraints on Lorentz violation in electrodynamics*, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001).
- [21] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Signals for Lorentz violation in electrodynamics*, Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002).
- [22] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Sensitive Polarimetric Search for Relativity Violations in Gamma-Ray Bursts*, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006).
- [23] B. Altschul, *Vacuum Čerenkov Radiation in Lorentz-Violating Theories Without CPT Violation*, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007).
- [24] F. R. Klinkhamer and M. Risse, *Ultrahigh-energy cosmic-ray bounds on nonbirefringent modified Maxwell theory*, Phys. Rev. D **77**, 016002 (2008).
- [25] F. R. Klinkhamer and M. Schreck, *New two-sided bound on the isotropic Lorentz-violating parameter of modified Maxwell theory*, Phys. Rev. D **78**, 085026, (2008).
- [26] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, B.P. Abbott et al., *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).
- [27] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Testing local Lorentz invariance with gravitational waves*, Phys. Lett. B, **757**, 510 (2016).

- [28] M. N. Barreto, D. Bazeia, and R. Menezes, *Defect structures in Lorentz and CPT violating scenarios* Phys. Rev. D **73**, 065015 (2006).
- [29] A. P. Baeta Scarpelli and J. A. Helayel-Neto, *Lorentz-violating $SO(3)$ model: Discussing unitarity, causality, and 't Hooft-Polyakov monopoles*, Phys.Rev. D **73**, 105020 (2006).
- [30] M.D. Seifert, *Monopole Solution in a Lorentz-Violating Field Theory*, Phys. Rev. Lett. **105**, 201601 (2010).
- [31] C. Miller, R. Casana, M. M. Ferreira Jr. and E. da Hora, *Uncharged compactlike and fractional Lorentz-violating BPS vortices in the CPT-even sector of the standard model extension*, Phys. Rev. D **86**, 065011 (2012).
- [32] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, E. da Hora, C. Miller, *Magnetic flux inversion in Charged BPS vortices in a Lorentz-violating Maxwell-Higgs framework*, Phys. Lett. B **718**, 620 (2012).
- [33] R.Casana, L. Sourrouille, *Self-dual Maxwell–Chern–Simons solitons from a Lorentz-violating model*, Phys. Lett. B **726**, 488 (2013).
- [34] R. Casana, M. M. Ferreira, E. da Hora and A. B. F. Neves, *Maxwell–Chern–Simons vortices in a CPT-odd Lorentz-violating Higgs electrodynamics* Eur. Phys. J. C **74**, 3064 (2014).
- [35] L. Sourrouille, *Note on vortices from Lorentz-violating models*, Phys. Rev. D **89**, 087702 (2014).
- [36] R. Casana, G. Lazar, *Topological charged BPS vortices in Lorentz-violating Maxwell-Higgs electrodynamics*, Phys. Rev. D **90**, 065007 (2014).
- [37] R. Casana, C. F. Farias, M. M. Ferreira Jr, G. Lazar, *Self-dual solitons in a CPT-odd and Lorentz-violating gauged $O(3)$ sigma model*, Phys. Rev. D **94**, 065036 (2016).
- [38] Z. Hao, C.R. Hu, *Flux motion in anisotropic type-II superconductors near H_{c2}* , Phys. Rev. B **48**, 16818 (1993).
- [39] N. Kopnin, *Vortices in type-II superconductors: structure and dynamics, Part II – Anisotropic and layered superconductors* Orsay (1996).
- [40] D. L. Feder and C. Kallin, *Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations for a d-wave superconductor*, Phys. Rev. B **55**, 559 (1997).
- [41] C. Lee, K. Lee and H. Min, *Self-dual Maxwell Chern-Simons Solitons* Phys. Lett. B, **252**, 79 (1990).

- [42] S. Bolognesi, S.B. Gudnason, *A note on Chern-Simons solitons-A type III vortex from the wall vortex*, Nuclear Physics B, **805**, (2008).
- [43] R. Jackiw and Erick J. Weinberg. *Self-Dual Chern-Simons Vortices*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2234 (1990).
- [44] M. Gell-Mann and M. Levy, *The axial vector current in beta decay*, Nuovo Cimento **16**, 705 (1960).
- [45] J. Schwinger, *A theory of the fundamental interactions*, Ann. Phys. **2**, 407 (1957).
- [46] J. C. Polkinghorne Nuovo Cimento **8**, 179, 781 (1958).
- [47] A. A. Belavin and A. M. Polyakov, *Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets*, JETP Lett. **22**, 245 (1975).
- [48] R. A. Leese, M. Peyrard, and W. J. Zakrzewski, *Soliton stability in the $O(3)$ sigma -model in $(2+1)$ dimensions*, Nonlinearity **3**, 387 (1990).
- [49] B. J. Schroers, *Bogomol'nyi solitons in a gauged $O(3)$ sigma model*, Phys. Lett. B **356**, 291 (1995).
- [50] P. K. Ghosh and S. K. Ghosh, *Topological and nontopological solitons in a gauged $O(3)$ sigma model with Chern-Simons term*, Phys. Lett. B **366**, 199 (1996).
- [51] P. Mukherjee, *On the question of degeneracy of topological solitons in a gauged $O(3)$ non-linear sigma model with Chern-Simons term*, Phys. Lett. B **403**, 70 (1997).
- [52] P. Mukherjee, *Magnetic vortices in a gauged $O(3)$ sigma model with symmetry breaking self-interaction*, Phys. Rev. D **58**, 105025 (1998).
- [53] K. Kimm, K. Lee, T. Lee, *Anyonic Bogomol'nyi solitons in a gauged $O(3)$ σ model*, Phys. Rev. D **53** 4436 (1996); J. Han, H.-S. Nam, *On the Topological Multivortex Solutions of the Self-Dual Maxwell-Chern-Simons Gauged $O(3)$ Sigma Model*, Lett. Math. Phys. **73**, 17 (2005).
- [54] F. S. A. Cavalcante, M.S. Cunha, C.A.S. Almeida, *Vortices in a nonminimal Maxwell-Chern-Simons $O(3)$ Sigma Model*, Phys. Lett. B **475**, 315 (2000); M. S. Cunha, R. R. Landim and C. A. S. Almeida, *Nonminimal Maxwell-Chern-Simons- $O(3)$ - σ vortices: Asymmetric potential case*, Phys. Rev. D **74**, 067701 (2006).
- [55] R. Casana, C. F. Farias, and M. M. Ferreira Jr., *Topological self-dual configurations in a Lorentz-violating gauged $O(3)$ sigma model*, Phys. Rev. D **92**, 125024 (2015).

- [56] D. Bazeia, A.S. Lobao Jr, R. Menezes, *Stable static structures in models with higher-order derivatives*, Annals of Physics **360**, 194 (2015).
- [57] R. Casana, A. Cavalcante, E. da Hora, *Self-dual configurations in Abelian Higgs models with k -generalized gauge field dynamics*, arXiv:1509.0465.
- [58] R. Casana, M.M. Ferreira, Jr., E. da Hora, *Generalized BPS magnetic monopoles*, Phys.Rev. D **86** 085034 (2012).
- [59] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. Mukhanov, *k -Inflation*, Phys. Lett. B **458**, 209 (1999); C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, P. J. Steinhardt, *Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late-Time Cosmic Acceleration*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4438 (2000).
- [60] C. Armendariz-Picon and E. A. Lim, *Haloes of k -essence*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **08**, 007 (2005).
- [61] V. Mukhanov and A. Vikman, *Enhancing the tensor-to-scalar ratio in simple inflation*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **02**, 004 (2005).
- [62] A. Sen, *Tachyon Matter*, JHEP **0207**, 065 (2002).
- [63] N. Arkani-Hamed, H.-C. Cheng, M. A. Luty, S. Mukohyama, *Ghost Condensation and a Consistent Infrared Modification of Gravity*, JHEP **0405**, 074 (2004).
- [64] D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos and R. Menezes, *Generalized self-dual Chern-Simons vortices*, Phys. Rev. D **81**, 125014 (2010).
- [65] D. Bazeia, E. da Hora, R. Menezes, H. P. de Oliveira and C. dos Santos, *Compactlike kinks and vortices in generalized models*, Phys. Rev. D **81**, 125016 (2010).
- [66] D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos, R. Menezes, *BPS solutions to a generalized Maxwell-Higgs model*, Eur. Phys. J. C **71**, 1833 (2011).
- [67] D. Bazeia, R. Casana, E. da Hora, R. Menezes, *Generalized self-dual Maxwell-Chern-Simons-Higgs model*, Phys. Rev. D **85**, 125028 (2012).
- [68] E. Babichev, *Gauge k -vortices*, Phys.Rev. D **77**, 065021 (2008).
- [69] C. Adam, P. Klimas, J. Sanchez-Guillen and A. Wereszczynski, *Compact gauge K vortices*, J. Phys. A **42**, 135401 (2009).
- [70] L. Sourrouille, *Galilean symmetry in generalized abelian Schrodinger-Higgs models with and without gauge field interaction*, Mod. Phys. Lett. A, **30**, 1501211 (2015).

- [71] R. Casana, L. Sourrouille, *Self-dual soliton solutions in a Chern–Simons-CP(1) model with a nonstandard kinetic term*, Mod. Phys. Lett. A **29**, 1450124 (2014).
- [72] Lucas Sourrouille, *Self-dual soliton solution in a generalized Jackiw-Pi model*, Physical Review D **86**, 085014 (2012).
- [73] E. Babichev, *Global topological k-defects*, Phys. Rev. D **74**, 085004 (2006).
- [74] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes and J. C. R. E. Oliveira, *Generalized global defect solutions*, Eur. Phys. J. C **51**, 953 (2007).
- [75] P. Rosenau and J. M. Hyman, *Compactons: Solitons with finite wavelength*, Phys. Rev. Lett. **70**, 564 (1993).
- [76] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1994).
- [77] D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos, and R. Menezes, *BPS Solutions to a Generalized Maxwell-Higgs Model*, Eur. Phys. J. C **71**, 1833 (2011).
- [78] D. Bazeia, L. Losano, M.A. Marques, R. Menezes, I Zafalan, *Compact Vortices*, arxiv:1611.02110 (2016).
- [79] R. Casana, M. M. Ferreira, E. da Hora, and C. dos Santos, *Analytical BPS Maxwell-Higgs Vortices*, Adv. High Energy Phys. **2014**, 210929 (2014).
- [80] R. Casana, L. Sourrouille, *Self-dual configurations in a generalized Abelian Chern-Simons-Higgs model with explicit breaking of the Lorentz covariance*, Adv. High Energy Phys. **2016**, 5315649 (2016).
- [81] B. Born and L. Infeld, Proc. Roy. Soc. A **144**, 425 (1935); P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **268**, 57 (1962).
- [82] K. Shiraishi and S. Hirenzaki, *Bogomol’nyi Equations for Vortices in Born-Infeld Higgs Systems*, Int. J. Mod. Phys. A **6**, 2635 (1991).
- [83] D. Bazeia, E. da Hora, and D. Rubiera-Garcia, *Compact vortexlike solutions in a generalized Born-Infeld model*, Phys. Rev. D **84**, 125005 (2011).
- [84] R. Casana, E. da Hora, D. Rubiera-Garcia, and C. dos Santos, *Topological vortices in generalized Born–Infeld–Higgs electrodynamics*, Eur. Phys. J. C **75**, 380 (2015).
- [85] H. de Vega and F .A. Schaposnik, *Classical vortex solution of the Abelian Higgs model* Phys. Rev. D **14**, 1100 (1976).

- [86] R. Jackiw and S. Y. Pi, *Self-dual Chern-Simons solitons*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **107**, 1 (1992).
- [87] G. V. Dunne, *Aspects of Chern-Simons Theory*, [arXiv:hep-th/9902115], Lectures at the Les Houches Summer School (1998).
- [88] F. A. Schaposnik, *Vortices*, [arXiv:hep-th/0611028].
- [89] R. Jackiw and E. J. Weinberg, *Self-dual Chern-Simons vortices*, Physical Review Letters **64**, 2234 (1990); J. Hong, Y. Kim, and P. Y. Pac, *Multivortex solutions of the Abelian Chern-Simons-Higgs theory*, Phys. Rev. Lett. **64** 2230 (1990).
- [90] R. Jackiw and S. Y. Pi, *Soliton solutions to the gauged nonlinear Schrödinger equation on the plane*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2969 (1990).
- [91] R. Jackiw, K. M. Lee and E.J. Weinberg, *Classical and quantal nonrelativistic Chern-Simons theory*, Phys.Rev. D **42**, 3488 (1990).
- [92] C. Lee, K. Lee and E.J. Weinberg, *Supersymmetry and self-dual Chern-Simons systems*, Phys. Lett. B **243**, 105 (1990).
- [93] S. K. Paul and A. Khare, *Self-dual factorization of the Proca equation with Chern-Simons term in $4K-1$ dimensions*, Phys. Lett. B **171**, 244 (1986).
- [94] P.K. Ghosh, *Bogomol'nyi equations of Maxwell-Chern-Simons vortices from a generalized Abelian Higgs model*, Phys. Rev. D **49**, 5458 (1994).
- [95] D. Bazeia, R. Casana, E. da Hora, R. Menezes, *Generalized self-dual Maxwell-Chern-Simons-Higgs model*, Phys. Rev. D **85**, 125028 (2012).

Apêndices

Apêndice A

Cálculo de $|D_k\phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j\phi)^* D_k\phi$

Em este apêndice vamos mostrar como obtivemos a seguinte identidade

$$|D_j\phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j\phi)^* (D_k\phi) = \left| \tilde{D}_{\pm}\phi \right|^2 \pm \sqrt{\det(\mathbb{M})} eB |\phi|^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\det(\mathbb{M})} \epsilon_{jk} \partial_j J_k, \quad (\text{A.1})$$

a qual foi utilizada para escrever a densidade de energia como uma soma de termos quadráticos, termos proporcionais ao campo magnético e termos contendo derivadas totais.

Primeiramente escrevemos por extenso o termo à esquerda na igualdade (A.1)

$$\begin{aligned} |D_k\phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j\phi)^* D_k\phi &= [1 - (k_{\phi\phi})_{11}] |D_1\phi|^2 + [1 - (k_{\phi\phi})_{22}] |D_2\phi|^2 \\ &\quad - (k_{\phi\phi})_{12} [(D_1\phi)^* D_2\phi + (D_2\phi)^* D_1\phi], \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

o qual pode também ser escrito em forma matricial

$$|D_j\phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j\phi)^* (D_k\phi) = \begin{pmatrix} D_1\phi \\ D_2\phi \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 - (k_{\phi\phi})_{11} & - (k_{\phi\phi})_{12} \\ - (k_{\phi\phi})_{12} & 1 - (k_{\phi\phi})_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1\phi \\ D_2\phi \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

A continuação definimos a transformação

$$\tilde{D}_i\phi = M_{ij} D_j\phi, \quad (\text{A.4})$$

onde $\mathbb{M}$ é uma matriz com os seguintes elementos

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Multiplicando (A.4) pela esquerda por $(\tilde{D}_i\phi)^*$ escrevemos

$$\left(\tilde{D}_i\phi\right)^* \left(\tilde{D}_i\phi\right) = (D_a\phi)^* M_{ia} M_{ib} D_b\phi = (D_a\phi)^* (M^T)_{ai} M_{ib} D_b\phi , \quad (\text{A.6})$$

com o produto entre as matrizes $(M^T)_{ai} M_{ib}$ sendo

$$M^T M = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & -ab - cd \\ -ab - cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.7})$$

Utilizando (A.4) e (A.5) temos:

$$\begin{aligned} \left|\tilde{D}_1\phi\right|^2 + \left|\tilde{D}_2\phi\right|^2 &= (a^2 + c^2) |D_1\phi|^2 + (b^2 + d^2) |D_2\phi|^2 \\ &\quad - (ab + cd) [(D_1\phi)^* (D_2\phi) + (D_2\phi)^* (D_1\phi)] . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Comparando os coeficientes à direita da igualdade em (A.8) com a equação (A.2) encontramos o valor para cada coeficiente, lembrando que estes correspondem aos coeficientes da matriz $[\mathbb{M}]^2$

$$a^2 + c^2 = 1 - (k_{\phi\phi})_{11} , \quad (\text{A.9})$$

$$b^2 + d^2 = 1 - (k_{\phi\phi})_{22} , \quad (\text{A.10})$$

$$ab + cd = (k_{\phi\phi})_{12} , \quad (\text{A.11})$$

resultando na seguinte igualdade

$$\left|\tilde{D}_1\phi\right|^2 + \left|\tilde{D}_2\phi\right|^2 = |D_j\phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j\phi)^* D_k\phi . \quad (\text{A.12})$$

Com os coeficientes (A.9-A.11) podemos escrever o determinante da matriz $\mathbb{M}$ em função dos parâmetros $(k_{\phi\phi})_{jk}$ do seguinte modo

$$\det \mathbb{M} = \sqrt{[1 - (k_{\phi\phi})_{11}] [1 - (k_{\phi\phi})_{22}] - [(k_{\phi\phi})_{12}]^2} . \quad (\text{A.13})$$

Introduzindo aqui a definição

$$\tilde{D}_{\pm}\phi = \tilde{D}_1\phi \pm i\tilde{D}_2\phi , \quad (\text{A.14})$$

computamos $\left|\tilde{D}_{\pm}\phi\right|^2$:

$$\left|\tilde{D}_{\pm}\phi\right|^2 = \left|\tilde{D}_1\phi\right|^2 + \left|\tilde{D}_2\phi\right|^2 \pm i \left[(\tilde{D}_1\phi)^* (\tilde{D}_2\phi) - (\tilde{D}_2\phi)^* (\tilde{D}_1\phi) \right] , \quad (\text{A.15})$$

onde os dois primeiros termos à direita na equação anterior ficam identificados na relação (A.12). Já para o último termo em (A.15), utilizando (A.4) e (A.5) podemos reescrever-lho da seguinte forma

$$i \left[\left(\tilde{D}_1 \phi \right)^* \left(\tilde{D}_2 \phi \right) - \left(\tilde{D}_2 \phi \right)^* \left(\tilde{D}_1 \phi \right) \right] = (ad - bc) i \left[(D_1 \phi)^* (D_2 \phi) - (D_2 \phi)^* (D_1 \phi) \right] . \quad (\text{A.16})$$

Abrimos mão agora da definição da corrente covariante $J_k = i [\phi (D_k \phi)^* - \phi^* (D_k \phi)]$, para escrever

$$-i \epsilon_{jk} \partial_j J_k = 2 (D_2 \phi)^* (D_1 \phi) - 2 (D_1 \phi)^* (D_2 \phi) + \phi ([D_1, D_2] \phi)^* - \phi^* ([D_1, D_2] \phi) , \quad (\text{A.17})$$

na qual, a expressão para o comutador fornece o seguinte resultado

$$[D_1, D_2] \phi = -ie (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \phi = -ie B \phi . \quad (\text{A.18})$$

Inserindo a expressão para o comutador em (A.17), reescrevemos o termo à direita da igualdade em (A.16) da seguinte maneira

$$i [(D_1 \phi)^* (D_2 \phi) - (D_2 \phi)^* (D_1 \phi)] = -eB |\phi|^2 - \frac{1}{2} \epsilon_{jk} \partial_j J_k . \quad (\text{A.19})$$

Levando os resultados ate aqui obtidos na equação (A.15) e lembrando que

$$(ad - bc) = \det (\mathbb{M}) = \sqrt{[1 - (k_{\phi\phi})_{11}] [1 - (k_{\phi\phi})_{22}] - [(k_{\phi\phi})_{12}]^2} ,$$

temos finalmente a relação desejada

$$|D_j \phi|^2 - (k_{\phi\phi})_{jk} (D_j \phi)^* (D_k \phi) = \left| \tilde{D}_{\pm} \phi \right|^2 \pm (\det \mathbb{M}) eB |\phi|^2 \pm \frac{1}{2} (\det \mathbb{M}) \epsilon_{jk} \partial_j J_k .$$

Apêndice B

Cálculo de $\left(D_i \vec{\phi}\right)^2 - (k_{\phi\phi})_{ij} D_i \vec{\phi} \cdot D_j \vec{\phi}$

Queremos demonstrar a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(D_j \vec{\phi}\right)^2 - \frac{1}{2} (k_{\phi\phi})_{ij} D_i \vec{\phi} \cdot D_j \vec{\phi} &= \frac{1}{4} \left(\tilde{D}_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jm} \vec{\phi} \times \tilde{D}_m \vec{\phi}\right)^2 \mp (\det \mathbb{M}) \phi_3 B \\ &\quad \pm (\det \mathbb{M}) \epsilon_{ik} \partial_i (A_k \phi_3) \pm (\det \mathbb{M}) \vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi}\right) . \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Para esse propósito reescrevemos os seguintes termos

$$\left[\delta_{ij} - (k_{\phi\phi})_{ij}\right] D_i \vec{\phi} \cdot D_j \vec{\phi} = \tilde{D}_k \vec{\phi} \cdot \tilde{D}_k \vec{\phi} , \quad (\text{B.2})$$

e definimos a transformação

$$\tilde{D}_k \phi_a = M_{kj} D_j \phi_a , \quad (\text{B.3})$$

onde a matriz $\mathbb{M}$ é definida na forma

$$M_{kj} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} . \quad (\text{B.4})$$

A partir da definição (B.3) realizamos a operação

$$\left(\tilde{D}_k \phi_a\right)^2 = D_i \phi_a (\mathbb{M})_{ik}^T \mathbb{M}_{kj} D_j \phi_a . \quad (\text{B.5})$$

Igualmente ao apresentado no Apêndice (A), o termo à esquerda na igualdade (B.2) pode ser reescrito na forma matricial

$$\left[\delta_{ij} - (k_{\phi\phi})_{ij}\right] D_i \vec{\phi} \cdot D_j \vec{\phi} = \begin{pmatrix} D_1 \phi_a \\ D_2 \phi_a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 - (k_{\phi\phi})_{11} & - (k_{\phi\phi})_{12} \\ - (k_{\phi\phi})_{12} & 1 - (k_{\phi\phi})_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \phi_a \\ D_2 \phi_a \end{pmatrix} , \quad (\text{B.6})$$

e comparando esta expressão com (B.5) igualamos as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 - (k_{\phi\phi})_{11} & -(k_{\phi\phi})_{12} \\ -(k_{\phi\phi})_{12} & 1 - (k_{\phi\phi})_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M_{11})^2 + (M_{21})^2 & M_{11}M_{12} + M_{22}M_{21} \\ M_{11}M_{12} + M_{22}M_{21} & (M_{22})^2 + (M_{12})^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

Continuando a demonstração inserimos a expressão: $\tilde{D}_j\vec{\phi} \pm \epsilon_{jk}\vec{\phi} \times \tilde{D}_k\vec{\phi}$, que juntamente com a transformação (B.3) pode ser expressa na forma

$$\tilde{D}_j\vec{\phi} \pm \epsilon_{jm}\vec{\phi} \times \tilde{D}_m\vec{\phi} = M_{jp}D_p\vec{\phi} \pm \epsilon_{jk}M_{kq}\vec{\phi} \times D_q\vec{\phi}. \quad (\text{B.8})$$

Elevando ao quadrado a expressão anterior temos:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{D}_j\vec{\phi} \pm \epsilon_{jm}\vec{\phi} \times \tilde{D}_m\vec{\phi}\right)^2 &= \left(M_{jp}D_p\vec{\phi}\right) \cdot \left(M_{jm}D_m\vec{\phi}\right) \pm \epsilon_{jk}M_{jp}M_{kq}\left(D_p\vec{\phi}\right) \cdot \left(\vec{\phi} \times D_q\vec{\phi}\right) \\ &\quad \pm \epsilon_{jk}M_{jp}M_{kq}\left(D_p\vec{\phi}\right) \cdot \left(\vec{\phi} \times D_q\vec{\phi}\right) + \delta_{nk}M_{np}M_{kq}\left(\vec{\phi} \times D_q\vec{\phi}\right) \cdot \left(\vec{\phi} \times D_p\vec{\phi}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

utilizando a seguinte identidade vetorial

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{A} \times \vec{D}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{A}\right) \left(\vec{B} \cdot \vec{D}\right) - \left(\vec{A} \cdot \vec{D}\right) \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right), \quad (\text{B.10})$$

no último termo na equação anterior obteremos a expressão

$$\begin{aligned} \left(\tilde{D}_j\vec{\phi} \pm \epsilon_{jm}\vec{\phi} \times \tilde{D}_m\vec{\phi}\right)^2 &= \left(M_{jp}D_p\vec{\phi}\right) \cdot \left(M_{jm}D_m\vec{\phi}\right) \mp 2\epsilon_{jk}M_{jp}M_{kq}\vec{\phi} \cdot \left(D_p\vec{\phi} \times D_q\vec{\phi}\right) \\ &\quad + \left(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}\right) \left(M_{kq}D_q\vec{\phi}\right) \cdot \left(M_{kp}D_p\vec{\phi}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

na qual introduzimos novamente a transformação (B.3) para reescrever (B.11) na forma

$$\left(\tilde{D}_j\vec{\phi} \pm \epsilon_{jm}\vec{\phi} \times \tilde{D}_m\vec{\phi}\right)^2 = \left[1 + \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}\right] \tilde{D}_j\vec{\phi} \cdot \tilde{D}_j\vec{\phi} \mp 2\epsilon_{jk}M_{jp}M_{kq}\vec{\phi} \cdot \left(D_p\vec{\phi} \times D_q\vec{\phi}\right). \quad (\text{B.12})$$

Abrindo explicitamente o último termo na equação anterior pode-se chegar a seguinte expressão para o referido termo

$$\epsilon_{jk}M_{jp}M_{kq}\vec{\phi} \cdot \left(D_p\vec{\phi} \times D_q\vec{\phi}\right) = 2(\det \mathbb{M}) \vec{\phi} \cdot \left(D_1\vec{\phi} \times D_2\vec{\phi}\right). \quad (\text{B.13})$$

Substituindo este termo em (B.12) e lembrando que o campo sigma tem norma unitária ($\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$), temos

$$\frac{1}{2}\tilde{D}_j\vec{\phi} \cdot \tilde{D}_j\vec{\phi} = \frac{1}{4}\left(\tilde{D}_j\vec{\phi} \pm \epsilon_{jm}\vec{\phi} \times \tilde{D}_m\vec{\phi}\right)^2 \mp (\det \mathbb{M}) \vec{\phi} \cdot \left(D_1\vec{\phi} \times D_2\vec{\phi}\right). \quad (\text{B.14})$$

Desenvolvendo os produtos vetoriais nas derivadas covariantes do último termo escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{D}_j \vec{\phi} \cdot \tilde{D}_j \vec{\phi} &= \frac{1}{4} \left(\tilde{D}_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jm} \vec{\phi} \times \tilde{D}_m \vec{\phi} \right)^2 \mp (\det \mathbb{M}) \phi_3 B \\ &\pm (\det \mathbb{M}) \epsilon_{ik} \partial_i (A_k \phi_3) \pm (\det \mathbb{M}) \vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right) , \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

e a através da igualdade (B.2) obtemos a expressão procurada

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(D_j \vec{\phi} \right)^2 - \frac{1}{2} (k_{\phi\phi})_{ij} D_i \vec{\phi} \cdot D_j \vec{\phi} &= \frac{1}{4} \left(\tilde{D}_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jm} \vec{\phi} \times \tilde{D}_m \vec{\phi} \right)^2 \mp (\det \mathbb{M}) \phi_3 B \\ &\pm (\det \mathbb{M}) \epsilon_{ik} \partial_i (A_k \phi_3) \pm (\det \mathbb{M}) \vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right) . \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Apêndice C

Cálculo de $\omega \epsilon_{ik} \partial_i J_k$

Mostraremos aqui como contornar o problema do aparecimento do termo $\omega \epsilon_{ik} \partial_i J_k$ na expressão para a energia (5.10),

$$E = \int d^2x \frac{G}{2} B^2 + V(|\phi|) + \omega |D_{\pm} \phi|^2 \pm e\omega B |\phi|^2 \pm \frac{1}{2} \omega \epsilon_{ik} \partial_i J_k .$$

Começamos a pesquisar a função $\omega(|\phi|)$ a partir da seguinte expressão,

$$\omega \epsilon_{ik} \partial_i J_k = \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) - \epsilon_{ik} (\partial_i \omega) J_k , \quad (\text{C.1})$$

e manipulando o último termo obtemos

$$\epsilon_{ik} (\partial_i \omega) J_k = \frac{\partial \omega}{\partial |\phi|^2} (\partial_i |\phi|^2) \epsilon_{ik} J_k , \quad (\text{C.2})$$

onde utilizamos o fato de ω ser uma função explícita de $|\phi|^2$. Escrevemos explicitamente a derivada do produto que aparece no parênteses em (C.2)

$$\partial_i |\phi|^2 = \phi^* \partial_i \phi + \phi \partial_i \phi^* , \quad (\text{C.3})$$

e introduzimos a expressão para densidade de corrente

$$J_k = i (\phi \partial_k \phi^* - \phi^* \partial_k \phi) - 2e A_k |\phi|^2 . \quad (\text{C.4})$$

Realizando o produto entre (C.3) e (C.4) obtemos a seguinte expressão

$$\epsilon_{ik} (\partial_i |\phi|^2) J_k = |\phi|^2 \epsilon_{ik} i (\partial_i \phi \partial_k \phi^* - \partial_i \phi^* \partial_k \phi) - 2e \epsilon_{ik} A_k |\phi|^2 \partial_i |\phi|^2 , \quad (\text{C.5})$$

na qual o caráter anti-simétrico de ϵ_{ik} , elimina dois termos ao efetuar o produto. Retirando a derivada ∂_i de dentro do parênteses temos

$$\epsilon_{ik} (\partial_i |\phi|^2) J_k = |\phi|^2 \epsilon_{ik} \partial_i i (\phi \partial_k \phi^* - \phi^* \partial_k \phi) - 2e \epsilon_{ik} A_k |\phi|^2 \partial_i |\phi|^2 .$$

Adicionando e subtraindo a quantidade $2eA_k |\phi|^2$ da equação anterior, escrevemos

$$\epsilon_{ik} (\partial_i |\phi|^2) J_k = |\phi|^2 \epsilon_{ik} \partial_i \left[\frac{i(\phi \partial_k \phi^* - \phi^* \partial_k \phi) - 2eA_k |\phi|^2 + 2eA_k |\phi|^2}{1} \right] - 2e\epsilon_{ik} A_k |\phi|^2 \partial_i |\phi|^2 , \quad (\text{C.6})$$

onde identificamos a corrente J_k

$$\epsilon_{ik} (\partial_i |\phi|^2) J_k = |\phi|^2 \epsilon_{ik} \partial_i (J_k + 2eA_k |\phi|^2) - 2e\epsilon_{ik} A_k |\phi|^2 \partial_i |\phi|^2 . \quad (\text{C.7})$$

Derivando o parênteses obtemos a seguinte expressão

$$\epsilon_{ik} (\partial_i |\phi|^2) J_k = |\phi|^2 \epsilon_{ik} \partial_i J_k + 2e |\phi|^4 \epsilon_{ik} \partial_i A_k , \quad (\text{C.8})$$

e identificamos $\epsilon_{ik} \partial_i A_k$ como sendo o campo magnético

$$\epsilon_{ik} (\partial_i |\phi|^2) J_k = |\phi|^2 \epsilon_{ik} \partial_i J_k + 2eB |\phi|^4 . \quad (\text{C.9})$$

Substituindo este último resultado na equação (C.2) obtemos,

$$\epsilon_{ik} (\partial_i \omega) J_k = |\phi|^2 \frac{\partial \omega}{\partial |\phi|^2} \epsilon_{ik} \partial_i J_k + 2eB |\phi|^4 \frac{\partial \omega}{\partial |\phi|^2} . \quad (\text{C.10})$$

A continuação inserimos a equação (C.10) em (C.1)

$$\epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) = \left(\omega + |\phi|^2 \frac{\partial \omega}{\partial |\phi|^2} \right) \epsilon_{ik} \partial_i J_k + 2eB |\phi|^4 \frac{\partial \omega}{\partial |\phi|^2} , \quad (\text{C.11})$$

e determinamos que a função ω em (C.11) satisfaça a seguinte condição:

$$\omega + |\phi|^2 \frac{\partial \omega}{\partial |\phi|^2} = \lambda \omega . \quad (\text{C.12})$$

A solução para a equação (C.12), fornece a seguinte forma para o funcional ω

$$\omega = C |\phi|^{2\lambda-2} , \quad (\text{C.13})$$

onde a constante C será escolhida convenientemente para reproduzir o valor esperado do vácuo.

Com a equação (C.12) podemos reescrever a equação (C.11) da seguinte forma

$$\omega \epsilon_{ik} \partial_i J_k = \frac{1}{\lambda} \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) - \frac{1}{\lambda} 2eB |\phi|^4 \frac{\partial \omega}{\partial |\phi|^2} , \quad (\text{C.14})$$

e utilizando novamente a expressão (C.12) em (C.14) obtemos

$$\omega \epsilon_{ik} \partial_i J_k = \frac{1}{\lambda} \epsilon_{ik} \partial_i (\omega J_k) - 2e \frac{\lambda-1}{\lambda} \omega B |\phi|^2 , \quad (\text{C.15})$$

sendo esta uma equação apropriada para prosseguir na implementação do formalismo BPS.

Apêndice D

Artigos publicados ou em fase final de redação

PHYSICAL REVIEW D **90**, 065007 (2014)

Topological charged BPS vortices in Lorentz-violating Maxwell-Higgs electrodynamics

R. Casana and G. Lazar

Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão, 65080-805 São Luís, Maranhão, Brazil
(Received 12 February 2014; published 4 September 2014)

We have performed a complete study of BPS vortex solutions in the Abelian sector of the standard model extension (SME). Specifically, we have coupled the SME electromagnetism with a Higgs field which is supplemented with a Lorentz-violating CPT-even term. We have verified that Lorentz violation (LV) belonging to the Higgs sector allows us to interpolate between some well-known models like Maxwell-Higgs, Chern-Simons-Higgs, and Maxwell-Chern-Simons-Higgs. We can also observe that the electrical charged density distribution is non-null in both CPT-even and CPT-odd models; however, the total electric charge in the CPT-even case is null, whereas in the CPT-odd one it is proportional to the quantized magnetic flux. The following general results can be established in relation to the LV introduced in the Higgs sector: it changes the vortex ansatz and the gauge field boundary conditions. A direct consequence is that the magnetic flux, besides being proportional to the winding number, also depends explicitly on the Lorentz-violation belonging to the Higgs sector.

DOI: [10.1103/PhysRevD.90.065007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.065007)

PACS numbers: 11.10.Lm, 11.27.+d, 12.60.-i, 74.25.Ha

Self-dual solitons in a *CPT*-odd and Lorentz-violating gauged $O(3)$ sigma model

R. Casana,^{*} C. F. Farias,[†] M. M. Ferreira, Jr.,[‡] and G. Lazar[§]

Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão, 65080-805 São Luís, Maranhão, Brazil
(Received 4 March 2016; published 27 September 2016)

We have performed a complete study of self-dual configurations in a *CPT*-odd and Lorentz-violating gauged $O(3)$ nonlinear sigma model. We have consistently implemented the Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) formalism and obtained the correspondent differential first-order equations describing electrically charged self-dual configurations. The total energy and magnetic flux of the vortices, besides being proportional to the winding number, also depend explicitly on the Lorentz-violating coefficients belonging to the sigma sector. The total electrical charge is proportional to the magnetic flux such as it occurs in Chern-Simons models. The Lorentz violation in the sigma sector allows one to interpolate between Lorentz-violating versions of some sigma models: the gauged $O(3)$ sigma model and the Maxwell-Chern-Simons $O(3)$ sigma model. The Lorentz violation enhances the amplitude of the magnetic field and BPS energy density near the origin, augmenting the deviation in relation to the solutions deprived of Lorentz violation.

DOI: [10.1103/PhysRevD.94.065036](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.065036)

Self-dual compact vortex solutions in generalized Abelian Higgs models

Rodolfo Casana^{*} and G. Lazar[†]

Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão, 65080-805, São Luís, Maranhão, Brazil

Lucas Sourrouille[‡]

Universidad Nacional Arturo Jauretche, 1888, Florencio Varela, Buenos Aires, Argentina

We have studied the existence of self-dual configurations in some of the most important and basic models with generalized dynamics. In particular we have investigate the electrically neutral configurations of the Maxwell-Higgs and Born-Infeld-Higgs models and the electrically charged ones of the Chern-Simons-Higgs and Maxwell-Chern-Simons-Higgs models. where the generalizing functions can modify the kinetic terms of the gauge and Higgs fields. The BPS formalism is implemented without to appeal to the use of some *Ansatz* in such a way that we have found the explicit form of the generalizing function modifying the kinetic term of the Higgs field. It allows to determine explicitly families of self-dual potentials for every model. This way we have ensured that the self-dual equations are independent of a particular coordinate. Therefore, we hope this new self-dual configurations enhanced the moduli space of solutions and probably result in interesting applications in physics and mathematics. We point out that the results presented represent generalized BPS solutions including nonsymmetric BPS ones.