Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

# Eletrodinâmica de Maxwell modificada por termo CPT-par de altas derivadas e violação da simetria de Lorentz

**Letícia Lisboa Dos Santos**

Orientador: Manoel Messias Ferreira Jr.

São Luís, 17 de outubro de 2016

# Eletrodinâmica de Maxwell modificada por termo CPT-par de altas derivadas e violação da simetria de Lorentz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Manoel Messias Ferreira Jr.
Doutor em Física - UFMA

São Luís, 17 de outubro de 2016

dos Santos, Letícia Lisboa.

**Eletrodinâmica de Maxwell modificada por termo CPT-par de altas derivadas e violação da simetria de Lorentz**./ Letícia Lisboa dos Santos - 2016
99 f.

Impresso por computador.

Orientador: Manoel Messias Ferreira Jr.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Física

Universidade Federal do Maranhão.

1. Simetria de Lorentz 2. Eletrodinâmica com altas derivadas. I Título

CDU

Letícia Lisboa dos Santos

# Eletrodinâmica de Maxwell modificada por termo CPT-par de altas derivadas e violação da simetria de Lorentz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

---

Manoel Messias Ferreira Jr. (*Orientador*)
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

---

Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

---

Frederico Elias Passos dos Santos
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

---

Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante
Doutor em Física - Universidade Federal do Ceará (UFC)

*a minha família*

# Agradecimentos

A Deus pela vida.

Aos meus pais que são meus pilares, sempre me orientando e fazendo muito mais do que eu mereço para que eu pudesse me dedicar aos estudos.

Aos meus irmão que são meus parceiros de todos os momentos maravilhosos e ruins.

Aos meus avós e a todos meus familiares.

Ao meu namorado João, pela paciência, companheirismo, dedicação, pelas discussões físicas e por todos os momentos.

Ao meu orientador, Professor Manoel Messias Ferreira Jr., pela dedicação e paciência em ensinar, sempre mostrando o caminho do conhecimento e motivando a sempre fazer o melhor.

Ao professor Rodolfo Alván Casana Sifuentes, pela disposição em sempre ajudar e pelas boas dicas.

Ao professor Marco Schreck pelas correções e boas dicas.

A banca da defesa desta dissertação, por aceitarem o convite e pelas boas dicas para a finalização deste trabalho.

Ao departamento de Física e a todos os professores pelas boas disciplinas ministradas.

Ao grupo GFTPC, em especial ao Jonas, por me ajudar sempre e pelos momentos de distração.

A CAPES, CNPQ pelo auxílio financeiro durante todo o mestrado.

A todas as pessoas que me ajudaram de maneira direta e indireta durante todo o meu caminhar.

*-Se, a princípio, a ideia não é absurda, então não há esperança para ela.*

Albert Einstein.

# Resumo

O Modelo Padrão Estendido (MPE), proposto em 1998 por V. A. Kosteleský e S. Samuel, compartilha várias propriedades do Modelo Padrão já conhecidas, tais como renormalizabilidade, conservação da energia e momento, simetria e estrutura de calibre, mas não preserva a simetria de Lorentz, além de poder violar a simetria CPT [8]. O setor de gauge do MPE contém um termo CPT-par e outro CPT- ímpar, sendo objeto de estudo nesta dissertação apenas o setor CPT-par, representado pelo tensor $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$, que contém 19 componentes independentes. No terceiro capítulo, apresentamos uma revisão da eletrodinâmica de Maxwell modificado pelo termo CPT-par e não birrefringente, sendo o tensor $(k_F)_{\alpha\lambda\mu\nu}$ reduzido ao tensor simétrico, $D_{\alpha\lambda}$. A parametrização desse tensor é dada por $(C_\alpha B_\lambda + C_\lambda B_\alpha)/2$, onde $B_\alpha$ e $C_\lambda$ são dois 4-vetores.

No quarto capítulo, como protótipo de teoria eletromagnética com altas derivadas, estudamos a eletrodinâmica de Podolsky, analisando algumas de suas principais características. Analisamos as equações de movimento para os potenciais, encontrando a solução para o potencial eletrostático através do método de Green. Em seguida, calculamos o propagador de Feynman, cujos polos fornecem as relações de dispersão da teoria, que permitem avaliar a causalidade, estabilidade e unitariedade da teoria.

No quinto capítulo desta dissertação, examinamos uma eletrodinâmica de altas derivadas, contendo um termo do tipo $\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}D_{\beta\alpha}$, onde $D_{\beta\alpha}$ é um tensor de violação da simetria de Lorentz, simétrico e CPT-par. Este termo pode ou não conter o termo de Podolsky, associado ao traço do tensor $D_{\nu\mu}$. Usando uma parametrização adequada, $D_{\nu\mu} = \frac{1}{2}(C_\nu B_\mu + C_\mu B_\nu)$, calculamos o propagador de Feynman desta eletrodinâmica, obtendo também as relações de dispersão desta teoria, e examinando a causalidade de vários setores. Finalizamos apresentando as soluções clássicas para teorias de derivadas superiores modificadas pelo background de VL, obtidas usando o método de Green.

Palavras-chaves: Modelo Padrão Estendido, Violação de Lorentz, eletrodinâmica com altas derivadas, Eletrodinâmica de Podolsky.

# Abstract

The Standard Model Extension (MPE), proposed in 1998 by Kostelecky and Colladay, shares several properties of the Standard Model already known, such as renormalizability, energy and momentum conservation and gauge symmetry, but does not preserve the Lorentz symmetry, with possibility of violating CPT symmetry as well. The gauge sector of the MPE contains a CPT-even term and a CPT-odd one. The object of study in this dissertation is only the CPT-even one, represented by the tensor $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$, which contains 19 independent components. In the third chapter, we present a review of Maxwell's electrodynamics modified by the non birefringent CPT-even term, being the tensor $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ reduced to the symmetric tensor, $D_{\alpha\lambda}$. The parameterization of this tensor is given by $(C_\alpha B_\lambda + C_\lambda B_\alpha)/2$, where $B_\alpha$ and $C_\lambda$ are two 4-vectors.

In the fourth chapter, as a prototype of electromagnetic theory with high derivatives, we study the Podolsky electrodynamics, analyzing some of its main features. We analyze the equations of motion for the potential, finding the solution for the electrostatic potential by means of the Green´s method. Then, we calculate the Feynman´s propagator, whose poles provide the dispersion relations of the theory, and allow to assess its causality, stability and unitarity.

In the fifth chapter of this dissertation, we examined an electrodynamics with high order derivatives, containing a term of type $\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}D_{\beta\alpha}$, where $D_{\beta\alpha}$ is a Lorentz symmetry violation tensor, symmetric and CPT-par. This term may or may not contain the Podolsky term, associated with the trace of $D_{\nu\mu}$ tensor. Using an appropriate parameterization, $D_{\nu\mu} = \frac{1}{2}(C_\nu B_\mu + C_\mu B_\nu)$ , we calculate the Feynman propagator, achieving the dispersion relations of this theory, and examining the causality of several sectors. We finish presenting the classical solutions for this theory obtained by the Green´s method.

Keywords: Standard Model Extension, Lorentz violation, electrodynamics with high order derivatives, Podolsky electrodynamics.

# Sumário

# Introdução

Teorias com derivadas superiores tem sido muito estudadas, em diversas áreas da Física. O seu estudo tem sido motivado pelas boas propriedades obtidas, como por exemplo na modelagem de diversos processos como reguladores ultravioletas [1], em teorias Quântica de Campos com o intuito de tratar as divergências do ultravioleta, como também em teorias mais fundamentais como Teoria de Cordas [2] e Teorias Não-Comutativas [3]. Muitos dos problemas de teorias de campos com altas derivadas, como instabilidade, violação da causalidade e a não uitariedade que é a presença de estados fantasmas com norma negativa, estão intimamente ligadas ao fato de que a energia não tem limite inferior. Portanto, são de interesse em problemas com que a escala de energia é bem definida. Nesse sentido, problemas como a não unitariedade da teoria deixam de ter tanta relevância como em uma teoria fundamental. A presença de derivadas de ordem superior na lagrangeana modifica a estrutura da teoria através da adição de novos graus de liberdade. Essa adição nos graus de liberdade, quanticamente, altera o propagador da teoria melhorando os aspectos da renormalizabilidade [4],[5] no regime de baixas frequências.

Alguns exemplos de lagrangeana, com termos de segunda ordem na derivada, são encontradas na literatura como a lagrangeana efetiva de Alekseev, Arbuzov e Baikov [6], que descreve o regime infravermelho do glúon na QCD. Uma outra teoria com termos de segunda ordem na derivada é a eletrodinâmica de Podolsky [7], cuja proposta foi:

> *"Se supusermos que as equações da eletrodinâmica são deriváveis a partir de uma lagrangiana, $\mathcal{L}$, e quisermos preservar o caráter linear das equações de campo (o princípio de superposição) a fim de tornarmos a quantização fácil, então, a não ser que estejamos preparados para introduzir novos campos, a única maneira de generalizar a teoria de Maxwell parece ser permitir que a lagrangiana do campo contenha termos envolvendo derivadas dos campos $E$ e $B$.*
>
> *Obtemos, então, como equações de campo, equações diferenciais parciais de ordem superior à usual. Longe de ser um problema, isto parece ter sido necessário. Pois, os vários métodos propostos de truncar efeitos de altas frequências parecem indicar que as derivadas superiores, que se tornam importantes para as altas frequências, não são tratadas de forma apropriada pelas equações usuais de segunda ordem. Além disso, a liberdade adicional da escolha de uma solução para ser utilizado em qualquer problema particular, fornecido por equações de ordem superior,*

*permite de uma imposição de condições finitas, análogo ao procedimento de Schroedinger, que serve também para remover infinitos inerentes ao tratamento habitual de cargas pontuais.”*

A eletrodinâmica de Podolsky e a eletrodinâmica de Lee-Wick são as mais simples teorias de segunda ordem no campo de gauge que pode ser construída, possuindo muitos resultados já conhecidos [19-24]. Ambas as teorias levam a mesma forma matemática implicando nos mesmos resultados para o propagador, que será analisado mais adiante. No presente trabalho será estudado apenas a teoria de Podolsky lembrando que as propriedades são as mesmas para ambas as teorias.

A eletrodinâmica de Podolsky foi proposta no início dos anos 40 [7], sendo uma teoria de segunda ordem que preserva as duas simetrias básicas da teoria eletromagnética (gauge e Lorentz) [22] e que preserva o caráter linear das equações de campo. Trata-se, portanto, de um termo de dimensão 6, gauge-invariante e Lorentz-invariante, mas que não compartilha a simetria de dualidade do campo eletromagético livre.

Uma das características marcantes da eletrodinâmica de Podolsky é que a mesma gera um modo propagante massivo, sem quebrar a simetra de gauge, aspecto em que se diferencia da teoria de Proca, que envolve um termo de massa incompatível com a simetria de gauge. A lagrangeana de Podolsky tem a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{2}\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\lambda F^{\lambda}_{\ \beta} - j_\mu A^\mu,$$

em que $\theta$ é o parâmetro de Podolsky e tem dimensão de inverso de energia, conduzindo a um conjunto de equações de campo

$$\left(1 + \theta^2\Box\right)\partial_\alpha F^{\alpha\kappa} = j^\kappa,$$

que será melhor detalhada no capítulo 4. Em seguida apresentamos as soluções clássicas para o potencial escalar e vetorial, analisamos a relação de dispersão, advinda do propagador, identificando dois modos para o campo $A^\mu$, um modo massivo e um não massivo. Por fim analisamos a causalidade, estabilidade e a unitariedade da teoria.

O objetivo desta dissertação é estudar teorias de ordem superior com violação de Lorentz. Investigando como o background de VL modifica a teoria usual, analisando os efeitos causados. Um estudo da eletrodinâmica de Maxwell modificado, por termo de derivada superior com violação de Lorentz é encontrado na literatura na ref. [11].

No capítulo 2 fizemos um breve estudo sobre o Modelo Padrão Estendido (MPE) fazendo um estudo do setor de gauge CPT-par. No capítulo 3 apresentamos a eletrodinâmica CPT-par com Violação de Lorentz, onde o tensor $(k_F)_{\alpha\lambda\mu\nu}$ foi substituído pelo tensor simétrico de VL $D_{\alpha\lambda}$, em que usando a parametrização desse tensor dada por $D_{\alpha\lambda} = \left(C_\alpha B_\lambda + C_\lambda B_\alpha\right)/2$, calculamos o propagador e obtivemos as relações de dispersão analisando a estabilidade e causalidade dos setores do background de VL.

No capítulo 5, apresentamos um estudo da eletrodinâmica de Maxwell com altas derivadas, de dimensão 6, com duas ordens derivativas adicionais, tal qual o termo de Podolsky, e contendo um tensor de raking 2, $D_{\beta\alpha}$, violador da simetria de Lorentz, dado por $\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}D_{\beta\alpha}$ onde o tensor $D_{\beta\alpha}$ CPT-par é simétrico sendo parametrizado na forma $D_{\beta\alpha} = \left(C_\beta B_\alpha + C_\alpha B_\beta\right)/2$. Fizemos algumas análises nos diversos setores do background de VL, entre elas a equivalência com o termo de Podolsky mantendo o traço não-nulo do tensor e considerando o $Tr\left(D_{\beta\alpha}\right) = 0$ que não contém o termo de Podolsky. Feito essas análises faremos o cálculo do propagador de Feynman e obteremos as relações de dispersão da teoria. As relações de dispersão são utilizados para analisar o conteúdo físico dos modos de propagação do sistema. Através do cálculo do propagador e das relações de dispersão podemos analisar a causalidade, estabilidade e unitariedade da teoria. O procedimento de cáculo do propagador é baseado na existência de uma álgebra fechada de projetores, definidos sobre os coeficientes de violação de Lorentz de cada setor. Seguiremos analisando alguns setores desta teoria, na busca de configurações do tensor de fundo que proporcionem teorias físicamente consistentes.

No capítulo 6 faremos um estudo das soluções clássicas das teorias de derivadas superiores com violação de Lorentz. Um estudo das soluções clássicas no cenário com quebra de VL, para derivadas de ordem superior é encontrado na ref. [11], em que é analisado efeitos relevantes nos fenômenos de baixa energia e analisado modificações essenciais nos campos elétricos e magnéticos causados pela VL.

# Capítulo 1

# O Modelo Padrão Estendido

## 1.1 Introdução

O Modelo Padrão Estendido (MPE) é uma teoria efetiva que compartilha várias propriedades do Modelo Padrão já conhecidas, tais como renormalizabilidade, conservação da energia e momento, simetria e estrutura de calibre, mas não preserva a simetria de Lorentz, além de poder violar a simetria CPT [8]. O Modelo Padrão Estendido foi proposto em 1998. Em 1989 V. A. Kostelecký e S. Samuel [9][10], lançaram a idéia da quebra espontânea da simetria no contexto da teoria das cordas .

Neste modelo, a violação de Lorentz ocorre de forma explícita, gerando valores esperados no vácuo de quantidades tensoriais, que são os campos de fundo, entidades fixas, que indicam direções privilegiadas no espaço. Esta quebra é causada pela presença de campos de fundo tensoriais e vetoriais devido a processos de transição de fase selecionando uma direção privilegiada. A adição de termos que incorporam a violação das simetrias CPT e Lorentz são constituídos pela contração de operadores de campos com constantes de acoplamento tensoriais, que carregam um ou mais índices de Lorentz. Essas constantes de acoplamento tensoriais induzem a quebra das simetrias CPT e Lorentz permeiando o espaço-tempo, fornecendo uma estrutura para o vácuo da teoria. A violação da simetria de Lorentz só ocorre devido a uma transformação de referencial ativa de Lorentz [12], conhecida também como transformação de partícula onde a covariância de Lorentz é perdida e as transformações de Lorentz inversa não é a mesma de uma espaço-tempo isotrópico.

O setor de gauge do MPE é constituído pelos setores CPT-par e CPT- ímpar. O setor CPT-ímpar é representado pela eletrodinâmica de Carrol-Field-Jackiw [13], com muitas propriedades estudadas na literatura [14]. O setor CPT- par tem sido muito estudado desde 2002, após as contribuições iniciais de Kostelecky e Mewes [15]. O setor CPT-par é representado pelo tensor $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$, sendo suas simetrias compatíveis com a maneira como o mesmo está acoplado ao tensor do campo eletromagnético.

## 1.2 Setor de gauge CPT- par do Modelo Padrão Estendido

A lagrangeana do setor de gauge CPT-par do MPE, no que se refere ao setor de fótons, é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{LV}, \tag{1.1}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} (k_F)_{\alpha\lambda\mu\nu} F^{\alpha\lambda} F^{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

onde $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ representa um tensor de rank-4, real, adimensional e possui as mesmas simetrias do tensor de Riemann, dadas pelas relações

$$(k_F)_{\alpha\lambda\mu\nu} = -(k_F)_{\lambda\alpha\mu\nu} = (k_F)_{\lambda\alpha\nu\mu} = -(k_F)_{\mu\nu\lambda\alpha}, \tag{1.3}$$

$$(k_F)_{\alpha\lambda\mu\nu} + (k_F)_{\alpha\mu\nu\lambda} + (k_F)_{\alpha\nu\lambda\mu} = 0. \tag{1.4}$$

As simetrias acima reduzem o número de componentes independentes do tensor $(k_F)_{\alpha\lambda\mu\nu}$ de 256 para 20. O fato de possuir o duplo traço nulo,

$$(k_F)_{\alpha\nu}{}^{\alpha\nu} = 0,$$

reduz uma componente a mais, perfazendo o total de 19 componentes independentes. O duplo traço nulo tem por objetivo excluir a contribuição Lorentz-invariante, $(E^2 - B^2)$ termo de Maxwell, da estrutura $(k_F)_{\alpha\lambda\mu\nu} F^{\alpha\lambda} F^{\mu\nu}$.

O termo de violação da simetria de Lorentz pode ser escrito desenvolvendo a soma de Einstein:

$$(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} F^{\kappa\lambda} F^{\mu\nu} = 4 (k_F)_{0i0j} F^{0i} F^{0j} + 4 (k_F)_{0ilm} F^{0i} F^{lm} + (k_F)_{ablm} F^{ab} F^{lm}. \tag{1.5}$$

Sabendo-se que

$$F^{0i} = E^i, \; F^{lm} = \epsilon_{lmp} B_p,$$

a lagrangeana em termo dos campos elétrico e magnético assume forma

$$\mathcal{L}_{LV} = -\frac{1}{4} \left[ 4 (k_F)_{0i0j} E^i E^j + 4 (k_F)_{0ilm} \epsilon_{lmp} E^i B^p + (k_F)_{ablm} \epsilon_{abq} \epsilon_{lmp} B_q B_p \right]. \tag{1.6}$$

A simetria discreta CPT corresponde a combinação das simetrias discretas de conjugação de carga ($C$), paridade ($P$) e reversão temporal ($T$). A simetria $P$ quando aplicada a um sistema de coordenadas muda a orientação dextrogira (orientação para a direita) para uma orientação levógira (esquerda). A simetria discreta $C$ não tem nenhuma relação com as coordenadas espaço-tempo. Essa simetria relaciona as partículas com suas anti-partículas. A simetria $T$, a reversão temporal, como o nome já diz, reverte o sinal do tempo mantendo fixa as coordenadas espaciais.

Vamos agora realizar a classificação sobre as simetrias discretas CPT dos coeficientes de $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$.

Sob a transformação de carga - $C$, ocorre: $E \to -E$ e $B \to -B$. Como todos os termos da lagrangeana (1.6) são bilineares nos campos $E$ e $B$, não há qualquer reversão de sinal, indicando que os coeficientes $(k_F)_{0i0j}$, $(k_F)_{0ilm}$, $(k_F)_{ablm}$ são $C-$ pares.

Sob a transformação de paridade - $P$, ocorre: $E \to -E$ e $B \to B$. Vemos que o único termo que há reversão de sinal é

$$(k_F)_{0ilm}\,\epsilon_{lmp}\left(-E^i\right)B^p, \tag{1.7}$$

indicando que os coeficientes $(k_F)_{0i0j}$, $(k_F)_{ablm}$ são $P-$ pares e $(k_F)_{0ilm}$ é $P-$ ímpar.

Sob a transformação temporal - $T$, ocorre $E \to E$ e $B \to -B$. Do mesmo modo, temos que o único termo que inverte o sinal é

$$(k_F)_{0ilm}\,\epsilon_{lmp}E^i\left(-B^p\right), \tag{1.8}$$

indicando que os coeficientes $(k_F)_{0i0j}$, $(k_F)_{ablm}$ são $T-$ pares e $(k_F)_{0ilm}$ é $T-$ ímpar.

Sob as transformações, $CPT$ temos que $E \to E$ e $B \to B$. Logo os coeficientes $(k_F)_{0i0j}$, $(k_F)_{0ilm}$, $(k_F)_{ablm}$ são $CPT-$ pares.

| | $C$ | $P$ | $T$ | $CPT$ |
|---|---|---|---|---|
| $(k_F)_{0i0j}$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(k_F)_{0ilm}$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $(k_F)_{ablm}$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |

### 1.2.1 Parametrização matricial

Uma parametrização muito útil para abordar esta teoria pode ser encontrada na referência [15]. As 19 componentes do tensor $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ podem ser reescritas na forma de quatro matrizes $3 \times 3$,

$$(\kappa_{DE}),\ (\kappa_{HB}),\ (\kappa_{DB}),\ (\kappa_{HE}),$$

que são definidas como

$$(\kappa_{DE})^{jk} = -2\,(\kappa_F)^{0j0k}, \tag{1.9}$$

$$(\kappa_{HB})^{jk} = \frac{1}{2}\epsilon^{jpq}\epsilon^{klm}\,(\kappa_F)^{pqlm}, \tag{1.10}$$

$$(\kappa_{DB})^{jk} = -\ (\kappa_{HE})^{kj} = \epsilon^{kpq}\,(\kappa_F)^{0jpq}, \tag{1.11}$$

em que a expressão (1.11) implica em $(\kappa_{DB}) = -\ (\kappa_{HE})^T$. Em concordância com esta parametrização, temos que

$$(\kappa_{DE})^{jk} = (\kappa_{DE})^{kj}\ \text{ e }\ (\kappa_{HB})^{jk} = \ (\kappa_{HB})^{kj}, \tag{1.12}$$

de modo que $(\kappa_{DE})$ e $(\kappa_{HB})$ são matrizes simétricas com 6 componentes cada. Como $(\kappa_{DB})^{jk}$ não tem simetria definida, tem a princípio 9 componentes.

Usando estas parametrizações, a lagrangeana (1.6) assume a forma:

$$\mathcal{L}_{LV} = \frac{1}{2}\left[(\kappa_{DE})_{ij} E^i E^j + 2(\kappa_{DB})_{ip} E^i B^p - (\kappa_{HB})_{qp} B_q B_p\right]. \tag{1.13}$$

Sabendo a forma como os campos $E$ e $B$ se transformam sob $C$, $P$, $T$, os coeficientes $(\kappa_{DE})_{ij}$, $(\kappa_{HB})_{qp}$, $(\kappa_{DB})_{ip}$ e $(\kappa_{HE})_{ip}$ são classificados sob simetrias discretas como mostrado na tabela seguinte.

| | $C$ | $P$ | $T$ | $CPT$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\kappa_{DE})_{ij}$ | + | + | + | + |
| $(\kappa_{HB})_{qp}$ | + | + | + | + |
| $(\kappa_{DB})_{ip}$ | + | − | − | + |
| $(\kappa_{HE})_{ip}$ | + | − | − | + |

O duplo traço nulo $(k_F)_{\alpha\nu}{}^{\alpha\nu} = 0$ implica em

$$\begin{aligned} (k_F)_{\alpha\nu}{}^{\alpha\nu} = 2(\kappa_F)^{0i}{}_{0i,} + (\kappa_F)^{ij}{}_{ij,} = -(\kappa_{DE})^i_i - (\kappa_{HB})^l{}_l = 0, \\ (\kappa_{DE} + \kappa_{HB})^i_i = 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Isso mostra que a matriz $(\kappa_{DE} + \kappa_{HB})$, tem traço nulo. Logo

$$\begin{aligned} tr(\kappa_{DE}) + tr(\kappa_{HB}) = 0, \\ tr(\kappa_{HB}) = -tr(\kappa_{DE}). \end{aligned}$$

Esta condição reduz a soma das componentes de $\kappa_{DE}$ e $\kappa_{HB}$ de 12 para 11 componentes independentes.

Por outro lado, usando a propriedade (1.4), temos que

$$(k_F)_{0ilm} + (k_F)_{0lmi} + (k_F)_{0mil} = 0, \tag{1.15}$$

multiplicando por $\epsilon_{lmp}$ podemos escrever

$$(k_F)_{0ilm}\,\epsilon_{lmp} + (k_F)_{0lmi}\,\epsilon_{lmp} + (k_F)_{0mil}\,\epsilon_{lmp} = 0, \tag{1.16}$$

$$(k_{DB})_{ip} + (k_F)_{0lmi}\,\epsilon_{lmp} + (k_F)_{0mil}\,\epsilon_{lmp} = 0, \tag{1.17}$$

onde foi usado a propriedade (1.11). Multiplicando por $\delta_{ip}$ e usando novamente (1.11) obtemos

$$(\kappa_{DB})_{mm} = 0. \tag{1.18}$$

Lembrando que, $(\kappa_{DB}) = -(\kappa_{HE})^T$, implica em $tr(\kappa_{DB}) = -tr(\kappa_{HE})$. Concluímos que as matrizes $\kappa_{DB}$ e $\kappa_{HE}$ possuem ambas traço nulo. Possuem assim, juntas, $(9-1) = 8$ componentes independentes. Totalizando 19 componentes independentes , 11do setor par e 8 do setor ímpar.

### 1.2.2 MPE não-mínimo

O Modelo Padrão Estendido não-mínimo é uma generalização do MPE que inclui termos não-mínimos de altas derivadas e não renormalizáveis. Neste contexto, o MPE mínimo pode ser entendido como uma correção em ordem zero do Modelo Padrão. As correções em ordens superiores envolvem derivadas de ordens mais altas que se tornam relevantes à medida em que a escala de energia cresce. A densidade de Lagrangeana para o MPE não-mínimo (no setor fotônico) pode ser escrita de uma maneira similar à construção do setor fotônico do MPE mínimo [16], a saber

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}A_{\lambda}\left(\hat{k}_{AF}\right)_{\kappa}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{\kappa\lambda}\left(\hat{k}_{F}\right)^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{1.19}$$

Os operadores $\hat{k}_{AF}$ e $\hat{k}_{F}$ representam agora as versões não-mínimas daqueles presentes no MPE mínimo, envolvendo termos de derivadas superiores, dados por:

$$(k_{AF})_{\kappa} = \sum_{d\,=\,\text{Impar}} \left(k_{AF}^{(d)}\right)_{\kappa}^{\alpha_1\ldots\alpha_{(d-3)}} \partial_{\alpha_1}\ldots\partial_{\ldots\alpha_{(d-3)}}, \tag{1.20}$$

$$(k_{F})^{\kappa\lambda\mu\nu} = \sum_{d\,=\,\text{Par}} \left(k_{F}^{(d)}\right)^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1\ldots\alpha_{(d-4)}} \partial_{\alpha_1}\ldots\partial_{\ldots\alpha_{(d-4)}}. \tag{1.21}$$

onde $d$ é a dimensão de cada termo, e os índices $\alpha_i$ rotulam as derivadas superiores. No termo CPT-ímpar, vale $d \geq 3$, enquanto no termo CPT-par temos $d \geq 4$. No termo CPT-ímpar, $d = 5$ e $d = 7$ envolvem uma e duas derivadas adicionais, respectivamente. No caso do termo CPT-par, as mesmas são designadas por $d = 6$ e $d = 8$, respectivamente.

Os coeficientes do MPE não-mínimo são não renormalizáveis e se tornam relevantes quando estamos interessados em investigar propriedades fundamentais, tais como causalidade, estabilidade e unitariedade em escalas de energia mais altas. A depender da escala de energia em questão os efeitos destes coeficientes não renormalizaveis podem tornar-se dominante. Como exemplo, a ação da eletrodinâmica quântica não-comutativa [18] incorpora os efeitos de violação da simetria de Lorentz associados com a não-trivialidade das relações de comutação entre as coordenados do espaço-tempo [19]. De maneira similar, operadores com valores de $d$ muito grande dominam em teorias com violação da simetria de Lorentz em supersimetria [20].

# Capítulo 2

# Eletrodinâmica CPT-par com Violação de Lorentz

## 2.1 Introdução

Neste capítulo estudamos a eletrodinâmica CPT-par com VL, onde o tensor $(k_F)_{\alpha\lambda\mu\nu}$ foi substituído pelo tensor simétrico de VL $D_{\alpha\lambda}$. Um estudo similar a este é encontrado na referência [21].

A parametrização do tensor $D_{\alpha\lambda}$ é dada por $\left(C_\alpha B_\lambda + C_\lambda B_\alpha\right)/2$. O termo da lagrangeana com violação de Lorentz, $F_\beta^\lambda F^{\alpha\beta} D_{\alpha\lambda}$, em função dos campos elétricos e magnéticos tem a forma

$$F_\beta^\lambda F^{\alpha\beta} D_{\alpha\lambda} = F_j^i F^{0j} D_{0i} + F_j^0 F^{ij} D_{i0} + F_i^0 F^{0i} D_{00} + F_j^i F^{ij} D_{ii} + F_0^i F^{i0} D_{ii}, \tag{2.1}$$

$$F_\beta^\lambda F^{\alpha\beta} D_{\alpha\lambda} = \epsilon_{ijl} B^l E^j D_{0i} + E^j \epsilon_{ijl} B^l D_{i0} + \left(E^i\right)^2 D_{ii} - \left(E^i\right)^2 D_{00} - 6\left(B^l\right)^2 D_{ii}, \tag{2.2}$$

onde $\epsilon_{ijl}\epsilon_{ijl} = 6$.

Sob a transformação de conjugação de carga $(C)$, sabemos que os campos elétrico e magnético revertem seus sinais: $\mathbf{E} \to -\mathbf{E}$ e $\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$, enquanto as derivadas sobre o espaço-tempo não são alteradas: $\partial_\mu \to \partial_\mu$. Sob paridade $(P)$, os campos elétrico e magnético se transformam como $\mathbf{E} \to -\mathbf{E}$ e $\mathbf{B} \to \mathbf{B}$, e $\partial_a \to -\partial_a, \partial_0 \to \partial_0$. Já sob reversão temporal $(T)$, o campo magnético reverte o sinal $\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$, enquanto o campo elétrico mantém-se invariante, $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$. Além disso, $\partial_a \to \partial_a, \partial_0 \to -\partial_0$.

O comportamento dos coeficientes do tensor $D_{\beta\alpha}$ sob CPT são classificados na seguinte forma.

| | $C$ | $P$ | $T$ | $CPT$ |
|---|---|---|---|---|
| $C_0B_0$ | + | + | + | + |
| $C_iB_0$ | + | − | − | + |
| $C_0B_i$ | + | − | − | + |
| $C_iB_i$ | + | + | + | + |

Fazendo o uso dessa parametrização realizaremos o cálculo do propagador que é um procedimento de cáculo baseado na existência de uma álgebra fechada de projetores, definidos em cima dos coeficientes de violação de Lorentz de cada setor. Através do cálculo do propagador podemos obter as relações de dispersão.

## 2.2 Propagador de Feynman

Para calcular o propagador devemos escrever a Lagrangeana na forma quadrática em termos dos campos bilineares $A^{\nu}$e $A^{\mu}$. Seja a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{\beta}{}^{\lambda}F^{\alpha\beta}D_{\alpha\lambda} + \frac{1}{2\xi}\left(\partial_{\mu}A^{\mu}\right)^{2}, \tag{2.3}$$

onde $D_{\alpha\lambda}$ é o tensor simétrico que induz a violação da simetria de Lorentz, dado por

$$D_{\lambda\alpha} = D_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}\left[C_{\alpha}B_{\lambda} + C_{\lambda}B_{\alpha}\right]. \tag{2.4}$$

A Lagrangiana quadrática assume a seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^{\nu}O_{\mu\nu}A^{\mu},$$

onde

$$O_{\mu\nu} = \Box\Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi}\Box\Omega_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\partial^{\kappa}D_{\kappa\nu} - \Box D_{\mu\nu} - g_{\nu\mu}\partial^{\gamma}\partial^{\kappa}D_{\gamma\kappa} + \partial^{\kappa}\partial_{\nu}D_{\mu\kappa}, \tag{2.5}$$

onde

$$\Theta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} = p_{\mu}p_{\nu}/p^{2}, \tag{2.6}$$

são os projetores transversais e longitudinais. Com a parametrização de $D_{\lambda\alpha}$, temos

$$\begin{aligned} O_{\mu\nu} &= (\Box\Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi}\Box\Omega_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\rho\partial_{\mu}B_{\nu} + \frac{1}{2}\rho\partial_{\nu}B_{\mu} + \frac{1}{2}\eta\partial_{\mu}C_{\nu} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\eta\partial_{\nu}C_{\mu} - \frac{1}{2}\Box C_{\mu}B_{\nu} - \frac{1}{2}\Box C_{\nu}B_{\mu} - \eta\rho g_{\nu\mu}), \end{aligned}$$

onde $g^{\mu\nu} = (+,---)$ é o tensor métrico, $\rho = C_{\mu}\partial^{\mu}$ e $\eta = B_{\nu}\partial^{\nu}$.

O propagador de Feynman do campo de gauge é o definido como

$$\langle 0\,|T(A^{\nu}(x)\,A_{\alpha}(y))|\,0\rangle = i\,(\Delta)^{\nu}_{\alpha}(x-y), \tag{2.7}$$

onde $\Delta_{\mu\nu}$ é o operador tensorial que satifaz a relação:

$$O_{\mu\nu}\Delta^{\nu}_{\alpha} = g_{\mu\alpha}. \tag{2.8}$$

Para resolver a Eq. (2.8), precisamos primeiro encontrar uma álgebra fechada dos operadores tensoriais. Invertendo $O_{\mu\nu}$ onde a mesma é composta pelos seguintes projetores:

$$\Theta^{\nu}_{\alpha}, \Omega^{\nu}_{\alpha}, B_{\alpha}\partial^{\nu}, C^{\nu}B_{\alpha}, C^{\nu}\partial_{\alpha}, B^{\nu}\partial_{\alpha}, C_{\alpha}B^{\nu}, C_{\alpha}\partial^{\nu}.$$

Desta forma, propõe-se para o propagador a forma geral:

$$\Delta_{\alpha}^{\nu} = a\Theta_{\alpha}^{\nu} + b\Omega_{\alpha}^{\nu} + cB_{\alpha}\partial^{\nu} + dC^{\nu}B_{\alpha} + \\ + eC^{\nu}\partial_{\alpha} + fB^{\nu}\partial_{\alpha} + gC_{\alpha}B^{\nu} + hC_{\alpha}\partial^{\nu},$$

que é a inversa do operador$O_{\mu\nu}$ e os coeficientes, $a, b, c, d, e, f, g, h$ são funçoes do momento a serem determinados.

Ao realizar o produto (2.8) temos 2 novos elementos

$$B_{\mu}B_{\alpha}, C_{\mu}C_{\alpha},$$

temos que incluí-los para fechar a álgebra

$$\Delta_{\alpha}^{\nu} = a\Theta_{\alpha}^{\nu} + b\Omega_{\alpha}^{\nu} + cB_{\alpha}\partial^{\nu} + dC^{\nu}B_{\alpha} + eC^{\nu}\partial_{\alpha} + \tag{2.9}$$

$$+ fB^{\nu}\partial_{\alpha} + gC_{\alpha}B^{\nu} + hC_{\alpha}\partial^{\nu} + iB^{\nu}B_{\alpha} + jC^{\nu}C_{\alpha}. \tag{2.10}$$

A álgebra fechada dos projetores mostrada na Tabela I, na Tabela II e na Tabela III.

Vemos que estes operadores satisfazem uma algebra fechada:

| | $\Theta_{\alpha}^{\nu}$ | $\Omega_{\alpha}^{\nu}$ | $B_{\alpha}\partial^{\nu}$ | $C^{\nu}B_{\alpha}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\Theta_{\mu\nu}$ | $\Theta_{\mu\alpha}$ | $0$ | $0$ | $C_{\mu}B_{\alpha} - \frac{\rho}{\Box}B_{\alpha}\partial_{\mu}$ |
| $\Omega_{\mu\nu}$ | $0$ | $\Omega_{\mu\alpha}$ | $B_{\alpha}\partial_{\mu}$ | $\frac{\rho}{\Box}B_{\alpha}\partial_{\mu}$ |
| $B_{\nu}\partial_{\mu}$ | $B_{\alpha}\partial_{\mu} - \eta\Omega_{\mu\alpha}$ | $\eta\Omega_{\mu\alpha}$ | $\eta B_{\alpha}\partial_{\mu}$ | $(C \cdot B)\, B_{\alpha}\partial_{\mu}$ |
| $C_{\mu}B_{\nu}$ | $C_{\mu}B_{\alpha} - \frac{\eta}{\Box}C_{\mu}\partial_{\alpha}$ | $\frac{\eta}{\Box}C_{\mu}\partial_{\alpha}$ | $\eta C_{\mu}B_{\alpha}$ | $(C \cdot B)\, C_{\mu}B_{\alpha}$ |
| $C_{\mu}\partial_{\nu}$ | $0$ | $C_{\mu}\partial_{\alpha}$ | $\Box C_{\mu}B_{\alpha}$ | $\rho C_{\mu}B_{\alpha}$ |
| $B_{\mu}\partial_{\nu}$ | $0$ | $B_{\mu}\partial_{\alpha}$ | $\Box B_{\mu}B_{\alpha}$ | $\rho B_{\mu}B_{\alpha}$ |
| $C_{\nu}B_{\mu}$ | $C_{\alpha}B_{\mu} - \frac{\rho}{\Box}B_{\mu}\partial_{\alpha}$ | $\frac{\rho}{\Box}B_{\mu}\partial_{\alpha}$ | $\rho B_{\mu}B_{\alpha}$ | $C^{2}B_{\mu}B_{\alpha}$ |
| $C_{\nu}\partial_{\mu}$ | $C_{\alpha}\partial_{\mu} - \rho\Omega_{\mu\alpha}$ | $\rho\Omega_{\mu\alpha}$ | $\rho B_{\alpha}\partial_{\mu}$ | $C^{2}B_{\alpha}\partial_{\mu}$ |
| $B_{\mu}B_{\nu}$ | $B_{\mu}B_{\alpha} - \frac{\eta}{\Box}B_{\mu}\partial_{\alpha}$ | $\frac{\eta}{\Box}B_{\mu}\partial_{\alpha}$ | $\eta B_{\mu}B_{\alpha}$ | $(C \cdot B)\, B_{\mu}B_{\alpha}$ |
| $C_{\mu}C_{\nu}$ | $C_{\mu}C_{\alpha} - \frac{\rho}{\Box}C_{\mu}\partial_{\alpha}$ | $\frac{\rho}{\Box}C_{\mu}\partial_{\alpha}$ | $\rho C_{\mu}B_{\alpha}$ | $C^{2}C_{\mu}B_{\alpha}$ |

Tabela 2.1: Algebra dos projectores.

Ao realizar todas as contrações tensoriais advindas da expressão (2.8), obtemos um sistema de dez equações para os dez coeficientes $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$. Onde a solução para cada uma desses coeficientes são:

$$a = \frac{1}{(\Box - \rho\eta)}, b = \frac{(LM + TN - 2\xi\Pi)}{2\,(\Box - \rho\eta)\,\Pi}, c = f = \frac{T}{(\Box - \rho\eta)\,\Pi},$$

$$d = g = -\frac{\Box\Gamma}{(\Box - \rho\eta)\,\Pi}, e = h = \frac{L}{(\Box - \rho\eta)\,\Pi}, i = \frac{\Box\,(\rho^{2} - \Box C^{2})}{(\Box - \rho\eta)\,\Pi}, j = \frac{\Box\,(\eta^{2} - \Box B^{2})}{(\Box - \rho\eta)\,\Pi}.$$

Onde foi usado

$$\rho = C_{\mu}\partial^{\mu}, \eta = B_{\nu}\partial^{\nu},$$

| | $C^\nu \partial_\alpha$ | $B^\nu \partial_\alpha$ | $C_\alpha B^\nu$ |
|---|---|---|---|
| $\Theta_{\mu\nu}$ | $C_\mu \partial_\alpha - \rho \Omega_{\mu\alpha}$ | $B_\mu \partial_\alpha - \eta \Omega_{\mu\alpha}$ | $C_\alpha B_\mu - \frac{\eta}{\Box} C_\alpha \partial_\mu$ |
| $\Omega_{\mu\nu}$ | $\rho \Omega_{\mu\alpha}$ | $\eta \Omega_{\mu\alpha}$ | $\frac{\eta}{\Box} C_\alpha \partial_\mu$ |
| $B_\nu \partial_\mu$ | $\Box (C \cdot B) \Omega_{\mu\alpha}$ | $\Box B^2 \Omega_{\mu\alpha}$ | $B^2 C_\alpha \partial_\mu$ |
| $C_\mu B_\nu$ | $(C \cdot B) C_\mu \partial_\alpha$ | $B^2 C_\mu \partial_\alpha$ | $B^2 C_\mu C_\alpha$ |
| $C_\mu \partial_\nu$ | $\rho C_\mu \partial_\alpha$ | $\eta C_\mu \partial_\alpha$ | $\eta C_\mu C_\alpha$ |
| $B_\mu \partial_\nu$ | $\rho B_\mu \partial_\alpha$ | $\eta B_\mu \partial_\alpha$ | $\eta C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\nu B_\mu$ | $C^2 B_\mu \partial_\alpha$ | $(C \cdot B) B_\mu \partial_\alpha$ | $(C \cdot B) C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\nu \partial_\mu$ | $C^2 \Box \Omega_{\mu\alpha}$ | $\Box (C \cdot B) \Omega_{\mu\alpha}$ | $(C \cdot B) C_\alpha \partial_\mu$ |
| $B_\mu B_\nu$ | $(C \cdot B) B_\mu \partial_\alpha$ | $B^2 B_\mu \partial_\alpha$ | $B^2 C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\mu C_\nu$ | $C^2 C_\mu \partial_\alpha$ | $(C \cdot B) C_\mu \partial_\alpha$ | $(C \cdot B) C_\mu C_\alpha$ |

Tabela 2.2: Algebra dos projectores.

| | $C_\alpha \partial^\nu$ | $B^\nu B_\alpha$ | $C^\nu C_\alpha$ |
|---|---|---|---|
| $\Theta_{\mu\nu}$ | 0 | $B_\mu B_\alpha - \frac{\eta}{\Box} B_\alpha \partial_\mu$ | $C_\mu C_\alpha - \frac{\rho}{\Box} C_\alpha \partial_\mu$ |
| $\Omega_{\mu\nu}$ | $C_\alpha \partial_\mu$ | $\frac{\eta}{\Box} B_\alpha \partial_\mu$ | $\frac{\rho}{\Box} C_\alpha \partial_\mu$ |
| $B_\nu \partial_\mu$ | $\eta C_\alpha \partial_\mu$ | $B^2 B_\alpha \partial_\mu$ | $(C \cdot B) C_\alpha \partial_\mu$ |
| $C_\mu B_\nu$ | $\eta C_\mu C_\alpha$ | $B^2 C_\mu B_\alpha$ | $(C \cdot B) C_\mu C_\alpha$ |
| $C_\mu \partial_\nu$ | $\Box C_\mu C_\alpha$ | $\eta C_\mu B_\alpha$ | $\rho C_\mu C_\alpha$ |
| $B_\mu \partial_\nu$ | $\Box C_\alpha B_\mu$ | $\eta B_\mu B_\alpha$ | $\rho C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\nu B_\mu$ | $\rho C_\alpha B_\mu$ | $(C \cdot B) B_\mu B_\alpha$ | $C^2 C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\nu \partial_\mu$ | $\rho C_\alpha \partial_\mu$ | $(C \cdot B) B_\alpha \partial_\mu$ | $C^2 C_\alpha \partial_\mu$ |
| $B_\mu B_\nu$ | $\eta C_\alpha B_\mu$ | $B^2 B_\mu B_\alpha$ | $(C \cdot B) C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\mu C_\nu$ | $\rho C_\mu C_\alpha$ | $(C \cdot B) C_\mu B_\alpha$ | $C^2 C_\mu C_\alpha$ |

Tabela 2.3: Algebra dos projectores.

$$L=\left(\eta\Gamma-\rho\eta^{2}+\rho\Box B^{2}\right),$$
$$T=\left(\rho\Gamma-\eta\rho^{2}+\eta\Box C^{2}\right),$$

$$M=\left(\xi\rho\left(C\cdot B\right)-2\rho\left(\xi+1\right)+\xi\eta C^{2}\right),$$
$$N=\left(\xi\eta\left(C\cdot B\right)-2\eta\left(\xi+1\right)+\xi\rho B^{2}\right),$$

$$\Gamma=\left(2\Box-\rho\eta-\Box C\cdot B\right),$$
$$\Pi=\left[\left(\rho^{2}-\Box C^{2}\right)\left(\eta^{2}-\Box B^{2}\right)-\left(2\Box-\rho\eta-\Box C\cdot B\right)^{2}\right].$$

Logo o propagador tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha}^{\nu}&=a\Theta_{\alpha}^{\nu}+b\Omega_{\alpha}^{\nu}+cB_{\alpha}\partial^{\nu}+dC^{\nu}B_{\alpha}+eC^{\nu}\partial_{\alpha}+\\&+fB^{\nu}\partial_{\alpha}+gC_{\alpha}B^{\nu}+hC_{\alpha}\partial^{\nu}+iB^{\nu}B_{\alpha}+jC^{\nu}C_{\alpha},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\Delta\right)_{\alpha}^{\nu}=&\frac{1}{\left(\Box-\rho\eta\right)}\left[\Theta_{\alpha}^{\nu}+\frac{\left(LM+TN-2\xi\Pi\right)}{2\Pi}\Omega_{\alpha}^{\nu}+\frac{T}{\Pi}\left(B_{\alpha}\partial^{\nu}+B^{\nu}\partial_{\alpha}\right)\right]+\\&+\frac{1}{\left(\Box-\rho\eta\right)}\left[\frac{L}{\Pi}\left(C_{\alpha}\partial^{\nu}+C^{\nu}\partial_{\alpha}\right)-\frac{\Box\Gamma}{\Pi}\left(C^{\nu}B_{\alpha}+C_{\alpha}B^{\nu}\right)\right]+\\&+\frac{1}{\left(\Box-\rho\eta\right)}\left[+\frac{\Box\left(\rho^{2}-\Box C^{2}\right)}{\Pi}B^{\nu}B_{\alpha}+\frac{\Box\left(\eta^{2}-\Box B^{2}\right)}{\Pi}C^{\nu}C_{\alpha}\right].\end{aligned}\tag{2.11}$$

O propagador de Feynman, no espaço dos momentos, assume a forma

$$\begin{aligned}\left\langle 0\right|T\left(A^{\nu}\left(x\right)A_{\alpha}\left(y\right)\right)\left|0\right\rangle=&-\frac{i}{\left[p^{2}-\left(C\cdot p\right)\left(B\cdot p\right)\right]\Pi\left(p\right)}\Pi\left(p\right)\Theta_{\alpha}^{\nu}+\\&-\frac{i}{\left[p^{2}-\left(C\cdot p\right)\left(B\cdot p\right)\right]\Pi\left(p\right)}\left[\frac{\left[LM\left(p\right)+TN\left(p\right)-2\xi\Pi\left(p\right)\right]}{2}\Omega_{\alpha}^{\nu}+2L'\left(p\right)\rho^{\nu}{}_{\alpha}\right]+\\&-\frac{i}{\left[p^{2}-\left(C\cdot p\right)\left(B\cdot p\right)\right]\Pi\left(p\right)}\left[2T'\left(p\right)\kappa^{\nu}{}_{\alpha}+2p^{2}\Gamma\left(p\right)D^{\nu}{}_{\alpha}\right]+\\&+\frac{i}{\left[p^{2}-\left(C\cdot p\right)\left(B\cdot p\right)\right]\Pi\left(p\right)}\left[p^{2}\left(p^{2}C^{2}-\left(C\cdot p\right)^{2}\right)B^{\nu}B_{\alpha}+p^{2}\left(p^{2}B^{2}-\left(B\cdot p\right)^{2}\right)C^{\nu}C_{\alpha}\right],\end{aligned}\tag{2.12}$$

onde

$$2\kappa_{\nu\alpha}=B_{\nu}p_{\alpha}+B_{\alpha}p_{\nu},\tag{2.13}$$
$$2D_{\nu\alpha}=C_{\nu}B_{\alpha}+C_{\alpha}B_{\nu},\tag{2.14}$$
$$2\rho_{\nu\alpha}=C_{\nu}p_{\alpha}+C_{\alpha}p_{\nu}.\tag{2.15}$$

### 2.2.1 Relaçoes de Dispersão

A relação de dispersão é obtida através dos pólos do propagador. Obtemos duas relações de dispersão dadas por:

$$\left(\Box-\rho\eta\right)=0$$

$$\Pi = \left(\rho^2 - \Box C^2\right)\left(\eta^2 - \Box B^2\right) - \left(2\Box - \rho\eta - \Box C\cdot B\right)^2 = 0.$$

No espaço dos momentos, podem ser escrita como

$$p^2 - (C\cdot p)(B\cdot p) = 0, \tag{2.16}$$

$$p^2 = 0, \tag{2.17}$$

$$p^2\left(1 - \frac{C^2B^2}{4}\right) + \frac{1}{4}\left[B^2(C\cdot p)^2 + C^2(B\cdot p)^2 - 4(B\cdot p)(C\cdot p)\right] + \\ + \frac{p^2}{4}(C\cdot B)^2 + \frac{1}{2}(C\cdot B)(B\cdot p)(C\cdot p) - p^2(C\cdot B) = 0. \tag{2.18}$$

Através das relações de dispersão podemos analisar a causalidade, estabilidade e birrefrigência desta teoria. Para isso, temos que analisar as relações de dispersão para os coeficientes $C_0B_0, C_iB_0, C_0B_i, C_iB_i$

### Análise da isotropia e anisotropia da relação de dispersão

Para a relação de dispersão (2.16), analisando as componentes temporais, caso isotrópico $C_\alpha = (C_0, 0)$, $B_\alpha = (B_0, 0)$, temos

$$p^2 - (C_0p_0)(B_0p_0) = 0, \tag{2.19}$$

o que leva à seguinte relação de dispersão:

$$p_0 = \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{1 - C_0B_0}}. \tag{2.20}$$

Esta é uma relação isotrópica uma vez que não depende da direção do momento: todas as direções são alteradas da mesma forma.

Uma outra escolha possível, $C_\alpha = (0, \mathbf{C})$, $B_\alpha = (B_0, 0)$, leva à relação de dispersão,

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + B_0p_0(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}), \tag{2.21}$$

cuja soluções são dadas por

$$p_{0\pm} = \frac{B_0(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}) \pm \sqrt{B_0^2(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p})^2 + 4\mathbf{p}^2}}{2},$$

sendo esta uma relação anisotrópica, uma vez que depende da direção do momento $\mathbf{p}$ em direção a $\mathbf{C}$. Do mesmo modo para $C_\alpha = (C_0, 0)$, $B_\alpha = (0, \mathbf{B})$, obtemos a relação de dispersão

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + C_0p_0(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}), \tag{2.22}$$

$$p_{0\pm} = \frac{C_0(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}) \pm \sqrt{C_0^2(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})^2 + 4\mathbf{p}^2}}{2},$$

que também é anisotrópica já que depende da direção do momento em direção a $\mathbf{B}$.

Podemos também escolher para $C_\alpha = (0, \mathbf{C})\,, B_\alpha = (0, \mathbf{B})$, que leva a relação de dispersão

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + (\mathbf{C}\cdot\mathbf{p})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})\,, \tag{2.23}$$

que também é anisotrópica, dependendo da direção do momento em direção a $\mathbf{C}$ e $\mathbf{B}$.

Analisando agora para a relação de dispersão $(2.18)$, temos que para as componentes temporais, caso isotrópico $C_\alpha = (C_0, 0)\,,\ B_\alpha = (B_0, 0)\,,$ a relação de dispersão

$$p^2\left(1 - \frac{C_0^2 B_0^2}{4}\right) + \frac{1}{4}\left[2B_0^2C_0^2p_0^2 - 4B_0C_0p_0^2\right] + \frac{p^2}{4}B_0^2C_0^2 + \frac{1}{2}B_0^2C_0^2p_0^2 - p^2B_0C_0 = 0, \tag{2.24}$$

tem a forma

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2\frac{(1 - B_0C_0)}{(1 + B_0^2C_0^2 - 2B_0C_0)}, \tag{2.25}$$

$$p_0 = |\mathbf{p}|\sqrt{\frac{1 - B_0C_0}{1 + B_0^2C_0^2 - 2B_0C_0}}. \tag{2.26}$$

Esta por sua vez também é isotrópica, uma vez que não depende da direção do momento. Considerando $C_\alpha = (0, \mathbf{C})\,, B_\alpha = (B_0, 0)$, temos que a relação de dispersão

$$p^2\left(1 + \frac{\mathbf{C}^2 B_0^2}{4}\right) + \frac{1}{4}\left[B_0^2\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p})^2 - \mathbf{C}^2B_0^2p_0^2 + 4B_0p_0\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p})\right] = 0,$$

podendo ser reescrita na forma

$$p_0^2 = 4B_0p_0\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}) + \mathbf{p}^2 - \mathbf{p}^2\mathbf{C}^2B_0^2 - B_0^2\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p})^2\,,$$

cuja solução para $p_0$

$$p_{0\pm} = 2B_0\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}) \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}^2\mathbf{C}^2B_0^2 + 3B_0^2\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p})^2},$$

é anisotrópica já que $\mathbf{C}$ depende da direção do momento. De modo análogo, temos que para $C_\alpha = (C_0, 0)\,, B_\alpha = (0, \mathbf{B})$ a relação de dispersão tem a forma

$$p_0^2 = 4C_0p_0\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}) + \mathbf{p}^2 - \mathbf{p}^2\mathbf{B}^2C_0^2 - C_0^2\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})^2\,, \tag{2.27}$$

cuja solução

$$p_{0\pm} = 2C_0\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}) \pm \sqrt{\left(\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}^2\mathbf{B}^2C_0^2 + 3C_0^2\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})^2\right)}\,,$$

que também é anisotrópica já que $\mathbf{B}$ depende da direção do momento. Uma outra possível escolha é $C_\alpha = (0, \mathbf{C})\,, B_\alpha = (0, \mathbf{B})$, em que a relação de dispersão é dada por:

$$\begin{aligned}p^2\left(1 - \frac{\mathbf{C}^2\mathbf{B}^2}{4}\right) + \frac{1}{4}\left[\mathbf{B}^2\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p})^2 + \mathbf{C}^2\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})^2 - 4\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p})\right] +\\ + \frac{p^2}{4}\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}) - p^4(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}) = 0,\end{aligned} \tag{2.28}$$

podendo ser reescrita na forma

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{\left[\mathbf{B}^2\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p})^2 + \mathbf{C}^2\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})^2 + 2\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p})\,[(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}) - 2]\right]}{\left[4 - \mathbf{C}^2\mathbf{B}^2 - 4(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}) + (\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})^2\right]}. \tag{2.29}$$

Em que essa relação é anisotrópica, pois depende da direção do momento em direção a $\mathbf{C}$ e $\mathbf{B}$.

### 2.2.2 Análise da estabilidade

Os modos de propagação obedecem

$$p_0^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{(1 - C_0 B_0)}, \tag{2.30}$$

$$p_{0\pm} = \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{(1 - C_0 B_0)}}, \tag{2.31}$$

a energia é sempre positiva desde que $C_0 B_0 < 1$.

Para a relação de dispersão (2.21),

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + B_0 p_0 (\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}), \tag{2.32}$$

resolvendo para $p_0$, temos

$$p_{0\pm} = \frac{B_0(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}) \pm \sqrt{B_0^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})^2 + 4\mathbf{p}^2}}{2}, \tag{2.33}$$

$$\Delta p_0 = \sqrt{B_0^2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})^2 + 4\mathbf{p}^2}. \tag{2.34}$$

Os modos de propagação tem sempre energia positiva. Do mesmo modo temos que para a relação de dispersão (2.22) a energia é positiva dados por

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + C_0 p_0 \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right), \tag{2.35}$$

$$p_{0\pm} = \frac{C_0(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}) \pm \sqrt{C_0^2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})^2 + 4\mathbf{p}^2}}{2}, \tag{2.36}$$

$$\Delta p_0 = \sqrt{C_0^2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})^2 + 4\mathbf{p}^2}, \tag{2.37}$$

Para o coeficiente $C_\alpha = (0, \mathbf{C})\,, B_\alpha = (0, \mathbf{B})$, vemos que os modos de propagação da relação de dispersão $(2.23)$, dados por

$$p_{0\pm} = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right)\left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right)}, \tag{2.38}$$

$$\Delta p_0 = 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right)\left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right)}, \tag{2.39}$$

tem energia positiva

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right)\left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right). \tag{2.40}$$

Para a relação de dispersão (2.29), temos

$$p_{0\pm} = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 - \frac{\left[\mathbf{B}^2\left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right)^2 + \mathbf{C}^2\left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right)^2 + 2\left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right)\left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right)\left[\left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}\right) - 2\right]\right]}{\left[4 - \mathbf{C}^2\mathbf{B}^2 - 4(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) + \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}\right)^2\right]}}, \tag{2.41}$$

que é estável para $p_{0+}$.

### 2.2.3 Análise da causalidade

A causalidade está associada a transmissão de sinais com velocidades inferiores a da luz. Para velocidades maiores que a da luz temos a não causalidade, ligados a propagação de sinais super-luminais conduzindo a violação do princípio da causalidade. O que não é fisicamente aceitável. Para analisar a causalidade dos modos de propagação temos que calcular as velocidades de grupo e de frente de onda, obedecendo $u_g < 1$ e $u_{frente} \leq 1$.

Para o coeficiente P-par $C_\alpha = (C_0, 0)$ , $B_\alpha = (B_0, 0)$, as relações de dispersão (2.16) e (2.18) assumem a mesma forma, sendo necessário apenas uma análise para ambas as relações. Desse modo, temos que a velocidade de grupo dos modos de propagação (2.31) é dada por:

$$u_g = \frac{dp_0}{d\,|\mathbf{p}|} = \frac{1}{\sqrt{1 - C_0 B_0}} = \frac{p_0}{|\mathbf{p}|}. \tag{2.42}$$

Expandindopara $C_0 B_0$ pequeno até a segunda ordem, temos que

$$u_g = \frac{dp_0}{d\,|\mathbf{p}|} = \frac{1}{\sqrt{1 - C_0 B_0}} = \left(1 + \frac{1}{2} C_0 B_0\right) = \frac{p_0}{|\mathbf{p}|}. \tag{2.43}$$

Sabendo que $C_0 B_0$ é muito menor que um, temos que $\omega > |\mathbf{p}|$, consequentemente $u_g > 1$ violando a causalidade. A velocidade de frente é dada por

$$u_{frente} = \lim_{|\mathbf{p}| \to \infty} \frac{p_0}{|\mathbf{p}|} = \frac{1}{\sqrt{1 - C_0 B_0}} = \left(1 + \frac{1}{2} C_0 B_0\right) > 1. \tag{2.44}$$

O modo é dito causal quando $u_g < 1$ e $u_{frente} \leq 1$ simultaneamente. Logo o coeficiente $C_0 B_0$ é não causal. Para que o coeficiente seja causal satisfazendo as condições de $u_g < 1$ e $u_{frente} \leq 1$,a violação deve ser negativa.

Para a relação de dispersão (2.40) ,o coeficiente P-par $C_\alpha = (0, \mathbf{C})$ , $B_\alpha = (0, \mathbf{B})$ pode ser reescrito com o momento em coordenadas esféricas dado por

$$\mathbf{p} = |\mathbf{p}| \left(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta\right). \tag{2.45}$$

Considerando o diagrama mostrado na Figura-2.1, temos que o coeficiente $\mathbf{C}$ está na direção-$x$ e $\mathbf{B}$ na direção-$y$.

Figura 2.1: Diagrama dos coeficiente de violação e momento

Logo os produtos escalar $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})$, podem ser reescrito na forma:

$$p_0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 \left(1 + |\mathbf{C}|\,|\mathbf{B}| \sin^2\theta \cos\phi \sin\phi\right)}, \tag{2.46}$$

usando a relação trigonométrica

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

temos

$$p_0 = |\mathbf{p}| \sqrt{\left(1 + \frac{|\mathbf{C}|\,|\mathbf{B}|}{2} \sin^2\theta \sin 2\phi\right)}. \tag{2.47}$$

A velocidade de grupo dos modos de propagação é dada por:

$$u_g = \frac{dp_0}{d\,|\mathbf{p}|} = \sqrt{\left(1 + \frac{|\mathbf{C}|\,|\mathbf{B}|}{2} \sin^2\theta \sin 2\phi\right)} = \frac{p_0}{|\mathbf{p}|} = u_{frente}, \tag{2.48}$$

onde os senos de $\theta$ e $\phi$ são limitados em um intervalo de $-1$ a 1. Temos que quando $\phi = \pi/4, 5\pi/4$ para $\sin\theta \neq 0$, $u_g = u_{frente} > 1$ violando a causalidade. Mas para $\phi = 3\pi/4, 7\pi/4$ com $\sin\theta \neq 0$ a expressão (2.48) assume a forma

$$u_g = \frac{dp_0}{d\,|\mathbf{p}|} = \sqrt{\left(1 - \frac{|\mathbf{C}|\,|\mathbf{B}|}{2} \sin^2\theta \sin 2\phi\right)} = \frac{p_0}{|\mathbf{p}|} = u_{frente} < 1, \tag{2.49}$$

implicando em causalidade, pois $u_g < 1$ e $u_{frente} < 1$.

Do mesmo modo podemos reescrever a relação de dispersão (2.41) em termos dos ângulos $\theta$ e $\phi$ com $\mathbf{CB}$ ortogonais na forma:

$$p_0 = |\mathbf{p}| \sqrt{1 - \frac{[|\mathbf{B}|\,|\mathbf{C}| - 2\sin 2\phi]}{[4 - \mathbf{C}^2\mathbf{B}^2]} |\mathbf{B}|\,|\mathbf{C}| \sin^2\theta}, \tag{2.50}$$

$$p_0 = |\mathbf{p}| \sqrt{1 + \frac{[\sin 2\phi - |\mathbf{B}|\,|\mathbf{C}|/2]}{2\left[1 - \frac{\mathbf{C}^2\mathbf{B}^2}{4}\right]} |\mathbf{B}|\,|\mathbf{C}| \sin^2\theta}. \tag{2.51}$$

A velocidade grupo para esse caso tem a forma

$$u_g = u_{frente} = \sqrt{1 + \frac{[\sin 2\phi - |\mathbf{B}|\,|\mathbf{C}|/2]}{2\left[1 - \frac{\mathbf{C}^2\mathbf{B}^2}{4}\right]} |\mathbf{B}|\,|\mathbf{C}| \sin^2\theta},$$

para a primeira ordem do background, temos que

$$u_g = u_{frente} = \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{B}|\,|\mathbf{C}| \sin^2\theta \sin 2\phi}{2}},$$

implicando em causalidade e não causalidade dependendo dos valores que $\phi$ pode assumir, mostrados nas equações (2.48) e (2.49) .Em ambos os casos a energia continua sendo positiva, implicando em estabilidade.

Concluímos que os coeficientes de paridade par, $C_\alpha = (C_0, 0)$, $B_\alpha = (B_0, 0)$ e $C_\alpha = (0, \mathbf{C})$, $B_\alpha = (0, \mathbf{B})$, para ambas as relações de dispersão (2.16) e (2.18) é estável, podendo ser causal ou não causal, dependendo dos valores de $\phi$.

Para a relação de dispersão (2.16) , o coeficiente $C_\alpha = (0, \mathbf{C})$, $B_\alpha = (B_0, 0)$ em termos dos ângulos $\theta$ e $\phi$ assumem a forma:

$$p_0 = \frac{B_0\,|\mathbf{C}|\,|\mathbf{p}| \sin\theta\cos\phi \pm |\mathbf{p}| \sqrt{B_0^2\,|\mathbf{C}|^2 \sin^2\theta\cos^2\phi + 4}}{2}, \tag{2.52}$$

sabendo que o $\sin\theta$ e $\cos\phi$ são limitados de $-1$ a 1, temos que

$$\frac{-B_0\left|\mathbf{C}\right|\left|\mathbf{p}\right| \pm \left|\mathbf{p}\right|\sqrt{B_0^2\left|\mathbf{C}\right|^2+4}}{2} \leq p_0 \leq \frac{B_0\left|\mathbf{C}\right|\left|\mathbf{p}\right| \pm \left|\mathbf{p}\right|\sqrt{B_0^2\left|\mathbf{C}\right|^2+4}}{2}, \tag{2.53}$$

expandindo para $B_0^2\left|\mathbf{C}\right|^2$ pequeno

$$-\frac{\left|\mathbf{p}\right|}{2}\left(B_0\left|\mathbf{C}\right| \mp \left(2+\frac{1}{4}B_0^2\left|\mathbf{C}\right|^2\right)\right) \leq p_0 \leq \frac{B_0\left|\mathbf{C}\right|\left|\mathbf{p}\right|}{2} \pm \frac{\left|\mathbf{p}\right|}{2}\left(2+\frac{1}{4}B_0^2\left|\mathbf{C}\right|^2\right), \tag{2.54}$$

considerando a primeira ordem do background e $\omega > 0$ para garantir a estabilidade , temos

$$\left|\mathbf{p}\right|\left(-\frac{B_0\left|\mathbf{C}\right|}{2}\pm 1\right) \leq p_0 \leq \left|\mathbf{p}\right|\left(\frac{B_0\left|\mathbf{C}\right|}{2}\pm 1\right). \tag{2.55}$$

Podemos analisar a causalidade para alguns casos.

**Para o valor máximo de $p_0$**

Para que seja causal deve valer $u_g < 1$ e $u_{frente} \leq 1$ simultaneamente.

$$u_g = \frac{dp_0}{d\left|\mathbf{p}\right|} = \left(\frac{B_0\left|\mathbf{C}\right|}{2}+1\right), \tag{2.56}$$

para $B_0\left|\mathbf{C}\right| \neq 0$ implica que $u_g > 1$, violando o princípio da causalidade. Por completeza, para a velocidade de frente, temos que

$$u_{frente} = \lim_{\left|\mathbf{p}\right|\to\infty}\frac{p_0}{\left|\mathbf{p}\right|} = \left(\frac{B_0\left|\mathbf{C}\right|}{2}+1\right) > 1. \tag{2.57}$$

**Para o valor mínimo de $p_0$**

Do mesmo modo, temos que

$$u_g = \frac{dp_0}{d\left|\mathbf{p}\right|} = \left(1-\frac{B_0\left|\mathbf{C}\right|}{2}\right) < 1, \tag{2.58}$$

$$u_{frente} = \lim_{\left|\mathbf{p}\right|\to\infty}\frac{p_0}{\left|\mathbf{p}\right|} = \left(1-\frac{B_0\left|\mathbf{C}\right|}{2}\right) \leq 1. \tag{2.59}$$

Vemos que o coeficiente $C_\alpha = (0,\mathbf{C})$, $B_\alpha = (B_0, 0)$ é causal para o valor mínimo de $p_0$.

Podemos concluir que para a primeira ordem do coeficiente $C_\alpha = (0,\mathbf{C})$, $B_\alpha = (B_0, 0)$ , da expressão (2.52) a velocidade de grupo dada por

$$u_g = \frac{dp_0}{d\left|\mathbf{p}\right|} = \left(\frac{B_0\left|\mathbf{C}\right|\sin\theta\cos\phi}{2}+1\right) = \frac{p_0}{\left|\mathbf{p}\right|}, \tag{2.60}$$

será causal, nas seguintes configurações:

$$\theta = \pi/2 \text{ e } \phi = \pi \text{ ou } \theta = 3\pi/2 \text{ e } \phi = 0,$$

simultaneamente. Do mesmo modo temos para o coeficiente $C_\alpha = (C_0, 0)\,, B_\alpha = (0, \mathbf{B})$, fazendo $B_0 \to C_0$ e $|\mathbf{C}| \to \mathbf{B}$ em (2.56) a (2.59).

Concluímos que para as relações de dispersão (2.16) e (2.18) o resultado para o coeficiente $C_\alpha = (C_0, 0)\,, B_\alpha = (0, \mathbf{B})$, será o mesmo do coeficiente $C_\alpha = (0, \mathbf{C})$, $B_\alpha = (B_0, 0)$, fazendo as mesmas considerações. Logo os setores de paridade ímpar será causal se algumas considerações forem satisfeitas.

# Capítulo 3

# Eletrodinâmica de Podolsky

## 3.1 Introdução

A eletrodinâmica de Podolsky é uma generalização da teoria de Maxwell, que consiste na introdução de um termo de altas derivadas, contendo duas ordens derivativas além do termo de Maxwell, ou mais expecificamente, $\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\lambda F^{\lambda}_{\ \beta}$. A teoria de Podolsky foi proposta no início dos anos 40 [7], sendo uma teoria de segunda ordem que preserva as duas simetrias básicas da teoria eletromagnética (gauge e Lorentz) [22]. Trata-se, portanto, de um termo de dimensão 6, gauge-invariante e Lorentz-invariante, mas que não compartilha a simetria de dualidade do campo eletromagético livre.

Uma das características marcantes da eletrodinâmica de Podolsky é que a mesma gera um modo propagante massivo, sem quebrar a simetra de gauge, aspecto em que se diferencia da teoria de Proca, que envolve um termo de massa incompatível com a simetria de gauge.

Os estudos sobre a teoria de Podolsky, iniciados em 1942, continuam sendo desenvolvidos nos últimos anos, como exemplo representativo de teoria eletromagnética com altas derivadas. Um estudo interessante acerca da condição de calibre adequada para um consistente tratamento e quantizaçao desta teoria foi desenvolvido na Ref.[23]. A eletrodinâmica de Podolsky à temperatura finita foi examinada na Ref. [24], onde foram calculadas correções à lei de Stefan-Boltzmann. A quantização covariante da eletrodinâmica de Podolsky [25], pelo método dos vínculos de Dirac, foi também investigada, envolvendo ainda o cálculo de funções de Green a 1-loop. A obtenção de soluções clássicas para esta teoria, baseada no cálculo da correspondente função de Green e das expansões multipolares, foi realizada recente na Ref. [27].

Neste capítulo, faremos um estudo dos aspectos mais elementares da eletrodinâmica de Podolsky. Iniciamos apresentando a densidade de lagrangeana de Podolsky e as equações de movimento e as equações de onda satisfeitas pelos potenciais. Fixando a condição de calibre adequada, obtemos a equação de onda estacionária para o potencial escalar e vetor, para as quais a correspondente função de Green é calculada. Apresentamos a solução do potencial eletrostático, particularizando-o para o caso de uma carga pontual, e discutindo alguns limites interessantes. Por fim, calculamos o propagador de Feynman desta teoria, obtendo as relações de dispersão a partir dos seus polos. Finalizamos analisando a causalidade, estabilidade e unitariedade da teoria.

## 3.2 Equações de movimento e soluções clássicas

A Lagrangiana de Podolsky, na presença de fontes, é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{2}\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\lambda F^\lambda_\beta - j_\mu A^\mu, \tag{3.1}$$

onde $\theta^2$ é um fator com dimensão de $[massa]^{-2}$, $F^{\mu\nu} = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ é o tensor de Maxwell e $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ é a 4-corrente que representa as fontes do campo.

Antes de determinar a equação de movimento desta teoria, podemos apresentar a Lagrangeana (3.1) em termos dos campso $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Para isto, desenvolvemos as somas do termo de Podolsky, $\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\lambda F^\lambda_\beta = \partial_\alpha F^{\alpha 0}\partial_\lambda F^\lambda{}_0 - \partial_\alpha F^{\alpha i}\partial_\lambda F^{\lambda i}$, ou

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\lambda F^\lambda_\beta = \partial_i F^{i0}\partial_j F^{j0} - \partial_0 F^{0i}\partial_0 F^{0i} - 2\partial_0 F^{0i}\partial_j F^{ji} - \partial_a F^{ai}\partial_j F^{ji}. \tag{3.2}$$

Usando as componentes,

$$F_{0i} = F^{i0} = E^i,\ F_{ij} = F^{ij} = -\epsilon_{ijk}B^k, \tag{3.3}$$

encontramos

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\lambda F^\lambda_\beta = \partial_i E^i\partial_j E^j - \partial_0 E^i\partial_0 E^i - 2\epsilon_{jik}\partial_0 E^i\partial_j B^k - \partial_a B^k\partial_a B^k + \partial_a B^k\partial_k B^a, \tag{3.4}$$

onde $\epsilon_{aik}\epsilon_{jil}\partial_a B^k\partial_j B^l = \partial_a B^k\partial_a B^k - \partial_a B^k\partial_k B^a$. A lagrangeana (3.1), em termos dos campos, é dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;\; = \;\; & -\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{\theta^2}{2}\left[(\nabla\cdot\mathbf{E})^2 - (\partial_t\mathbf{E})^2 + 2\left(\partial_t\mathbf{E}\right)\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\right. \\ & \left. - \left(\nabla B^k\right)\cdot\left(\nabla B^k\right) + \partial_a B^k\partial_k B^a\right]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

A equação de Euler Lagrange para teorias com derivadas de ordem superior [28] é dada por:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\kappa} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\rho A_\kappa\right)} + \partial_\nu\partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\rho\partial_\nu A_\kappa\right)} = 0. \tag{3.6}$$

Sabemos que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = -j^\kappa,\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\rho A_\kappa\right)} = -F^{\rho\kappa}, \tag{3.7}$$

$$\partial_\rho\partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\beta\partial_\rho A_\kappa\right)} = \theta^2\Box\partial_\lambda F^{\lambda\kappa}, \tag{3.8}$$

e observamos que o último termo da eq. (3.6) só resulta não-nulo quando atua sobre o termo de Podolsky. A equação de Euler Lagrange então fornece:

$$\left(1+\theta^2\Box\right)\partial_\alpha F^{\alpha\kappa}=j^\kappa, \tag{3.9}$$

o que leva às duas equações de Maxwell não-homogêneas (modificadas pelo termo de Podolsky). obtemos:

$$\left(1+\theta^2\Box\right)\partial_j E^j=\rho, \tag{3.10}$$

$$\left(1+\theta^2\Box\right)\left(\varepsilon_{ijk}\partial_j B^k-\partial_t E^i\right)=j^i, \tag{3.11}$$

Da identidade de Bianchi,

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu}+\partial_\mu F_{\nu\alpha}+\partial_\nu F_{\alpha\mu}=0,$$

advêm as duas equações de Maxwell homogêneas

$$\partial_j B^j=0, \tag{3.12}$$

$$\left(\varepsilon_{ijk}\partial_j E^k+\partial_t B^i\right)=0. \tag{3.13}$$

O conjunto das equações de Maxwell modificadas é dado por

$$\left(1-\theta^2\Box\right)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})=\rho, \tag{3.14}$$

$$\left(1-\theta^2\Box\right)(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}-\partial_t\mathbf{E})=\mathbf{j}, \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0,\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}+\partial_t\mathbf{B}=0, \tag{3.16}$$

cuja forma estacionária é

$$\left(1-\theta^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})=\rho, \tag{3.17}$$

$$\left(1-\theta^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})=\mathbf{j}, \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0, \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=0. \tag{3.20}$$

Uma das características da teoria de Maxwell, na ausência de fontes, é a simetria de dualidade, baseada na invariância das equaçoes de Maxwell sob as transformações de dualidade, $\mathbf{E}\to\mathbf{B}',\mathbf{B}\to-\mathbf{E}'$. Aplicando tais transformações sobre as eqs. (3.14-3.16), vemos que tais equações nao permanecem invariantes, indicando a que a eletrodinâmica de Podolsky não possui simetria de dualidade.

Lembrando que $F^{\alpha\kappa}=\left(\partial^\alpha A^\kappa-\partial^\kappa A^\alpha\right)$, obtemos a equação de onda para o 4-potencial,

$$\left(1+\theta^2\Box\right)\left(\Box A^\beta-\partial^\beta\partial_\alpha A^\alpha\right)=j^\beta. \tag{3.21}$$

Na eletrodinâmica de Podolsky, assim como ocorre na eletrodinâmica de Maxwell pura, o número de graus de liberdade físicos é menor que o número de componentes do campo de gauge, surgindo a necessidade de fixação do calibre. Uma escolha possível e covariante, seria o calibre de Lorentz, $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, com o qual a eq. (3.21) recai em

$$\left(1+\theta^2\square\right)\square A^\beta = j^\beta. \tag{3.22}$$

Partindo da eq. (3.21), encontramos as equações estacionárias para os potenciais escalar e vetorial:

$$\left(1-\theta^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\left(\boldsymbol{\nabla}^2 A_0\right) = -\rho, \tag{3.23}$$

$$\left(1-\theta^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\left(\boldsymbol{\nabla}^2 A^i - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right)\right) = -j^i. \tag{3.24}$$

Na literatura especializada, há um calibre específico para a eletrodinâmica de Podolsky, encontrado na Ref. [23], denominado de calibre de Coulomb generalizado,

$$\left(1-\theta^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right) = 0. \tag{3.25}$$

Adotando-o, a eq. (3.24) assume a mesma forma diferencial da eq. (3.23):

$$\left(1-\theta^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\boldsymbol{\nabla}^2 A^i = -j^i. \tag{3.26}$$

Tais equações podem ser solucionadas pelo tradicional método de Green, calculando-se a função de Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ que satisfaz a equação diferencial:

$$\left(1-\theta^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\boldsymbol{\nabla}^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{3.27}$$

As soluções procuradas são genericamente dadas pelas integrais

$$A_0\left(\boldsymbol{r}\right) = -\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho\left(\mathbf{r}'\right)d^3\mathbf{r}', \tag{3.28}$$

$$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{r}\right) = -\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{j}\left(\mathbf{r}'\right)d^3\mathbf{r}'. \tag{3.29}$$

Para encontrar a função de Green que satisfaz eq. (3.27), escrevemos:

$$G\left(\mathbf{R}\right) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}\tilde{G}\left(\mathbf{p}\right)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}, \qquad \delta^3(\mathbf{R}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}, \tag{3.30}$$

onde $\mathbf{R} = (\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Substitindo tais relações na eq. (3.27), encontramos

$$\tilde{G}\left(\mathbf{p}\right) = -\frac{1}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)\mathbf{p}^2}, \tag{3.31}$$

de modo que

$$G\left(\mathbf{R}\right) = -\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}\frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)\mathbf{p}^2}, \tag{3.32}$$

$$G\left(\mathbf{R}\right) = -\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}\left[\frac{1}{\mathbf{p}^2} - \frac{\theta^2}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}\right]e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}. \tag{3.33}$$

Usando os seguintes resultados de integrais no plano complexo,

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} = \frac{1}{4\pi R}, \tag{3.34}$$

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{\mathbf{p}^2 + m^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mR}}{R}, \tag{3.35}$$

cujos detalhes estão dados no Apêndice 1, encontramos a seguinte função de Green:

$$G(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\left(1 - e^{-R/\theta}\right)}{R}. \tag{3.36}$$

Neste caso, os potenciais escalar e vetorial são dados por

$$\begin{aligned} A_0(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{1 - e^{-M_p|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') \, d^3\mathbf{r}', & (3.37) \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{1 - e^{-M_p|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \, d^3\mathbf{r}', & (3.38) \end{aligned}$$

onde $M_p = 1/\theta$ representa o fator de massa de Podolsky. Para uma carga pontual, $q(\mathbf{r}') = q\delta^3(\mathbf{r}')$, temos:

$$A_0(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi} \int \frac{1 - e^{-M_p|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta^3(\mathbf{r}') \, d^3\mathbf{r}', \tag{3.39}$$

$$A_0(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi} \frac{1 - e^{-M_p|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|}. \tag{3.40}$$

Importante observar que o comportamento coulombiano usual, $A_0(\boldsymbol{r}) \propto |\mathbf{r}|^{-1}$, está presente na equação acima. No limite $\theta \to 0$ ou $M_p \to \infty$, a solução (3.40) reproduz o comportamento puro coulombiano. No limite de grandes distâncias, $|\mathbf{r}| \to \infty$, a solução (3.40) também reproduz o comportamento puro coulombiano. Porém, no limite de pequenas distâncias da fonte, $|\mathbf{r}| \to 0$, temos $e^{-M_p|\mathbf{r}|} \sim (1 - M_p|\mathbf{r}|)$, e a eq. (3.40) leva ao resultado constante,

$$A_0(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi} M_p, \tag{3.41}$$

evidenciando que na eletrodinâmica de Podolsky os campos nao divergem nas proximidades das cargas pontuais. Uma interessante e atual análise sobre a expansão multipolar das soluções clássicas de Podolsky foi recentemente desenvolvida na Ref. [27].

## 3.3 Propagador de Feynman para a eletrodinâmica de Podolsky

No intuito de calcular o propagador da teoria de Podolsky, reescrevemos a lagrangeana (3.1) na ausencia de fontes e na presença do termo de fixação de calibre,

$$\mathcal{L}_{Podolsky} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{2} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^\lambda{}_\beta + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \tag{3.42}$$

em uma forma quadrática,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^{\nu} O_{\mu\nu} A^{\mu}, \tag{3.43}$$

onde $O_{\mu\nu}$ é o operador tensorial dado por

$$O_{\mu\nu} = \left(\Box + \theta^2 \Box^2\right) \Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} \Box \Omega_{\mu\nu}, \tag{3.44}$$

e que satisfaz à identidade

$$O_{\mu\nu} \Delta^{\nu}_{\alpha} = g_{\mu\alpha}. \tag{3.45}$$

Onde $\Delta^{\nu}_{\alpha}$ é operador inverso de $O_{\mu\nu}$. Lembrando que

$$g_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu}, \tag{3.46}$$

onde os projetores transversal e longitudinal estão dados, respectivamente, por

$$\Theta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \Omega_{\mu\nu}, \tag{3.47}$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \partial_{\nu} / \Box. \tag{3.48}$$

Podemos agora propor a seguinte forma para $\Delta_{\mu\nu}$, em termos dos projetores conhecidos,

$$\Delta^{\nu}_{\alpha} = a \Theta^{\nu}_{\alpha} + b \Omega^{\nu}_{\alpha}. \tag{3.49}$$

onde $a$ e $b$ são constantes a serem determinadas. Estes operadores satisfazem uma algebra tensorial fechada:

| | $\Theta^{\nu}_{\alpha}$ | $\Omega^{\nu}_{\alpha}$ |
|---|---|---|
| $\Theta_{\mu\nu}$ | $\Theta_{\mu\alpha}$ | 0 |
| $\Omega_{\mu\nu}$ | 0 | $\Omega_{\mu\alpha}$ |

Substituindo a expressão (3.49) na relação (3.45), realizando as contrações tensoriais envolvidas, encontramos

$$\left[\left(\Box + \theta^2 \Box^2\right) \Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} \Box \Omega_{\mu\nu}\right] \left(a \Theta^{\nu}_{\alpha} + b \Omega^{\nu}_{\alpha}\right) = g_{\mu\alpha}, \tag{3.50}$$

$$a \left(\Box + \theta^2 \Box^2\right) \Theta_{\mu\alpha} - \frac{1}{\xi} b \Box \Omega_{\mu\alpha} = \Theta_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu}. \tag{3.51}$$

Soluciando este sistema, encontramos $a$ e $b$:

$$a = \frac{1}{\Box \left(1 + \theta^2 \Box\right)}, \; b = -\frac{1}{\Box} \xi.$$

O operador inverso é determinado,

$$\Delta^{\nu\alpha} = \frac{1}{\Box \left(1 + \theta^2 \Box\right)} \Theta^{\nu\alpha} - \frac{\xi}{\Box} \Omega^{\nu\alpha}. \tag{3.52}$$

Sendo o propagador de Feynman definido como

$$\langle A_{\nu} A_{\alpha} \rangle = i \Delta_{\nu\alpha} \left(x - y\right), \tag{3.53}$$

assume a seguinte forma:

$$\langle A_\nu A_\alpha \rangle = -\frac{i}{p^2}\left[\frac{1}{\left(1-\theta^2 p^2\right)}\Theta_{\nu\alpha} - \xi\Omega_{\nu\alpha}\right]. \tag{3.54}$$

Este propagador fornece suas relações de dispersão:

$$p^2 = 0, \tag{3.55}$$

$$\left(1-\theta^2 p^2\right) = 0. \tag{3.56}$$

Importante ressaltar que a relação (3.56) não faz sentido nenhum na ausência do termo de Podolsky, $\theta^2 = 0$ , com o que obteríamos $1 = 0$. Vemos assim que esta relação representa um modo propagante típico da eletrodinâmica de Podolsky, que obviamente não faz sentido físico na ausência do mesmo. As relações acima implicam em

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2, \tag{3.57}$$

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + M_p^2, \tag{3.58}$$

onde a segunda relação representa um modo propagante massivo, sendo $M_p = 1/\theta$ a massa de Podolsky.

Sabemos que o termo de Podolsky, $\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\lambda F^{\lambda}_{\ \beta}$, envolve duas ordens derivativas além do termo de Maxwell usual, possuindo dimensão 6. No ato de proposição deste termo, ou no momento de se calcular seu propagador, uma pergunta oportuna é se existiriam outras possibidades diferentes de termos dim-6 (com 2 derivadas adicionais), tais como:

$$F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu},\ F^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\partial_\lambda F^{\lambda}{}_{\beta}),\ (\partial_\alpha\partial_\lambda F^{\alpha\beta})F^{\lambda}{}_{\beta}. \tag{3.59}$$

Escrevendo cada um destes termos na forma bilinear,

$$\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}A^\nu\Box^2\Theta_{\mu\nu}A^\mu, \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\lambda F^{\lambda}{}_{\beta} &= -A^\nu\Box^2\Theta_{\mu\nu}A^\mu,\\ \frac{1}{2}(\partial_\alpha\partial_\lambda F^{\alpha\beta})F^{\lambda}{}_{\beta} &= -A^\nu\Box^2\Theta_{\mu\nu}A^\mu,\end{aligned}$$

percebemos que geram termos de mesma estrutura na lagrangena, revela que todos eles são equivalentes entre si (possuem o mesmo conteúdo físico), de modo que o propagador de Feynman calculado nesta seção representa o resultado que seria obtido para qualquer umas das escolhas da Eq. (3.59).

### 3.3.1 Análise da estabilidade e causalidade

A relação de dispersão $p_0^2 = \mathbf{p}^2$ é a usualmente conhecida na eletrodinâmica de Maxwell livre, sendo estável e causal. Resta analisar a relação (3.58), que representa um modo massivo,

$$p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + M_p^2} \tag{3.61}$$

de energia positiva $p_0 > 0$, o que assegura a estabilidade de energia. Para analisar a causalidade de um modo propagante, temos que calcular as velocidades de grupo $u_g = dp_0/d\,|\mathbf{p}|$ e de frente de onda $u_{frente} = \lim_{|\mathbf{p}|\to\infty}(p_0/\,|\mathbf{p}|)$. A causalidade estará assegurada se $u_g \leq 1$ e $u_{frente} \leq 1$. A velocidade de grupo para o modo (3.61) é dada por

$$u_g = \frac{dp_0}{d\,|\mathbf{p}|} = \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{\left(|\mathbf{p}|^2 + M_p^2\right)}} \leq 1, \tag{3.62}$$

$$u_{frente} = \lim_{|\mathbf{p}|\to\infty} \frac{p_0}{|\mathbf{p}|} = \sqrt{1 + M_p^2/\,|\mathbf{p}|^2} = 1. \tag{3.63}$$

Temos $u_g < 1$ e $u_{frente} = 1$, o que é consistente com a preservação da causalidade. Logo, a eletrodinâmica de Podolsky é estável e causal.

### 3.3.2 Análise da unitariedade

A análise da unitariedade está ligada a norma dos estados definidos no espaço de Hilbert. Para que uma teoria seja unitária, a norma de todos os estados deve ser positiva. Quando os estados tem norma negativa a teoria é não unitária e os estados são chamados de estados fantasmas. Para analisar a unitariedade da eletrodinâmica de Podolsky, faremos uso do método da saturação do propagador que consiste na contração tensorial entre as correntes $J_\nu$, $J^\alpha$ e a matriz do propagador escrita em cada um dos seus pólos envolvendo o cálculo do resíduo do propagador. A saturação do propagador [29] é dada por

$$SP = J^\nu \,\mathrm{Re}\,s\,[i\Delta_{\nu\alpha}]\,J^\alpha, \tag{3.64}$$

em que a corrente satisfaz a lei de conservação $\partial^\nu J_\nu = 0$. Considerando, o propagador (3.54), a saturação com as correntes será dada por

$$SP = iJ^\nu \mathrm{Res}\left[\frac{1}{\theta^2 p^2\left(p^2 - 1/\theta^2\right)}\left(g_{\nu\alpha} - \frac{p_\nu p_\alpha}{p^2}\right) + \xi\frac{p_\nu p_\alpha}{p^2}\right]J^\alpha, \tag{3.65}$$

que se reduz a

$$SP = i\mathrm{Res}\left[\frac{J^2}{\theta^2 p^2\left(p^2 - 1/\theta^2\right)}\right], \tag{3.66}$$

considerando a lei da conservação da 4-corrente, $\partial^\nu J_\nu = 0$ ou $p^\nu J_\nu = 0$.

Para o pólo $p^2 = 0$, que é o mesmo polo da teoria de Maxwell, o cálculo do resíduo fornece a saturação:

$$SP_{(p^2=0)} = i \left[ \frac{J^2}{\theta^2 \left(p^2 - 1/\theta^2\ \right)} \right]_{p^2=0} = -iJ^2, \tag{3.67}$$

$$SP_{(p^2=0)} = i \left( \mathbf{J}^2 - J_0^2 \right). \tag{3.68}$$

No pólo $p^2 = 0$, vale $p_0^2 = \mathbf{p}^2$. Da lei de conservação de corrente, $(p_0 J_0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{J})$, a eq. (3.68) fornece

$$SP_{(p^2=0)} = i \left( \mathbf{J}^2 - \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})^2}{p_0^2} \right) = \frac{i}{\mathbf{p}^2} \left( \mathbf{p}^2 \mathbf{J}^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})^2 \right), \tag{3.69}$$

$$SP_{(p^2=0)} = \frac{i}{|\mathbf{p}|^2} |\mathbf{p} \times \mathbf{J}|^2 > 0. \tag{3.70}$$

Logo a saturação no pólo $p^2 = 0$ é positiva, implicando que as excitações associadas com este modo propagante são unitárias.

Para o pólo $p^2 = 1/\theta^2$, o cálculo do resíduo é dado por

$$SP_{(p^2=1/\theta^2)} = iRes \left[ \frac{J^2}{\theta^2 p^2 \left(p^2 - 1/\theta^2\ \right)} \right]_{p^2=1/\theta^2} = iJ^2. \tag{3.71}$$

$$SP_{(p^2=1/\theta^2)} = -i \left( \mathbf{J}^2 - J_0^2 \right). \tag{3.72}$$

Sabendo que o pólo $p^2 = 1/\theta^2$ implica em $p_0^2 = 1/\theta^2 + \mathbf{p}^2$, e usando $p_0 J_0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{J}$, a eq. (3.72) pode ser reescrita na forma

$$SP_{(p^2=1/\theta^2)} = -i \left( \mathbf{J}^2 - \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})^2}{p_0^2} \right), \tag{3.73}$$

$$iRes \left[ \frac{1}{p^2} J^2 \right]_{p^2=1/\theta^2} = \frac{-i}{\mathbf{p}^2 + 1/\theta^2} \left( \mathbf{J}^2/\theta^2 + \mathbf{p}^2 \mathbf{J}^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})^2 \right), \tag{3.74}$$

$$SP = -\frac{i}{\mathbf{p}^2 + 1/\theta^2} \left( \frac{\mathbf{J}^2}{\theta^2} + |\mathbf{p} \times \mathbf{J}|^2 \right) < 0. \tag{3.75}$$

Logo, a saturação do propagador para o pólo $p^2 = 1/\theta^2$ é menor que zero, mostrando que as excitações advindas do polo $p^2 = 1/\theta^2$ tem norma negativa, violando a unitariedade. Esses estados com norma negativa (estados fantasmas) são típicos de teorias com derivadas de altas ordens.

## 3.4 Propagador de Feynman com o gauge generalizado

No intuito de calcular o propagador da teoria de Podolsky, reescrevemos a lagrangeana (3.1) na ausencia de fontes e na presença do termo de fixação de calibre,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{2} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^{\lambda}{}_{\beta} + \frac{1}{2\xi} \left[ \left(1 + \theta^2 \Box\right) \partial_\mu A^\mu \right]^2. \tag{3.76}$$

Do mesmo modo de como foi feito na seção anterior, temos que a lagrangeana na sua forma quadrática é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^{\nu} Q_{\mu\nu} A^{\mu}, \tag{3.77}$$

onde $Q_{\mu\nu}$ é o operador tensorial dado por

$$Q_{\mu\nu} = \Box \Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} \Box \left(1 + 2\theta^2 \Box + \theta^4 \Box^2\right) \Omega_{\mu\nu} + \theta^2 \Box^2 g_{\nu\mu} - \theta^2 \partial_\nu \partial_\mu \Box, \tag{3.78}$$

e que satisfaz à identidade

$$Q_{\mu\nu} \Delta^{\nu}_{\alpha} = g_{\mu\alpha}. \tag{3.79}$$

Onde $\Delta^{\nu}_{\alpha}$ é operador inverso de $Q_{\mu\nu}$. Lembrando que

$$g_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu}, \tag{3.80}$$

onde os projetores transversal e longitudinal estão dados, respectivamente, por

$$\Theta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \Omega_{\mu\nu}, \tag{3.81}$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu / \Box. \tag{3.82}$$

Podemos agora propor a seguinte forma para $\Delta^{\nu}_{\alpha}$, em termos dos projetores conhecidos,

$$\Delta^{\nu}_{\alpha} = a \Theta^{\nu}_{\alpha} + b \Omega^{\nu}_{\alpha}. \tag{3.83}$$

onde $a$ e $b$ são constantes a serem determinadas. Estes operadores satisfazem uma algebra tensorial fechada:

| | $\Theta^{\nu}_{\alpha}$ | $\Omega^{\nu}_{\alpha}$ |
|---|---|---|
| $\Theta_{\mu\nu}$ | $\Theta_{\mu\alpha}$ | 0 |
| $\Omega_{\mu\nu}$ | 0 | $\Omega_{\mu\alpha}$ |

Vemos que a álgebra para o gauge generalizado é a mesma que usando o gauge de Lorentz. Usando a identidade (3.79) obtemos os valores de $a$ e $b$, dados por:

$$a = \frac{1}{\Box \left(1 + \theta^2 \Box\right)}, \quad b = -\frac{\xi}{\Box \left(1 + 2\theta^2 \Box + \theta^4 \Box^2\right)}.$$

Obtido os valores para $a$ e $b$ e usando a expressão (3.83), o propagador tem a forma:

$$\Delta^{\nu}_{\alpha} = \frac{1}{\Box \left(1 + \theta^2 \Box\right)} \Theta^{\nu}_{\alpha} - \frac{\xi}{\Box \left(1 + 2\theta^2 \Box + \theta^4 \Box^2\right)} \Omega^{\nu}_{\alpha}, \tag{3.84}$$

podendo ser reescrita na forma

$$\Delta^{\nu\alpha} = \frac{1}{\Box \left(1 + \theta^2 \Box\right)} \left[ \Theta^{\nu\alpha} - \frac{\xi}{\left(1 + \theta^2 \Box\right)} \Omega^{\nu\alpha} \right], \tag{3.85}$$

em que no espaço dos momentos, o propagador de Feynman é dado por:

$$\langle A^{\nu} A^{\alpha} \rangle = -i \frac{1}{p^2 \left(1 - \theta^2 p^2\right)^2} \left[ \left(1 - \theta^2 p^2\right) g^{\nu\alpha} - \left(1 - \theta^2 p^2\right) \frac{p^{\nu} p^{\alpha}}{p^2} - \xi \frac{p^{\nu} p^{\alpha}}{p^2} \right]. \tag{3.86}$$

Podemos observar que as relações de dispersão não foram alteradas, o que é consistente com o entendimento que a escolha de calibre não modifica a física do problema. O propagador pode ser reescrito na forma

$$\langle A^{\nu} A^{\alpha} \rangle = i \left[ \frac{m^2}{p^2 \left( p^2 - m^2 \right)} g^{\nu\alpha} + \frac{p^{\nu} p^{\alpha}}{p^4} - \frac{p^{\nu} p^{\alpha}}{p^2 \left( p^2 - m^2 \right)} + \xi \frac{p^{\nu} p^{\alpha}}{p^4 \left( 1 - \theta^2 p^2 \right)^2} \right], \tag{3.87}$$

onde $\theta^2 = 1/m^2$. Vemos assim que a relação de dispersão é a mesma para ambos os gauges.

Para a análise da unitariedade, temos que quando fizermos a saturação com as correntes, obteremos os mesmo resultados para ambos os calibres considerados. Apesar do gauge modificado ser o mais apropriado para tratar os aspectos de quantização desta teoria, nada modifica os resultados de causalidade e unitariedade da teoria.

# Capítulo 4

# Eletrodinâmica de Maxwell com altas derivadas e violação da simetria de Lorentz

## 4.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos uma eletrodinâmica de Maxwell dotada de um termo de altas derivadas, de dimensão 6, com duas ordens derivativas adicionais, tal qual o termo de Podolsky, e contendo um tensor de raking 2, $D_{\beta\alpha}$, violador da simetria de Lorentz, dado por

$$D_{\beta\alpha}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}, \tag{4.1}$$

na qual o tensor $D_{\beta\alpha}$ é obrigatoriamente simétrico. Obviamente, existem outras contrações similares,

$$\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha} D_{\beta\alpha} = -D_{\sigma\alpha}\partial_\beta F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}. \tag{4.2}$$

Existe uma única contração tensorial que não está contemplada na forma (4.1), a saber:

$$D^{\rho\sigma} F^{\alpha\beta}\partial_\rho\partial_\sigma F_{\alpha\beta}, \tag{4.3}$$

cujas implicações não serão discutidas num primeiro momento.

Iniciaremos discutindo propriedades gerais da eletrodinâmica de Maxwell modificada pelo termo (4.1). Faremos o cálculo do propagador de Feynman e obteremos as relações de dispersão da teoria. As relações de dispersão são utilizados para analisar o conteúdo físico dos modos de propagação do sistema. O procedimento de cálculo do propagador é baseado na existência de uma álgebra fechada de projetores, definidos em cima dos coeficientes de violação de Lorentz de cada setor. Seguiremos analisando alguns setores desta teoria, na busca de configurações do tensor de fundo que proprocionem teorias físicamente consistentes.

## 4.2 Eletrodinâmica de Maxwell modificada por termo de altas derivadas

O passo inicial nesta investigação consiste em analisar a eletrodinâmica de Maxwell pelo termo (4.1), ou seja,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \eta^2 D_{\beta\alpha}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}. \tag{4.4}$$

Uma pergunta pertinente é se o termo de violaçao de Lorentz proposto, $\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}D_{\beta\alpha}$, contém um setor que é equivalente ao termo de Podolsky ou não. Sabemos que o termo de Podolsky equivale a

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\lambda F^\lambda_{\ \beta} = \partial_\alpha F^{\alpha 0}\partial_\lambda F^\lambda_{\ 0} - \partial_\alpha F^{\alpha i}\partial_\lambda F^{\lambda i}. \tag{4.5}$$

No caso em que o tensor $D_{\beta\alpha}$ tem apenas as componentes $D_{00}$ e $D_{ii}$, temos:

$$D_{\beta\alpha}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha} = D_{00}\partial_\sigma F^{\sigma 0}\partial_\lambda F^{\lambda 0} + D_{ii}\partial_\sigma F^{\sigma i}\partial_\lambda F^{\lambda i}, \tag{4.6}$$

explicitando as componente do tensor $D_{ii}$

$$\begin{aligned}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}\ D_{\beta\alpha} &= D_{00}\partial_\sigma F^{\sigma 0}\partial_\lambda F^{\lambda 0} + D_{11}\partial_\sigma F^{\sigma 1}\partial_\lambda F^{\lambda 1} \\ &\quad + D_{22}\partial_\sigma F^{\sigma 2}\partial_\lambda F^{\lambda 2} + D_{33}\partial_\sigma F^{\sigma 3}\partial_\lambda F^{\lambda 3}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Tal termo é gerado a partir do traço não nulo do tensor $D_{\beta\alpha}$. Se o tensor $D_{\beta\alpha}$ contém componentes na diagonal diferente de zero na forma

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = -D_{00}, \tag{4.8}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}\ D_{\beta\alpha} &= D_{00}[\partial_\sigma F^{\sigma 0}\partial_\lambda F^{\lambda}{}_{0} - \partial_\sigma F^{\sigma 1}\partial_\lambda F^{\lambda 1} \\ &\quad - \partial_\sigma F^{\sigma 2}\partial_\lambda F^{\lambda 2} - \partial_\sigma F^{\sigma 3}\partial_\lambda F^{\lambda 3}], \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}\ D_{\beta\alpha} = D_{00}(\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\lambda F^\lambda_{\ \beta}). \tag{4.10}$$

Neste caso, o traço do tensor $D_{\beta\alpha}$ é

$$Tr\,(D_{\beta\alpha}) = D_{00} - D_{ii} = D_{00} - (D_{11} + D_{22} + D_{33}), \tag{4.11}$$

$$Tr\,(D_{\beta\alpha}) = 4D_{00}. \tag{4.12}$$

Vemos que, para esta configuração particular, o traço do tensor $D_{\beta\alpha}$ está associado ao termo de Podolsky na lagrangeana. Sabemos, contudo, que o traço pode ser definido para configurações genéricas em que não vale a condição (4.8). Neste caso, a princípio o termo do traço perde sua identificação com a estrutura de Podolsky. Outra forma de discutir esta possível equivalência é definindo o tensor $\tilde{D}_{\beta\alpha}$ sem traço,

$$\tilde{D}_{\beta\alpha} = D_{\beta\alpha} - \frac{1}{4}g_{\beta\alpha}Tr(D_{\mu\nu}) = D_{\beta\alpha} - g_{\beta\alpha}D_{00}, \tag{4.13}$$

que implica em

$$\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}\tilde{D}_{\beta\alpha} = \partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}\ D_{\beta\alpha} - \frac{1}{4}(\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda}{}_{\beta})Tr(D_{\mu\nu}). \tag{4.14}$$

Vemos assim que o termo de Podolsky aparece realmente associado ao traço do tensor $D_{\mu\nu}$, em que quando comparado com a expressão (4.12) temos que

$$\frac{1}{4}Tr(D_{\mu\nu}) = D_{00}, \tag{4.15}$$

que desempenha o papel da massa de Podolsky. Deste modo, surge alguns caminhos para trabalhar a inclusão do termo de VSL em contextos de altas derivadas.

Uma opção de abordagem seria discutir como a teoria de Podolsky é modificada pelo termo de VSL, propondo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{2}\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\lambda F^{\lambda}_{\ \beta} + \eta^2\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}\tilde{D}_{\beta\alpha}, \tag{4.16}$$

onde $\tilde{D}_{\beta\alpha}$ representa a versão sem traço do tensor, ou seja, $Tr\left(\tilde{D}_{\beta\alpha}\right) = 0$, a fim de evitar a presença redundante do termo de Podolsky no termo de VLS.

Outra opção formal seria trabalhar com a lagrangeana (4.4), mantendo o traço não-nulo do tensor a fim de contemplar a presença do termo de Podolsky.

A terceira opção seria investigar a lagrangeana (4.4), considerando $Tr\left(D_{\beta\alpha}\right) = 0$. Neste caso, estaríamos examinando uma eletrodinâmica de altas derivadas que não contém o termo de Podolsky,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \eta^2\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}\tilde{D}_{\beta\alpha}. \tag{4.17}$$

No intuito de colher mais informações sobre o termo de altas derivadas contido em todas estas opções pode ser escrito em componentes, podemos classificá-lo perante as simetrias discretas. Para isso o escrevemos em componentes:

$$\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}D_{\beta\alpha} = \partial_\sigma F^{\sigma 0}\partial_\lambda F^{\lambda 0}D_{00} + 2\partial_\sigma F^{\sigma 0}\partial_\lambda F^{\lambda i}D_{0i} + \partial_\sigma F^{\sigma i}\partial_\lambda F^{\lambda j}D_{ij}, \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}D_{\beta\alpha} &= \partial_a F^{a0}\partial_b F^{b0}D_{00} + 2\partial_a F^{a0}\partial_b F^{bi}D_{0i}\\ &\quad +2\partial_a F^{a0}\partial_0 F^{0i}D_{0i} + \partial_0 F^{0i}\partial_0 F^{0j}D_{ij}\\ &\quad +2\partial_0 F^{0i}\partial_b F^{bj}D_{ij} + \partial_a F^{ai}\partial_b F^{bj}D_{ij},\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde a última linha equivale à soma de Einstein sobre $\partial_\sigma F^{\sigma i}\partial_\lambda F^{\lambda j}D_{ij}$. Lembrando que $F^{a0} = E^a, F^{bj} = -\epsilon_{bjl}B^l$, temos em termos dos campos elétrico e magnético:

$$\begin{aligned}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}D_{\beta\alpha} &= \partial_a E^a\partial_b E^b D_{00} - 2\epsilon_{bil}\partial_a E^a\partial_b B^l D_{0i}\\ &\quad -2\partial_a E^a\partial_0 E^i D_{0i} + \partial_0 E^i\partial_0 E^j D_{ij}\\ &\quad +2\epsilon_{bjl}\partial_0 E^i\partial_b B^l D_{ij} + \epsilon_{bjl}\epsilon_{aim}\partial_a B^m\partial_b B^l D_{ij}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

De posse desta última expressão, podemos fazer a classificaçao destes coeficientes sob as transformações discrestas. Sob a transformação de conjugação de carga ($C$), sabemos que os campos elétrico e magnético revertem seus sinais: $\mathbf{E} \to -\mathbf{E}$ e $\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$, enquanto as derivadas sobre o espaço-tempo não são alteradas: $\partial_\mu \to \partial_\mu$. Deste modo, todos os termos que é fácil perceber que a expressão (4.20) não muda de sinal perante $C$, sendo $C$-pares os coeficientes $D_{00}, D_{0i}, D_{ij}$.

Sob paridade ($P$), os campos elétrico e magnético se transformam como $\mathbf{E} \to -\mathbf{E}$ e $\mathbf{B} \to \mathbf{B}$, e $\partial_a \to -\partial_a, \partial_0 \to \partial_0$. Desta forma, vemos que os termos proporcionais a $D_{0i}$ mudam de sinal perante $P$. Assim, $D_{0i}$ é paridade-ímpar, enquanto $D_{00}$ e $D_{ij}$ são paridade-par.

Já sob reversão temporal ($T$), o campo magnético reverte o sinal $\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$, enquanto o campo elétrico mantém-se invariante, $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$. Além disso, $\partial_a \to \partial_a, \partial_0 \to -\partial_0$. Aplicando estas transformações na expressão (4.20), percebemos novamente que os termos proporcionais a $D_{0i}$ mudam de sinal perante $T$. Assim, $D_{0i}$ é $T$-ímpar, enquanto $D_{00}$ e $D_{ij}$ são $T$-par.

O comportamento dos coeficientes do tensor $D_{\beta\alpha}$ sob CPT está sumarizado na Tabela 1:

| | $C$ | $P$ | $T$ | $CPT$ |
|---|---|---|---|---|
| $D_{00}$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $D_{i0}$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $D_{0i}$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $D_{ij}$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Uma questão interessante é saber se o termo $\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}D_{\beta\alpha}$ está contido ou não no Modelo Padrão Estendido não-mínimo estudado na Ref. [16]. Como estamos analisando um termo $CPT$-par de $d=6$, cabe avaliar apenas a modificação que advém da equação (1.21) com dimensão de massa $d=6$, a saber

$$\left(\hat{k}_F\right)^{\kappa\lambda\mu\nu} = \left(k_F^{(4)}\right)^{\kappa\lambda\mu\nu} + \left(k_F^{(6)}\right)^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1\alpha_2}\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}. \tag{4.21}$$

O setor não birrefringente desta teoria é parametrizado na forma,

$$\left(\hat{k}_F\right)^{\kappa\lambda\mu\nu} \to \frac{1}{2}\left[g^{\kappa\mu}\left(\hat{c}_F\right)^{\lambda\nu} - g^{\lambda\mu}\left(\hat{c}_F\right)^{\kappa\nu} + g^{\lambda\nu}\left(\hat{c}_F\right)^{\kappa\mu} - g^{\kappa\nu}\left(\hat{c}_F\right)^{\lambda\mu}\right]. \tag{4.22}$$

O termo de dimensão 6 da estrutura (4.21) é dado por

$$F^{\sigma\beta}F^{\lambda\rho}\left(\hat{k}_F\right)_{\sigma\beta\lambda\rho} = F^{\sigma\beta}F^{\lambda\rho}\left(k_F\right)_{\sigma\beta\lambda\rho\alpha_1\alpha_2}\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}, \tag{4.23}$$

que em sua forma não birrefringente,

$$\left(\hat{k}_F\right)_{\sigma\beta\lambda\rho} \to g_{\sigma\lambda}\hat{C}_{\beta\rho} = g_{\sigma\lambda}C_{\beta\rho\alpha_1\alpha_2}\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}, \tag{4.24}$$

leva a

$$F^{\sigma\beta}F^{\lambda\rho}\left(\hat{k}_F\right)_{\sigma\beta\lambda\rho} \to F^{\sigma\beta}F^{\lambda\rho}g_{\sigma\lambda}C_{\beta\rho\alpha_1\alpha_2}\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2} = F^{\sigma\beta}F_\sigma{}^\rho C_{\beta\rho\alpha_1\alpha_2}\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}. \tag{4.25}$$

Podemos mostrar que o mesmo conduz à seguinte forma bilinear:

$$\begin{aligned} F^{\sigma\beta}F_{\sigma}{}^{\rho}C_{\beta\rho\alpha_1\alpha_2}\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2} &= -A_\nu\left[\left(\Box C^{\nu\mu}{}_{\alpha_1\alpha_2} - \partial^\beta\partial^\nu C^{\mu}{}_{\beta\alpha_1\alpha_2} + \right.\right. \\ & \left.\left. -\partial^\mu\partial^\rho C^{\nu}{}_{\rho\alpha_1\alpha_2} + g^{\nu\mu}\partial^\beta\partial^\rho C_{\beta\rho\alpha_1\alpha_2}\right)\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}\right]A_\mu \end{aligned} \tag{4.26}$$

Considerando-se,

$$C^{\nu\mu}{}_{\alpha_1\alpha_2} = C^{\nu\mu}g_{\alpha_1\alpha_2}, \tag{4.27}$$

resulta:

$$F^{\sigma\beta}F_{\sigma}{}^{\rho}C_{\beta\rho\alpha_1\alpha_2}\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2} = -A_\nu\left[\left(\Box^2 C^{\nu\mu} - \partial^\beta\partial^\nu\Box C^{\mu}{}_{\beta} - \partial^\mu\partial^\rho\Box C^{\nu}{}_{\rho} + g^{\nu\mu}\partial^\beta\partial^\rho\Box C_{\beta\rho}\right)\right]A_\mu. \tag{4.28}$$

Esta estrutura difere da forma bilinear (4.33) pelo último termo. Vemos assim que o termo $\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}D_{\beta\alpha}$ não está contido no MPE não mínimo da Ref. [16].

## 4.3 O propagador de Feynman da eletrodinâmica com altas derivadas

Em prosseguimento a nossa proposta, vamos considerar a lagrangeana (4.16), que é a forma mais geral dos modelos acima propostos. Neste caso, temos a lagrangeana de Podolsky modificada:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{2}\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\lambda F^{\lambda}_{\beta} + \eta^2\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda} \\ & +\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Os parâmetros $\theta, \eta$ e $D_{\beta\alpha}$ têm dimensão de comprimento, ou

$$\theta = \eta = \text{massa}^{-1}, \tag{4.30}$$

enquanto o tensor $D_{\beta\alpha}$ é adimensional, ou seja, $D_{\beta\alpha} = (massa)^0$.

Como já foi dito no capítulo anterior, o primeiro passo para calcular o propagador de Feynman é escrever a lagrangeana na forma bilinear,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^\nu O_{\mu\nu}A^\mu, \tag{4.31}$$

onde é $O_{\mu\nu}$ é o operador tensorial que caracteriza este modelo. A lagrangeana (4.29) é lida como,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}A^\nu\left[\Box\Theta_{\mu\nu} + \theta^2\left[\Box^2\ \Theta_{\nu\mu}\right]\ -\frac{1}{\xi}\Box\Omega_{\mu\nu}+\right]A^\mu + \\ & \frac{1}{2}A^\nu\left[2\eta^2\Box^2 D_{\nu\mu} - 2\eta^2\Box\partial_\mu\partial^\alpha D_{\nu\alpha} - 2\eta^2\Box\partial_\nu\partial^\sigma D_{\sigma\mu} + 2\eta^2\partial_\nu\partial_\mu\partial^\sigma\partial^\alpha D_{\sigma\alpha}\right]A^\mu, \end{aligned} \tag{4.32}$$

permitindo escrever

$$
\begin{aligned}
O_{\mu\nu} = \Box\Theta_{\mu\nu} + \theta^2 \left[\Box^2\ \Theta_{\nu\mu}\right] \ -\frac{1}{\xi}\Box\Omega_{\mu\nu} + \\
2\eta^2\Box^2 D_{\nu\mu} - 2\eta^2\Box\partial_\mu\partial^\alpha D_{\nu\alpha} - 2\eta^2\Box\partial_\nu\partial^\sigma D_{\sigma\mu} + 2\eta^2\partial_\nu\partial_\mu\partial^\sigma\partial^\alpha D_{\sigma\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

onde foram usados os projetores, longitudinal e transversal, $\Omega_{\beta\lambda} = \partial_\beta\partial_\lambda/\Box$, $\Theta_{\beta\lambda} = g_{\beta\lambda} - \Omega_{\beta\lambda}$, respectivamente.

Para calcular explicitamente o propagador de Feynman desta teoria, podemos empregar a mesma parametrizaçao apresentada no Capítulo 3 para obter o propagador da eletrodinâmica CPT-par, modificada por um tensor simétrico, responsável pela violação da simetria de Lorentz. Sabendo que, para $D_{\nu\mu}$ simétrico, propomos a seguinte parametrização:

$$
D_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\left(C_\nu B_\mu + C_\mu B_\nu\right), \tag{4.34}
$$

podemos escrever

$$
\begin{aligned}
O_{\mu\nu} = \left(\Box + \theta^2\Box^2\ \right)\Theta_{\mu\nu}\ + \left(2\eta^2\Box\rho\kappa - \frac{1}{\xi}\Box\right)\Omega_{\mu\nu} + \eta^2\Box^2 C_\nu B_\mu + \\
+\eta^2\Box^2 C_\mu B_\nu - \eta^2\Box\kappa C_\nu\partial_\mu - \eta^2\Box\kappa C_\mu\partial_\nu - \eta^2\Box\rho B_\nu\partial_\mu - \eta^2\Box\rho B_\mu\partial_\nu,
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

onde foi feito

$$
\kappa = B_\alpha\partial^\alpha,\ \ \rho = C_\alpha\partial^\alpha. \tag{4.36}
$$

O cálculo do propagador consiste na inversão algébrico-tensorial do operador $O_{\mu\nu}$, composto pelos seguintes projetores tensoriais:

$$
\Theta_{\mu\nu}, \Omega_{\mu\nu}, B_\nu\partial_\mu, B_\mu\partial_\nu, C_\mu B_\nu, C_\nu B_\mu, C_\mu\partial_\nu, C_\nu\partial_\mu. \tag{4.37}
$$

Podemos propor a seguinte forma para a inversa $O_{\mu\nu}$ :

$$
\begin{aligned}
\Delta^\nu_\alpha = a\Theta^\nu_\alpha + b\Omega^\nu_\alpha + cB_\alpha\partial^\nu + dC^\nu B_\alpha + \\
+eC^\nu\partial_\alpha + fB^\nu\partial_\alpha + gC_\alpha B^\nu + hC_\alpha\partial^\nu,
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

que satisfaz à identidade

$$
\begin{aligned}
O_{\mu\nu}\Delta^\nu{}_\alpha = g_{\mu\alpha}, \\
O_{\mu\nu}\Delta^\nu{}_\alpha = \Theta_{\mu\alpha} + \Omega_{\mu\alpha},
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

sendo o propagador de Feynman definido como

$$
\langle 0\left|T(A_\nu\left(x\right)A_\alpha\left(y\right))\right|0\rangle = i\Delta_{\nu\alpha}(x-y). \tag{4.40}
$$

Ao realizar todas as contrações obtidas atraves da relação (4.39) , surgem dois novos elementos,

$$
B_\mu B_\alpha, C_\mu C_\alpha,
$$

não considerados inicialmente na proposta (4.38), de modo que precisam ser incluídos para fechar a álgebra e tornar $O_{\mu\nu}$ inversível. Assim, propomos uma nova inversa incluindo esses dois termos, dada por

$$\begin{aligned}\Delta_\alpha^\nu &= a\Theta_\alpha^\nu + b\Omega_\alpha^\nu + cB_\alpha\partial^\nu + dC^\nu B_\alpha + eC^\nu\partial_\alpha + \\ &+ fB^\nu\partial_\alpha + gC_\alpha B^\nu + hC_\alpha\partial^\nu + iB^\nu B_\alpha + jC^\nu C_\alpha. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Ressaltamos que os projetores tensoriais contidos em (4.41) satisfazem uma algebra fechada, exibida a seguir:

| | $\Theta_\alpha^\nu$ | $\Omega_\alpha^\nu$ | $B_\alpha\partial^\nu$ | $C^\nu B_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $\Theta_{\mu\nu}$ | $\Theta_{\mu\alpha}$ | $0$ | $0$ | $C_\mu B_\alpha - \frac{\rho}{\Box}B_\alpha\partial_\mu$ |
| $\Omega_{\mu\nu}$ | $0$ | $\Omega_{\mu\alpha}$ | $B_\alpha\partial_\mu$ | $\frac{\rho}{\Box}B_\alpha\partial_\mu$ |
| $B_\nu\partial_\mu$ | $B_\alpha\partial_\mu - \kappa\Omega_{\mu\alpha}$ | $\kappa\Omega_{\mu\alpha}$ | $\kappa B_\alpha\partial_\mu$ | $(C\cdot B)\,B_\alpha\partial_\mu$ |
| $C_\mu B_\nu$ | $C_\mu B_\alpha - \frac{\kappa}{\Box}C_\mu\partial_\alpha$ | $\frac{\kappa}{\Box}C_\mu\partial_\alpha$ | $\kappa C_\mu B_\alpha$ | $(C\cdot B)\,C_\mu B_\alpha$ |
| $C_\mu\partial_\nu$ | $0$ | $C_\mu\partial_\alpha$ | $\Box C_\mu B_\alpha$ | $\rho C_\mu B_\alpha$ |
| $B_\mu\partial_\nu$ | $0$ | $B_\mu\partial_\alpha$ | $\Box B_\mu B_\alpha$ | $\rho B_\mu B_\alpha$ |
| $C_\nu B_\mu$ | $C_\alpha B_\mu - \frac{\rho}{\Box}B_\mu\partial_\alpha$ | $\frac{\rho}{\Box}B_\mu\partial_\alpha$ | $\rho B_\mu B_\alpha$ | $C^2 B_\mu B_\alpha$ |
| $C_\nu\partial_\mu$ | $C_\alpha\partial_\mu - \rho\Omega_{\mu\alpha}$ | $\rho\Omega_{\mu\alpha}$ | $\rho B_\alpha\partial_\mu$ | $C^2 B_\alpha\partial_\mu$ |
| $B_\mu B_\nu$ | $B_\mu B_\alpha - \frac{\eta}{\Box}B_\mu\partial_\alpha$ | $\frac{\kappa}{\Box}B_\mu\partial_\alpha$ | $\kappa B_\mu B_\alpha$ | $(C\cdot B)\,B_\mu B_\alpha$ |
| $C_\mu C_\nu$ | $C_\mu C_\alpha - \frac{\rho}{\Box}C_\mu\partial_\alpha$ | $\frac{\rho}{\Box}C_\mu\partial_\alpha$ | $\rho C_\mu B_\alpha$ | $C^2 C_\mu B_\alpha$ |

Tabela 4.1: Algebra fechada dos projetores tensoriais (part 1).

| | $C^\nu\partial_\alpha$ | $B^\nu\partial_\alpha$ | $C_\alpha B^\nu$ |
|---|---|---|---|
| $\Theta_{\mu\nu}$ | $C_\mu\partial_\alpha - \rho\Omega_{\mu\alpha}$ | $B_\mu\partial_\alpha - \kappa\Omega_{\mu\alpha}$ | $C_\alpha B_\mu - \frac{\kappa}{\Box}C_\alpha\partial_\mu$ |
| $\Omega_{\mu\nu}$ | $\rho\Omega_{\mu\alpha}$ | $\kappa\Omega_{\mu\alpha}$ | $\frac{\kappa}{\Box}C_\alpha\partial_\mu$ |
| $B_\nu\partial_\mu$ | $\Box\,(C\cdot B)\,\Omega_{\mu\alpha}$ | $\Box B^2\Omega_{\mu\alpha}$ | $B^2 C_\alpha\partial_\mu$ |
| $C_\mu B_\nu$ | $(C\cdot B)\,C_\mu\partial_\alpha$ | $B^2 C_\mu\partial_\alpha$ | $B^2 C_\mu C_\alpha$ |
| $C_\mu\partial_\nu$ | $\rho C_\mu\partial_\alpha$ | $\kappa C_\mu\partial_\alpha$ | $\kappa C_\mu C_\alpha$ |
| $B_\mu\partial_\nu$ | $\rho B_\mu\partial_\alpha$ | $\kappa B_\mu\partial_\alpha$ | $\kappa C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\nu B_\mu$ | $C^2 B_\mu\partial_\alpha$ | $(C\cdot B)\,B_\mu\partial_\alpha$ | $(C\cdot B)\,C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\nu\partial_\mu$ | $C^2\Box\Omega_{\mu\alpha}$ | $\Box\,(C\cdot B)\,\Omega_{\mu\alpha}$ | $(C\cdot B)\,C_\alpha\partial_\mu$ |
| $B_\mu B_\nu$ | $(C\cdot B)\,B_\mu\partial_\alpha$ | $B^2 B_\mu\partial_\alpha$ | $B^2 C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\mu C_\nu$ | $C^2 C_\mu\partial_\alpha$ | $(C\cdot B)\,C_\mu\partial_\alpha$ | $(C\cdot B)\,C_\mu C_\alpha$ |

Tabela 4.2: Algebra fechada dos projetores tensoriais (part 2).

| | $C_\alpha \partial^\nu$ | $B^\nu B_\alpha$ | $C^\nu C_\alpha$ |
|---|---|---|---|
| $\Theta_{\mu\nu}$ | $0$ | $B_\mu B_\alpha - \frac{\kappa}{\Box} B_\alpha \partial_\mu$ | $C_\mu C_\alpha - \frac{\rho}{\Box} C_\alpha \partial_\mu$ |
| $\Omega_{\mu\nu}$ | $C_\alpha \partial_\mu$ | $\frac{\kappa}{\Box} B_\alpha \partial_\mu$ | $\frac{\rho}{\Box} C_\alpha \partial_\mu$ |
| $B_\nu \partial_\mu$ | $\kappa C_\alpha \partial_\mu$ | $B^2 B_\alpha \partial_\mu$ | $(C \cdot B)\, C_\alpha \partial_\mu$ |
| $C_\mu B_\nu$ | $\kappa C_\mu C_\alpha$ | $B^2 C_\mu B_\alpha$ | $(C \cdot B)\, C_\mu C_\alpha$ |
| $C_\mu \partial_\nu$ | $\Box C_\mu C_\alpha$ | $\kappa C_\mu B_\alpha$ | $\rho C_\mu C_\alpha$ |
| $B_\mu \partial_\nu$ | $\Box C_\alpha B_\mu$ | $\kappa B_\mu B_\alpha$ | $\rho C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\nu B_\mu$ | $\rho C_\alpha B_\mu$ | $(C \cdot B)\, B_\mu B_\alpha$ | $C^2 C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\nu \partial_\mu$ | $\rho C_\alpha \partial_\mu$ | $(C \cdot B)\, B_\alpha \partial_\mu$ | $C^2 C_\alpha \partial_\mu$ |
| $B_\mu B_\nu$ | $\kappa C_\alpha B_\mu$ | $B^2 B_\mu B_\alpha$ | $(C \cdot B)\, C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\mu C_\nu$ | $\rho C_\mu C_\alpha$ | $(C \cdot B)\, C_\mu B_\alpha$ | $C^2 C_\mu C_\alpha$ |

Tabela 4.3: Algebra fechada dos projetores tensoriais (part 3).

Uma vez a álgebra fechada, daremos continuidade ao cálculo do propagador. Substituindo a expressão (4.41) na Eq.(4.39), obtemos um sistema de 10 equações para os 10 coeficientes a serem determinados. O sistema de 10 equações se encontra no apêndice B.

A solução deste sistema fornece:

$$a = \frac{1}{\Box \left(1+\theta^2 \Box\right)}, c = f = \frac{\kappa \eta^4 \left(\Box C^2 - \rho^2\right) - \eta^2 \rho \Pi}{\Gamma \Box \left(1+\theta^2 \Box\right)}, \tag{4.42}$$

$$b = -\frac{\xi}{\Box} + \frac{\eta^2 (-\eta^2 \rho^2 \left(\Box B^2 - \kappa^2\right) - \eta^2 \kappa^2 \left(\Box C^2 - \rho^2\right) + 2\rho\kappa \Pi)}{\Gamma \Box \left(1+\theta^2 \Box\right)}, \tag{4.43}$$

$$d = g = \frac{\eta^2 \Pi}{\left(1+\theta^2 \Box\right) \Gamma}, \;\; e = h = \eta^2 \frac{\left[\eta^2 \rho \left(\Box B^2 - \kappa^2\right) - \Pi \kappa\right]}{\Gamma \Box \left(1+\theta^2 \Box\right)}, \tag{4.44}$$

$$I = -\frac{\eta^4 \left(\Box C^2 - \rho^2\right)}{\Gamma \left(1+\theta^2 \Box\right)}, \;\; j = -\frac{\eta^4 \left(\Box B^2 - \kappa^2\right)}{\Gamma \left(1+\theta^2 \Box\right)}. \tag{4.45}$$

onde valem as definições:

$$\Gamma = \left[\eta^2 \left(\Box C^2 - \rho^2\right) \eta^2 \left(\Box B^2 - \kappa^2\right) - \Pi^2\right], \tag{4.46}$$

$$\Pi = \left(1 + \theta^2 \Box + \eta^2 \Box \left(C \cdot B\right) - \eta^2 \rho \kappa\right), \tag{4.47}$$

Substituindo todos os valores para $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$, o operador (4.41) assume a forma

$$\begin{aligned} \Delta^\nu_\alpha = \frac{1}{\Box \left(1+\theta^2 \Box\right) \Gamma} & \left[\Gamma \Theta^\nu_\alpha + \left(-\xi \left(1+\theta^2 \Box\right) \Gamma + b'\right) \Omega^\nu_\alpha + F \left(B_\alpha \partial^\nu + B^\nu \partial_\alpha\right) + \right. \\ & + \eta^2 \Pi \Box \left(C^\nu B_\alpha + C_\alpha B^\nu\right) + H \left(C^\nu \partial_\alpha + C_\alpha \partial^\nu\right) + \\ & \left. - \eta^4 \left(\Box C^2 - \rho^2\right) \Box \, B^\nu B_\alpha - \eta^4 \left(\Box B^2 - \kappa^2\right) \Box C^\nu C_\alpha \right]. \end{aligned} \tag{4.48}$$

O propagador de Feynman do campo de gauge no espaço dos momentos é definido como

$$\langle A_\nu A_\alpha\rangle = -\frac{i}{p^2\left(1-\theta^2 p^2\ \right)\Gamma\left(p\right)}\left[\Gamma\left(p\right)\Theta_{\nu\alpha} + \left(b' - \xi\left(1-\theta^2 p^2\ \right)\Gamma\right)\Omega_{\nu\alpha} + \right.$$
$$-2iF\left(p\right)\kappa_{\nu\alpha} - 2\eta^2 p^2 \Pi\left(p\right) D_{\nu\alpha} - 2iH\left(p\right)\rho_{\nu\alpha} +$$
$$\left.\eta^4 p^2\ \left(\left(C\cdot p\right)^2 - p^2 C^2\right) B_\nu B_\alpha + \eta^4 p^2\left(\left(B\cdot p\right)^2 - p^2 B^2\right) C_\nu C_\alpha\right], \tag{4.49}$$

onde

$$2\kappa_{\nu\alpha} = B_\nu p_\alpha + B_\alpha p_\nu,$$
$$2D_{\nu\alpha} = C_\nu B_\alpha + C_\alpha B_\nu, \tag{4.50}$$
$$2\rho_{\nu\alpha} = C_\nu p_\alpha + C_\alpha p_\nu, \tag{4.51}$$
$$b' = \eta^2(\eta^2\left(C\cdot p\right)^2\left(\left(B\cdot p\right)^2 - p^2 B^2\right) + \tag{4.52}$$
$$+\eta^2\left(B\cdot p\right)^2\left(\left(C\cdot p\right)^2 - p^2 C^2\right) - 2\left(C\cdot p\right)\left(B\cdot p\right)\Pi(p), \tag{4.53}$$
$$F\left(p\right) = i\eta^2\Pi\left(p\right)\left(C\cdot p\right) - i\eta^4\left(B\cdot p\right)\left(\left(C\cdot p\right)^2 - p^2 C^2\right), \tag{4.54}$$
$$H\left(p\right) = i\eta^2\left(B\cdot p\right)\Pi - i\eta^4\left(C\cdot p\right)\left(\left(B\cdot p\right)^2 - p^2 B^2\right), \tag{4.55}$$

$$\Gamma(p) = \left[\eta^2\left(\left(C\cdot p\right)^2 - p^2 C^2\right)\eta^2\left(\left(B\cdot p\right)^2 - p^2 B^2\right) - \Pi^2\right], \tag{4.56}$$
$$\Pi(p) = \left(1 - 2\theta^2 p^2 - \eta^2 p^2\left(C\cdot B\right) + \eta^2\left(C\cdot p\right)\left(B\cdot p\right)\ \right), \tag{4.57}$$

em que $[F] = (massa)^{-1}$ e $[\Gamma] = [\Pi] = (massa)^0$.

Na ausência do termo de violaçao de Lorentz, a lagrangeana (4.29) recupera a forma da lagrangeana de Podolsky pura, dada na Eq. (3.1). Nesta situação, por consistência, o propagador (4.48) deve reproduzir o propagador (3.52). No limite em que $\eta \to 0, D_{\mu\nu} \to 0$, devemos fazer $\eta = 0, B = 0, C = 0$, de modo que:

$$\lim_{\eta\to 0}\Pi = \left(1+\theta^2\Box\right), \tag{4.58}$$
$$\lim_{\eta\to 0}\Gamma = -\lim_{\eta\to 0}\Pi^2 = -\left(1+\theta^2\Box\right)^2, \tag{4.59}$$
$$\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\Box\left(1+\theta^2\Box\ \right)\Gamma} = -\frac{1}{\Box\left(1+\theta^2\Box\ \right)^3}, \tag{4.60}$$
$$\lim_{\eta\to 0} b' = 0, \quad \lim_{\eta\to 0} F = 0, \quad \lim_{\eta\to 0} H = 0. \tag{4.61}$$

Implementando estes limites na Eq. (4.48), encontramos:

$$\lim_{\eta\to 0}\Delta^\nu_\alpha = \frac{\Theta^\nu_\alpha}{\Box\left(1+\theta^2\Box\ \right)} - \frac{\xi}{\Box}\Omega^\nu_\alpha, \tag{4.62}$$

que equivale ao propagador de Podolsky (3.52), como esperado.

O propagador de Feynman do campo de gauge no espaço dos momentos para a configuração de $\theta = 0$, é definido como

$$
\begin{aligned}
\langle A_\nu A_\alpha \rangle = -\frac{i}{p^2 \Gamma(p)} [\Gamma(p) \Theta_{\nu\alpha} + (b' - \xi\Gamma) \Omega_{\nu\alpha} + \\
-2iF(p) \kappa_{\nu\alpha} - 2\eta^2 p^2 \Pi(p) D_{\nu\alpha} - 2iH(p) \rho_{\nu\alpha} + \\
\eta^4 p^2 \left( (C \cdot p)^2 - p^2 C^2 \right) B_\nu B_\alpha + \eta^4 p^2 \left( (B \cdot p)^2 - p^2 B^2 \right) C_\nu C_\alpha \Big],
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

onde

$$
2\kappa_{\nu\alpha} = B_\nu p_\alpha + B_\alpha p_\nu,
$$

$$
2D_{\nu\alpha} = C_\nu B_\alpha + C_\alpha B_\nu, \tag{4.64}
$$

$$
2\rho_{\nu\alpha} = C_\nu p_\alpha + C_\alpha p_\nu, \tag{4.65}
$$

$$
\begin{aligned}
b' = \eta^2 (\eta^2 (C \cdot p)^2 \left( (B \cdot p)^2 - p^2 B^2 \right) + \\
+ \eta^2 (B \cdot p)^2 \left( (C \cdot p)^2 - p^2 C^2 \right) - 2 (C \cdot p)(B \cdot p) \Pi(p),
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

$$
F(p) = i\eta^2 \Pi(p) (C \cdot p) - i\eta^4 (B \cdot p) \left( (C \cdot p)^2 - p^2 C^2 \right), \tag{4.67}
$$

$$
H(p) = i\eta^2 (B \cdot p) \Pi - i\eta^4 (C \cdot p) \left( (B \cdot p)^2 - p^2 B^2 \right), \tag{4.68}
$$

$$
\Gamma(p) = \left[ \eta^2 \left( (C \cdot p)^2 - p^2 C^2 \right) \eta^2 \left( (B \cdot p)^2 - p^2 B^2 \right) - \Pi^2 \right], \tag{4.69}
$$

$$
\Pi_{\theta=0}(p) = \left( 1 - \eta^2 p^2 (C \cdot B) + \eta^2 (C \cdot p)(B \cdot p) \right). \tag{4.70}
$$

## 4.4 Relações de dispersão

As relações de dispersão desta teoria são lidas a partir dos polos do propagador de Feynman (4.48):

$$
\Box \left( 1 + \theta^2 \Box \right) = 0, \tag{4.71}
$$

$$
\left[ \eta^2 \left( \Box C^2 - \rho^2 \right) \eta^2 \left( \Box B^2 - \kappa^2 \right) - \left( 1 + \theta^2 \Box + \eta^2 \Box (C \cdot B) - \eta^2 \rho\kappa \right)^2 \right] = 0. \tag{4.72}
$$

No espaço dos momentos são reescritas como

$$
p^2 \left( 1 - \theta^2 p^2 \right) = 0, \tag{4.73}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta^4 \left( p^2 C^2 - (C \cdot p)^2 \right) \left( p^2 B^2 - (B \cdot p)^2 \right) + \\
- \left( 1 - \theta^2 p^2 - \eta^2 p^2 (C \cdot B) + \eta^2 (C \cdot p)(B \cdot p) \right)^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{4.74}
$$

Essa relação de dispersão pode também ser escrita em termos do tensor $D_{\nu\mu}$, conforme demonstrado no Apêndice III, ou seja:

$$
\begin{aligned}
\eta^4 [2p^4 D_{\nu\mu} D^{\nu\mu} - p^4 \left( D^\nu_\nu \right)^2 - 4p^2 D_{\nu\mu} D^{\mu\alpha} p^\nu p_\alpha + 2p^2 \left( D_{\nu\mu} p^\nu p^\mu \right) D^\alpha_\alpha + \left( D_{\nu\mu} p^\nu p^\mu \right)^2] = \\
\left( 1 - 2\theta^2 p^2 - \eta^2 p^2 \left( D^\nu_\nu \right) + \eta^2 \left( D_{\nu\mu} p^\nu p^\mu \right) \right)^2.
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

Se fizermos $\eta^2 = 0$ na relação (4.74), o que corresponde à eliminar os termos de violação da simetria de Lorentz da teoria, recuperamos:

$$p^2 = 0 \text{ e } \left(1 - \theta^2 p^2\right) = 0, \tag{4.76}$$

que são as mesmas relações de dispersão da eletrodinâmica de Podolsky.

Na ausência do termo de Podolsky, $\theta^2 = 0$, temos $p^2 = 0$ (Maxwell) e a seguinte relação modificada:

$$\begin{aligned} &\eta^4 \left(p^2 C^2 - (C \cdot p)^2\right) \left(p^2 B^2 - (B \cdot p)^2\right) + \\ &- \left(1 - \eta^2 p^2 (C \cdot B) + \eta^2 (C \cdot p)(B \cdot p)\right)^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.77}$$

É importante ressaltar que não faz sentido fazer $\eta^2 = 0$ na relação (4.77), assim como não faz sentido tomar $\theta^2$ na relação típica de Podolsky, $\left(1 - \theta^2 p^2\right) = 0$. Tais relações só fazem sentido completas.

Com a ajuda do programa FORM, as equações de dispersão acima podem ser generalizadas para uma escolha arbitrária de $D_{\mu\nu}$. Para uma escolha geral deste tensor, a equação de dispersão $p^2 = 0$ permanece, mas $1 - \theta^2 p^2 = 0$ e Eq. (4.74) se juntam em uma única equação. Embora, em princípio, existam muitas possibilidades de formar os escalares do observador Lorentz a partir de um conjunto de dois tensores e o momento de quatro vetores, o último resultado colapsa quando se considera que $D_{\mu\nu}$ é simétrico. A equação pode então ser convenientemente escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0 = &-(1-\theta^2 p^2)^3 - 2(1-\theta^2 p^2)^2 \eta^2 (D_{\mu\nu} p^\mu p^\nu - p^2 D^\mu{}_\mu) \\ &+ 2(1-\theta^2 p^2) p^2 \eta^4 \left[p^2 D_{\mu\nu} D^{\mu\nu} - 2 D_{\mu\nu} D^{\mu\varrho} p^\nu p_\varrho + D^\mu{}_\mu \left(2 D_{\nu\varrho} p^\nu p^\varrho - p^2 D^\nu{}_\nu\right)\right] \\ &+ \frac{4}{3} p^4 \eta^6 \left[3 D_{\mu\nu} D^{\mu\nu} \left(D_{\varrho\sigma} p^\varrho p^\sigma - p^2 D^\varrho{}_\varrho\right) + (D^\mu{}_\mu)^2 \left(p^2 D^\nu{}_\nu - 3 D_{\nu\varrho} p^\nu p^\varrho\right)\right. \\ &\qquad \left. + 2 p^2 D^{\mu\nu} D_\mu{}^\varrho D_{\nu\varrho} + 6 \left(D_{\mu\nu} D^{\mu\varrho} p^\nu p_\varrho D^\sigma{}_\sigma - D_{\mu\nu} D^{\mu\varrho} D^{\nu\sigma} p_\varrho p_\sigma\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Note que não é possível fatorar $1 - \theta^2 p^2$, pois há uma contribuição proporcional a $\eta^6$ que não contém o termo $1 - \theta^2 p^2$. Esta contribuição desaparece quando $D_{\mu\nu}$ é decomposto em dois 4 vetores de acordo com a parametrização dada pela Eq. (4.34), em que $\left(1 - \theta^2 p^2\right) \Gamma(p) = 0$ é reproduzido.

## 4.5 Análise de alguns setores da teoria: relação de dispersão, positividade de energia e causalidade

No que se segue, analisamos alguns setores da teoria proposta, em busca de configurações do tensor de fundo que proporcione eletrodinâmicas consistentes. Estamos especialmente interessados em causalidade. O comportamento da velocidade de grupo e da velocidade de frente de onda nos permite tirar conclusões sobre a causalidade. As velocidades de grupo e de frente de onda são dadas por

$$\mathbf{u}_g = \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{p}}, \qquad u_{frente} = \lim_{|\mathbf{p}|\to\infty} \frac{p_0}{|\mathbf{p}|}.$$

Usamos a noção de causalidade clássica que requer $u_g = |\mathbf{u}_g| \leq 1$ e $u_{frente} \leq 1$. As leis de dispersão que não descrevem os fótons padrão para o desaparecimento da violação de Lorentz serão chamadas de "exóticas", o que inclui as relações de dispersão do tipo Podolsky, mas não necessariamente as não físicas. As relações de dispersão que exibem velocidades de grupo e velocidade de frente divergentes ou velocidades maiores que 1 serão chamadas de espúrias. Para todas as configurações de fundo investigadas, existem três pólos distintos, incluindo $p^2 = 0$ , que descreve o fóton usual. O primeiro e o segundo dos casos isotrópicos examinados abaixo não pode ser parametrizado com dois 4 vetores, como proposto na Eq. (4.34). Portanto, eles devem ser estudados usando a equação mais geral (4.78).

### 4.5.1 Setor isótropico do traço (com $\theta \neq 0$)

Como uma verificação inicial da Eq. (4.78), estudamos o caso de um tensor diagonal $D_{\nu\mu}$ com $D_{00} = -D_{11} = -D_{22} = -D_{33}$, $D_{ij} = 0$ para $i \neq j$, ou seja, $D_{\nu\mu} = D_{00}g_{\nu\mu}$, que resulta em $D^\alpha_\alpha = 4D_{00}$. É uma configuração de traço puro que é invariante de Lorentz . A equação de dispersão para esta configuração de $D_{\nu\mu}$ tem a forma:

$$\begin{aligned}
0 =& -(1-\theta^2p^2)^3 - 2(1-\theta^2p^2)^2\eta^2(D_{00}g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu - 4p^2D_{00}) \\
&+ 2(1-\theta^2p^2)p^2\eta^4\left[p^2D_{00}^2 g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - 2D_{00}^2 g_{\mu\nu}g^{\mu\varrho}p^\nu p_\varrho + 4D_{00}\left(2D_{00}g_{\nu\varrho}p^\nu p^\varrho - 4p^2D_{00}\right)\right] \\
&+ \frac{4}{3}p^4\eta^6\left[3D_{00}^2 g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\left(D_{00}g_{\varrho\sigma}p^\varrho p^\sigma - 4p^2D_{00}\right) + 16D_{00}^2\left(4p^2D_{00} - 3D_{00}g_{\nu\varrho}p^\nu p^\varrho\right)\right. \\
&\left.+ 2p^2D_{00}^3 g^{\mu\nu}\delta^\varrho_\mu g_{\nu\varrho} + 6\left(4D_{00}^3 g_{\mu\nu}g^{\mu\varrho}p^\nu p_\varrho - D_{00}^3 g_{\mu\nu}g^{\mu\varrho}g^{\nu\sigma}p_\varrho p_\sigma\right)\right] ,
\end{aligned} \tag{4.79}$$

resolvendo, temos

$$-(1-\theta^2p^2)^3 + 6(1-\theta^2p^2)^2\eta^2p^2D_{00} - 12(1-\theta^2p^2)\eta^4p^4D_{00}^2 + 8p^6\eta^6D_{00}^3 = 0,$$

após algumas simplificações, temos

$$\left(p^2\theta^2 + 2D_{00}p^2\eta^2 - 1\right)^3 = 0,$$

cuja soluçãoé dada por

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{\theta^2 + 2\eta^2 D_{00}}, \tag{4.80}$$

para $\theta^2 + 2\eta^2 D_{00} \neq 0$. Identificando essa relação de dispersão com a relação de dispersão de Podolsky podemos reescrever na forma

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{\Theta^2}, \tag{4.81}$$

onde $\Theta^2 = \theta^2 + 2\eta^2 D_{00}$. Em que obtemos uma relação de dispersão do tipo Podolsky com um parâmetro de Podolsky redefinido por $\Theta^2$ que envolve o parâmetro padrão de Podolsky $\theta^2$ e o coeficiente de controle não nulo. Se um campo de fundo, violação da simetria de Lorentz $D_{\nu\mu}$ existisse na natureza, seu traço imitaria o termo Podolsky. Encontrar tal contribuição experimentalmente, poderia até sugerir a existência de um campo de fundo violador da simetria de Lorentz. A relação de dispersão encontrada é causal e compatível com uma propagação bem comportada de sinais, desde que $\Theta^2 > 0$, ou seja, para $D_{00} > -\theta^2/2\eta^2$.

### 4.5.2 Setor isótropico (com $\theta \neq 0$)

O setor isotrópico sem traço pode ser expresso na forma $D_{\nu\mu} = -D_{00} \times diag\,(3,1,1,1)_{\mu\nu}$ onde o sinal menos é escolhido para ser consistente com as definições feitas para o setor isótropico do traço . Esta escolha do tensor de fundo pode ser expressa na forma covariante em termos do tensor métrico de Minkowski e da direção preferida puramente temporal $\lambda^\mu = (1,0,0,0)$ como segue:

$$D_{\nu\mu} = D_{00}\left(g_{\nu\mu} - 4\lambda_\nu\lambda_\mu\right). \tag{4.82}$$

Portanto, o caso isotrópico aqui analisado contém a parte invariante de Lorentz considerada no setor isótropico do traço e uma contribuição que viola a simetria de Lorentz dependendo da direção $\lambda_\mu$. Esta estrutura particular exibe duas relações de dispersão distintas que podem ser obtidas através da Eq. (4.78). Substituindo (4.82) em (4.78), temos

$$\begin{aligned}
&-(1-\theta^2p^2)^3 - 2(1-\theta^2p^2)^2\eta^2D_{00}((g_{\nu\mu}-4\lambda_\nu\lambda_\mu)\,p^\mu p^\nu - p^2\left(g^\mu_\mu - 4\lambda_\mu\lambda^\mu\right))\\
&+2(1-\theta^2p^2)p^2\eta^4\left[p^2D_{00}^2\left(g_{\nu\mu}-4\lambda_\nu\lambda_\mu\right)\left(g^{\mu\nu}-4\lambda^\mu\lambda^\nu\right) - 2D_{00}^2\left(g_{\nu\mu}-4\lambda_\nu\lambda_\mu\right)\left(g^{\mu\varrho}-4\lambda^\mu\lambda^\varrho\right)p^\nu p_\varrho\right.\\
&\left.+D_{00}^2\left(g^\mu_\mu-4\lambda_\mu\lambda^\mu\right)\left(2\left(g_{\nu\varrho}-4\lambda_\nu\lambda_\varrho\right)p^\nu p^\varrho - p^2\left(g^\mu_\mu-4\lambda_\mu\lambda^\mu\right)\right)\right]\\
&+\frac{4}{3}p^4\eta^6D_{00}^3\left[3\left(g_{\nu\mu}-4\lambda_\nu\lambda_\mu\right)\left(g^{\mu\nu}-4\lambda^\mu\lambda^\nu\right)\left(\left(g_{\varrho\sigma}-4\lambda_\varrho\lambda_\sigma\right)p^\varrho p^\sigma - p^2\left(g^\mu_\mu-4\lambda_\mu\lambda^\mu\right)\right)\right.\\
&+\left(g^\mu_\mu-4\lambda_\mu\lambda^\mu\right)^2\left(p^2\left(g^\mu_\mu-4\lambda_\mu\lambda^\mu\right)-3\left(g_{\nu\varrho}-4\lambda_\nu\lambda_\varrho\right)p^\nu p^\varrho\right)\\
&+2p^2\left(g^{\mu\nu}-4\lambda^\mu\lambda^\nu\right)\left(g^\varrho_\mu-4\lambda_\mu\lambda^\varrho\right)\left(g_{\nu\varrho}-4\lambda_\nu\lambda_\varrho\right)\\
&+6\left(g_{\nu\mu}-4\lambda_\nu\lambda_\mu\right)\left(g^{\mu\varrho}-4\lambda^\mu\lambda^\varrho\right)p^\nu p_\varrho\left(g^\mu_\mu-4\lambda_\mu\lambda^\mu\right)\\
&\left.-6\left(g_{\nu\mu}-4\lambda_\nu\lambda_\mu\right)\left(g^{\mu\varrho}-4\lambda^\mu\lambda^\varrho\right)\left(g^{\nu\sigma}-4\lambda^\nu\lambda^\sigma\right)p_\varrho p_\sigma\right] = 0\,,
\end{aligned} \tag{4.83}$$

de acordo com a métrica de Minkowski temos que: $g^\mu_\mu = 4$, $g_{\nu\mu}g^{\mu\nu} = 4$, logo

$$\begin{aligned}
&-\ (1-\theta^2p^2)^3 - 2(1-\theta^2p^2)^2\eta^2D_{00}((g_{\nu\mu}-4\lambda_\nu\lambda_\mu)\,p^\mu p^\nu)\\
&+2(1-\theta^2p^2)p^2\eta^4p^2D_{00}^2\left(g_{\nu\mu}-4\lambda_\nu\lambda_\mu\right)\left(g^{\mu\nu}-4\lambda^\mu\lambda^\nu\right)\\
&-2(1-\theta^2p^2)p^2\eta^4 2D_{00}^2\left(g_{\nu\mu}-4\lambda_\nu\lambda_\mu\right)\left(g^{\mu\varrho}-4\lambda^\mu\lambda^\varrho\right)p^\nu p_\varrho\\
&+\frac{4}{3}p^4\eta^6D_{00}^3\left[3\left(g_{\nu\mu}-4\lambda_\nu\lambda_\mu\right)\left(g^{\mu\nu}-4\lambda^\mu\lambda^\nu\right)\left(g_{\varrho\sigma}-4\lambda_\varrho\lambda_\sigma\right)p^\varrho p^\sigma\right.\\
&+\ 2p^2\left(g^{\mu\nu}-4\lambda^\mu\lambda^\nu\right)\left(\delta^\varrho_\mu-4\lambda_\mu\lambda^\varrho\right)\left(g_{\nu\varrho}-4\lambda_\nu\lambda_\varrho\right)\\
&\left.-6\left(g_{\nu\mu}-4\lambda_\nu\lambda_\mu\right)\left(g^{\mu\varrho}-4\lambda^\mu\lambda^\varrho\right)\left(g^{\nu\sigma}-4\lambda^\nu\lambda^\sigma\right)p_\varrho p_\sigma\right] = 0\,,
\end{aligned} \tag{4.84}$$

para o caso puramente temporal $\lambda^\mu = (1,0,0,0)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
& -\ (1-\theta^2p^2)^3 - 2(1-\theta^2p^2)^2\eta^2 D_{00}(p^2-4p_0^2) \\
& + 2(1-\theta^2p^2)p^2\eta^4 D_{00}^2\left[10p^2-16p_0^2\right] \\
& + \frac{4}{3}p^4\eta^6 D_{00}^3\left[3\,(12)\left(p^2-4p_0^2\right)\right. \\
& \left. + 2p^2\,(12-36) - 6\left(p^2-28p_0^2\right)\right] = 0,
\end{aligned}
\tag{4.85}
$$

agrupando os termos

$$
\begin{aligned}
-\,(1-\theta^2p^2)^3 - 2(1-\theta^2p^2)^2\eta^2 D_{00}(p^2-4p_0^2) \\
+2(1-\theta^2p^2)p^2\eta^4 D_{00}^2\left[10p^2-16p_0^2\right] + 4p^4\eta^6 D_{00}^3\left(8p_0^2-6p^2\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{4.86}
$$

simplificando, obtemos

$$
\left(p^2\theta^2 + 2D_{00}p^2\eta^2 - 1\right)^2\left(p^2\theta^2 - 6D_{00}\eta^2p^2 + 8D_{00}\eta^2p_0^2 - 1\right) = 0. \tag{4.87}
$$

Considerando a equação acima como duas equações independentes em que cada uma é nula

$$
\left(p^2\theta^2 + 2D_{00}p^2\eta^2 - 1\right)^2 = 0, \tag{4.88}
$$

$$
\left(p^2\theta^2 - 6D_{00}\eta^2p^2 + 8D_{00}\eta^2p_0^2 - 1\right) = 0, \tag{4.89}
$$

obtemos duas soluções. Para a primeira equação, obtemos:

$$
\begin{aligned}
p^2 &= \frac{1}{\theta^2 + 2D_{00}\eta^2} \\
p_0^2 &= \mathbf{p}^2 + \frac{1}{\Theta^2},
\end{aligned}
\tag{4.90}
$$

onde $\Theta^2 = \theta^2 + 2D_{00}\eta^2$. Essa relação de dispersão é uma perturbação da relação de dispersão usual de Podolsky, que corresponde à Eq. (4.81) do setor analisado anteriormente. Sabemos que este modo tem uma energia bem definida e é causal para $\Theta^2 > 0$ e consequentemente para $D_{00} > -\theta^2/2\eta^2$. As velocidade de grupo e de frente de onda tem a mesma forma das velocidade para a teoria de Podolsky.

Para a segunda equação, obtemos:

$$
\begin{aligned}
p_0^2 &= \frac{1}{\left(\theta^2 + 2D_{00}\eta^2\right)} + \frac{\left(\theta^2 - 6D_{00}\eta^2\right)}{\left(\theta^2 + 2D_{00}\eta^2\right)}\mathbf{p}^2, \\
p_0^2 &= \frac{1}{\left(\theta^2 + 2D_{00}\eta^2\right)} + \frac{\left(\theta^2 + 2D_{00}\eta^2 - 8D_{00}\eta^2\right)}{\left(\theta^2 + 2D_{00}\eta^2\right)}\mathbf{p}^2,
\end{aligned}
$$

$$
p_0^2 = \frac{1}{\Theta^2} + \Lambda\mathbf{p}^2, \tag{4.91}
$$

onde $\Lambda = 1 - \frac{8D_{00}\eta^2}{\Theta^2}$. Para a segunda relação de dispersão temos também uma perturbação da relação de dispersão usual de Podolsky, mas nesse caso os termos dependentes do momento também são modificados. A velocidade de frente de onda é dada por

$$
u_{frente} = \lim_{|\mathbf{p}|\to\infty}\frac{p_0}{|\mathbf{p}|},
$$

logo para a relação de dispersão (4.91) tem a forma

$$
\begin{aligned}
u_{frente} &= \lim_{|\mathbf{p}|\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{|\mathbf{p}|^2\,\Theta^2}+\Lambda}\right) \\
u_{frente} &= \sqrt{\Lambda}=\sqrt{1-\frac{8D_{00}\eta^2}{\Theta^2}},
\end{aligned}
\tag{4.92}
$$

temos que a velocidade de frente de onda somente é real para

$$1-\frac{8D_{00}\eta^2}{\theta^2+2D_{00}\eta^2}>0,$$

logo

$$1>\frac{8D_{00}\eta^2}{\theta^2+2D_{00}\eta^2},$$

temos

$$D_{00}<\frac{\theta^2}{6\eta^2}. \tag{4.93}$$

Para $D_{00}<\theta^2/6\eta^2$, e $D_{00}>0$ a velocidade de frente de onda é $<1$. O módulo da velocidade de grupo tem a forma

$$
\begin{gathered}
u_g=\frac{\partial}{\partial|\mathbf{p}|}\left(\sqrt{\frac{1}{\Theta^2}+|\mathbf{p}|^2\,\Lambda}\right)=|\mathbf{p}|\,\Lambda\left(\frac{1}{\Theta^2}+|\mathbf{p}|^2\,\Lambda\right)^{-1/2}, \\
u_g=\Lambda\,|\mathbf{p}|\,/p_0.
\end{gathered}
\tag{4.94}
$$

Esta função aumenta monotonicamente de 0 para um valor constante dado por

$$
\begin{gathered}
\lim_{|\mathbf{p}|\to\infty}u_g=\lim_{|\mathbf{p}|\to\infty}\left(1-\frac{8D_{00}\eta^2}{\Theta^2}\right)\frac{|\mathbf{p}|}{p_0}, \\
\lim_{|\mathbf{p}|\to\infty}u_g=\lim_{|\mathbf{p}|\to\infty}\left(1-\frac{8D_{00}\eta^2}{\Theta^2}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{|\mathbf{p}|^2\,\Theta^2}+\Lambda}\right)^{-1}, \\
\lim_{|\mathbf{p}|\to\infty}u_g=\Lambda\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{-1}, \\
\lim_{|\mathbf{p}|\to\infty}u_g=\sqrt{\Lambda}=u_{frente},
\end{gathered}
\tag{4.95}
$$

igualando com a velocidade de frente de onda, logo no limite em que $|\mathbf{p}|\to\infty$ a velocidade de grupo é $<1$ para $D_{00}>0$, sendo assim temos que a estrutura é causal e bem comportada para o intervalo do coeficiente $D_{00}$: $[0,\theta^2/6\eta^2]$.

### 4.5.3 Setor isótropico temporal (com $\theta\neq 0$)

A configuração de campo fundo isotrópica mais simples possível é dada por $C_\mu=(C_0,0)$, $B_\mu=(B_0,0)$, que corresponde a $D_{00}=C_0B_0$, $D_{0i}=D_{ij}=0$. Para esta configuração, a relação de dispersão (4.74) é dada por:

$$\eta^4 \left(p^2 C_0^2 - C_0^2 p_0^2\right)\left(p^2 B_0^2 - B_0^2 p_0^2\right) + \\ - \left(1 - \theta^2 p^2 - \eta^2 p^2 C_0 B_0 + \eta^2 C_0 B_0 p_0^2\ \right)^2 = 0, \tag{4.96}$$

simplificando

$$\eta^4 C_0^2 B_0^2 \mathbf{p}^4 = \left(1 - \theta^2 p^2 + \eta^2 \mathbf{p}^2 C_0 B_0\ \right)^2,$$

obtemos

$$\pm \eta^2 C_0 B_0 \mathbf{p}^2 = 1 - \theta^2 p^2 + \eta^2 \mathbf{p}^2 C_0 B_0\ , \tag{4.97}$$

de onde podemos extrair duas soluções. A primeira solução tem a forma

$$p_0^{(1)} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{1}{\theta^2}},$$

em que essa relação é a relação original de dispersão de Podolsky. Como já foi avaliada no âmbito da teoria de Podolsky no que concerne à causalidade, estabilidade e unitariedade, não será refeito aqui.

Para a segunda solução, da equação (4.97), obtemos

$$p_0^2 = \left(1 + \frac{2\eta^2 C_0 B_0}{\theta^2}\right)\mathbf{p}^2 + \frac{1}{\theta^2}\ , \tag{4.98}$$

$$p_0^2 = \left(1 + \frac{2\eta^2 D_{00}}{\theta^2}\right)\mathbf{p}^2 + \frac{1}{\theta^2}\ , \tag{4.99}$$

$$p_0^{(2)} = \sqrt{\Psi \mathbf{p}^2 + \frac{1}{\theta^2}}\ , \tag{4.100}$$

onde $\Psi = 1 + \frac{2\eta^2 D_{00}}{\theta^2}$. A velocidade de frente de onda é dada por:

$$u_{frente} = \lim_{|\mathbf{p}| \to \infty} \sqrt{\Psi + \frac{1}{\theta^2 |\mathbf{p}|^2}},$$

$$u_{frente} = \sqrt{\Psi} = \sqrt{1 + \frac{2\eta^2 C_0 B_0}{\theta^2}},$$

para $u_{frente} \leq 1$ requer que $D_{00}$ seja negativo. Além disso, temos que o módulo da velocidade do grupo

$$\begin{aligned} u_g &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\Psi \mathbf{p}^2 + \frac{1}{\theta^2}\right)^{1/2}, \\ u_g &= \Psi |\mathbf{p}| \left(\Psi \mathbf{p}^2 + \frac{1}{\theta^2}\right)^{-1/2}, \end{aligned}$$

equivale a

$$u_g = \Psi |\mathbf{p}| / p_0^{(2)},$$

em que o módulo da velocidade do grupo sobe monotonicamente de 0 a um valor constante que corresponde à velocidade de frente de onda, dada por:

$$\begin{aligned}
\lim_{|\mathbf{p}|\to\infty} u_g &= \lim_{|\mathbf{p}|\to\infty} \Psi \frac{|\mathbf{p}|}{p_0^{(2)}} = \Psi \left(\sqrt{\Psi}\right)^{-1}, \\
\lim_{|\mathbf{p}|\to\infty} u_g &= \sqrt{\Psi} = u_{frente}.
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Portanto, $D_{00} \leq 0$ precisa ser mantido para que exista propagação de sinal. logo seja causal.

### 4.5.4 Setor espacial anisotrópico de paridade par (com $\theta = 0$)

Para os coeficientes $C_\mu = (0, C_i)$, $B_\mu = (0, B_i)$, temos $D_{00} = 0$, $D_{0i} = 0$, $D_{ij} = (C_i B_j + C_j B_i)/2$. Nesta configuração, vale: $C^2 = -\mathbf{C}^2$, $B^2 = -\mathbf{B}^2$, $(B \cdot p) = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}, (C \cdot p) = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}$. Substituindo tais informações na Eq. (4.77), temos:

$$\begin{aligned}
&\eta^4 \left(p^4 \mathbf{C}^2 \mathbf{B}^2 + p^2 \mathbf{C}^2 \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right)^2 + \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right)^2 p^2 \mathbf{B}^2 + \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right)^2 \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right)^2\right) + \\
&- \left(1 + \eta^2 p^2 \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}\right) + \eta^2 \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right) \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right) \right)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Desenvolvendo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\eta^4 p^4 \mathbf{C}^2 \mathbf{B}^2 - \eta^4 p^4 \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}\right)^2 + \eta^4 p^2 \mathbf{C}^2 \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right)^2 \\
+ \eta^4 p^2 \mathbf{B}^2 \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right)^2 - 1 - 2\eta^2 p^2 \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}\right) \\
-2\eta^4 p^2 \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}\right) \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right) \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right) - 2\eta^2 \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right) \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right) \quad &= 0,
\end{aligned} \tag{4.103}$$

cuja simplificação leva a

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1 + 2\eta^2 \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right) \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right)}{\eta^4 \mathbf{C}^2 \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right)^2 + \eta^4 \mathbf{B}^2 \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right)^2 - 2\eta^2 \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}\right) - 2\eta^4 \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}\right) \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right) \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right)}. \tag{4.104}$$

Sem efeito de nenhuma aproximação, vale

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1 + 2\eta^2 \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right) \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right)}{\eta^4 [\mathbf{C} \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right) - \mathbf{B} \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right)]^2 - 2\eta^2 \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}\right)}. \tag{4.105}$$

Empregando a restrição adicional dos vetores serem paralelos ou antiparalelos, podemos escrecer:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{B},$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ fornecendo $\left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}\right)^2 = \mathbf{C}^2 \mathbf{B}^2$ e $\mathbf{C} \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right) = \mathbf{B} \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{p}\right)$ , temos

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{1}{2\eta^2 \alpha \mathbf{B}^2} - \frac{\left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}\right)^2}{\mathbf{B}^2}, \tag{4.106}$$

escrevendo em função do vetor unitário $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B} / |\mathbf{B}|$, obtemos

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{1}{2\eta^2 \alpha \mathbf{B}^2} - \left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{p}\right)^2, \tag{4.107}$$

que é uma relação de dispersão não-birrefringente. Temos que para $\alpha > 0$ significa vetores paralelos, enquanto $\alpha < 0$ descreve os vetores antiparalelos. Introduzindo um ângulo através da relação

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{B}| \, |\mathbf{p}| \cos \vartheta, \tag{4.108}$$

obtemos

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 \left(1 - \cos^2 \vartheta\right) - \frac{1}{2\eta^2 \alpha \mathbf{B}^2}}, \tag{4.109}$$

ou na forma

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 \sin^2 \vartheta - \frac{1}{2\eta^2 \alpha \mathbf{B}^2}}. \tag{4.110}$$

Essa relação de dispersão é semelhante à da teoria de Podolsky, mas a parte dependente do momento é modificada pelo fator $\sin^2 \vartheta$. Além disso, o termo "massa", $1/2\eta^2\alpha\mathbf{B}^2$, aparece com um sinal negativo para $\alpha > 0$, o que compromete a definição de energia.

Vemos que a relação (4.107) pode ser investigada com relação à causalidade. Primeiro temos que obter a velocidade de frente de onda que é dada por:

$$u_{frente} = \lim_{|\mathbf{p}| \to \infty} \frac{p_0}{|\mathbf{p}|} = |\sin \vartheta| \leq 1,$$

vemos que a $u_{frente} \leq 1$ independentemente de $\alpha$ .

Para a velocidade do grupo, temos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_g &= \left(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{B}} \left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{p}\right)\right) \left(\mathbf{p}^2 - \frac{1}{2\eta^2 \alpha \mathbf{B}^2} - \left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{p}\right)^2\right)^{-1/2}, \\
\mathbf{u}_g &= \frac{\mathbf{p} - \hat{\mathbf{B}} \left(\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{p}\right)}{p_0}.
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Para o cálculo do módulo, façamos

$$u_g = \sqrt{\mathbf{u}_g \mathbf{u}_g},$$

logo

$$u_g = \sqrt{\mathbf{u}_g \mathbf{u}_g} = \sqrt{\frac{|\mathbf{p}|^2 - 2\,|\mathbf{p}|^2 \cos^2 \vartheta + |\mathbf{p}|^2 \cos^2 \vartheta}{p_0^2}},$$

ou na forma

$$u_g = \sqrt{\frac{|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \vartheta}{p_0^2}},$$

substituindo $p_0^2$

$$u_g = \sqrt{\frac{|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \vartheta}{|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \vartheta - \frac{1}{2\eta^2 \alpha |\mathbf{B}|^2}}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta - \frac{\mathbf{1}}{2\eta^2 \alpha |\mathbf{B}|^2 |\mathbf{p}|^2}}},$$

ou na forma

$$u_g = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2 \sin^2 \vartheta \eta^2 \alpha |\mathbf{B}|^2 |\mathbf{p}|^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left[2 \sin^2 \vartheta \eta^2 \alpha \,|\mathbf{B}|^2 \,|\mathbf{p}|^2\right]^{-1}}}. \tag{4.112}$$

Para $\alpha > 0$, temos

$$u_g = \frac{1}{\sqrt{1 - \left[2\sin^2\vartheta\eta^2\alpha\left|\mathbf{B}\right|^2\left|\mathbf{p}\right|^2\right]^{-1}}}, \tag{4.113}$$

$$u_g = \frac{1}{\sqrt{1 - \left[2\sin^2\vartheta x^2\right]^{-1}}}, \tag{4.114}$$

onde $x = \eta\left|\mathbf{B}\right|\left|\mathbf{p}\right|\sqrt{|\alpha|}$. O módulo da velocidade é bem definido apenas para $\mathbf{p}^2 > \left(2\eta^2\alpha\left|\mathbf{B}\right|^2\sin^2\vartheta\right)^{-1}$, sendo este um cutoff mínimo da teoria. O problema maior é que esse cutoff mínimo depende do ângulo $\vartheta$ e como o momento da partícula pode, a princípio, apontar em qualquer direção, o cutoff não é fixo e é por isso que ele realmente não funciona como um verdadeiro cutoff. É fácil notar que a velocidade de grupo é sempre maior que 1 e até singular para $\eta\left|\mathbf{B}\right|\left|\mathbf{p}\right| = \csc\vartheta/\sqrt{2\alpha}$, ou seja, o modo correspondente viola a causalidade.

O comportamento para o módulo da velocidade de grupo, (4.114), é descrito na Fig. 4.1 como uma função de $x$.

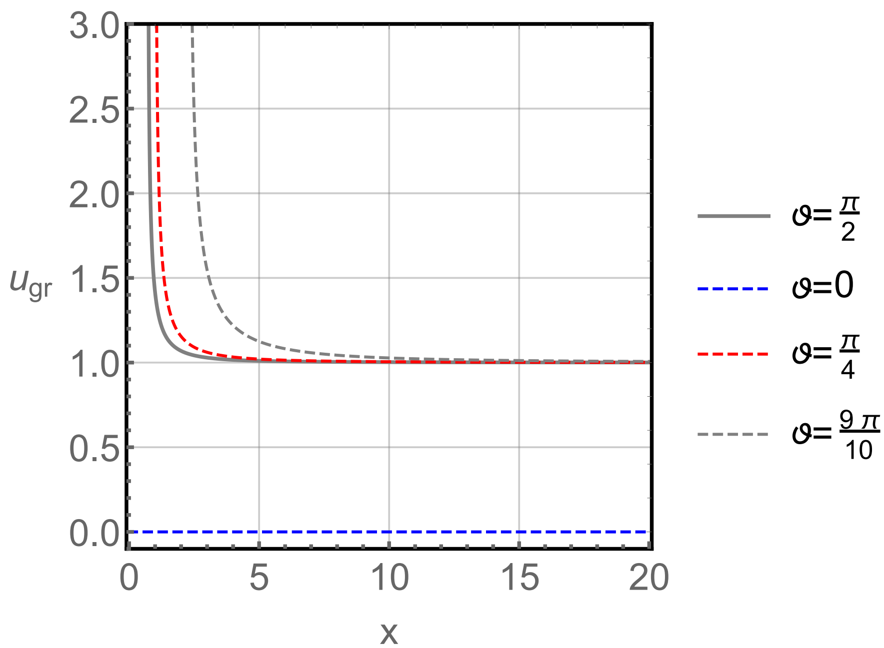


Figura 4.1: Velocidade de grupo para $\alpha > 0$

Em contraste, a velocidade do grupo para $\alpha < 0$ não exibe qualquer singularidade e é dada por

$$u_g = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[2\sin^2\vartheta\eta^2\alpha\left|\mathbf{B}\right|^2\left|\mathbf{p}\right|^2\right]^{-1}}}. \tag{4.115}$$

Este modo é exótico, pois sua velocidade de grupo aumenta de zero e se aproxima do limite $u_g = 1$ de baixo. Um gráfico de seu módulo é apresentado na Fig. 4.2.

Outra possibilidade que vale a pena considerar é o caso em que os vetores $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são ortogonais, $\mathbf{C}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Esta configuração é especialmente interessante, porque implica $D_{ii} = 0$

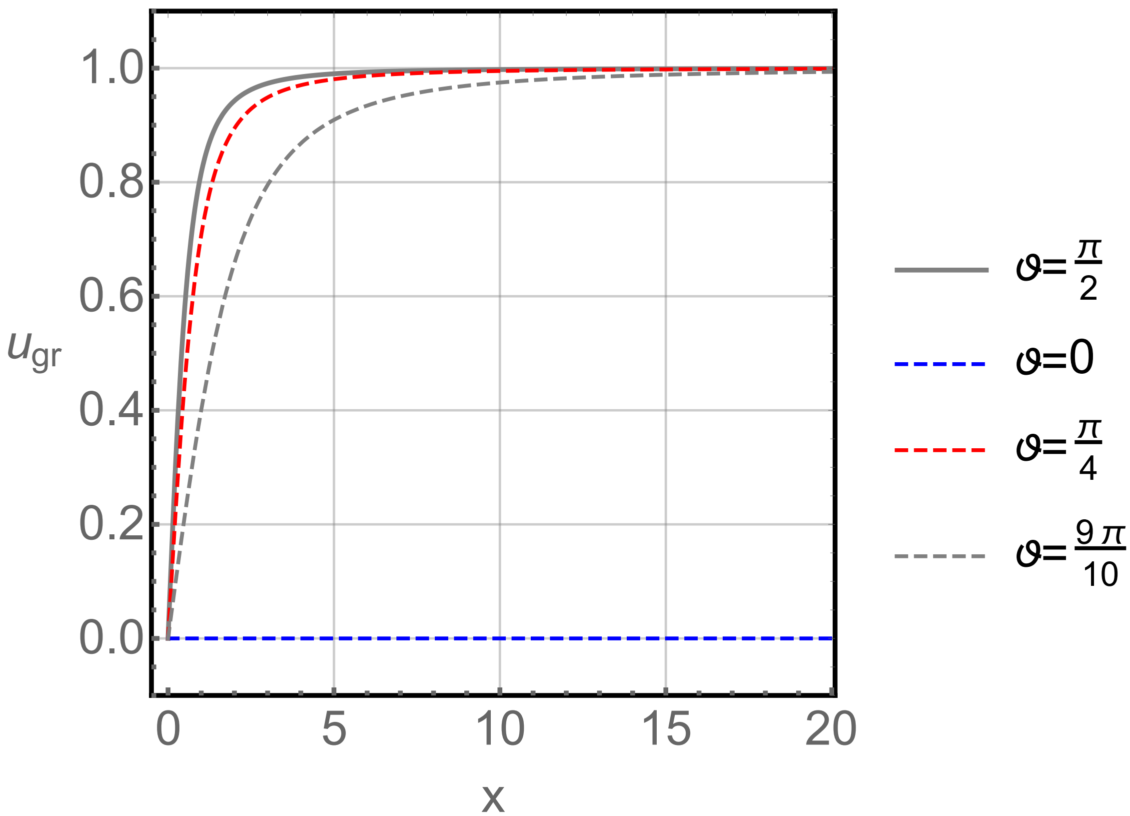


Figura 4.2: Velocidade de grupo para $\alpha < 0$

e $Tr\left(D_{\mu\nu}\right) = 0$, quando então representa uma eletrodinâmica de derivadas de alta ordem que não contém Setor de Podolsky. A equação de dispersão (4.77)

$$\eta^4\left(p^4\mathbf{C}^2\mathbf{B}^2 + p^2\mathbf{C}^2\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}\right)^2 + \left(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}\right)^2p^2\mathbf{B}^2 + \left(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}\right)^2\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}\right)^2\right) + \\ -\left(1+\eta^2p^2\left(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}\right) + \eta^2\left(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}\right)\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}\right)\ \right)^2 = 0, \tag{4.116}$$

fornece

$$\eta^4p^4\mathbf{C}^2\mathbf{B}^2 + \eta^4p^2\left[\mathbf{C}^2\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}\right)^2 + \left(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}\right)^2\mathbf{B}^2\right] - 2\eta^2\left(\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}\right)\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}\right) - 1 \quad = 0. \tag{4.117}$$

Para analisar esta situação, adotamos um sistema de coordenadas no qual os vetores $\mathbf{C}$ e $\mathbf{B}$ apontam ao longo dos eixos $x$ e $y$, respectivamente: $\mathbf{C} = |\mathbf{C}|\hat{e}_x$, $\mathbf{B} = |\mathbf{B}|\hat{e}_y$. Sendo $\vartheta$ o ângulo que o momento $\mathbf{p}$ deve fazer com o eixo $z$. Neste sistema, temos que

$$\mathbf{p} = |\mathbf{p}|\left(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta\right), \tag{4.118}$$

que implica $\mathbf{B}\cdot\mathbf{p} = |\mathbf{B}|\,|\mathbf{p}|\sin\vartheta\cos\varphi$ e $\mathbf{C}\cdot\mathbf{p} = |\mathbf{C}|\,|\mathbf{p}|\sin\vartheta\sin\varphi$. A relação (4.117) é reescrita como

$$\eta^4p^4|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2 + \eta^4p^2|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2\,|\mathbf{p}|^2\sin^2\vartheta - 2\eta^2|\mathbf{C}||\mathbf{B}|\,|\mathbf{p}|^2\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi - 1 \quad = 0, \tag{4.119}$$

sabendo que $p^2 = p_0^2 - |\mathbf{p}|^2$, escrevemos

$$\begin{aligned}\eta^4\left(p_0^2-|\mathbf{p}|^2\right)^2|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2+\eta^4\left(p_0^2-|\mathbf{p}|^2\right)|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{p}|^2\sin^2\vartheta \\ -2\eta^2|\mathbf{C}||\mathbf{B}||\mathbf{p}|^2\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi-1 \quad =0,\end{aligned} \tag{4.120}$$

simplificando

$$\begin{aligned}\eta^4|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2\left(p_0^2\right)^2-\eta^4|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{p}|^2\left(\cos^2\vartheta+1\right)p_0^2+\eta^4|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{p}|^4\cos^2\vartheta \\ +2\eta^2|\mathbf{C}||\mathbf{B}||\mathbf{p}|^2\cos\varphi\sin\varphi\left(\cos^2\vartheta-1\right)-1=0.\end{aligned} \tag{4.121}$$

Organizando obtemos uma equação de segundo grau para $p_0^2$

$$\begin{aligned}\eta^4|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2\left(p_0^2\right)^2-\eta^4|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{p}|^2\left(\cos^2\vartheta+1\right)p_0^2 \\ +|\mathbf{C}||\mathbf{B}||\mathbf{p}|^2\eta^2\left[\eta^2|\mathbf{C}||\mathbf{B}||\mathbf{p}|^2\cos^2\vartheta-2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\vartheta\right]-1=0,\end{aligned} \tag{4.122}$$

o delta , $\Delta$, tem a forma

$$\Delta = \left(|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{p}|^2\eta^4\right)^2\left(\cos^2\vartheta+1\right)^2 \tag{4.123}$$

$$-4|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2\eta^4\left(|\mathbf{C}||\mathbf{B}||\mathbf{p}|^2\eta^2\left(|\mathbf{C}||\mathbf{B}||\mathbf{p}|^2\eta^2\cos^2\vartheta-2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\vartheta\right)-1\right), \tag{4.124}$$

simplificando, obtemos

$$\Delta=\left(|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{p}|^2\eta^4\right)^2\left(\cos^2\vartheta-1\right)^2+8|\mathbf{C}|^3|\mathbf{B}|^3|\mathbf{p}|^2\eta^6\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi+4|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2\eta^4, \tag{4.125}$$

usando $\cos^2\vartheta - 1 = -\sin^2\vartheta$, temos

$$\Delta=\left(|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{p}|^2\eta^4\right)^2\sin^4\vartheta+8|\mathbf{C}|^3|\mathbf{B}|^3|\mathbf{p}|^2\eta^6\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi+4|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2\eta^4, \tag{4.126}$$

$$\Delta=|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2\eta^4\left[|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{p}|^4\eta^4\sin^4\vartheta+8|\mathbf{C}||\mathbf{B}||\mathbf{p}|^2\eta^2\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi+4\right]. \tag{4.127}$$

Assim, obtemos:

$$p_0^2=\frac{\eta^2|\mathbf{C}||\mathbf{B}||\mathbf{p}|^2(\cos^2\vartheta+1)\pm\sqrt{|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{p}|^4\eta^4\sin^4\vartheta+8|\mathbf{C}||\mathbf{B}||\mathbf{p}|^2\eta^2\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi+4}}{2\eta^2|\mathbf{C}||\mathbf{B}|},$$

$$p_0^2=\frac{(\cos^2\vartheta+1)}{2}|\mathbf{p}|^2\pm\frac{\sqrt{\frac{1}{4}|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{p}|^4\eta^4\sin^4\vartheta+2|\mathbf{C}||\mathbf{B}||\mathbf{p}|^2\eta^2\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi+1}}{\eta^2|\mathbf{C}||\mathbf{B}|}. \tag{4.128}$$

Usando $\sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi$

$$p_0^2=\frac{(\cos^2\vartheta+1)}{2}|\mathbf{p}|^2\pm\frac{\sqrt{1+\frac{1}{4}|\mathbf{C}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{p}|^4\eta^4\sin^4\vartheta+|\mathbf{C}||\mathbf{B}||\mathbf{p}|^2\eta^2\sin^2\vartheta\sin 2\varphi}}{|\mathbf{C}||\mathbf{B}|\eta^2},$$

chamando

$$\frac{(\cos^2\vartheta+1)}{2}=\frac{(\cos^2\vartheta-1+1+1)}{2}=1-\frac{\sin^2\vartheta}{2}=\alpha_\vartheta, \tag{4.129}$$

$$\eta^2|\mathbf{C}||\mathbf{B}|\sin^2\vartheta = \nu_1, \tag{4.130}$$

podemos reescrever a relação de dispersão em uma forma simplificada, obtemos:

$$\left(p_0^{\pm}\right)^2 = \alpha_\vartheta \left|\mathbf{p}\right|^2 \pm \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\nu_1^2 \left|\mathbf{p}\right|^4 + \nu_1 \left|\mathbf{p}\right|^2 \sin 2\varphi}}{|\mathbf{C}||\mathbf{B}|\eta^2}. \tag{4.131}$$

Para que a condição de causalidade seja satisfeita deve valer: $u_g \leq 1$, $u_{frente} \leq 1$. Iniciamos avaliando a velocidade de frente de onda,

$$u_{frente} = \lim_{|\mathbf{p}|\to\infty} \left( \sqrt{\alpha_\vartheta \pm \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\nu_1^2 \left|\mathbf{p}\right|^4 + \nu_1 \left|\mathbf{p}\right|^2 \sin 2\varphi}}{|\mathbf{C}||\mathbf{B}|\eta^2 \left|\mathbf{p}\right|^2}} \right), \tag{4.132}$$

$$u_{frente} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\vartheta}{2} \pm \frac{\eta^2|\mathbf{C}||\mathbf{B}|\sin^2\vartheta}{2|\mathbf{C}||\mathbf{B}|\eta^2}}. \tag{4.133}$$

No limite em que $|\mathbf{p}| \to \infty$ teremos duas relações para a velocidade de frente de onda, dadas por:

$$u_{frente}^{+} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\vartheta}{2} + \frac{\sin^2\vartheta}{2}} = 1, \tag{4.134}$$

$$u_{frente}^{-} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\vartheta}{2} - \frac{\sin^2\vartheta}{2}} = \sqrt{1 - \sin^2\vartheta} \leq 1, \tag{4.135}$$

ambas estão em conformidade com a preservação da causalidade independentemente dos ângulos $\vartheta$ e $\varphi$. O próximo passo é avaliar a velocidade do grupo, cujo módulo pode ser expresso usando a representação do momento da Eq. (4.118). Para a velocidade de grupo

$$\mathbf{u}_g = \frac{\partial}{\partial\left|\mathbf{p}\right|} \left( \alpha_\vartheta \left|\mathbf{p}\right|^2 \pm \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\nu_1^2 \left|\mathbf{p}\right|^4 + \nu_1 \left|\mathbf{p}\right|^2 \sin 2\varphi}}{|\mathbf{C}||\mathbf{B}|\eta^2} \right)^{1/2}, \tag{4.136}$$

efetuando a derivada, obtemos

$$\mathbf{u}_g = \frac{|\mathbf{p}|}{p_0^{\pm}}\alpha_\vartheta \pm \frac{1}{4|\mathbf{C}||\mathbf{B}|\eta^2 p_0^{\pm}} \frac{\left(\nu_1^2 \left|\mathbf{p}\right|^3 + 2\nu_1 \left|\mathbf{p}\right| \sin 2\varphi\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\nu_1^2 \left|\mathbf{p}\right|^4 + \nu_1 \left|\mathbf{p}\right|^2 \sin 2\varphi}}.$$

Como estamos interessado no módulo da velocidade, façamos

$$u_g = \sqrt{\mathbf{u}_g \mathbf{u}_g}, \tag{4.137}$$

logo

$$u_g = \sqrt{\frac{\left|\mathbf{p}\right|^2}{\left(p_0^{\pm}\right)^2} \left[ \alpha_\vartheta^2 \pm \alpha_\vartheta \frac{1}{2x^2} \frac{\left(x^4 \sin^4\vartheta + 2x^2 \sin^2\vartheta \sin 2\varphi\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}x^4 \sin^4\vartheta + x^2 \sin^2\vartheta \sin 2\varphi}} + \frac{\left(x^4 \sin^4\vartheta + 2x^2 \sin^2\vartheta \sin 2\varphi\right)^2}{16x^4\left(1 + \frac{1}{4}x^4 \sin^4\vartheta + x^2 \sin^2\vartheta \sin 2\varphi\right)} \right]},$$

onde foi usado

$$\nu_1 = \eta^2 |\mathbf{C}||\mathbf{B}| \sin^2\vartheta,$$

e logo após identificado

$$x^2 = \eta^2 |\mathbf{C}||\mathbf{B}| \left|\mathbf{p}\right|^2 . \tag{4.138}$$

Sabendo que

$$\left(p_0^{\pm}\right)^2 = \frac{\left|\mathbf{p}\right|^2}{x^2}\left(x^2\alpha_\vartheta \pm \sqrt{1+\frac{1}{4}x^4\sin^4\vartheta + x^2\sin^2\vartheta\sin 2\varphi}\right),$$

podemos escrever

$$\frac{\left|\mathbf{p}\right|^2}{\left(p_0^{\pm}\right)^2} = \frac{x^2}{\left(x^2\alpha_\vartheta \pm \sqrt{1+\frac{1}{4}x^4\sin^4\vartheta + x^2\sin^2\vartheta\sin 2\varphi}\right)}, \tag{4.139}$$

logo

$$u_g = \sqrt{\frac{x^2\left[\alpha_\vartheta^2 \pm \alpha_\vartheta \frac{1}{2x^2}\frac{\left(x^4\sin^4\vartheta + 2x^2\sin^2\vartheta\sin 2\varphi\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{4}x^4\sin^4\vartheta + x^2\sin^2\vartheta\sin 2\varphi}} + \frac{\left(x^4\sin^4\vartheta + 2x^2\sin^2\vartheta\sin 2\varphi\right)^2}{16x^4\left(1+\frac{1}{4}x^4\sin^4\vartheta + x^2\sin^2\vartheta\sin 2\varphi\right)}\right]}{\left(x^2\alpha_\vartheta \pm \sqrt{1+\frac{1}{4}x^4\sin^4\vartheta + x^2\sin^2\vartheta\sin 2\varphi}\right)}},$$

chamando

$$Y = \sqrt{4 + x^2\sin^2\vartheta\left(x^2\sin^2\vartheta + 4\sin 2\varphi\right)},$$

temos

$$u_g = \sqrt{\frac{4x^4Y^2\alpha_\vartheta^2 \pm 4\alpha_\vartheta x^2\left(x^4\sin^4\vartheta + 2x^2\sin^2\vartheta\sin 2\varphi\right)Y + \left(x^4\sin^4\vartheta + 2x^2\sin^2\vartheta\sin 2\varphi\right)^2}{4x^2Y^2\left(x^2\alpha_\vartheta \pm \frac{1}{2}Y\right)}}, \tag{4.140}$$

$$u_g = \sqrt{\frac{4x^2Y^2\alpha_\vartheta^2 \pm 4\alpha_\vartheta x^2\sin^2\vartheta\left(x^2\sin^2\vartheta + 2\sin 2\varphi\right)Y + x^2\sin^4\vartheta\left(Y^2 + 4\sin^2 2\varphi - 4\right)}{Y^2\left(4x^2\alpha_\vartheta \pm 2Y\right)}}, \tag{4.141}$$

sabendo que

$$\alpha_\vartheta = \frac{\left(\cos^2\vartheta + 1\right)}{2},$$

da identidade trigonométrica

$$\cos^2\vartheta = \frac{1+\cos 2\vartheta}{2}, \tag{4.142}$$

podemos escrever

$$\alpha_\vartheta = \frac{1}{4}\left(\cos 2\vartheta + 3\right), \tag{4.143}$$

logo

$$u_g = \sqrt{\frac{x^2Y^2\frac{1}{4}\left(\cos 2\vartheta + 3\right)^2 \pm x^2\sin^2\vartheta\left(\cos 2\vartheta + 3\right)\left(x^2\sin^2\vartheta + 2\sin 2\varphi\right)Y + x^2\sin^4\vartheta\left(Y^2 + 4\sin^2 2\varphi - 4\right)}{Y^2\{x^2\left(3+\cos 2\vartheta\right) \pm 2Y\}}}. \tag{4.144}$$

Fazendo algumas redefinições

$$
\begin{aligned}
S &= 3+\cos(2\vartheta) \pm Y \sin^2\vartheta \sin 2\varphi, && (4.145)\\
T &= 2\left[3+\cos(2\vartheta)\right]\sin^2\vartheta\sin 2\varphi \pm Y \sin^4\vartheta, && (4.146)\\
U &= \left[3+\cos(2\vartheta)\right]\sin^4\vartheta, && (4.147)
\end{aligned}
$$

obtemos o módulo da velocidade de grupo na forma

$$u_g^{\pm} = \sqrt{\frac{4x^2S + 2x^4T + x^6U}{Y^2\{x^2\left(3+\cos 2\vartheta\right) \pm 2Y\}}}. \tag{4.148}$$

O gráfico da Fig. 4.3 mostra o módulo da velocidade de grupo do modo positivo da relação de dispersão (4.131) para escolhas de diferentes ângulos.

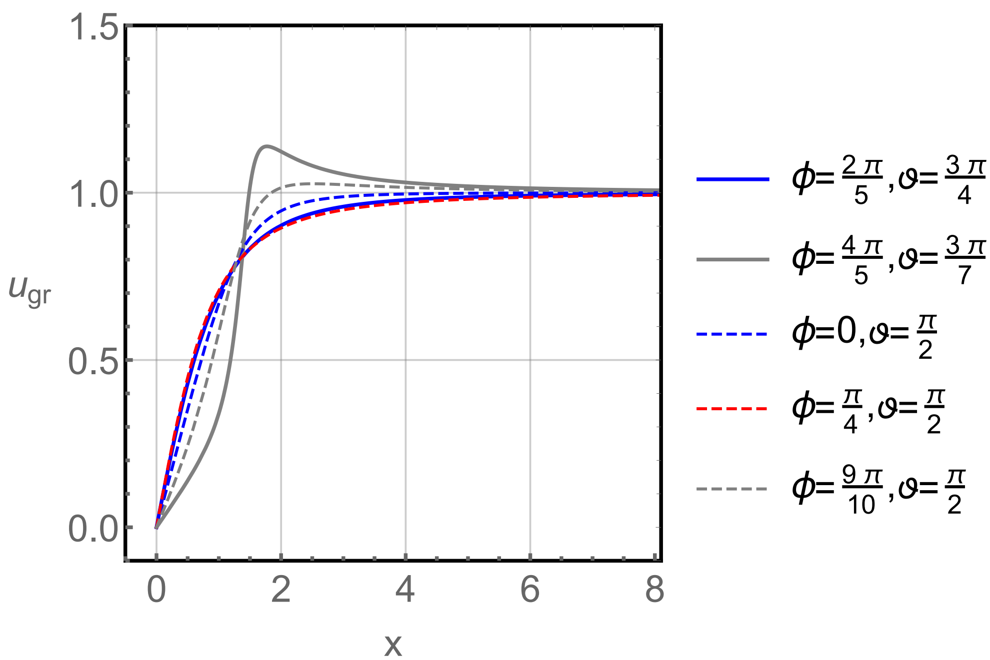


Figura 4.3: Velocidade de grupo para diferentes ângulos do modo positivo

A velocidade de grupo do modo positivo não possui singularidades, no entanto, de acordo com o gráfico, para alguns ângulos a velocidade pode ser maior do que 1, mas sempre saturando em 1.

Para o modo negativo ressaltamos que a velocidade de grupo diverge para a seguinte escolha da variável adimensional $x$:

$$x_{\text{singular}} = \frac{|\sec\vartheta|}{2}\sqrt{\sqrt{\left(3+\cos(2\vartheta)\right)^2 - 4\sin^4\vartheta\cos^2(2\varphi)} + 2\sin^2\vartheta\sin(2\varphi)}\,. \tag{4.149}$$

Este valor é indicado pelas linhas verticais na Fig. 4.4. Devido à singularidade, o comportamento do modo negativo no momento em que se encontra neste regime é não físico. Em

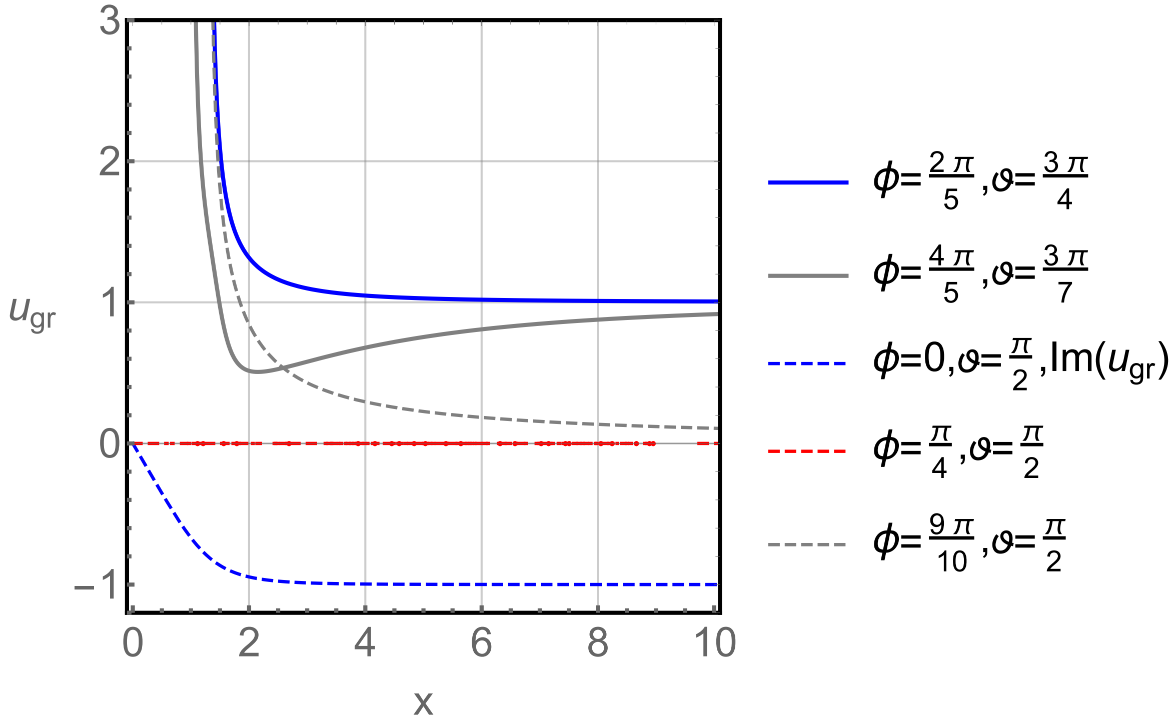


Figura 4.4: Velocidade de grupo para diferentes ângulos do modo negativo

contraste, a velocidade de grupo do modo positivo, para ângulos iguais ao considerados no modo negativo, não possui singularidades.

Para momentos pequenos, as velocidades do grupo podem ser expandidas até a segunda ordem da seguinte forma:

$$u_g^{\pm} = x\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi \sin^2\vartheta \pm \frac{1}{4}\cos 2\vartheta \pm \frac{3}{4}\right)},$$

onde

$$x^2 = \eta^2 |\mathbf{C}||\mathbf{B}|\, |\mathbf{p}|^2\,, \tag{4.150}$$

temos

$$u_g^{\pm} = \eta\, |\mathbf{p}|\, \sqrt{|\mathbf{C}||\mathbf{B}|}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi \sin^2\vartheta \pm \frac{1}{4}\cos 2\vartheta \pm \frac{3}{4}\right)}. \tag{4.151}$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\cos 2\vartheta = 1 - 2\sin^2\vartheta, \tag{4.152}$$

podemos escrever

$$u_g^{\pm} = \tilde{\Theta}^{\pm}\, |\mathbf{p}|\,, \tag{4.153}$$

onde

$$\tilde{\Theta}^{\pm} = \eta\sqrt{|\mathbf{C}||\mathbf{B}|}\sqrt{\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\,(\sin 2\varphi \mp 1) \pm 1}.$$

Para momentos pequenos o módulo da velocidade de grupo se comporta como um modo de Podolsky, no qual a massa depende da direção do momento. Além disso, a Fig. 4.3 mostra que a velocidade de grupo do modo positivo tem um máximo, aproxima-se de 1 e torna-se maior que 1 quebrando a causalidade para uma certa faixa de parâmetros. Para os mesmos valores dos ângulos, a velocidade de grupo do modo negativo diminui de sua singularidade inicial para atingir um mínimo e finalmente se aproxima de 1 a partir de baixo. O gráfico 4.4, gerado para outros valores dos ângulos, não revela nenhum máximo ou mínimo, com a velocidade de grupo do modo negativo se aproximando de 1 de cima e o modo positivo se aproximando de 1 de baixo. Para esta escolha de parâmetros, o modo positivo é exótico. Também foi verificado que o modo negativo não se propaga para certos ângulos. Por exemplo, a velocidade de grupo desaparece identicamente para $\vartheta = \pi/2$ e $\varphi = \pi/4$, e para $\vartheta = \pi/2$ e $\varphi < [\pi + arcsin(1/x^2)]/2$, leva a valores complexos.

Assim, concluímos que a configuração tipo espaço, $B_\mu = (0, \mathbf{B})_\mu$ e $C_\mu = (0, \mathbf{C})_\mu$, com os vetores $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ paralelos ou ortogonais, pode resultar em relações de dispersão exóticas e espúrias das quais as velocidades do grupo divergem ou quebram causalidade. Em geral, tais relações sugerem propagação de sinal apenas em um regime de grande momento compatível com $u_{fr} = 1$. No entanto, essa interpretação não é capaz de recuperar um determinado setor, uma vez que as relações de dispersão associadas não podem ser consideradas físicas para uma determinada faixa de momento.

### 4.5.5 Setor anisotrópico de paridade-ímpar (com $\theta = 0$)

Consideremos agora a configuração paridade-ímpar e anisótropica que é caracterizada por uma direção puramente temporal $C_\mu = (C_0, 0)$, e uma puramente espacial como $B_\mu = (0, B_i)$, que ao ser inserida na na Eq. (4.77), conduz à:

$$-\eta^4 p^4 C_0^2 \mathbf{B}^2 - \eta^4 p^2 C_0^2 (\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})^2 + \eta^4 p^2 \mathbf{B}^2 (C_0 p_0)^2 - 1 + 2\eta^2 (C_0 p_0)(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}) \quad = 0,$$

organizada na forma

$$p_0^2 \eta^4 C_0^2 [\mathbf{p}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})^2] + 2\eta^2 C_0 (\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}) p_0 - \eta^4 \mathbf{p}^2 C_0^2 [\mathbf{p}^2\mathbf{B}^2 - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})^2] - 1 \quad = 0.$$

A solução obtida é

$$p_0 = \frac{\mathrm{sgn}(C_0)\ \mathbf{p}^2 \sqrt{\eta^4 C_0^2 \left(\mathbf{p}^2\mathbf{B}^2 - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})^2\right)^2 + \mathbf{B}^2} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})}{\eta^2 C_0 \left[\mathbf{B}^2\mathbf{p}^2 - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{p})^2\right]}. \tag{4.154}$$

Podendo também ser reescrita em função dos ângulos

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{p} = |\mathbf{B}|\,|\mathbf{p}|\cos\vartheta_B,$$

assim, obtemos

$$p_0 = \frac{\mathrm{sgn}(C_0)\ \sqrt{1 + \eta^4 C_0^2 \mathbf{B}^2 \mathbf{p}^4 \sin^4\vartheta_B} - \cos\vartheta_B}{\eta^2 C_0 |\mathbf{B}|\,|\mathbf{p}| \sin^2\vartheta_B}. \tag{4.155}$$

A relação de dispersão é positiva, real e não definida no limite $C_0 \to 0$. A velocidade de frente de onda é dada por

$$u_{frente} = \lim_{|\mathbf{p}|\to\infty} \left( \frac{\sqrt{1+\eta^4 C_0^2 \mathbf{B}^2 \mathbf{p}^4 \sin^4\vartheta_B} - \cos\vartheta_B}{\eta^2 C_0 |\mathbf{B}| |\mathbf{p}|^2 \sin^2\vartheta_B} \right),$$
$$u_{frente} = \frac{\sqrt{\eta^4 C_0^2 \mathbf{B}^2 \sin^4\vartheta_B}}{\eta^2 C_0 |\mathbf{B}| \sin^2\vartheta_B} = 1. \tag{4.156}$$

O resultado para a velocidade de frente de onda é simplesmente 1, não revelando nenhum problema com causalidade para o regime de grandes momento. A velocidade de grupo associado, no entanto, é

$$u_{\mathrm{gr}} = \Big[(\eta|\mathbf{p}|)^{-4} C_0^{-2} \Upsilon^{-3} \big\{(\mathbf{B}\cdot\widehat{\mathbf{p}})\left[\mathrm{sgn}(C_0) 2\Xi(\Upsilon + 4\mathbf{B}^2) - 4\mathbf{B}^2(\mathbf{B}\cdot\widehat{\mathbf{p}})\right] + 2\mathbf{B}^2(\Upsilon - 2\mathbf{B}^2) - 4\Xi^2\Upsilon\big\}$$
$$+ 5 - 4\Upsilon^{-1}\mathbf{B}^2\left[\mathrm{sgn}(C_0)2\Xi^{-1}(\mathbf{B}\cdot\widehat{\mathbf{p}}) - 1\right] - 4(\eta|\mathbf{p}|)^4 \mathbf{B}^2 C_0^2 \Upsilon \Xi^{-2}\Big]^{1/2}, \tag{4.157a}$$

onde

$$\Upsilon = (\mathbf{B}\cdot\widehat{\mathbf{p}})^2 - \mathbf{B}^2, \quad \Xi = \sqrt{\mathbf{B}^2 + (\eta|\mathbf{p}|)^4 C_0^2 \Upsilon^2}. \tag{4.157b}$$

Note-se que, em princípio, existe apenas um modo único, isto é, a estrutura considerada descreve um vácuo não birrefringente para fótons. Entretanto, tanto a relação de dispersão quanto a velocidade de grupo dependem do sinal da componente $C_0$ explicitamente. Em termos do ângulo $\vartheta_B$ entre $\mathbf{B}$ e $\mathbf{p}$, o resultado é expresso como

$$u_{\mathrm{gr}} = \Bigg[1 - 4\csc^2\vartheta_B + \mathrm{sgn}(C_0)\frac{8}{Y}\cot\vartheta_B \csc\vartheta_B + \frac{4x^4}{Y^2}\sin^2\vartheta_B$$
$$+ \frac{1}{8x^4}\left\{\csc^6\left(\frac{\vartheta_B}{2}\right)(1 - \mathrm{sgn}(C_0)Y) + \sec^6\left(\frac{\vartheta_B}{2}\right)(1 + \mathrm{sgn}(C_0)Y)\right\}\Bigg]^{1/2}, \tag{4.158}$$

onde $Y = \sqrt{1 + (x\sin\vartheta)^4}$, $x = \eta|\mathbf{p}|\sqrt{|\mathbf{B}||C_0|}$. Independentemente do sinal de $C_0$ a velocidade de grupo torna-se singular apenas para valores quase nulo do momento , conforme as Fig. 4.5 e 4.6, que caracteriza um regime não físico para cada sinal de $C_0$.

Uma expansão para pequenos momento, fornece

$$u_{\mathrm{gr}} = \frac{1}{2\sqrt{2}x^2}\sqrt{[1 + \mathrm{sgn}(C_0)]\sec^6\left(\frac{\vartheta_B}{2}\right) + [1 - \mathrm{sgn}(C_0)]\csc^6\left(\frac{\vartheta_B}{2}\right)}, \tag{4.159}$$

explicitamente revelando as singularidades para ambos os sinais de $C_0$. Note que a velocidade de grupo de um dos modos, para $C_0 < 0$ e $\vartheta_B = 3\pi/10$, tem um mínimo e se aproxima de 1 de baixo aumentando para $x$, enquanto a velocidade de grupo do segundo modo, para $C_0 > 0$, tem um mínimo e um máximo e se aproxima de 1 de cima. O módulo da velocidade de grupo se torna maior que 1 para ambos os modos em alguns valores de $x$, que é um comportamento que corresponde à violação de causalidade. Vale apena ressaltar também que os dois modos se fundem em um único modo para $\vartheta = \pi/2$ e que eles trocam seu papel por $\vartheta \in (\pi/2, \pi]$.

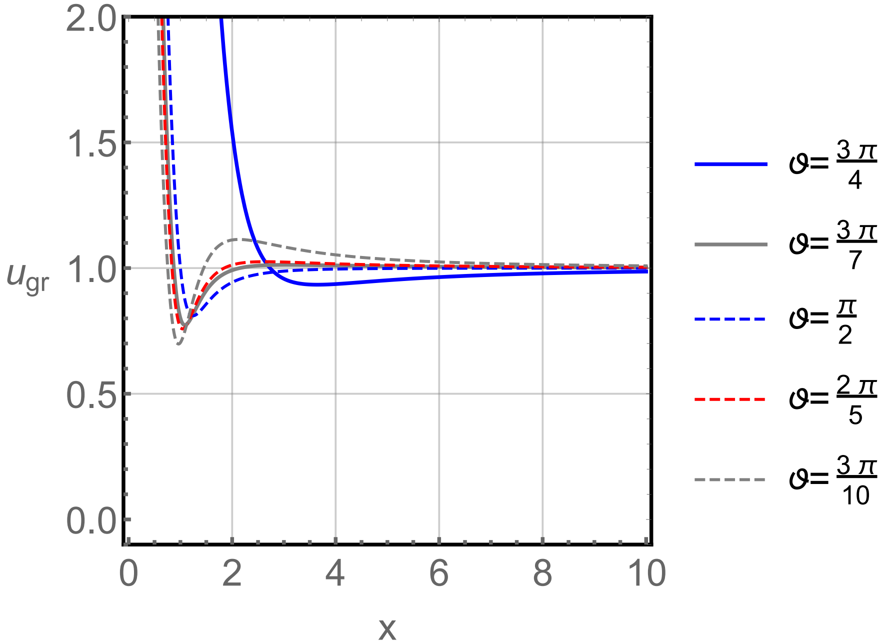


Figura 4.5: Velocidade de grupo para diferentes ângulos com $C_0$=1

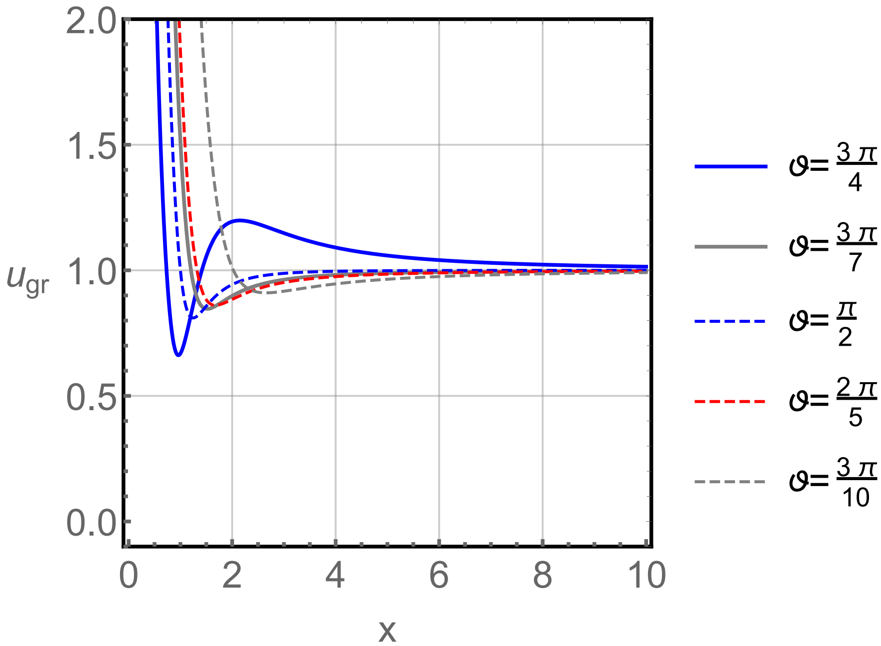


Figura 4.6: Velocidade de grupo para diferentes ângulos com $C_0$=-1

Nenhum dos modos se comportam como fótons padrão quando $\eta$ desaparece. Como os modos da velocidade de grupo exibem singularidades, são espúrias.

A compilação dos resultados obtidos parece revelar que esta eletrodinâmica de derivadas de ordens mais alta exibe apenas uma propagação de sinal bem comportada no limite de grande momento. Mas as relações de dispersão não podem ser válidas apenas para um determinado intervalo de momento, a menos que um corte fisicamente razoável possa ser imposto à teoria. Portanto, essa interpretação não será considerada. Para momentos pequenos, alguns dos modos se comportam como um modo Podolsky, onde o parâmetro Podolsky pode depender da direção do momento devido à anisotropia. Encontramos modos exóticos, como a relação de dispersão do modo positivo, do setor analisado anteriormente, para a escolha do parâmetro usado na Fig.4.3. Os outros que exibem características não físicas devem ser considerados espúrios.

## 4.6 Análise da unitariedade

A análise da unitariedade está ligada a norma dos estados definidos no espaço de Hilbert. Para que uma teoria seja unitária, a norma de todos os estados deve ser positiva. Quando os estados tem norma negativa a teoria é não unitária e os estados são chamados de estados fantasmas. Para analisar a unitariedade da eletrodinâmica de Podolsky, faremos uso do método da saturação do propagador que consiste na contração tensorial entre as correntes $J_\nu$, $J^\alpha$ e a matriz do propagador escrita em cada um dos seus pólos envolvendo o cálculo do resíduo do propagador. A saturação do propagador é dada por

$$SP = J^\nu \operatorname{Re} s\left[i\Delta_{\nu\alpha}\right] J^\alpha, \tag{4.160}$$

em que a corrente é real e satisfaz a lei de conservação $\partial^\nu J_\nu = 0$, que no espaço dos momento tem a forma $p^\nu J_\nu = 0$. Portanto, uma contração com esta corrente elimina todas as contribuições das quais a estrutura tensorial contém pelo menos um único 4-momento.

Considerando o propagador da Eq. (4.49), definido na ausência do termo Podolsky ($\theta^2 = 0$) , a saturação com as correntes será dada por

$$\begin{aligned} SP = iJ_\nu \mathrm{Res}\Big[&-\frac{1}{p^2\Gamma_{\theta=0}(p)}\left[\Gamma_{\theta=0}(p)\Theta^\nu_\alpha + \left(b' - \xi\Gamma_{\theta=0}(p)\right)\Omega^\nu_\alpha + \right.\\ &-iF\left(p\right)\left(B_\alpha p^\nu + B^\nu p_\alpha\right) - 2\eta^2 p^2 \Pi_{\theta=0}(p)\left(C^\nu B_\alpha + C_\alpha B^\nu\right) - iH\left(p\right)\left(C^\nu p_\alpha + C_\alpha p^\nu\right) + \\ &\left.\eta^4 p^2\ \left((C\cdot p)^2 - p^2C^2\right)B^\nu B_\alpha + \eta^4 p^2\left((B\cdot p)^2 - p^2 B^2\right)C^\nu C_\alpha\right]\Big] J^\alpha \end{aligned} \tag{4.161}$$

que se reduz a

$$\begin{aligned} SP = -i\mathrm{Res}\Big[&\frac{1}{p^2\Gamma_{\theta=0}(p)}\left[\Gamma_{\theta=0}(p)J^2 - 2\eta^2 p^2 \Pi_{\theta=0}(p)\left(C\cdot J\right)\left(B\cdot J\right) + \right.\\ &\left.\eta^4 p^2\ \left((C\cdot p)^2 - p^2C^2\right)\left(B\cdot J\right)^2 + \eta^4 p^2\left((B\cdot p)^2 - p^2B^2\right)\left(C\cdot J\right)^2\right]\Big], \end{aligned} \tag{4.162}$$

onde $\Gamma_{\theta=0}(p)$ é dado pela Eq. (4.77). Vale ressaltar que $\Gamma_{\theta=0}(p)$ deve ser analisado em relação ao resíduo de cada denominador.

Para o pólo $p^2 = 0$, que é o mesmo polo da teoria de Maxwell, o cálculo do resíduo fornece a saturação:

$$SP_{(p^2=0)} = i\text{Res}[\frac{1}{\theta^2\left(p^2 - 1/\theta^2\right)\Gamma\left(p\right)}[\Gamma\left(p\right)J^2 - 2\eta^2 p^2 \Pi\left(p\right)\left(C\cdot J\right)\left(B\cdot J\right) +$$
$$\eta^4 p^2\ \left(\left(C\cdot p\right)^2 - p^2C^2\right)\left(B\cdot J\right)^2 + \eta^4 p^2\left(\left(B\cdot p\right)^2 - p^2B^2\right)\left(C\cdot J\right)^2]]_{p^2=0} \quad (4.163)$$

$$SP_{(p^2=0)} = -iJ^2 = i\left(\mathbf{J}^2 - J_0^2\right). \quad (4.164)$$

No pólo $p^2 = 0$, vale $p_0^2 = \mathbf{p}^2$. Da lei de conservação de corrente, $\left(p_0 J_0 = \mathbf{p}\cdot\mathbf{J}\right)$, a eq. (4.164) fornece

$$SP_{(p^2=0)} = i\left(\mathbf{J}^2 - \frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{J}\right)^2}{p_0^2}\right) = \frac{i}{\mathbf{p}^2}\left(\mathbf{p}^2\mathbf{J}^2 - \left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{J}\right)^2\right), \quad (4.165)$$

$$SP_{(p^2=0)} = \frac{i}{\left|\mathbf{p}\right|^2}\left|\mathbf{p}\times\mathbf{J}\right|^2 > 0. \quad (4.166)$$

Logo a saturação no pólo $p^2 = 0$ é positiva, implicando que as excitações associadas com este modo propagante são unitárias, independentemente da configuração do tensor de fundo. Para qualquer que seja o coeficiente de $C_\alpha B_\lambda$,o pólo $p^2 = 0$ implicará sempre no mesmo resultado para a saturação positiva, cujo o resultado é sempre dado pela expressão (4.166). Portanto, deduzimos que uma quantização desse modo, que é o padrão da eletrodinâmica, corresponde ao fóton.

Para o segundo polo, o cálculo do resíduo em $\Gamma_{\theta=0}(p)$ funciona da mesma maneira, logo:

$$\text{Res}(SP)|_{\Gamma(p)=0} = -\text{i}\eta^2\Big\{\eta^2(B\cdot J)^2\left[(C\cdot p)^2 - C^2p^2\right] + \eta^2(C\cdot J)^2\left[(B\cdot p)^2 - B^2p^2\right]$$
$$- 2(B\cdot J)(C\cdot J)\Pi_{\theta=0}(p)\Big\}\Big|_{\Gamma(p)=0}. \quad (4.167)$$

A situação agora é mais complicada e requer uma análise cuidadosa para encontrar o sinal global da expressão entre chaves. Para melhor analisar o pólo $\Gamma_{\theta=0}(p)$ temos que calcular a unitariedade separada para cada um dos coeficientes do background analisados anteriormente.

Considerando a Eq. (4.69), uma avaliação de $_{\Gamma(p)=0}$ fornece a relação

$$\text{sgn}(\Pi_{\theta=0})\Pi(p)\big|_{\substack{\theta=0\\ \Gamma(p)=0}} = \eta^2\sqrt{\left[(B\cdot p)^2 - B^2p^2\right]\left[(C\cdot p)^2 - C^2p^2\right]}\Big|_{\Gamma(p)=0}. \quad (4.168)$$

A função de sinal no lado esquerdo deve ser levada em conta, pois $\Pi_{\theta=0}(p)$ pode ser uma quantidade negativa , enquanto o lado direito é manifestamente positivo. Além disso, precisamos novamente distinguir dois casos. Após investigar um grande número de setores com violação de Lorentz, deduzimos que $p^\mu \in M_1$ ou $p^\mu \in M_2$ com os dois conjuntos

$$M_1 \equiv \{(B\cdot p)^2 - B^2p^2 > 0, (C\cdot p)^2 - C^2p^2 > 0\}, \quad (4.169)$$

e

$$M_2 \equiv \{(B\cdot p)^2 - B^2p^2 < 0, (C\cdot p)^2 - C^2p^2 < 0\}. \quad (4.170)$$

Ambas as opções asseguram $\Pi(p)$ real. Para a primeira opção, o resíduo pode ser expresso em termos do quadrado de uma soma de dois termos. Para a segunda opção, um sinal de menos global deve ser retirado de toda a expressão, invertendo o sinal de saturação global. Os resíduos podem então ser escritos da seguinte forma:

$$\mathrm{Res}(SP)|_{\Gamma(p)=0} = \mathrm{i}\eta^4 \left\{ \begin{array}{l} -\Big\{(B\cdot J)\sqrt{(C\cdot p)^2 - C^2p^2} \\ -\,\mathrm{sgn}(\Pi_{\theta=0})(C\cdot J)\sqrt{(B\cdot p)^2 - B^2p^2}\Big\}^2\Big|_{\Gamma(p)=0} \end{array} \right. , \tag{4.171}$$

para $p^\mu \in M_1$ e

$$\mathrm{Res}(SP)|_{\Gamma(p)=0} = \mathrm{i}\eta^4 \left\{ \begin{array}{l} \Big\{(B\cdot J)\sqrt{|(C\cdot p)^2 - C^2p^2|} \\ +\,\mathrm{sgn}(\Pi_{\theta=0})(C\cdot J)\sqrt{|(B\cdot p)^2 - B^2p^2|}\Big\}^2\Big|_{\Gamma(p)=0} \end{array} \right. , \tag{4.172}$$

para $p^\mu \in M_2$.

Portanto, $\mathrm{Im}[\mathrm{Res}(SP)|_{\Gamma(p)=0}] < 0$ para o primeiro caso, que é um comportamento que indica a quebra de unitariedade. O segundo caso se comporta de maneira oposta, a unitariedade é preservada. A configuração paridade-ímpar com $(C_\mu) = (C_0, \mathbf{0})$, $(B_\mu) = (0, \mathbf{B})$ analisada no setor anisotrópico de paridade par é coberto pelo último caso. Encontramos

$$(B\cdot p)^2 - B^2p^2 = -\frac{|\mathbf{B}|}{2\eta^2|\mathbf{C}|} < 0\,, \quad (C\cdot p)^2 - C^2p^2 = -\frac{|\mathbf{C}|}{2\eta^2|\mathbf{B}|} < 0\,, \tag{4.173}$$

é por isso que $p^\mu \in M_2$ neste setor. Assim, a unitariedade é preservada para essa configuração.

Para o setor anisotrópico de paridade impar afirma que $(C\cdot p)^2 - C^2p^2 = C_0^2\mathbf{p}^2 > 0$. No entanto, é um pouco mais complicado avaliar a segunda condição. A inequação $(B\cdot p)^2 - B^2p^2 \geq 0$ a ser verificada pode ser convertida em uma forma mais transparente como segue,

$$2x^4\sin^4\vartheta_B\cos^2\vartheta_B + \left\{3 + \cos(2\vartheta_B) - 4\,\mathrm{sgn}(C_0)\cos(\vartheta_B)\sqrt{1 + x^4\sin^4\vartheta_B}\right\} \geq 0\,, \tag{4.174a}$$

que é equivalente a

$$2\left\{1 - \mathrm{sgn}(C_0)\cos\vartheta_B\sqrt{1 + x^4\sin^4\vartheta_B}\right\}^2 \geq 0\,. \tag{4.174b}$$

Este último envolve o ângulo $\vartheta_B$ e a quantidade adimensional $x = \eta|\mathbf{p}|\sqrt{|\mathbf{B}||C_0|}$. Para $C_0 > 0$, o sinal de igualdade é válido somente para $\vartheta_B = 0$, enquanto para $C_0 < 0$ é válido para $\vartheta_B = \pi$. Além destes valores muito especiais nos limites do intervalo para $\vartheta_B$, a condição $(B\cdot p)^2 - B^2p^2 > 0$ é cumprida manifestamente, em que $p^\mu \in M_1$. Portanto, de acordo com nosso critério, há problemas com unitariedade para este setor.

Existe uma possibilidade alternativa de calcular o propagador saturado. Usando os operadores de projeção transversal (T) e longitudinal ($L$) $\Theta_{\mu\nu}$ e $\Omega_{\mu\nu}$ no espaço dos momentos, o propagador pode ser decomposto em quatro partes $\Delta^{TT}_{\mu\nu} \equiv \Theta_{\mu\alpha}\Delta^{\alpha\beta}\Theta_{\beta\nu}$, $\Delta^{TL}_{\mu\nu} \equiv \Theta_{\mu\alpha}\Delta^{\alpha\beta}\Omega_{\beta\nu}$,

$\Delta^{LT}_{\mu\nu} \equiv \Omega_{\mu\alpha}\Delta^{\alpha\beta}\Theta_{\beta\nu}$, e $\Delta^{LL}_{\mu\nu} \equiv \Omega_{\mu\alpha}\Delta^{\alpha\beta}\Omega_{\beta\nu}$. Depois de realizar contrações com a corrente, somente $\Delta^{TT}_{\mu\nu}$ irá sobreviver. Seguindo este procedimento, o propagador saturado pode ser lançado na forma

$$SP = J^\mu \Delta^{TT}_{\mu\nu} J^\nu \,, \tag{4.175}$$

onde

$$\Delta^{TT}_{\mu\nu} = -\mathrm{i}\frac{(M^{-1})_{\mu\nu}}{p^2} \,, \tag{4.176a}$$

$$M^{\mu\nu} = \left[(1-\theta^2 p^2)g - 2\eta^2 D^{TT} p^2\right]^{\mu\nu} \,, \tag{4.176b}$$

$$(D^{TT})_{\mu\nu} \equiv \Theta_{\mu\alpha} D^{\alpha\beta}\Theta_{\beta\nu} \,. \tag{4.176c}$$

Assim, o comportamento da unitariedade é completamente controlado pela parte totalmente transversa da matriz $D_{\mu\nu}$. Executando uma decomposição formal parcial da fração, o polo padrão $p^2 = 0$ pode ser separado das demais expressões envolvendo o parâmetro de Podolsky e o coeficiente de violação de Lorentz na forma:

$$\Delta^{TT}_{\mu\nu} = -\mathrm{i}\left\{\frac{g_{\mu\nu}}{p^2} + (\theta^2\delta + 2\eta^2 D^{TT})_\mu{}^\alpha (M^{-1})_{\alpha\nu}\right\} \,. \tag{4.177}$$

Usando a decomposição explícita de $D_{\mu\nu}$ em termos de dois 4 vetores propostos na Eq. (4.34) e $\theta = 0$, podemos deduzir que $\det(M) = \Gamma(p)$ com $\Gamma(p)$ da Eq. (4.77) para $\theta = 0$. O resultado da Eq. (4.177) é adequado para investigar unitariedade para o caso em que $\theta \neq 0$ e $D_{\mu\nu}$ é geral em que a forma não depende de uma decomposição de dois 4-vetores .

Para concluir esta seção, a violação da unitariedade parece estar conectada ao aparecimento de derivadas temporais adicionais nas contribuições violadoras de Lorentz da densidade de Lagrange, das Eqs (4.31), (4.33).

# Capítulo 5

# Eletrodinâmica Clássica

## 5.1 Introdução

Neste capítulo faremos um estudo das soluções clássicas da eletrodinâmica de Podolsky modificada por termo de altas derivadas CPT-par de violação de Lorentz. O objetivo é mostrar como os termos de violação modificam as soluções da eletrodinâmica de Podolsky. Através da equação de movimento obtemos as equações de onda para o potencial escalar e vetorial, em que usamos as transformadas de Fourier e obtemos a função de green que é a solução para o potencial escalar e vetorial. Com o potencial em mãos podemos obter os campos elétricos e magnéticos e analisar as contribuições do tensor de violação para os campos.

## 5.2 Equação de movimento e solução clássica

A equação de movimento modificada para derivadas de ordem superior é dada pela equação de Euler Lagrange modificada

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\kappa} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\rho A_\kappa\right)} + \partial_\nu \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\rho \partial_\nu A_\kappa\right)} = 0. \tag{5.1}$$

A Lagrangiana de Podolsky modificada pelo termo de violação de Lorentz é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{2} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^\lambda_\beta + \eta^2 \partial_\sigma F^{\sigma\beta} \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} D_{\beta\alpha} - j_\mu A^\mu. \tag{5.2}$$

Através da equação de Euler Lagrange modificada obtemos a equação de movimento, para a eletrodinâmica de Podolsky modificada pelo termo de violação de Lorentz dada por:

$$\left(1 + \theta^2 \Box\right) \partial_\alpha F^{\alpha\kappa} + 2\eta^2 \left(D^\kappa{}_\alpha \Box \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} - D^\rho{}_\alpha \partial^\kappa \partial_\rho \partial_\lambda F^{\lambda\alpha}\right) = j^\kappa. \tag{5.3}$$

Escrevendo a equação de movimento em termos dos campos $A^\alpha$, obtemos:

$$\left(1 + \theta^2 \Box\right) \left(\partial_\alpha F^{\alpha\kappa}\right) + 2\eta^2 \left(D^\kappa{}_\alpha \Box - D^\rho{}_\alpha \partial^\kappa \partial_\rho\right) \left(\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}\right) = j^\kappa, \tag{5.4}$$

$$\left(1+\theta^2\Box\right)\left(\Box A^\kappa-\partial^\kappa\partial_\alpha A^\alpha\right)+2\eta^2\left(D^\kappa{}_\alpha\Box-D^\rho{}_\alpha\partial^\kappa\partial_\rho\right)\left(\Box A^\alpha-\partial^\alpha\partial_\lambda A^\lambda\right)=j^\kappa, \tag{5.5}$$

usando o gauge de Lorenz $\partial_\alpha A^\alpha=0$, podemos escrever

$$\left(1+\theta^2\Box\right)\Box A^\kappa+2\eta^2\left(D^\kappa{}_\alpha\Box-D^\rho{}_\alpha\partial^\kappa\partial_\rho\right)\Box A^\alpha=j^\kappa, \tag{5.6}$$

$$\left[\left(1+\theta^2\Box\right)\Box g^{\kappa\alpha}+2\eta^2D^{\kappa\alpha}\Box^2-2\eta^2D^{\rho\alpha}\Box\partial^\kappa\partial_\rho\right]A_\alpha=j^\kappa, \tag{5.7}$$

$$\Lambda^{\kappa\alpha}A_\alpha=j^\kappa,$$

onde

$$\Lambda^{\kappa\alpha}=\left(1+\theta^2\Box\right)\Box g^{\kappa\alpha}+2\eta^2D^{\kappa\alpha}\Box^2-2\eta^2D^{\rho\alpha}\Box\partial^\kappa\partial_\rho.$$

Para solucionar $A_\alpha$, temos que inverter o operador $\Lambda^{\kappa\alpha}$. A solução é dada por:

$$A_\alpha=\left(\Lambda^{\kappa\alpha}\right)^{-1}J^\kappa\quad\rightarrow\quad A_\alpha=G_{\alpha\kappa}J^\kappa$$

que satisfaz a identidade

$$\Lambda^{\kappa\alpha}G_{\alpha\mu}=\delta^\kappa_\mu.$$

Propondo

$$G_{\alpha\mu}=ag_{\alpha\mu}+bD_{\alpha\mu}+cD^\rho_\mu\ \partial_\alpha\partial_\rho, \tag{5.8}$$

temos

$$\left[\left(1+\theta^2\Box\right)\Box g^{\kappa\alpha}+2\eta^2D^{\kappa\alpha}\Box^2-2\eta^2D^{\rho\alpha}\partial^\kappa\partial_\rho\Box\right]\left[ag_{\alpha\mu}+bD_{\alpha\mu}+cD^\rho_\mu\ \partial_\alpha\partial_\rho\right]=\delta^\kappa_\mu,$$

considerando apenas a primeira ordem do background

$$\left(1+\theta^2\Box\right)\Box\left[a\delta^\kappa_\mu+bD^\kappa_\mu+cD^{\kappa\lambda}\partial_\lambda\partial_\mu\right]+2\eta^2\Box^2aD^\kappa_\mu-2a\eta^2D^\kappa{}_\lambda\Box\partial^\lambda\partial_\mu=\delta^\kappa_\mu,$$

obtemos os valores para as constantes $a, b$ e $c$, dadas por

$$a=\frac{1}{\left(1+\theta^2\Box\right)\Box}, \tag{5.9}$$

$$b=-\frac{2\eta^2}{\left(1+\theta^2\Box\right)^2} \tag{5.10}$$

$$c=\frac{2\eta^2}{\Box\left(1+\theta^2\Box\right)^2}. \tag{5.11}$$

A expressão (5.8) tem a forma

$$G_{\alpha\mu}=\frac{1}{\left(1+\theta^2\Box\right)\Box}\left[g_{\alpha\mu}-\frac{2\eta^2\Box}{\left(1+\theta^2\Box\right)}D_{\alpha\mu}+\frac{2\eta^2}{\left(1+\theta^2\Box\right)}D^\rho_\mu\ \partial_\alpha\partial_\rho\right]. \tag{5.12}$$

Substituindo em

$$A_\alpha=G_{\alpha\kappa}J^\kappa,$$

temos

$$A_\alpha=\frac{1}{\left(1+\theta^2\Box\right)\Box}\left[g_{\alpha\kappa}-\frac{2\eta^2\Box}{\left(1+\theta^2\Box\right)}D_{\alpha\kappa}+\frac{2\eta^2}{\left(1+\theta^2\Box\right)}D^\rho_\kappa\ \partial_\alpha\partial_\rho\right]J^\kappa. \tag{5.13}$$

No espaço dos momentos podemos escvrever a expressão para o potencial

$$A_\alpha=-\frac{1}{p^2\left(1-\theta^2p^2\right)}\left[J_\alpha+\frac{2\eta^2p^2}{\left(1-\theta^2p^2\right)}D_{\alpha\kappa}J^\kappa-\frac{2\eta^2}{\left(1-\theta^2p^2\right)}D_{\rho\kappa}\ J^\kappa p_\alpha p^\rho\right]. \tag{5.14}$$

### 5.2.1 Solução estacionária para o potencial escalar

Fixando $\alpha = 0$ na expressão (5.14), a solução estacionária para o potencial escalar assume a forma

$$A_0 = \frac{1}{\mathbf{p}^2\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}\left[J_0 - \frac{2\eta^2\mathbf{p}^2}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}\left(D_{00}J^0 + D_{0i}J^i\right)\right]. \tag{5.15}$$

Para $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ e $J_0 \neq 0$,temos:

$$A_0 = \frac{1}{\mathbf{p}^2\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}\left[J_0 - \frac{2\eta^2\mathbf{p}^2}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}D_{00}J^0\right]. \tag{5.16}$$

Usando transformada de Fourier e considerando a carga pontual na origem, temos:

$$A_0 = \frac{q}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} - \frac{2q\eta^2 D_{00}}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)^2}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}. \tag{5.17}$$

Resolvendo a primeira integral no plano complexo, em que os detalhes estão no apêndice A, temos

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} - \theta^2\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}, \tag{5.18}$$

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \frac{2\pi^2}{r}\left(1 - e^{-M_p r}\right), \tag{5.19}$$

onde $M_p = 1/\theta$. Para resolver a segunda integral, podemos usar o resultado obtido em (5.19)

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)^2}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{1}{2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\right), \tag{5.20}$$

logo

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)^2}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{\pi^2}{\theta r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(1 - e^{-M_p r}\right) = \frac{\pi^2}{\theta^3}e^{-M_p r}. \tag{5.21}$$

A solução do potencial escalar (5.17) para uma carga pontual, com violação de Lorentz é dada por:

$$A_0 = \frac{q}{4\pi r}\left(1 - e^{-M_p r}\right) - \frac{q}{4\pi}M_p^3\eta^2 D_{00}e^{-M_p r}, \tag{5.22}$$

para o background de violação $D_{00} = 0$, obtemos:

$$A_0 = \frac{q}{4\pi r}\left(1 - e^{-M_p r}\right), \tag{5.23}$$

que é o potencial escalar elétrico da teoria de Podolsky.

Para o potencial escalar com violação de Lorentz temos que no limite $\theta \to 0$ ou $M_p \to \infty$ a exponencial $e^{-M_p r}$ cai mais rápido, logo a solução (5.22) reproduz o comportamento puro coulombiano. No limite de grandes distâncias, $r \to \infty$, a solução (5.22) também reproduz o comportamento puro coulombiano. No limite de pequenas distâncias da fonte, $r \to 0$, temos $e^{-M_p r} \sim (1 - M_p r)$, e a equação leva ao resultado constante

$$A_0 = \frac{q}{4\pi} M_p - \frac{q}{4\pi} M_p^3 \eta^2 D_{00}, \tag{5.24}$$

evidenciando que na eletrodinâmica de Podolsky com violação, os campos também são constantes nas proximidades das cargas pontuais. Que é uma peculiaridade da teoria.

Para $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$ e $J_0 = 0$,o potencial escalar

$$A_0 = -\frac{2\eta^2 \mathbf{p}^2}{\mathbf{p}^2 \left(1 + \theta^2 \mathbf{p}^2\right)^2} D_{0i} J^i, \tag{5.25}$$

pode ser reescrito usando transformada de Fourier

$$A_0 = -\frac{2\eta^2 q \left(D_{0i} \mathbf{v}^i\right)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(1 + \theta^2 \mathbf{p}^2\right)^2} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}, \tag{5.26}$$

cuja solução tem a forma

$$A_0 = -\left(D_{0i} \mathbf{v}^i\right) \frac{q}{4\pi} M_p^3 \eta^2 e^{-M_p r}. \tag{5.27}$$

Para o potencial escalar com violação de Lorentz (5.27) temos que a presença do termo de violação faz com que a corrente induza a um potencial escalar, não existindo um análogo na teoria de Maxwell puro. Vemos que no limite $M_p \to \infty$ e para grandes distâncias, $r \to \infty$,o potencial vai a zero. No limite de pequenas distâncias da fonte, $r \to 0$, temos $e^{-M_p r} \sim (1 - M_p r)$, e a equação (5.27) leva ao resultado constante

$$A_0 = -\left(D_{0i} \mathbf{v}^i\right) \frac{q}{4\pi} M_p^3 \eta^2. \tag{5.28}$$

### 5.2.2 Solução estacionária para o potencial vetorial

Para a solução estacionária fixando $\alpha = i$ a expressão (5.14), assume a forma

$$\begin{aligned} A_i \quad = \quad & \frac{1}{\mathbf{p}^2 \left(1 + \theta^2 \mathbf{p}^2\right)} \left[ J_i - \frac{2\eta^2 \mathbf{p}^2}{\left(1 + \theta^2 \mathbf{p}^2\right)} \left(D_{i0} J^0 + D_{il} J^l\right) + \right. \\ & \left. + \frac{2\eta^2}{\left(1 + \theta^2 \mathbf{p}^2\right)} \left(D_{lj} \;\; J^j p_i p_l + D_{j0} \;\; J^0 p_i p_j\right) \right], \end{aligned} \tag{5.29}$$

observando a expressão (5.29) vemos que os termos $D_{j0} \;\; J^0 p_i p_j$, $D_{lj} \;\; J^j p_i p_l$ tem a forma de um gradiente, logo quando aplicado o rotacional para calcular o campo magnético esses termos serão nulos. Assim, o potencial vetorial pode ser reescrito na forma

$$A_i = \frac{1}{\mathbf{p}^2 \left(1 + \theta^2 \mathbf{p}^2\right)} \left[ J_i - \frac{2\eta^2 \mathbf{p}^2}{\left(1 + \theta^2 \mathbf{p}^2\right)} \left(D_{i0} J^0 + D_{il} J^l\right) \right]. \tag{5.30}$$

Para a configuração $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$ e $J_0 = 0$, temos:

$$A_i = \frac{1}{\mathbf{p}^2\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}\left[\mathbf{J} - \frac{2\eta^2\mathbf{p}^2}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}\left(D_{il}J^l\right)\right].$$

Usando a transformada de Fourier, podemos escrever:

$$A_i = \int \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{p}^2\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}\frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} - \int \frac{1}{\mathbf{p}^2\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}\frac{2\eta^2\mathbf{p}^2}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}\left(D_{il}J^l\right)\frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}, \tag{5.31}$$

considerando uma carga pontual

$$\mathbf{J}\left(p\right) = q\mathbf{v}, \tag{5.32}$$

temos que

$$A_i = \frac{q\mathbf{v}}{\left(2\pi\right)^3}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} - \frac{2\eta^2 q\left(D_{il}\mathbf{v}^l\right)}{\left(2\pi\right)^3}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)^2}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}.$$

Fazendo os mesmos procedimentos e usando os resultados já obtidos, temos:

$$A_i = \frac{q\mathbf{v}_i}{4\pi r}\left(1 - e^{-M_p r}\right) - \frac{q}{4\pi}M_p^3\eta^2\left(D_{il}\mathbf{v}^l\right)e^{-M_p r}, \tag{5.33}$$

que é o potencial vetorial para a eletrodinâmica de Podolsky com violação de Lorentz.

Para $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ e $J_0 \neq 0$, temos:

$$A_i = -\frac{2\eta^2\mathbf{p}^2}{\mathbf{p}^2\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)^2}D_{i0}J^0. \tag{5.34}$$

Usando a transformada de Fourier

$$A_i = -\frac{2q\eta^2 D_{i0}}{\left(2\pi\right)^3}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)^2}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}},$$

e resolvendo a integral no plano complexo, temos que a solução para o potencial vetorial na cofiguração $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ e $J_0 \neq 0$, tem a forma dada por:

$$A_i = -\frac{q}{4\pi}\eta^2 M_p^3 D_{i0}e^{-rM_p}. \tag{5.35}$$

Temos que a presença do tensor de violação $D_{i0}$ faz com que uma carga produza um potencial vetorial.

Os campos elétricos e magnéticos para uma carga pontual podem ser obtido para as configurações:

**Para a configuração $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$ e $J_0 = 0$:**

O potencial vetorial

$$A_i = \frac{q\mathbf{v}_i}{4\pi r}\left(1 - e^{-M_p r}\right) - \frac{q}{4\pi}M_p^3\eta^2\left(D_{il}\mathbf{v}^l\right)e^{-M_p r}, \tag{5.36}$$

produz o campo magnético $\mathbf{B}$, que pode ser obtido usando

$$\mathbf{B} = \left(\nabla \times \mathbf{A}\right)_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k. \tag{5.37}$$

Logo a expressão para o campo magnético é dado a seguir:

$$\mathbf{B}_i = \frac{q}{4\pi}\left[-\frac{\left(1 - e^{-M_p r}\right)}{r^3} + \frac{M_p}{r^2}e^{-M_p r}\right]\left(\mathbf{r} \times \mathbf{v}\right)_i + \frac{q}{4\pi}M_p^4\eta^2\frac{\epsilon_{ijk}r_j\left(D_{kl}\mathbf{v}^l\right)}{r}e^{-M_p r}, \tag{5.38}$$

onde

$$\epsilon_{ijk}r_j\left(D_{kl}\mathbf{v}^l\right) = \left(\mathbf{r} \times \left(\mathbb{D} \cdot \mathbf{v}\right)\right)_i,$$

logo

$$\mathbf{B}_i = \frac{q}{4\pi}\left[-\frac{\left(1 - e^{-M_p r}\right)}{r^3} + \frac{M_p}{r^2}e^{-M_p r}\right]\left(\mathbf{r} \times \mathbf{v}\right)_i + \frac{q}{4\pi}M_p^4\eta^2\frac{\left(\mathbf{r} \times \left(\mathbb{D} \cdot \mathbf{v}\right)\right)_i}{r}e^{-M_p r}. \tag{5.39}$$

No limite em que $M_p \to \infty$ a exponencial $e^{-M_p r}$ cai mais rápido, logo

$$\mathbf{B}_i = -\frac{q}{4\pi}\frac{1}{r^2}\left(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}\right)_i, \tag{5.40}$$

que é um termo de monopolo. No limite de grandes distâncias, $r \to \infty$, o campo magnético vai a zero. No limite de pequenas distâncias temos que $e^{-M_p r} \sim (1 - M_p r)$

$$\mathbf{B}_i = -\frac{q}{4\pi r}M_p^2\left(\mathbf{r} \times \mathbf{v}\right)_i + \frac{q}{4\pi}M_p^4\eta^2\frac{\left(\mathbf{r} \times \left(\mathbb{D} \cdot \mathbf{v}\right)\right)_i}{r} - \frac{q}{4\pi}M_p^4\eta^2\left(\mathbf{r} \times \left(\mathbb{D} \cdot \mathbf{v}\right)\right)_i M_p, \tag{5.41}$$

$$\mathbf{B}_i = -\frac{q}{4\pi}M_p^2\left(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}\right)_i + \frac{q}{4\pi}M_p^4\eta^2\left(\hat{\mathbf{r}} \times \left(\mathbb{D} \cdot \mathbf{v}\right)\right)_i. \tag{5.42}$$

Se a velocidade for constante, o campo magnético é constante.

Por outro lado, o potencial escalar

$$A_0 = -\left(D_{0i}\mathbf{v}^i\right)\frac{q}{4\pi}M_p^3\eta^2 e^{-M_p r}, \tag{5.43}$$

produz o campo elétrico, dado por

$$\mathbf{E} = -\nabla A_0,$$

$$\mathbf{E} = = -\frac{q}{4\pi}M_p^4\eta^2\left(D_{0i}\mathbf{v}^i\right)\frac{\mathbf{r}}{r}e^{-M_p r}. \tag{5.44}$$

Temos corrente gerando campo elétrico. Nos limites $M_p \to \infty$, $r \to \infty$, o campo elétrico é nulo. No limite de pequenas distâncias, $r \to 0$, temos

$$\mathbf{E} = = -\frac{q}{4\pi}M_p^4\eta^2\left(D_{0i}\mathbf{v}^i\right)\hat{\mathbf{r}}.$$

**Para a configuração $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ e $J_0 \neq 0$ :**

O potencial vetorial

$$A_i = -\frac{q}{4\pi}\eta^2 M_p^3 D_{i0} e^{-M_p r}, \tag{5.45}$$

gera o campo magnético $\mathbf{B}_i = (\nabla \times \mathbf{A})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k$,

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi} M_p^4 \eta^2 \frac{\epsilon_{ijk} r_j D_{k0}}{r} e^{-M_p r}, \tag{5.46}$$

onde $D_{k0} = D_{0k} = D_{01} + D_{02} + D_{03}$, podemos escrever na forma

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi} M_p^4 \eta^2 \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{D}_0)_i}{r} e^{-M_p r}.$$

Temos carga gerando campo magnético. Nos limites $M_p \to \infty$, $r \to \infty$, o campo magnético é nulo. No limite de pequenas distâncias, $r \to 0$, temos

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi} M_p^4 \eta^2 \left(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{D}_0\right)_i e^{-M_p r}.$$

O potencial escalar,

$$A_0 = \frac{q}{4\pi r}\left(1 - e^{-M_p r}\right) - \frac{q}{4\pi} M_p^3 \eta^2 D_{00} e^{-M_p r}, \tag{5.47}$$

produz o campo elétrico, $\mathbf{E} = -\nabla A_0$,

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi}\left(1 - e^{-M_p r}\right)\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{q}{4\pi} M_p e^{-M_p r}\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{q}{4\pi} M_p^4 \eta^2 D_{00} e^{-M_p r}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{5.48}$$

No limite em que $M_p \to \infty$ a exponencial $e^{-M_p r}$ cai mais rápido, logo

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \tag{5.49}$$

que é um termo de monopolo. No limite de grandes distâncias, $r \to \infty$, o campo elétrico vai a zero. No limite de pequenas distâncias temos

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi} M_p^2 \left(1 - M_p^2 \eta^2 D_{00}\right)\hat{\mathbf{r}}. \tag{5.50}$$

**Gauge generalizado com violação de Lorentz**

Podemos observar que através da equação de movimento (5.3), para a eletrodinâmica de Podolsky modificada pelo termo de violação de Lorentz podemos construir um novo gauge generalizado

$$\left(1 + 2\theta^2\Box\right)\Box A^\kappa - \partial^\kappa\left[\left(1 + 2\theta^2\Box\right)\partial_\lambda A^\lambda + 2\eta^2 D^\rho{}_\alpha \partial_\rho \Box A^\alpha - 2\eta^2 D^\rho{}_\alpha \partial_\rho \partial^\alpha \partial_\lambda A^\lambda\right] \tag{5.51}$$

$$-2\eta^2 D^\kappa{}_\alpha \Box \partial^\alpha \partial_\lambda A^\lambda + 2\eta^2 D^\kappa{}_\alpha \Box^2 A^\alpha = j^\kappa, \tag{5.52}$$

dado por

$$\left(1 + 2\theta^2\Box\right)\partial_\lambda A^\lambda + 2\eta^2 D^\rho{}_\alpha \partial_\rho \Box A^\alpha - 2\eta^2 D^\rho{}_\alpha \partial_\rho \partial^\alpha \partial_\lambda A^\lambda = 0. \tag{5.53}$$

Logo a equação de movimento assume a forma

$$\left(1+2\theta^2\Box\right)\Box A^\kappa - 2\eta^2 D^\kappa{}_\alpha\Box\partial^\alpha\partial_\lambda A^\lambda + 2\eta^2 D^\kappa{}_\alpha\Box^2 A^\alpha = j^\kappa. \tag{5.54}$$

Através da equação de movimento fazendo os mesmos procedimentos das equações (5.5) a (5.14), obtemos uma expressão para o potencial

$$A_\alpha = -\frac{1}{p^2\left(1-\theta^2 p^2\right)}\left[J_\alpha + \frac{2\eta^2 p^2}{\left(1-\theta^2 p^2\right)} D_{\alpha\kappa} J^\kappa\right]. \tag{5.55}$$

Podemos observar que a expressão (5.14) obtida usando o gauge de Lorentz se diferencia da expressão (5.55), apenas pela adição dos termos $D_{j0}\ \ J^0 p_i p_j$, $D_{lj}\ \ J^j p_i p_l$ nas configurações $\mathbf{J}$ =0, $J^0 \neq 0$ e $\mathbf{J} \neq 0$, $J^0 = 0$ simultaneamente. Esse termo adicional, tem a forma de um gradiente que quando aplicado o rotacional vai a zero. Não alterando os resultados obtidos para os campos magnéticos de ambas as configurações $\mathbf{J}$ =0, $J^0 \neq 0$ e $\mathbf{J} \neq 0$, $J^0 = 0$. Mostrando assim que o gauge generalizado com violação

$$\left(1+2\theta^2\Box\right)\partial_\lambda A^\lambda + 2\eta^2 D^\rho{}_\alpha\partial_\rho\Box A^\alpha - 2\eta^2 D^\rho{}_\alpha\partial_\rho\partial^\alpha\partial_\lambda A^\lambda = 0, \tag{5.56}$$

é de fato consistente. Pois os campos elétricos e magnéticos gerados são os mesmos para ambos os gauges.

# Capítulo 6

# Conclusão

Neste trabalho fizemos um breve estudo do setor de gauge, CPT-par, do Modelo Padrão Estendido. Analisamos a causalidade e estabilidade da eletrodinâmica CPT-par, com VL em que substituímos o tensor $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ pelo tensor simétrico $D_{\nu\mu}$ cuja a parametrização é dada por $D_{\nu\mu} = (C_\nu B_\mu + C_\mu B_\nu)/2$. Usando a parametrização calculamos o propagador e através dos pólos do propagador obtemos as relações de dispersão para analisar a causalidade e estabilidade da teoria. Concluímos que o coeficiente de paridade par, $C_\alpha = (C_0, 0)$, $B_\alpha = (B_0, 0)$ é estável e causal apenas para $C_0 B_0 < 0$ e menor que 1. O coeficiente de paridade par $C_\alpha = (0, \mathbf{C}), B_\alpha = (0, \mathbf{B})$, para ambas as relações de dispersão (2.16) e (2.18) e os setores de paridade ímpar será causal se algumas considerações forem satisfeitas.

No capítulo 4, fizemos um estudo da teoria de Podolsky que é uma teoria de derivadas superiores, que tem como objetivo eliminar as divergências do eletromagnetismo. Calculamos as equações de movimento, obtemos a solução da função de Green para o potencial escalar e vetorial. Mostramos que no limite em que o parâmetro de Podolsky $\theta \to 0$ e no limite de grandes distâncias, $|\mathbf{r}| \to \infty$, o potencial escalar reproduz o comportamento puro coulombiano. Porém, no limite de pequenas distâncias da fonte, $|\mathbf{r}| \to 0$, obtemos uma resultado constante, $A_0(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi} M_p$, evidenciando que na eletrodinâmica de Podolsky os campos nao divergem nas proximidades das cargas pontuais. Analisamos a estabilidade, causalidade e unitariedade da teoria através da relaçao de dispersão obtida dos pólos do propagador, em que o cálculo do propagador, foi realizado usando o gauge de Lorentz. Mostramos que a teoria de Podolsky é estável e causal. A unitariedade só é satisfeita apenas para o modo sem massa. Para o modo massivo apresenta a não unitariedade, o que é comum em teorias de derivadas superiores. Mostramos também o cálculo do propagador usando o gauge generalizado e vimos que, apesar do gauge modificado ser o mais apropriado para tratar os aspectos de quantização desta teoria, nada modifica os resultados de causalidade e unitariedade da teoria.

No capítulo 5, estudamos teorias de derivadas superiores com violação de lorentz. Onde introduzimos o termo de violação de Lorentz, $\eta^2 \partial_\sigma F^{\sigma\beta} \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} \tilde{D}_{\beta\alpha}$, na lagrangeana de Podolsky e analisamos alguns casos. Foram considerados aspectos como a avaliação do propagador, as relações de dispersão e os modos de propagação. Primeiro, uma eletrodinâmica de Maxwell modificada por um termo anisotrópico do tipo Podolsky de dimensão de massa 6 foi examinada. Para determinadas escolhas de parâmetros, todos os modos, que são afetados pelo termo de maior dimensão, exibem um comportamento não físico. O módulo da velocidade de grupo foi demonstrada como maior que 1 o que implica em quebra da causalidade, para ter singularidades ou desaparecer por pequenos momentos (ausência de propagação). Os dois primeiros comportamentos descritos são interpretados como não físicos, e nos referimos às relações de dispersão tendo características como espúrias. Velocidade decrescente de grupo ou velocidade de frente de onda para momentos pequenos indicam apenas que esses modos se desvinculam do regime de baixa energia. De acordo com os critérios utilizados no trabalho, um modo dotado de tais propriedades é chamado de exótico, desde que não envolva singularidades nem velocidades superluminais de grupo ou frente de onda. Os resultados obtidos indicam que uma eletrodinâmica modificada por termo de violação de Lorentz com derivada superior só pode fornecer uma propagação física de sinais no limite de grande momento. Tal interpretação poderia recuperar um comportamento significativo da teoria no caso em que é possível afirmar um cutoff adequado sem gerar efeitos ruins. Para pequenos momento, alguns dos modos correspondem a modificações violadoras de Lorentz da relação de dispersão do tipo Podolsky, que não são necessariamente não-físicas. Também encontramos relações de dispersão que fornecem velocidades de grupo maiores que 1 ou divergentes em alguns pontos, que são comportamentos que caracterizam modos de propagação espúrios. Uma breve discussão de unitariedade para os setores analisados foi feita também. O resultado de nossa análise foi que derivadas de tempo adicionais na densidade de Lagrange provavelmente estragariam a unitariedade. Este comportamento é esperado e já foi observado em teorias de derivadas superiores invariantes de Lorentz, bem como em modificações de derivadas superiores com violação de Lorentz do setor de fótons e férmions.

# Referências Bibliográficas


[1] A. A. Slavnov, Teor. Mat. Fiz 13 174 (1972);

[2] D. A. Eliezer and R. P. Woodard, Nucl. Phys. B325 389 (1989);

[3] C. S. Chu, J. Lukierski, and W. J. Zakrzewski, Nucl. Phys. B632 219 (2002);

[4] J. Z. Simon, Phys. Rev. D 41 3720 (1990);

[5] K. S. Stelle, Gen. Rel. Grav. 9 353 (1978).

[6] A. I. Alekseev, B. A. Arbuzov and V. A. Baikov - TMF, 52, 187–198 (1982);

[7] B. Podolsky, Phys. Rev. 62, 68 (1942); B. Podolsky and C. Kikuchi, Phys. Rev. 65. 228 (1944).

[8] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *"CPT Violation and the Standard Model"*, *Phys. Rev.* D 55, 6760 (1997);

[9] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *"Lorentz Violation Extension of the Standard Model"*, arxive:hep-ph/9809521V1 24 Sep (1998);

[10] V. A. Kostelecký and S. Samuel, *"Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory", Phys. Rev.* D 39, 683 (1989);

[11] L. H. C. Borges, A. F. Ferrari and F. A. Barone "New effects in the interaction between electromagnetic sources mediated by nonminimal LV interactions", arxiv: 1606.00940.

[12] H. Belich, et al., *"Violação da Simetria de Lorentz"Revista Brasileira de Ensino de Física"*, 29,57 (2007);

[13] S. M. Carrol, G. B. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D 41, 1231 (1990);

[14] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B 607, 247 (2001); C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B 657, 214 (2003);

[15] V. A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. D 66, 056005 (2002).

[16] V. A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. D 80, 015020 (2009).

[17] V.A. Kosteleck´y and R. Lehnert, Phys. Rev. D 63, 065008 (2001).

[18] M. Hayakawa, Phys. Lett. B 478, 394 (2000).

[19] The leading-order action is constructed in S.M. Carroll et al., Phys. Rev. Lett. 87, 141601 (2001).

[20] M.S. Berger and V.A. Kosteleck´y, Phys. Rev. D 65, 091701 (2002); P.A. Bolokhov, S.G. Nibbelink, and M. Pospelov, Phys. Rev. D 72, 015013 (2005).

[21] Rodolfo Casana, M. M. Ferreira, A. R. Gomes and F. E. P. dos Santos, Phys. Rev. D 82, 125006 (2010);

[22] Cuzinatto, R. R.; de Melo, C. A. M., Pompeia and P. J. Second order gauge theory Ann. Phys. 322, 1211 (2007);

[23] C.A.P. Galvão and B.M. Pimentel, Can. J. Phys. 66, 460 (1988);

[24] R. Bufalo, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, "Path integral quantization of generalized quantum electrodynamics", Phys. Rev. D 83, 045007 (2011);

[25] C. A. Bonin, R. Bufalo, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambranox, "Podolsky electromagnetism at finite temperature: Implications on the Stefan-Boltzmann law", Phys. Rev. D 81, 025003 (2010);

[26] R. Bufalo, B. M. Pimentel, and G. E. R. Zambrano, Phys. Rev. D 86, 125023 (2012);

[27] C. A. Bonin, B. M. Pimentel, and P. H. Ortega, "Multipole Expansion in Generalized Electrodynamics", arxiv: 1608.00902;

[28] N. Moeller and B. Zwiebach, JHEP 0210, 034 (2002);

[29] M. Veltman, "Quantum Theory of Gravitation", in Methods in Field Theory Ed.by R. Bailian and J. Zinn-Justin, North-Holland Publising Company and World Scientific Publising Co Ltd, Singapore, 1981;

[30] F.A.Barone and G. Flores-Hidalgo, Phys. Rev. D 91, 027701 (2015);

[31] C. A. Bonin, R. Bufalo, and B. M. Pimentel, Phys. Rev. D 81, 025003 (2010);

# Apêndice A

# A função de Green para o potencial escalar e vetorial

A função de Green é uma excelente técnica para resolver equações diferenciais não homogêneas. Fazendo uso dessa ferramenta podemos obter a função de Green para o potencial escalar e vetorial, em que a parte não homogênea das equações representam as fontes do campo elétrico e magnético. Neste apêndice será mostrado o cálculo da função de Green para o potencial escalar e vetorial da teoria de Podolsky.

Na eletrodinâmica de Podolsky, assim como ocorre na eletrodinâmica de Maxwell pura, o número de graus de liberdade físicos é menor que o número de componentes do campo de gauge, surgindo a necessidade de fixação do calibre. Uma escolha possível e covariante, seria o calibre de Lorentz, $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, com o qual a equação

$$\left(1+\theta^2\Box\right)\left(\Box A^\beta - \partial^\beta\partial_\alpha A^\alpha\right) = j^\beta, \tag{A.1}$$

recai em

$$\left(1+\theta^2\Box\right)\Box A^\beta = j^\beta. \tag{A.2}$$

Partindo da eq. (A.2), encontramos as equações estacionárias para os potenciais escalar e vetorial:

$$\left(1-\theta^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\left(\boldsymbol{\nabla}^2 A_0\right) = -\rho, \tag{A.3}$$

$$\left(1-\theta^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\left(\boldsymbol{\nabla}^2 A^i - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right)\right) = -j^i. \tag{A.4}$$

Na literatura especializada, há um calibre específico para a eletrodinâmica de Podolsky, encontrado na Ref. [23], denominado de calibre de Coulomb generalizado,

$$\left(1-\theta^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right) = 0. \tag{A.5}$$

Adotando-o, a eq. (A.4) assume a mesma forma diferencial da eq. (A.3):

$$\left(1-\theta^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\boldsymbol{\nabla}^2 A^i = -j^i. \tag{A.6}$$

Tais equações podem ser solucionadas pelo tradicional método de Green, calculando-se a função de Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ que satisfaz a equação diferencial:

$$\left(1-\theta^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\boldsymbol{\nabla}^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{A.7}$$

As soluções procuradas são genericamente dadas pelas integrais

$$A_0\left(\boldsymbol{r}\right) = -\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho\left(\mathbf{r}'\right)d^3\mathbf{r}', \tag{A.8}$$

$$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{r}\right) = -\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{j}\left(\mathbf{r}'\right)d^3\mathbf{r}'. \tag{A.9}$$

Para encontrar a função de Green que satisfaz eq. (A.7), escrevemos:

$$G\left(\mathbf{R}\right)=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}\tilde{G}\left(\mathbf{p}\right)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}},\qquad \delta^3(\mathbf{R})=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}, \tag{A.10}$$

onde $\mathbf{R}=(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Substitindo tais relações na eq. (A.7), encontramos

$$\tilde{G}\left(\mathbf{p}\right)=-\frac{1}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)\mathbf{p}^2}, \tag{A.11}$$

de modo que

$$G\left(\mathbf{R}\right)=-\int\frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}\frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)\mathbf{p}^2}, \tag{A.12}$$

$$G\left(\mathbf{R}\right)=-\int\frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}\left[\frac{1}{\mathbf{p}^2}-\frac{\theta^2}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}\right]e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}. \tag{A.13}$$

Reescrevendo as integrais nas coordenadas esféricas $d^3\mathbf{p}=\mathbf{p}^2d\mathbf{p}sen\alpha d\alpha d\phi$, temos

$$G\left(\mathbf{R}\right)=-\frac{1}{\left(2\pi\right)^3}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\alpha\int_0^{\infty}\frac{\mathbf{p}^2d\mathbf{p}sen\alpha}{\left(2\pi\right)^3}\left[\frac{1}{\mathbf{p}^2}-\frac{\theta^2}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}\right]e^{-ipR\cos\alpha}. \tag{A.14}$$

Separando as integrais e resolvendo para a primeira, temos

$$-\int\frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}=-\frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\int_0^{\infty}d\mathbf{p}\int_0^{\pi}sen\alpha e^{-ipR\cos\alpha}d\alpha. \tag{A.15}$$

Resolvendo a integral em $\alpha$

$$\int sen\alpha d\alpha e^{-ipR\cos\alpha}=\int e^{ipRu}du, \tag{A.16}$$

onde foi usado a seguinte mudança de variáveis

$$u=-\cos\alpha\rightarrow du=sen\alpha d\alpha,$$

obtemos:

$$-\int_1^{-1}e^{ipRu}du=-\left[\frac{e^{ipRu}}{ipR}\right]_{u=\mp 1}=\frac{-i\left(e^{ipR}-e^{-ipR}\right)}{pR}. \tag{A.17}$$

Substituindo a integral em $\alpha$ na equação $(A.15)$, temos:

$$-\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{i\left(e^{ipR}-e^{-ipR}\right)}{\mathbf{p}R}d\mathbf{p} = \frac{i}{(2\pi)^2 R}\int_0^\infty \frac{\left(e^{ipR}-e^{-ipR}\right)}{\mathbf{p}}d\mathbf{p}. \tag{A.18}$$

Usando que $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ipR}}{\mathbf{p}(2\pi)}d\mathbf{p} = \frac{i}{2}$ obtemos a solução para a primeira integral dada por:

$$-\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} = \frac{i}{2(2\pi)R}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ipR}}{(2\pi)\mathbf{p}}d\mathbf{p} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ipR}}{(2\pi)\mathbf{p}}d\mathbf{p}\right] = \frac{ii}{2(2\pi)R} = -\frac{1}{4\pi R}. \tag{A.19}$$

Do mesmo modo podemos resolver para a segunda integral, dada por:

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\theta^2}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} = \frac{\theta^2}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\infty \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}\int_0^\pi d\theta sen\theta e^{-ipR\cos\theta}, \tag{A.20}$$

usando o resultado já obtido da integral de $\alpha$ $(A.17)$, temos:

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\theta^2}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} = -\frac{i\theta^2}{(2\pi)^2 R}\left[\int_0^\infty \frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{ipR} - \int_0^\infty \frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{-ipR}\right]. \tag{A.21}$$

Fazendo $p \to -p$

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\theta^2}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} = -\frac{i\theta^2}{(2\pi)^2 R}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{ipR}, \tag{A.22}$$

e escolhendo o contorno superior, temos que o pólo da integral é dado por

$$p = \frac{i}{\theta}.$$

Usando o Lema de Jordan e o teorema dos resíduos de Cauchy, podemos resolver a integral $(A.22)$ na seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{ipR} = 2\pi i\left(res.f\right)(p), \tag{A.23}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{ipR} = 2\pi i\left[\lim_{\mathbf{p}\to\frac{i}{\theta}}\left(\mathbf{p}-\frac{i}{\theta}\right)\frac{\mathbf{p}e^{ipR}}{\theta^2\left(\mathbf{p}-\frac{i}{\theta}\right)\left(\mathbf{p}+\frac{i}{\theta}\right)}\right], \tag{A.24}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{ipR} = \pi i\frac{e^{-\frac{R}{\theta}}}{\theta^2}. \tag{A.25}$$

Logo a integral $(A.22)$ assume a seguinte forma:

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\theta^2}{\left(1+\theta^2\mathbf{p}^2\right)}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} = \frac{e^{-\frac{R}{\theta}}}{4\pi R}. \tag{A.26}$$

Usando os resultados obtidos em $(A.19)$ e $(A.26)$, obtemos a função de Green para o potencial escalar e vetorial dado por:

$$G(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\left(1-e^{-R/\theta}\right)}{R}. \tag{A.27}$$

Fazendo o uso da função de Green $(A.27)$, o potencial escalar e vetorial são dados por:

$$A_0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1-e^{-M_p|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}')\,d^3\mathbf{r}', \tag{A.28}$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1-e^{-M_p|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,d^3\mathbf{r}', \tag{A.29}$$

onde $M_p = 1/\theta$ representa o fator de massa de Podolsky. Para uma carga pontual, $q(\mathbf{r}') = q\delta^3(\mathbf{r}')$, temos:

$$A_0(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi}\int \frac{1-e^{-M_p|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta^3(\mathbf{r}')\,d^3\mathbf{r}', \tag{A.30}$$

$$A_0(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi}\frac{1-e^{-M_p|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|}. \tag{A.31}$$

No limite $\theta \to 0$ ou $M_p \to \infty$, a solução (A.31) reproduz o comportamento puro coulombiano. No limite de grandes distâncias, $|\mathbf{r}| \to \infty$, a solução (A.31) também reproduz o comportamento puro coulombiano. Porém, no limite de pequenas distâncias da fonte, $|\mathbf{r}| \to 0$, temos $e^{-M_p|\mathbf{r}|} \sim (1 - M_p|\mathbf{r}|)$, e a eq. (A.31) leva ao resultado constante,

$$A_0(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi}M_p, \tag{A.32}$$

evidenciando que na eletrodinâmica de Podolsky os campos nao divergem nas proximidades das cargas pontuais.

# Apêndice B

# Cálculo do explícito do propagador com VL

A lagrangeana com altas derivadas incluindo o termo de violação é dado por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \theta^2\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\lambda F^\lambda_\beta + \eta^2\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\partial_\lambda F^{\lambda\alpha}D_{\beta\alpha} + \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 . \tag{B.1}$$

Para obter o propagador de Feynman o primeiro passo é escrever a lagrangeana em termos dos campos bilineares $A^\mu$. Para a lagrangeana $(B.1)$, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^\nu\left[\Box\Theta_{\mu\nu} + 2\theta^2\left[\Box^2\ \Theta_{\nu\mu}\right]\ -\frac{1}{\xi}\Box\Omega_{\mu\nu}+\right]A^\mu +$$

$$\frac{1}{2}A^\nu\left[2\eta^2\Box^2 D_{\nu\mu} - 2\eta^2\Box\partial_\mu\partial^\alpha D_{\nu\alpha} - 2\eta^2\Box\partial_\nu\partial^\sigma D_{\sigma\mu} + 2\eta^2\partial_\nu\partial_\mu\partial^\sigma\partial^\alpha D_{\sigma\alpha}\right]A^\mu, \tag{B.2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^\nu O_{\mu\nu}A^\mu,$$

onde

$$O_{\mu\nu} = \left(\Box + 2\theta^2\Box^2\ \right)\Theta_{\mu\nu}\ -\frac{1}{\xi}\Box\Omega_{\mu\nu} + 2\eta^2\Box^2 D_{\nu\mu} +$$

$$-2\eta^2\Box\partial_\mu\partial^\alpha D_{\nu\alpha} - 2\eta^2\Box\partial_\nu\partial^\sigma D_{\sigma\mu} + 2\eta^2\Box\Omega_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\alpha D_{\sigma\alpha}. \tag{B.3}$$

Usamos os projetores longitudinal e transversal dado por:

$$\Omega_{\beta\lambda} = \frac{\partial_\beta\partial_\lambda}{\Box}, \quad \Theta_{\beta\lambda} = g_{\beta\lambda} - \Omega_{\beta\lambda}.$$

Sabendo que o background de violação $D_{\nu\mu}$ é simétrico, propomos a seguinte parametrização:

$$D_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\left(C_\nu B_\mu + C_\mu B_\nu\right). \tag{B.4}$$

Fazendo uso da parametrização, o operador $O_{\mu\nu}$ assume a forma

$$O_{\mu\nu} = \left(\Box + 2\theta^2\Box^2\ \right)\Theta_{\mu\nu}\ + \left(2\eta^2\Box\rho\kappa - \frac{1}{\xi}\Box\right)\Omega_{\mu\nu} + \eta^2\Box^2 C_\nu B_\mu +$$
$$+\eta^2\Box^2 C_\mu B_\nu - \eta^2\Box\kappa C_\nu\partial_\mu - \eta^2\Box\kappa C_\mu\partial_\nu - \eta^2\Box\rho B_\nu\partial_\mu - \eta^2\Box\rho B_\mu\partial_\nu, \qquad \text{(B.5)}$$

onde foi feito $\kappa = B_\alpha\partial^\alpha$ e $\rho = C_\alpha\partial^\alpha$.

Uma vez obtida a lagrangeana na forma quadrática, temos que inverter o operador $\Lambda_{\mu\nu}$, em que a sua inversa é o propagador procurado. Podemos propor a seguinte forma para a inversa:

$$\Delta^\nu_\alpha = a\Theta^\nu_\alpha + b\Omega^\nu_\alpha + cB_\alpha\partial^\nu + dC^\nu B_\alpha + eC^\nu\partial_\alpha + fB^\nu\partial_\alpha + gC_\alpha B^\nu + hC_\alpha\partial^\nu, \qquad \text{(B.6)}$$

que satisfaz à identidade

$$O_{\mu\nu}\Delta^\nu_\alpha = g_{\mu\alpha},$$
$$O_{\mu\nu}\Delta^\nu_\alpha = \Theta_{\mu\alpha} + \Omega_{\mu\alpha}. \qquad \text{(B.7)}$$

Substituindo o operador $(B.5)$, $(B.6)$ na identidade $(B.7)$ e calculando todas as contrações obtemos dois novos elemento $B_\mu B_\alpha, C_\mu C_\alpha$. Temos que incluí-los no operador $(B.6)$ para fechar a álgebra. Logo

$$\Delta^\nu_\alpha = a\Theta^\nu_\alpha + b\Omega^\nu_\alpha + cB_\alpha\partial^\nu + dC^\nu B_\alpha + eC^\nu\partial_\alpha +$$
$$+fB^\nu\partial_\alpha + gC_\alpha B^\nu + hC_\alpha\partial^\nu + iB^\nu B_\alpha + jC^\nu C_\alpha. \qquad \text{(B.8)}$$

Vemos que estes operadores satisfazem uma algebra fechada:

| | $\Theta^\nu_\alpha$ | $\Omega^\nu_\alpha$ | $B_\alpha\partial^\nu$ | $C^\nu B_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $\Theta_{\mu\nu}$ | $\Theta_{\mu\alpha}$ | 0 | 0 | $C_\mu B_\alpha - \frac{\rho}{\Box}B_\alpha\partial_\mu$ |
| $\Omega_{\mu\nu}$ | 0 | $\Omega_{\mu\alpha}$ | $B_\alpha\partial_\mu$ | $\frac{\rho}{\Box}B_\alpha\partial_\mu$ |
| $B_\nu\partial_\mu$ | $B_\alpha\partial_\mu - \kappa\Omega_{\mu\alpha}$ | $\kappa\Omega_{\mu\alpha}$ | $\kappa B_\alpha\partial_\mu$ | $(C\cdot B)\,B_\alpha\partial_\mu$ |
| $C_\mu B_\nu$ | $C_\mu B_\alpha - \frac{\kappa}{\Box}C_\mu\partial_\alpha$ | $\frac{\kappa}{\Box}C_\mu\partial_\alpha$ | $\kappa C_\mu B_\alpha$ | $(C\cdot B)\,C_\mu B_\alpha$ |
| $C_\mu\partial_\nu$ | 0 | $C_\mu\partial_\alpha$ | $\Box C_\mu B_\alpha$ | $\rho C_\mu B_\alpha$ |
| $B_\mu\partial_\nu$ | 0 | $B_\mu\partial_\alpha$ | $\Box B_\mu B_\alpha$ | $\rho B_\mu B_\alpha$ |
| $C_\nu B_\mu$ | $C_\alpha B_\mu - \frac{\rho}{\Box}B_\mu\partial_\alpha$ | $\frac{\rho}{\Box}B_\mu\partial_\alpha$ | $\rho B_\mu B_\alpha$ | $C^2 B_\mu B_\alpha$ |
| $C_\nu\partial_\mu$ | $C_\alpha\partial_\mu - \rho\Omega_{\mu\alpha}$ | $\rho\Omega_{\mu\alpha}$ | $\rho B_\alpha\partial_\mu$ | $C^2 B_\alpha\partial_\mu$ |
| $B_\mu B_\nu$ | $B_\mu B_\alpha - \frac{\eta}{\Box}B_\mu\partial_\alpha$ | $\frac{\kappa}{\Box}B_\mu\partial_\alpha$ | $\kappa B_\mu B_\alpha$ | $(C\cdot B)\,B_\mu B_\alpha$ |
| $C_\mu C_\nu$ | $C_\mu C_\alpha - \frac{\rho}{\Box}C_\mu\partial_\alpha$ | $\frac{\rho}{\Box}C_\mu\partial_\alpha$ | $\rho C_\mu B_\alpha$ | $C^2 C_\mu B_\alpha$ |

| | $C^\nu\partial_\alpha$ | $B^\nu\partial_\alpha$ | $C_\alpha B^\nu$ |
|---|---|---|---|
| $\Theta_{\mu\nu}$ | $C_\mu\partial_\alpha-\rho\Omega_{\mu\alpha}$ | $B_\mu\partial_\alpha-\kappa\Omega_{\mu\alpha}$ | $C_\alpha B_\mu-\frac{\kappa}{\Box}C_\alpha\partial_\mu$ |
| $\Omega_{\mu\nu}$ | $\rho\Omega_{\mu\alpha}$ | $\kappa\Omega_{\mu\alpha}$ | $\frac{\kappa}{\Box}C_\alpha\partial_\mu$ |
| $B_\nu\partial_\mu$ | $\Box\left(C\cdot B\right)\Omega_{\mu\alpha}$ | $\Box B^2\Omega_{\mu\alpha}$ | $B^2C_\alpha\partial_\mu$ |
| $C_\mu B_\nu$ | $\left(C\cdot B\right)C_\mu\partial_\alpha$ | $B^2C_\mu\partial_\alpha$ | $B^2C_\mu C_\alpha$ |
| $C_\mu\partial_\nu$ | $\rho C_\mu\partial_\alpha$ | $\kappa C_\mu\partial_\alpha$ | $\kappa C_\mu C_\alpha$ |
| $B_\mu\partial_\nu$ | $\rho B_\mu\partial_\alpha$ | $\kappa B_\mu\partial_\alpha$ | $\kappa C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\nu B_\mu$ | $C^2B_\mu\partial_\alpha$ | $\left(C\cdot B\right)B_\mu\partial_\alpha$ | $\left(C\cdot B\right)C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\nu\partial_\mu$ | $C^2\Box\Omega_{\mu\alpha}$ | $\Box\left(C\cdot B\right)\Omega_{\mu\alpha}$ | $\left(C\cdot B\right)C_\alpha\partial_\mu$ |
| $B_\mu B_\nu$ | $\left(C\cdot B\right)B_\mu\partial_\alpha$ | $B^2B_\mu\partial_\alpha$ | $B^2C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\mu C_\nu$ | $C^2C_\mu\partial_\alpha$ | $\left(C\cdot B\right)C_\mu\partial_\alpha$ | $\left(C\cdot B\right)C_\mu C_\alpha$ |

| | $C_\alpha\partial^\nu$ | $B^\nu B_\alpha$ | $C^\nu C_\alpha$ |
|---|---|---|---|
| $\Theta_{\mu\nu}$ | $0$ | $B_\mu B_\alpha-\frac{\kappa}{\Box}B_\alpha\partial_\mu$ | $C_\mu C_\alpha-\frac{\rho}{\Box}C_\alpha\partial_\mu$ |
| $\Omega_{\mu\nu}$ | $C_\alpha\partial_\mu$ | $\frac{\kappa}{\Box}B_\alpha\partial_\mu$ | $\frac{\rho}{\Box}C_\alpha\partial_\mu$ |
| $B_\nu\partial_\mu$ | $\kappa C_\alpha\partial_\mu$ | $B^2B_\alpha\partial_\mu$ | $\left(C\cdot B\right)C_\alpha\partial_\mu$ |
| $C_\mu B_\nu$ | $\kappa C_\mu C_\alpha$ | $B^2C_\mu B_\alpha$ | $\left(C\cdot B\right)C_\mu C_\alpha$ |
| $C_\mu\partial_\nu$ | $\Box C_\mu C_\alpha$ | $\kappa C_\mu B_\alpha$ | $\rho C_\mu C_\alpha$ |
| $B_\mu\partial_\nu$ | $\Box C_\alpha B_\mu$ | $\kappa B_\mu B_\alpha$ | $\rho C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\nu B_\mu$ | $\rho C_\alpha B_\mu$ | $\left(C\cdot B\right)B_\mu B_\alpha$ | $C^2C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\nu\partial_\mu$ | $\rho C_\alpha\partial_\mu$ | $\left(C\cdot B\right)B_\alpha\partial_\mu$ | $C^2C_\alpha\partial_\mu$ |
| $B_\mu B_\nu$ | $\kappa C_\alpha B_\mu$ | $B^2B_\mu B_\alpha$ | $\left(C\cdot B\right)C_\alpha B_\mu$ |
| $C_\mu C_\nu$ | $\rho C_\mu C_\alpha$ | $\left(C\cdot B\right)C_\mu B_\alpha$ | $C^2C_\mu C_\alpha$ |

Uma vez a álgebra fechada, daremos continuidade ao cálculo do propagador. A expressao $\Lambda_{\mu\nu}\left(\Lambda^{-1}\right)^\nu_\alpha=\Theta_{\mu\alpha}+\Omega_{\mu\alpha}$ implica em fazer:

$$
\begin{gathered}
a\left(\Box+2\theta^2\Box^2\ \right)\Theta_{\mu\alpha}\\
+d\left(\Box+2\theta^2\Box^2\ \right)\left(C_\mu B_\alpha-\frac{\rho}{\Box}B_\alpha\partial_\mu\right)+e\left(\Box+2\theta^2\Box^2\ \right)\left(C_\mu\partial_\alpha-\rho\Omega_{\mu\alpha}\right)\\
+f\left(\Box+2\theta^2\Box^2\ \right)\left(B_\mu\partial_\alpha-\kappa\Omega_{\mu\alpha}\right)+g\left(\Box+2\theta^2\Box^2\ \right)\left(C_\alpha B_\mu-\frac{\kappa}{\Box}C_\alpha\partial_\mu\right)\\
+i\left(\Box+2\theta^2\Box^2\ \right)\left(B_\mu B_\alpha-\frac{\kappa}{\Box}B_\alpha\partial_\mu\right)+j\left(\Box+2\theta^2\Box^2\ \right)\left(C_\mu C_\alpha-\frac{\rho}{\Box}C_\alpha\partial_\mu\right)+
\end{gathered}
$$

$$b\left(2\eta^2\Box\rho\kappa-\frac{1}{\xi}\Box\right)\Omega_{\mu\alpha}+c\left(2\eta^2\Box\rho\kappa-\frac{1}{\xi}\Box\right)B_\alpha\partial_\mu$$
$$+d\left(2\eta^2\Box\rho\kappa-\frac{1}{\xi}\Box\right)\frac{\rho}{\Box}B_\alpha\partial_\mu+e\left(2\eta^2\Box\rho\kappa-\frac{1}{\xi}\Box\right)\rho\Omega_{\mu\alpha}$$
$$+f\left(2\eta^2\Box\rho\kappa-\frac{1}{\xi}\Box\right)\kappa\Omega_{\mu\alpha}+g\left(2\eta^2\Box\rho\kappa-\frac{1}{\xi}\Box\right)\frac{\kappa}{\Box}C_\alpha\partial_\mu+h\left(2\eta^2\Box\rho\kappa-\frac{1}{\xi}\Box\right)C_\alpha\partial_\mu$$
$$+i\left(2\eta^2\Box\rho\kappa-\frac{1}{\xi}\Box\right)\frac{\kappa}{\Box}B_\alpha\partial_\mu+j\left(2\eta^2\Box\rho\kappa-\frac{1}{\xi}\Box\right)\frac{\rho}{\Box}C_\alpha\partial_\mu+$$

$$a\eta^2\Box^2\left(C_\alpha B_\mu-\frac{\rho}{\Box}B_\mu\partial_\alpha\right)+b\eta^2\Box^2\frac{\rho}{\Box}B_\mu\partial_\alpha+c\eta^2\Box^2\rho B_\mu B_\alpha$$
$$+d\eta^2\Box^2C^2B_\mu B_\alpha+e\eta^2\Box^2C^2B_\mu\partial_\alpha+f\eta^2\Box^2\left(C\cdot B\right)B_\mu\partial_\alpha$$
$$g\eta^2\Box^2\left(C\cdot B\right)C_\alpha B_\mu+h\eta^2\Box^2\rho C_\alpha B_\mu+i\eta^2\Box^2\left(C\cdot B\right)B_\mu B_\alpha+j\eta^2\Box^2C^2C_\alpha B_\mu+$$

$$a\eta^2\Box^2\left(C_\mu B_\alpha-\frac{\kappa}{\Box}C_\mu\partial_\alpha\right)+b\eta^2\Box^2\frac{\kappa}{\Box}C_\mu\partial_\alpha+c\eta^2\Box^2\kappa C_\mu B_\alpha$$
$$+d\eta^2\Box^2\left(C\cdot B\right)C_\mu B_\alpha+e\eta^2\Box^2\left(C\cdot B\right)C_\mu\partial_\alpha+f\eta^2\Box^2B^2C_\mu\partial_\alpha$$
$$+g\eta^2\Box^2B^2C_\mu C_\alpha+h\eta^2\Box^2\kappa C_\mu C_\alpha+i\eta^2\Box^2B^2C_\mu B_\alpha+j\eta^2\Box^2\left(C\cdot B\right)C_\mu C_\alpha+$$

$$-a\eta^2\Box\kappa\left(C_\alpha\partial_\mu-\rho\Omega_{\mu\alpha}\right)-b\eta^2\Box\kappa\rho\Omega_{\mu\alpha}-c\eta^2\Box\kappa\rho B_\alpha\partial_\mu$$
$$-d\eta^2\Box\kappa C^2B_\alpha\partial_\mu-e\eta^2\Box\kappa C^2\Box\Omega_{\mu\alpha}-f\eta^2\Box\kappa\Box\left(C\cdot B\right)\Omega_{\mu\alpha}$$
$$-g\eta^2\Box\kappa\left(C\cdot B\right)C_\alpha\partial_\mu-h\eta^2\Box\kappa\rho C_\alpha\partial_\mu-i\eta^2\Box\kappa\left(C\cdot B\right)B_\alpha\partial_\mu-j\eta^2\Box\kappa C^2C_\alpha\partial_\mu+$$

$$-b\eta^2\Box\kappa C_\mu\partial_\alpha-c\eta^2\Box\kappa\Box C_\mu B_\alpha$$
$$-d\eta^2\Box\kappa\rho C_\mu B_\alpha-e\eta^2\Box\kappa\rho C_\mu\partial_\alpha-f\eta^2\Box\kappa\kappa C_\mu\partial_\alpha$$
$$-g\eta^2\Box\kappa\kappa C_\mu C_\alpha-h\eta^2\Box\kappa\Box C_\mu C_\alpha-i\eta^2\Box\kappa\kappa C_\mu B_\alpha-j\eta^2\Box\kappa\rho C_\mu C_\alpha+$$

$$-a\eta^2\Box\rho\left(B_\alpha\partial_\mu-\kappa\Omega_{\mu\alpha}\right)-b\eta^2\Box\rho\kappa\Omega_{\mu\alpha}-c\eta^2\Box\rho\kappa B_\alpha\partial_\mu$$
$$-d\eta^2\Box\rho\left(C\cdot B\right)B_\alpha\partial_\mu-e\eta^2\Box\rho\Box\left(C\cdot B\right)\Omega_{\mu\alpha}-f\eta^2\Box\rho\Box B^2\Omega_{\mu\alpha}$$
$$-g\eta^2\Box\rho B^2C_\alpha\partial_\mu-h\eta^2\Box\rho\kappa C_\alpha\partial_\mu-i\eta^2\Box\rho B^2B_\alpha\partial_\mu-j\eta^2\Box\rho\left(C\cdot B\right)C_\alpha\partial_\mu+$$

$$-b\eta^2\Box\rho B_\mu\partial_\alpha-c\eta^2\Box\rho\Box B_\mu B_\alpha-d\eta^2\Box\rho\rho B_\mu B_\alpha$$
$$-e\eta^2\Box\rho\rho B_\mu\partial_\alpha-f\eta^2\Box\rho\kappa B_\mu\partial_\alpha-g\eta^2\Box\rho\kappa C_\alpha B_\mu$$
$$-h\eta^2\Box\rho\Box C_\alpha B_\mu-i\eta^2\Box\rho\kappa B_\mu B_\alpha-j\eta^2\Box\rho\rho C_\alpha B_\mu=\Theta_{\mu\alpha}+\Omega_{\mu\alpha}.$$

Obtemos um sistema de dez equações dadas por:

Para $\Theta_{\mu\alpha}$ :

$$
\begin{gathered}
a\left(\Box+2\theta^2\Box^2\right)\Theta_{\mu\alpha}=\Theta_{\mu\alpha},\\
a=\frac{1}{\left(\Box+2\theta^2\Box^2\right)}\rightarrow a=\frac{1}{\Box\left(1+2\theta^2\Box\right)}.
\end{gathered}
\tag{B.9}
$$

Para $\Omega_{\mu\alpha}$ :

$$
\begin{gathered}
-e\left(\Box+2\theta^2\Box^2\right)\rho\Omega_{\mu\alpha}+e\left(2\eta^2\Box\rho\kappa-\frac{1}{\xi}\Box\right)\rho\Omega_{\mu\alpha}-e\eta^2\Box\kappa C^2\Box\Omega_{\mu\alpha}+\\
-e\eta^2\Box\rho\Box\left(C\cdot B\right)\Omega_{\mu\alpha}+b\left(2\eta^2\Box\rho\kappa-\frac{1}{\xi}\Box\right)\Omega_{\mu\alpha}-b\eta^2\Box\kappa\rho\Omega_{\mu\alpha}-b\eta^2\Box\rho\kappa\Omega_{\mu\alpha}+\\
+f\left(2\eta^2\Box\rho\kappa-\frac{1}{\xi}\Box\right)\kappa\Omega_{\mu\alpha}-f\left(\Box+2\theta^2\Box^2\right)\kappa\Omega_{\mu\alpha}-f\eta^2\Box\kappa\Box\left(C\cdot B\right)\Omega_{\mu\alpha}+\\
-f\eta^2\Box\rho\Box B^2\Omega_{\mu\alpha}+a\eta^2\Box\rho\kappa\Omega_{\mu\alpha}+a\eta^2\Box\kappa\rho\Omega_{\mu\alpha}=\Omega_{\mu\alpha}.
\end{gathered}
\tag{B.10}
$$

Para $B_\mu\partial_\alpha$ :

$$
\begin{gathered}
f\left(\Box+2\theta^2\Box^2\right)\left(B_\mu\partial_\alpha\right)-a\eta^2\Box^2\frac{\rho}{\Box}B_\mu\partial_\alpha+b\eta^2\Box^2\frac{\rho}{\Box}B_\mu\partial_\alpha+\\
+e\eta^2\Box^2C^2B_\mu\partial_\alpha+f\eta^2\Box^2\left(C\cdot B\right)B_\mu\partial_\alpha-b\eta^2\Box\rho B_\mu\partial_\alpha+\\
-e\eta^2\Box\rho^2B_\mu\partial_\alpha-f\eta^2\Box\rho\kappa B_\mu\partial_\alpha=0.
\end{gathered}
\tag{B.11}
$$

Para $C_\mu\partial_\alpha$

$$
\begin{gathered}
e\left(\Box+2\theta^2\Box^2\right)\left(C_\mu\partial_\alpha\right)-a\eta^2\Box^2\frac{\kappa}{\Box}C_\mu\partial_\alpha+b\eta^2\Box^2\frac{\kappa}{\Box}C_\mu\partial_\alpha+\\
+e\eta^2\Box^2\left(C\cdot B\right)C_\mu\partial_\alpha+f\eta^2\Box^2B^2C_\mu\partial_\alpha-b\eta^2\Box\kappa C_\mu\partial_\alpha+\\
-e\eta^2\Box\kappa\rho C_\mu\partial_\alpha-f\eta^2\Box\kappa\kappa C_\mu\partial_\alpha=0.
\end{gathered}
\tag{B.12}
$$

Para $B_\mu B_\alpha$

$$
\begin{gathered}
I\left(\Box+2\theta^2\Box^2\right)\left(B_\mu B_\alpha\right)+c\eta^2\Box^2\rho B_\mu B_\alpha+d\eta^2\Box^2C^2B_\mu B_\alpha+I\eta^2\Box^2\left(C\cdot B\right)B_\mu B_\alpha\\
-c\eta^2\Box\rho\Box B_\mu B_\alpha-d\eta^2\Box\rho\rho B_\mu B_\alpha-I\eta^2\Box\rho\kappa B_\mu B_\alpha=0.
\end{gathered}
\tag{B.13}
$$

Para $C_\mu B_\alpha$

$$
\begin{gathered}
d\left(\Box+2\theta^2\Box^2\right)C_\mu B_\alpha+a\eta^2\Box^2\left(C_\mu B_\alpha\right)+c\eta^2\Box^2\kappa C_\mu B_\alpha+d\eta^2\Box^2\left(C\cdot B\right)C_\mu B_\alpha+\\
+I\eta^2\Box^2B^2C_\mu B_\alpha-c\eta^2\Box^2\kappa C_\mu B_\alpha-d\eta^2\Box\kappa\rho C_\mu B_\alpha-I\eta^2\Box\kappa\kappa C_\mu B_\alpha=0.
\end{gathered}
\tag{B.14}
$$

Para $B_\alpha \partial_\mu$

$$
\begin{aligned}
-d\left(\square + 2\theta^2\square^2\right)\frac{\rho}{\square}B_\alpha\partial_\mu - I\left(\square + 2\theta^2\square^2\right)\frac{\kappa}{\square}B_\alpha\partial_\mu + c\left(2\eta^2\square\rho\kappa - \frac{1}{\xi}\square\right)B_\alpha\partial_\mu + \\
+d\left(2\eta^2\square\rho\kappa - \frac{1}{\xi}\square\right)\frac{\rho}{\square}B_\alpha\partial_\mu + I\left(2\eta^2\square\rho\kappa - \frac{1}{\xi}\square\right)\frac{\kappa}{\square}B_\alpha\partial_\mu - a\eta^2\square\rho\left(B_\alpha\partial_\mu\right) + \\
-c\eta^2\square\rho\kappa B_\alpha\partial_\mu - d\eta^2\square\rho\left(C\cdot B\right)B_\alpha\partial_\mu - I\eta^2\square\rho B^2 B_\alpha\partial_\mu - c\eta^2\square\kappa\rho B_\alpha\partial_\mu \\
-d\eta^2\square\kappa C^2 B_\alpha\partial_\mu - I\eta^2\square\kappa\left(C\cdot B\right)B_\alpha\partial_\mu = 0.
\end{aligned}
\tag{B.15}
$$

Para $C_\mu C_\alpha$

$$
\begin{aligned}
j\left(\square + 2\theta^2\square^2\right) + j\eta^2\square^2\left(C\cdot B\right) - j\eta^2\square\kappa\rho + h\eta^2\square^2\kappa \\
+g\eta^2\square^2 B^2 - g\eta^2\square\kappa\kappa - h\eta^2\square\kappa\square = 0.
\end{aligned}
\tag{B.16}
$$

Para $C_\alpha B_\mu$

$$
\begin{aligned}
g\left(\square + 2\theta^2\square^2\right)\left(C_\alpha B_\mu\right) + a\eta^2\square^2\left(C_\alpha B_\mu\right) + g\eta^2\square^2\left(C\cdot B\right)C_\alpha B_\mu + h\eta^2\square^2\rho C_\alpha B_\mu + \\
+j\eta^2\square^2 C^2 C_\alpha B_\mu - g\eta^2\square\rho\kappa C_\alpha B_\mu - h\eta^2\square\rho\square C_\alpha B_\mu - j\eta^2\square\rho\rho C_\alpha B_\mu = 0.
\end{aligned}
\tag{B.17}
$$

Para $C_\alpha \partial_\mu$

$$
\begin{aligned}
-g\left(\square + 2\theta^2\square^2\right)\frac{\kappa}{\square}C_\alpha\partial_\mu - j\left(\square + 2\theta^2\square^2\right)\frac{\rho}{\square}C_\alpha\partial_\mu + g\left(2\eta^2\square\rho\kappa - \frac{1}{\xi}\square\right)\frac{\kappa}{\square}C_\alpha\partial_\mu + \\
+h\left(2\eta^2\square\rho\kappa - \frac{1}{\xi}\square\right)C_\alpha\partial_\mu + j\left(2\eta^2\square\rho\kappa - \frac{1}{\xi}\square\right)\frac{\rho}{\square}C_\alpha\partial_\mu + \\
-g\eta^2\square\rho B^2 C_\alpha\partial_\mu - h\eta^2\square\rho\kappa C_\alpha\partial_\mu - j\eta^2\square\rho\left(C\cdot B\right)C_\alpha\partial_\mu + \\
-a\eta^2\square\kappa\left(C_\alpha\partial_\mu\right) - g\eta^2\square\kappa\left(C\cdot B\right)C_\alpha\partial_\mu - h\eta^2\square\kappa\rho C_\alpha\partial_\mu - j\eta^2\square\kappa C^2 C_\alpha\partial_\mu = 0.
\end{aligned}
\tag{B.18}
$$

A solução deste sistema fornece os seguintes valores:

$$
a = \frac{1}{\square\left(1 + 2\theta^2\square\right)}, c = f = \frac{\kappa\eta^4\left(\square C^2 - \rho^2\right) - \eta^2\rho\Pi}{\Gamma\square\left(1 + 2\theta^2\square\right)},
\tag{B.19}
$$

$$
b = -\frac{\xi}{\square} + \frac{\eta^2(-\eta^2\rho^2\left(\square B^2 - \kappa^2\right) - \eta^2\kappa^2\left(\square C^2 - \rho^2\right) + 2\rho\kappa\Pi)}{\Gamma\square\left(1 + 2\theta^2\square\right)},
\tag{B.20}
$$

$$
d = g = \frac{\eta^2\Pi}{\left(1 + 2\theta^2\square\right)\Gamma},\ e = h = \eta^2\frac{\left[\eta^2\rho\left(\square B^2 - \kappa^2\right) - \Pi\kappa\right]}{\Gamma\square\left(1 + 2\theta^2\square\right)},
\tag{B.21}
$$

$$
I = -\frac{\eta^4\left(\square C^2 - \rho^2\right)}{\Gamma\left(1 + 2\theta^2\square\right)},\ j = -\frac{\eta^4\left(\square B^2 - \kappa^2\right)}{\Gamma\left(1 + 2\theta^2\square\right)}.
\tag{B.22}
$$

onde valem as definições:

$$\Gamma = \left[\eta^2\left(\Box C^2-\rho^2\right)\eta^2\left(\Box B^2-\kappa^2\right)-\Pi^2\right], \tag{B.23}$$

$$\Pi = \left(1+2\theta^2\Box+\eta^2\Box\left(C\cdot B\right)-\eta^2\rho\kappa\ \right), \tag{B.24}$$

Substituindo todos os valores para $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$, o operador (B.8) assume a forma

$$\Delta_\alpha^\nu = \frac{1}{\Box\left(1+2\theta^2\Box\ \right)\Gamma}\left[\Gamma\Theta_\alpha^\nu+\left(-\xi\left(1+2\theta^2\Box\ \right)\Gamma+b'\right)\Omega_\alpha^\nu+F\left(B_\alpha\partial^\nu+B^\nu\partial_\alpha\right)+\right.$$
$$+\eta^2\Pi\Box\left(C^\nu B_\alpha+C_\alpha B^\nu\right)+H\left(C^\nu\partial_\alpha+C_\alpha\partial^\nu\right)+$$
$$\left.-\eta^4\left(\Box C^2-\rho^2\right)\Box\ B^\nu B_\alpha-\eta^4\left(\Box B^2-\kappa^2\right)\Box C^\nu C_\alpha\right]. \tag{B.25}$$

O propagador de Feynman do campo de gauge no espaço dos momentos é definido como

$$\langle A_\nu A_\alpha\rangle = -\frac{i}{p^2\left(1-2\theta^2p^2\ \right)\Gamma\left(p\right)}\left[\Gamma\left(p\right)\Theta_{\nu\alpha}+\left(b'-\xi\left(1-2\theta^2p^2\ \right)\Gamma\right)\Omega_{\nu\alpha}+\right.$$
$$-iF\left(p\right)\left(B_\alpha p_\nu+B_\nu p_\alpha\right)-\eta^2p^2\Pi\left(p\right)\left(C_\nu B_\alpha+C_\alpha B_\nu\right)-iH\left(p\right)\left(C_\nu p_\alpha+C_\alpha p_\nu\right)+$$
$$\left.\eta^4p^2\ \left(\left(C\cdot p\right)^2-p^2C^2\right)B_\nu B_\alpha+\eta^4p^2\left(\left(B\cdot p\right)^2-p^2B^2\right)C_\nu C_\alpha\right], \tag{B.26}$$

onde

$$b' = \eta^2(\eta^2\left(C\cdot p\right)^2\left(\left(B\cdot p\right)^2-p^2B^2\right)+$$
$$+\eta^2\left(B\cdot p\right)^2\left(\left(C\cdot p\right)^2-p^2C^2\right)-2\left(C\cdot p\right)\left(B\cdot p\right)\Pi(p), \tag{B.27}$$

$$F\left(p\right) = i\eta^2\Pi\left(p\right)\left(C\cdot p\right)-i\eta^4\left(B\cdot p\right)\left(\left(C\cdot p\right)^2-p^2C^2\right), \tag{B.28}$$

$$H\left(p\right) = i\eta^2\left(B\cdot p\right)\Pi-i\eta^4\left(C\cdot p\right)\left(\left(B\cdot p\right)^2-p^2B^2\right), \tag{B.29}$$

$$\Gamma(p) = \left[\eta^2\left(\left(C\cdot p\right)^2-p^2C^2\right)\eta^2\left(\left(B\cdot p\right)^2-p^2B^2\right)-\Pi^2\right], \tag{B.30}$$

$$\Pi(p) = \left(1-2\theta^2p^2-\eta^2p^2\left(C\cdot B\right)+\eta^2\left(C\cdot p\right)\left(B\cdot p\right)\ \right). \tag{B.31}$$

# Apêndice A

# Relação de dispersão em termos do tensor $D_{\mu\nu}$

Para escrever a relação de dispersão

$$\eta^4\left(p^2C^2-(C\cdot p)^2\right)\left(p^2B^2-(B\cdot p)^2\right)= \tag{A.1}$$
$$\eta^4\left(p^4C^2B^2-p^2C^2\left(B\cdot p\right)^2-p^2\left(C\cdot p\right)^2B^2+\left(C\cdot p\right)^2\left(B\cdot p\right)^2\right), \tag{A.2}$$

em termos do tensor $D_{\mu\nu}$, escrevemos os elementos:

$$D_{\nu}^{\nu}=\frac{1}{2}\left(C_{\nu}B^{\nu}+C^{\nu}B_{\nu}\right)=\left(C\cdot B\right), \tag{A.3}$$

$$D_{\nu\mu}p^{\nu}=\frac{1}{2}\left(C_{\nu}B_{\mu}+C_{\mu}B_{\nu}\right)p^{\nu}=\frac{1}{2}[(C\cdot p)B_{\mu}+\left(B\cdot p\right)C_{\mu}], \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}D_{\nu\mu}p^{\nu}p^{\mu} &= \left(C\cdot p\right)\left(B\cdot p\right), && \text{(A.5)}\\ D_{\nu\mu}D^{\nu\mu} &= \frac{1}{2}C^2B^2+\left(D_{\nu}^{\nu}\right)^2, && \text{(A.6)}\\ C^2B^2 &= 2D_{\nu\mu}D^{\nu\mu}-\left(D_{\nu}^{\nu}\right)^2, && \text{(A.7)}\end{aligned}$$

$$D_{\nu\mu}D^{\mu\alpha}p^{\nu}p_{\alpha}=\frac{1}{4}[2(C\cdot p)(B\cdot p)\left(C\cdot B\right)+\left(B\cdot p\right)^2C^2+(C\cdot p)^2B^2]. \tag{A.8}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}D_{\nu\mu}D^{\mu\alpha}p^{\nu}p_{\alpha} &= \frac{1}{4}[2\left(D_{\nu\mu}p^{\nu}p^{\mu}\right)D_{\alpha}^{\alpha}+\left(B\cdot p\right)^2C^2+(C\cdot p)^2B^2], && \text{(A.9)}\\ \left(B\cdot p\right)^2C^2+(C\cdot p)^2B^2 &= 4D_{\nu\mu}D^{\mu\alpha}p^{\nu}p_{\alpha}-2\left(D_{\nu\mu}p^{\nu}p^{\mu}\right)D_{\alpha}^{\alpha}. && \text{(A.10)}\end{aligned}$$

Substituindo todos esses elementos na expressão (A.1), encontramos:

$$\begin{aligned}&\eta^4[2p^4D_{\nu\mu}D^{\nu\mu}-p^4\left(D_{\nu}^{\nu}\right)^2-4p^2D_{\nu\mu}D^{\mu\alpha}p^{\nu}p_{\alpha}+2p^2\left(D_{\nu\mu}p^{\nu}p^{\mu}\right)D_{\alpha}^{\alpha}+\left(D_{\nu\mu}p^{\nu}p^{\mu}\right)^2]\\ =\;&\left(1-2\theta^2p^2-\eta^2p^2\left(D_{\nu}^{\nu}\right)+\eta^2\left(D_{\nu\mu}p^{\nu}p^{\mu}\right)\ \right)^2. && \text{(A.11)}\end{aligned}$$

Por inspeção, podemos verificar a situação em $D_{\nu\mu}$ reduz-se à componente $D_{00}$. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned}
\eta^4[p^4 D_{00}^2 - 2D_{00}D^{00}p_0^2p^2 + D_{00}^2\left(p^0\right)^4] &= \left(1 - 2\theta^2p^2 - \eta^2p^2\left(D_0^0\right) + \eta^2\left(D_{00}p_0^2\right)\ \right)^2, \\
\eta^4[p^4 D_{00}^2 - D_{00}^2p_0^4 + 2D_{00}^2p_0^2\mathbf{p}^2] &= \left(1 - 2\theta^2p^2 + \eta^2\mathbf{p}^2\left(D_0^0\right)\ \right)^2,
\end{aligned}$$

$$\eta^4 D_{00}^2\mathbf{p}^4 = \left(1 - 2\theta^2p^2 + \eta^2\mathbf{p}^2\left(D_0^0\right)\ \right)^2,$$

$$\mathbf{p}^2 = -1/2\eta^2 D_{00}. \tag{A.12}$$