

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ELETRICIDADE

ANDERSON PABLO FREITAS EVANGELISTA

**METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS
MULTIVARIÁVEIS BASEADA EM MODELO NEURO-FUZZY NO ESPAÇO DE
ESTADOS COM INFERÊNCIA EVOLUTIVO TIPO-2 INTERVALAR**

São Luís - MA

2019

ANDERSON PABLO FREITAS EVANGELISTA

**METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS
MULTIVARIÁVEIS BASEADA EM MODELO NEURO-FUZZY NO ESPAÇO DE
ESTADOS COM INFERÊNCIA EVOLUTIVO TIPO-2 INTERVALAR**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da UFMA, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Eletricidade na área de concentração de Automação e Controle.

Orientador: Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra

São Luís - MA

2019

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Evangelista, Anderson Pablo Freitas.

Metodologia de Identificação de Sistemas Dinâmicos
Multivariáveis Baseada em Modelo Neuro-fuzzy no Espaço de
Estados com Inferência Evolutivo Tipo-2 Intervalar /
Anderson Pablo Freitas Evangelista. - 2019.
133 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira
Serra.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Engenharia de Eletricidade/ccet, Universidade Federal do
Maranhão, São Luís, 2019.

1. Conjunto fuzzy tipo-2 intervalar. 2. Filtro de
Kalman Estendido. 3. Identificação de sistemas não-
Lineares. 4. Sistema neuro-fuzzy no espaço de estados. I.
Serra, Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira. II. Título.

ANDERSON PABLO FREITAS EVANGELISTA

**METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS
MULTIVARIÁVEIS BASEADA EM MODELO NEURO-FUZZY NO ESPAÇO DE
ESTADOS COM INFERÊNCIA EVOLUTIVO TIPO-2 INTERVALAR**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da UFMA, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Eletricidade na área de concentração de Automação e Controle.

Trabalho aprovado. São Luís - MA, 25 de dezembro de 2019:

Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra
Orientador

Prof. Dr. Omar Andres Carmona Cortes
Segundo Membro da Banca

Prof. Dr. Francisco das Chagas de Souza
Primeiro Membro da Banca

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por sua grande obra em minha vida e por conservar o ânimo para me manter trabalhando mesmo em momentos difíceis.

Agradeço grandemente ao Dr. Professor Ginalber Serra pela incrível orientação e por confiar no meu potencial para desenvolver esta pesquisa.

Agradeço à minha família (Ana, João Batista, Luciana e Júnior) e noiva (Thatiana) pelo apoio, motivação e cuidado durante os anos de mestrado.

Também agradeço os companheiros de laboratório: Daiana Gomes, Andressa Cutrim e Adriano Magalhães pelos comentários e discussões que foram de grande valor para a conclusão deste trabalho.

Agradeço a Universidade Federal do Maranhão e ao Instituto Federal do Maranhão pelo apoio estrutural para que a pesquisa fosse desenvolvida.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram neste dois anos de mestrado. O meu muito obrigado

*“Se o dinheiro for a sua esperança de independência, você jamais a terá.
A única segurança verdadeira consiste numa reserva de
sabedoria, de experiência e de competência.
(Henry Ford)*

RESUMO

Nesta dissertação é proposta uma metodologia para identificação sistemas dinâmicos multivariáveis baseada em modelo neuro-fuzzy no espaço de estados com inferência evolutivo tipo-2 intervalar. A metodologia proposta apresenta um algoritmo de aprendizado evolutivo para o sistema de inferência neural-fuzzy tipo-2 intervalar, onde a estimação das funções de pertinência tipo-2 (contorno e rastro de incerteza) é utilizada a combinação do algoritmo de agrupamento fuzzy baseado em Aprendizagem Participativa e do Filtro de Kalman (FKE). Para estimar a proposição do consequente, um algoritmo fuzzy de identificação no espaço de estados é proposto, onde os parâmetros de Markov são estimados recursivamente e através destes, os parâmetros dos submodelos são calculados incrementalmente. A eficiência e aplicabilidade da metodologia proposta são demonstradas através de resultados computacionais (sistema dinâmico SISO não-linear, sistema dinâmico com não-linearidade complexa combinada, sistema dinâmico não-linear variante no tempo) e experimentais (evaporador de quatro estágios e helicóptero com dois graus de liberdade).

Palavras-chave: Identificação de sistemas não-Lineares. Conjunto fuzzy tipo-2 intervalar. Filtro de Kalman Estendido. Sistema neuro-fuzzy no espaço de estados.

ABSTRACT

In this dissertation, a methodology for the identification of multivariable dynamic systems based on state-space neural-fuzzy model with evolving type-2 interval inference is proposed. An evolving learning algorithm for interval type-2 neural-fuzzy inference system is presented, where the combination of a fuzzy clustering method based on participatory learning and Extended Kalman filter is used for estimating the type-2 membership functions (shape and footprint of uncertainty). For estimating the consequent proposition, a fuzzy state-space identification algorithm is proposed, where the Markov parameters are recursively estimated, which are used to computing the state-space parameters incrementally. The efficiency and applicability of the proposed methodology are demonstrated through computational results (nonlinear SISO dynamic system, combined complex nonlinear dynamic system, time-varying nonlinear dynamic system) and experimental results (four-stage evaporator and helicopter with two degrees of freedom).

Key-words: Nonlinear systems identification. interval type-2 fuzzy sets. Extended Kalman filter. State-space neural-fuzzy system.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Função de pertinência gaussiana tipo-2 geral	36
Figura 2 – Função de pertinência gaussiana tipo-2 intervalar	37
Figura 3 – Conjuntos $\tilde{Z}_1$ e $\tilde{Z}_2$	38
Figura 4 – Operação $\tilde{Z}_1 \cup \tilde{Z}_2$	38
Figura 5 – Operação $\tilde{Z}_1 \cap \tilde{Z}_2$	39
Figura 6 – Operação $\tilde{Z}'_1$	39
Figura 7 – Estrutura de SIF Tipo-2	40
Figura 8 – Etapas do processo de identificação de sistemas	43
Figura 9 – Diagrama de Blocos do Aprendizado supervisionado	45
Figura 10 – Exemplo de conjunto de dados bidimensional	46
Figura 11 – Partições fuzzy obtidas pelo algoritmo de agrupamento fuzzy, onde os losan- gos pretos representam os centros dos agrupamentos	47
Figura 12 – Diagrama de blocos do processo de identificação fuzzy evolutiva	51
Figura 13 – Configuração proposta do sistema de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar	52
Figura 14 – Conjuntos de dados do sinal de entrada do sistema dinâmico SISO não-linear para a etapa de treinamento.	74
Figura 15 – Conjuntos de dados do sinal de entrada do sistema dinâmico SISO não-linear para a etapa de validação.	75
Figura 16 – Conjuntos de dados do sinal de saída do sistema dinâmico SISO não-linear para a etapa de treinamento.	75
Figura 17 – Conjuntos de dados do sinal de saída do sistema dinâmico SISO não-linear para a etapa de validação.	75
Figura 18 – Variação do número de regras na etapa de treinamento do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear . . .	76
Figura 19 – Variação dos pesos adaptativos $\nu_1^{y,l}$ e $\nu_1^{y,r}$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regões de incerteza, para a saída do sistema dinâmico SISO não-linear. . . .	77
Figura 20 – Variação dos pesos adaptativos $\nu_j^{x,l} _{j=1,2}$ e $\nu_j^{x,r} _{j=1,2}$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza para os estados do sistema dinâmico SISO não-linear.	77
Figura 21 – Variação dos elementos da matriz A^1 , na etapa de treinamento, para identifi- cação do sistema dinâmico SISO não-linear.	78
Figura 22 – Variação dos elementos da matriz A^2 , na etapa de treinamento, para identifi- cação do sistema dinâmico SISO não-linear	78
Figura 23 – Variação dos elementos da matriz A^3 , na etapa de treinamento, para identifi- cação do sistema dinâmico SISO não-linear.	78

Figura 24 – Variação dos elementos da matriz $\mathbf{A}^4$, na etapa de treinamento, para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear.	79
Figura 25 – Variação dos elementos do vetor ψ^1 , na etapa de treinamento, para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear.	79
Figura 26 – Variação dos elementos do vetor ψ^2 , na etapa de treinamento, para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear.	79
Figura 27 – Variação dos elementos do vetor ψ^3 , na etapa de treinamento, para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear.	80
Figura 28 – Variação dos elementos do vetor ψ^4 , na etapa de treinamento, para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear.	80
Figura 29 – A resposta temporal do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar, na etapa de validação, para o rastreo da saída do sistema dinâmico SISO não-linear. . .	82
Figura 30 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa para entrada u_1	83
Figura 31 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa para entrada u_2	83
Figura 32 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa para saída y_1	83
Figura 33 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa para saída y_2	84
Figura 34 – Variação do número de regras no processo evolutivo do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para identificação recursiva do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa	85
Figura 35 – Variação dos pesos adaptativos $v_j^{y,l} _{j=1,2}$ e $v_j^{y,r} _{j=1,2}$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza, para a saída do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	85
Figura 36 – Variação dos pesos adaptativos $v_j^{x,l} _{j=1,\dots,6}$ e $v_j^{x,r} _{j=1,\dots,6}$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza para os estados do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	86
Figura 37 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^1$ para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	86
Figura 38 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^4$ para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	87
Figura 39 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^7$ para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	87
Figura 40 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^{10}$ para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	87

Figura 41 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^1 para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	88
Figura 42 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^4 para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	88
Figura 43 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^7 para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	88
Figura 44 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^{10} para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	89
Figura 45 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_1 do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	89
Figura 46 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_2 do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	90
Figura 47 – Não-linearidade estática complexa real (superfície colorida) do sistema dinâmico multivariado e suas estimativas superior (linha sólida azul) e inferior (linha sólida preta) para o sinal v_1	91
Figura 48 – Não-linearidade estática complexa real (superfície colorida) do sistema dinâmico multivariado e suas estimativas superior (linha sólida azul) e inferior (linha sólida preta) para o sinal v_2	91
Figura 49 – Não-linearidade estática complexa reais (superfícies coloridas) e estimadas (linha sólida preta) $v_1 = f(\mathbf{u}_k)$ do sistema dinâmico multivariável. Gráfico da esquerda: estimativa de não-linearidade estática complexa; gráfico da direita: erro na estimativa da não-linearidade estática complexa	92
Figura 50 – Não-linearidade estática complexa reais (superfícies coloridas) e estimadas (linha sólida preta) $v_2 = f(\mathbf{u}_k)$ do sistema dinâmico multivariável. Gráfico da esquerda: estimativa de não-linearidade estática complexa; gráfico da direita: erro na estimativa da não-linearidade estática complexa	92
Figura 51 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para entrada u_1	93
Figura 52 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para entrada u_2	94
Figura 53 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para entrada u_3	94
Figura 54 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para entrada u_4	94
Figura 55 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para saída y_1	95

Figura 56 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para saída y_2	95
Figura 57 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para saída y_3	95
Figura 58 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para saída y_4	96
Figura 59 – Conjunto de dados sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para saída y_5	96
Figura 60 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para saída y_6	96
Figura 61 – Variação do número de regras no processo evolutivo do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para identificação recursiva do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre para o sistema dinâmico multivariado não linear variante no tempo.	98
Figura 62 – Variação dos pesos adaptativos $\nu_j^{y,l} j=1,\dots,6$ e $\nu_j^{y,r} j=1,\dots,6$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza, para a saída do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.	98
Figura 63 – Variação dos pesos adaptativos $\nu_j^{x,l} j=1,\dots,6$ e $\nu_j^{x,r} j=1,\dots,6$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza para os estados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.	99
Figura 64 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^2$ para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.	99
Figura 65 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^4$ para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.	100
Figura 66 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^6$ para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.	100

Figura 67 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz A^8 para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.	100
Figura 68 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^2 para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.	101
Figura 69 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^4 para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.	101
Figura 70 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^6 para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.	101
Figura 71 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^8 para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.	102
Figura 72 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_1 do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo.	102
Figura 73 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_2 do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo.	103
Figura 74 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_3 do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo.	103
Figura 75 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_4 do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo.	103
Figura 76 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_5 do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo.	104
Figura 77 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_6 do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo.	104

Figura 78 – Conjunto de dados do evaporador industrial para entrada u_1 , onde gráfico da esquerda mostra o conjunto total e o da direita, as 200 primeiras amostras	105
Figura 79 – Conjunto de dados do evaporador industrial para entrada u_2 , onde gráfico da esquerda mostra o conjunto total e o da direita, as 200 primeiras amostras	105
Figura 80 – Conjunto de dados do evaporador industrial para entrada u_3 , onde gráfico da esquerda mostra o conjunto total e o da direita, a 200 primeiras amostras	106
Figura 81 – Conjunto de dados do evaporador industrial para saída y_1	106
Figura 82 – Conjunto de dados do evaporador industrial para saída y_2	106
Figura 83 – Conjunto de dados do evaporador industrial para saída y_3	107
Figura 84 – Variação do número de regras no processo evolutivo do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para identificação recursiva do evaporador industrial. A linha vermelha define o final da etapa de treinamento e o início da etapa de identificação recursiva.	108
Figura 85 – Variação dos pesos adaptativos $\nu_j^{y,l} j=1,\dots,3$ e $\nu_j^{y,r} j=1,\dots,3$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza, para a saída do evaporador industrial.	108
Figura 86 – Variação dos pesos adaptativos $\nu_j^{x,l} j=1,\dots,6$ e $\nu_j^{x,r} j=1,\dots,6$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza para os estados do evaporador industrial.	109
Figura 87 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz A^2 para identificação do evaporador industrial.	109
Figura 88 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz A^5 para identificação do evaporador industrial.	110
Figura 89 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz A^8 para identificação do evaporador industrial.	110
Figura 90 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz A^{11} para identificação do evaporador industrial.	110
Figura 91 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^2 para identificação do evaporador industrial.	111
Figura 92 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^5 para identificação do evaporador industrial.	111
Figura 93 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^8 para identificação do evaporador industrial.	111
Figura 94 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^{11} para identificação do evaporador industrial.	112
Figura 95 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_1 do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	112

Figura 96 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_2 do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	113
Figura 97 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_2 do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.	113
Figura 98 – Imagem do helicóptero 2DOF.	114
Figura 99 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para entrada u_θ	114
Figura 100 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para entrada u_ϕ	115
Figura 101 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para saída ϕ	115
Figura 102 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para saída θ	115
Figura 103 – Variação do número de regras no processo evolutivo do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para identificação recursiva do helicóptero 2DOF.	116
Figura 104 – Variação dos pesos adaptativos $v_j^{y,l} _{j=1,2}$ e $v_j^{y,r} _{j=1,2}$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza, para a saída do helicóptero 2DOF.	117
Figura 105 – Variação dos pesos adaptativos $v_j^{x,l} _{j=1,\dots,4}$ e $v_j^{x,r} _{j=1,\dots,4}$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza para os estados do helicóptero 2DOF.	117
Figura 106 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz A^1 para identificação do helicóptero 2DOF.	118
Figura 107 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz A^3 para identificação do helicóptero 2DOF.	118
Figura 108 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz A^5 para identificação do helicóptero 2DOF.	118
Figura 109 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz A^7 para identificação do helicóptero 2DOF.	119
Figura 110 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^1 para identificação do helicóptero 2DOF.	119
Figura 111 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^3 para identificação do helicóptero 2DOF.	119
Figura 112 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^5 para identificação do helicóptero 2DOF.	120
Figura 113 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^7 para identificação do helicóptero 2DOF.	120
Figura 114 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída ϕ do helicóptero 2DOF.	121
Figura 115 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída θ do helicóptero 2DOF.	121

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Tipos de SIF-T2I TS	42
Tabela 2	– Análise comparativa da metodologia proposta com algumas metodologias amplamente citadas na literatura, baseada no critério RMSE	82
Tabela 3	– Análise comparativa da metodologia proposta relacionada à sua contraparte do tipo 1, com base no critério de MSE (melhores valores em negrito).	90
Tabela 4	– Análise quantitativa da metodologia proposta, baseada nos critérios RMSE, NDEI e R^2	104
Tabela 5	– Análise comparativa da metodologia proposta com algumas metodologias proeminentes citadas na literatura, baseadas no critério de RMSE (melhores valores em negrito)	113
Tabela 6	– Análise comparativa da metodologia proposta com a metodologia relevante da literatura, baseadas nos critérios de NMSE e VAF% (melhores valores em negrito)	121
Tabela 7	– NMSE (média $\pm$ desvio padrão) obtido pela metodologia proposta e sua contraparte tipo-1 para ruído de medição com potências de $-24dB$ e $-4dB$.	122

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FK	Filtro de Kalman
FKE	Filtro de Kalman Estendido
SISO	Single-Input and Single-Output (Simples-Entrada e Símples-Saída)
MIMO	Multiple-Input and Multiple-Output (Múltiplas-Entradas e Múltiplas-Saídas)
SIF	Sistema de Inferência Fuzzy
T2I	Tipo-2 Intervalar
TS	Takagi-Sugeno
KM	Karnik-Mendel
RdI	Rastro de Incerteza
FPS	Função de Pertinência Superior
FPI	Função de Pertinência Inferior

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{A}^i$	Matriz de transição de estados da i -ésima regra
$\mathbf{B}^i$	Matriz de entrada da i -ésima regra
$\mathbf{C}^i$	Matriz de saída da i -ésima regra
$\mathbf{D}^i$	Matriz de avanço da i -ésima regra
$\mathbf{K}^i$	Matriz de ganho do Filtro de Kalman Estendido da i -ésima regra
$\mathbf{P}^i$	Matriz de covariância do erro d parâmetros de Markov da i -ésima regra
$\mathbf{P}_o$	Matriz de covariância do erro do processador de saída
$\mathbf{P}^{i,x}$	Matriz de covariância do erro de estados da i -ésima regra
$\mathbf{P}^{i,y}$	Matriz de covariância do erro de saída da i -ésima regra
$\mathbf{z}_k$	vetor de variáveis linguísticas
$\mathbf{z}_k^{(n)}$	vetor de variáveis linguísticas normalizadas
$\mathbf{z}^{i*}$	centros da i -th regra
$\hat{\Sigma}^i$	Matriz de dispersão da i -ésima regra
$\tilde{\Sigma}^i$	Matriz de dispersão tipo-2 da i -ésima regra
$\underline{\Sigma}^i$	Matriz de dispersão inferior da i -ésima regra
$\bar{\Sigma}^i$	Matriz de dispersão superior
Ξ^i	parâmetros de Markov da i -ésima regra
$\Theta^{i,x}$	parâmetros da equação de estados da i -ésima regra
$\Theta^{i,y}$	parâmetros da equação de saída da i -ésima regra
$m_{\underline{\mu}}$	valor máximo conjunto fuzzy inferior
α	taxa de aprendizagem do algoritmo de agrupamento
η	taxa de aprendizagem do filtro de Kalman Estendido
ρ^i	valor de compatibilidade da i -ésima regra
a^i	índice de excitação da i -ésima regra

T_ρ	limiar de grau de compatibilidade
T_a	limiar de índice de excitação
w	janela de tempo (Algoritmo de agrupamento)
$\tilde{\mu}_{Z^i}$	valor de pertinência tipo-2 da i -ésima regra
$\underline{\mu}_{Z^i}$	valor de pertinência inferior da i -ésima regra
$\bar{\mu}_{Z^i}$	valor de pertinência superior da i -ésima regra
λ	nível de significância
β_j	fatores de esquecimento (Mínimos Quadrados)
δ^i	regressores para estimação dos parâmetros de Markov da i -th regra
$\mathbf{v}^i$	regressores para estimação das matrizes do modelo em espaço de estados da i -ésima regra
ψ^i	grau de incerteza de dispersão da i -ésima regra
q_p	tamanho da janela de dados passados
q_f	tamanho da janela de dados futuros

SUMÁRIO

1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	21
1.1	Introdução	21
1.2	Revisão Bibliográfica	22
1.3	Objetivos da Pesquisa	24
1.3.1	Objetivo Geral	24
1.3.2	Objetivos Específicos	24
1.4	Principais Contribuições	24
1.5	Produção Bibliográfica	25
1.5.1	Congressos	25
1.5.2	Periódicos	25
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	26
2.1	Teoria de Realização de Sistemas	26
2.1.1	Parâmetros de Markov	26
2.1.2	Controlabilidade e Observabilidade	27
2.1.2.1	Controlabilidade	28
2.1.2.2	Observabilidade	28
2.1.3	Formulações estendidas do modelo de espaço de estados	29
2.1.3.1	Formulação via matriz de Toeplitz	29
2.1.3.2	Formulação com observador de estados	30
2.1.4	Método de subespaço via parâmetros de Markov	31
2.1.4.1	Estimação dos parâmetros de Markov do Observador	32
2.1.4.2	Estimação em batelada dos estados	32
2.1.4.3	Estimação das matrizes do modelo no espaço de estados	33
2.2	Modelagem Fuzzy tipo-2	34
2.2.1	Revisão de Lógica Fuzzy Tipo-2	35
2.2.1.1	Conjuntos Fuzzy tipo-2	35
2.2.1.2	Operações entre conjuntos fuzzy tipo-2 intervalares	37
2.2.2	Sistemas de inferência fuzzy intervalar tipo-2 Takagi-Sugeno	40
2.2.3	Identificação Fuzzy Tipo-2	43
2.2.3.1	Métodos de ajuste de modelo	44
2.2.3.2	Métodos de identificação de modelo	45
2.2.3.3	Abordagem híbrida	47
2.2.3.4	Estimação dos parâmetros do consequente	47
2.2.4	Identificação Fuzzy Tipo-2 Evolutiva	48

3	METODOLOGIA FUZZY EVOLUTIVA TIPO-2 INTERVALAR PARA IDENTIFICAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS	52
3.1	Estrutura da Rede de Inferência Neuro-Fuzzy tipo-2 Intervalar	52
3.1.1	Camada I - Dados de Entrada	53
3.1.2	Camada II - Fuzificação	53
3.1.3	Camada III - Consequente	54
3.1.4	Camada IV - Composição das Regras	54
3.1.5	Camada V - Redutor de Tipo	54
3.2	Estimação Evolutiva do Antecedente	55
3.2.1	Mecanismo de Criação de agrupamentos	57
3.2.2	Mecanismo de Adaptação dos Agrupamentos	57
3.2.3	Mecanismo de Fusão de Agrupamentos	57
3.2.4	Estimação Paramétrica das Funções de Pertinência Tipo-2 Intervalar via Filtro de Kalman Estendido	59
3.3	Estimação Paramétrica do Consequente	60
3.3.1	Cálculo dos Parâmetros de Markov Fuzzy	62
3.3.2	Estimação dos submodelos em Espaço de Estados	65
3.4	Aspectos de inicialização do algoritmo proposto	66
3.5	Aspectos de convergência do erro de rastreo	68
3.6	Aspectos sobre estabilidade de estimação	71
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	73
4.1	Resultados computacionais	74
4.1.1	Sistema dinâmico SISO não-linear	74
4.1.2	Sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa combinada	82
4.1.3	sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo	92
4.2	Resultados experimentais	104
4.2.1	Evaporador industrial de quatro estágios	104
4.2.2	Helicóptero com dois graus de liberdade	113
4.2.2.1	Estimação recursiva sem ruído de medição	114
4.2.2.2	Estimação recursiva com ruído de medição	122
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	123
	APÊNDICE A – PROPRIEDADES DE MATRIZES	125
A.1	Matriz nilpotente	125
	Referências	126

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

1.1 Introdução

Os sistemas dinâmicos encontrados na práticas são, em último caso, não-lineares, complexos e variantes no tempo. Além disso, esses sistemas podem ser multivariáveis, ou seja, seu comportamento dinâmico é descrito por múltiplas variáveis inter-relacionadas (LUENBERGER, 1979; CHEN, 1998). Deste modo, modelos lineares se tornam ineficientes para o propósito de modelagem e, portanto, a escolha por modelos não-lineares é mais apropriada para tal fim. Entretanto, esta escolha acarreta no aumento da complexidade dos algoritmos de identificação, onde modelos bem estruturados e de parâmetros bem-definidos são requeridos. A modelagem fuzzy clássica (tipo-1) surge como um método alternativo, tal como as redes neurais, para obter modelos que representem sistemas dinâmicos não-lineares (SERRA; BOTTURA, 2009; WU et al., 2010; GOYAL; MITTAL; SETHI, 2016). Os sistemas de inferência fuzzy (SIF) têm se mostrado uma ferramenta poderosa em problemas práticos, uma vez que possuem a capacidade de integrar informações de diferentes fontes, como leis físicas, modelos empíricos e medições (BABUSKA, 2012). Outra vantagem é a capacidade de representar sistemas dinâmicos não-lineares complexos através de um conjunto de modelos lineares, onde seus parâmetros da proposição do consequente são estimados a partir de técnicas baseadas na teoria de sistemas lineares.

Na literatura de sistemas fuzzy, modelos autorregressivos com entradas exógenas (ARX, no inglês *AutoRegressive with eXogenous inputs*) são comumente utilizados como proposição do consequente (GUENOUNOU; DAHHOU; CHABOUR, 2015; GOYAL; MITTAL; SETHI, 2016; TEH et al., 2018). Entretanto, SIF com modelos no espaço de estados na proposição do consequente têm sido propostos e aplicados na modelagem de sistemas dinâmicos (CHATTERJEE et al., 2008; LI et al., 2016; LI et al., 2017). Em Páramo-Carranza et al. (2017), uma abordagem de filtro de Kalman (FK) para modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS) é apresentada. A partir da linearização das equações que governam o sistema dinâmico, um modelo fuzzy no espaço de estados é obtido e o FK fuzzy TS é formulado. Resultados computacionais e experimentais são usados para demonstrar a aplicabilidade do FK fuzzy, assim como comparar seu desempenho com o FK clássico e o FK estendido (FKE). Em Samadi e Saif (2017), uma abordagem de modelagem e projeto de observador baseado em SIF no espaço de estados é apresentada. Para a estimação da proposição do antecedente é usado um algoritmo de agrupamento fuzzy, e para a estimação do consequente, o método de Levenberg–Marquardt é adotado. Para a identificação da base de regras, a decomposição de valores singulares é aplicado, de modo a remover regras irrelevantes obtidas na estimação do antecedente. A modelagem de uma bateria Li-ion é realizada para demonstrar a aplicabilidade e eficiência do SIF baseado em observador de estados.

A partir de 2000, metodologias sobre SIF evolutivos foram propostas. Os SIF evolutivos apresentam a capacidade de adaptar tanto sua estrutura quanto seus parâmetros (ANGELOV; BUSWELL, 2002; ANGELOV; FILEV, 2004; LUGHOFFER, 2008). Desde então, este tipo de SIF tem se tornado de grande interesse para a comunidade científica. Em Pratama et al. (2014), uma metodologia de aprendizado incremental é apresentada. O mecanismo de geração de regras é baseado no critério de significância do dado, onde os dados que apresentarem maior potencial são eleitos como pontos focais. A atualização dos parâmetros do antecedente é baseada na teoria de mapas auto-organizáveis. Para a estimação dos parâmetros do consequente, o método de mínimos quadrados melhorado é adotado. Em Pires e Serra (2018) é apresentada uma metodologia de modelagem de filtros de Kalman fuzzy evolutivo a partir de dados experimentais. De acordo com esta metodologia, a estrutura inicial do filtro de Kalman fuzzy é realizada pelo algoritmo de agrupamento fuzzy Gustafson-Kessel em batelada a partir de um conjunto de dados inicial. Após esta etapa, a adaptação *online* da estrutura do filtro de Kalman fuzzy é realizada pelo algoritmo de agrupamento fuzzy evolutivo Gustafson-Kessel, onde para a estimação parâmetros da proposição do consequente, uma versão fuzzy recursiva do algoritmo de realização de auto-sistemas é considerada.

Entretanto, o conhecimento ou os dados utilizados para projetar um SIF é incerto. Segundo Mendel e John (2002), existem pelo menos quatro fontes de incertezas que podem influenciar no projeto de um SIF: 1) O significado das palavras usadas no antecedente e/ou no consequente das regras apresenta incerteza, ou seja, o significado diferente para cada pessoa; 2) O conhecimento é dado por um grupo de especialistas que divergem em opinião sobre um conceito; 3) O dados de entrada do SIF contém ruídos e *outliers*, os quais geram incertezas; 4) Os dados utilizados na estimação dos parâmetros do SIF são incertos e ruidosos.

Os SIF convencionais, denominados de SIF tipo-1, não são capazes de lidar com tais incertezas em razão dos conjuntos fuzzy utilizados serem certos. Portanto, para lidar com as fontes de incertezas, a teoria de conjuntos fuzzy tipo-2 foi proposta, onde suas funções de pertinência são em si nebulosas (incertas).

1.2 Revisão Bibliográfica

O conceito sobre conjuntos fuzzy tipo-2 foi primeiramente apresentado por Zadeh como uma extensão dos conjuntos fuzzy convencionais (ZADEH, 1975). Entretanto, os primeiros trabalhos tratando especificamente sobre tais conjuntos foram publicados na década de 90. Em Karnik e Mendel (1998) os primeiros conceitos acerca de conjunto fuzzy tipo-2 são apresentados, tal como as operações entre conjuntos, operação redução de tipo e defuzzificação. Em particular, o processo de redução de tipo é desafiador, pois este não é realizado por uma formulação fechada, o que exige um maior esforço computacional, uma vez que o cálculo do intervalo superior e inferior da saída (redução de tipo) a partir Rastro de Incerteza (RdI) das funções de pertinência tipo-2 é complexa (CASTILLO, 2007; CASTILLO, 2011). Um caso especial de conjunto fuzzy

tipo-2, denominado conjunto fuzzy tipo-2 intervalar, foi proposto em Karnik, Mendel e Liang (1999), Liang e Mendel (2000b). Nesse conjunto, a terceira dimensão tem valores sempre iguais a 1, de modo que o conjunto fuzzy tipo-2 intervalar é definido por uma função de pertinência superior e uma inferior. Em comparação aos conjuntos fuzzy tipo-2 gerais, o processo de redução de tipo é menos custosa computacionalmente. Com base na teoria de conjuntos fuzzy intervalares, várias técnicas de redução de tipo foram propostas (LIANG; MENDEL, 2000a; WU; MENDEL, 2002; NIE; TAN, 2008) e aplicadas em diversas áreas, tais como controle (HAGRAS, 2004; LI et al., 2015; EL-NAGAR; EL-BARDINI, 2017), previsão de séries temporais (LIN et al., 2013; LEE; CHANG; LIN, 2014; BAKLOUTI; ABRAHAM; ALIM, 2018) e identificação de sistemas (ABIYEV; KAYNAK; KAYACAN, 2013; KAYACAN; KAYACAN; KHANESAR, 2015; NGO; SHIN, 2016).

A análise dos dados experimentais de entradas/saídas de um sistema dinâmico, de modo a definir as funções de pertinência tipo-2 adequadas para um problema específico, é desafiador, demanda tempo e requer conhecimento de especialistas. Portanto, realizar o projeto de um SIF tipo-2 e realizar um bom uso de suas características ainda é um importante e aberto campo de pesquisa. Neste cenário, metodologias evolutivas estão sendo propostas como uma abordagem para projeto de SIF tipo-2 intervalar (JUANG; TSAO, 2008; TUNG; QUEK; GUAN, 2013; LIN et al., 2015), bem como métodos de otimização/evolucionários (KUMAR; KUMAR, 2017; ANTONELLI et al., 2017). Em Das, Subramanian e Sundaram (2015) é proposto uma rede neuro-fuzzy tipo-2 intervalar evolutiva com aprendizado sequencial. Para o aprendizado da proposição do antecedente e consequente das regras, é proposto um método de aprendizado metacognitivo. Para o processo de redução de tipo, é utilizada uma abordagem orientada a dados para calcular a saída da rede com precisão e menor tempo de processamento. Em Mohammadzadeh et al. (2016) é apresentado um método de controle fuzzy tipo-2 adaptativo para sincronização de sistemas caóticos de ordem fracionária. Nesta abordagem, os autores propõem uma rede neuro-fuzzy intervalar tipo-2 não-*singleton* para identificação de sistemas. O consequente das regras é ajustado baseado nas leis de adaptação derivadas da análise de estabilidade de Lyapunov. As regras do modelo são criadas por um algoritmo de agrupamento, onde é considerado o limite superior do grau de pertinência tipo-2 para definir a condição de criação das novas regras, onde os parâmetros das funções de pertinência são otimizados por uma versão modificada do algoritmo de otimização *weed invasive*. Em El-Nagar (2017), uma nova estrutura de rede neuro-fuzzy tipo-2 recorrente Takagi-Sugeno-Kang é apresentada para identificação de sistemas dinâmicos não-lineares e variantes no tempo. O antecedente e consequente das regras são atualizados com base na função de Lyapunov, a qual garante estabilidade na estimação dos parâmetros da rede neuro-fuzzy tipo-2 intervalar.

1.3 Objetivos da Pesquisa

1.3.1 Objetivo Geral

O intuito desta dissertação é desenvolver uma metodologia de identificação neuro-fuzzy evolutiva Takagi-Sugeno tipo-2 intervalar baseada em modelo de espaço de estados para identificação de sistemas dinâmicos não-lineares multivariáveis.

1.3.2 Objetivos Específicos

Os seguintes objetivos específicos são considerados nesta dissertação:

- Obter base teórica sobre identificação no espaço de estados de sistemas dinâmicos multivariáveis (Seção 2.1);
- Obter base teórica sobre modelagem fuzzy tipo-2 (Seção 2.2)
- Desenvolver uma metodologia para obtenção de modelos neuro-fuzzy tipo-2 evolutivo Takagi-Sugeno no espaço de estados via dados experimentais (Capítulo 3);
- Validar a metodologia proposta com aplicações a sistemas dinâmicos de áreas em potencial (evaporador industrial, helicóptero com dois graus de liberdade, etc) e comparar os resultados com outras estratégias de identificação citadas na literatura (Capítulo 4).

1.4 Principais Contribuições

A originalidade desta dissertação é correspondente aos seguintes aspectos de interesse:

- Eficiência em rastrear a incerteza dinâmica inerente aos dados experimentais, adaptativamente.
- Eficiência em rastrear a não-linearidade inerente aos dados experimentais, recursivamente.
- Robustez a ruídos, perturbações e *outliers* inerentes aos dados experimentais.
- Baixo esforço computacional, alocação de memória e tempo de execução. Uma vez que a metodologia adotada não realiza o cálculo da matriz de Henkel, como é utilizada em metodologias de identificação no espaço de estados Torres e Serra (2018), Santos e Serra (2018), Pires e Serra (2018)

1.5 Produção Bibliográfica

1.5.1 Congressos

- EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. O. Algoritmo recursivo para identificação nebulosa tipo-2 de sistemas dinâmicos não-lineares. In: Anais do XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente. [S.l.: s.n.], 2017. p. 2065–2070.
- EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. O. Identificação recursiva de sistemas dinâmicos multivariáveis no espaço de estados via parâmetros de Markov baseada em inferência neural-fuzzy tipo-2 intervalar evolutiva. In: Anais do XIV Simpósio Brasileiro de Automação inteligente. [S.l.: s.n.], 2019.

1.5.2 Periódicos

- EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. O. State space black-box modelling via markov parameters based on evolving type-2 neural-fuzzy inference system for nonlinear multi-variable dynamic systems. Fuzzy Set and Systems, 2019. DOI 10.1016/j.fss.2019.08.013 (Qualis A1)
- EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. O. Multivariable State-Space Recursive Identification Algorithm Based on Evolving Type-2 Neural-Fuzzy Inference System. Journal of Control, Automation and Electrical Systems, 2019. DOI: DOI 10.1007/s40313-019-00528-0 (Qualis B1)

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Teoria de Realização de Sistemas

Nesta seção, os conceitos fundamentais relacionados a realização de sistemas são apresentados. Considere um sistema dinâmico Linear Invariante no Tempo (LIT) dado por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ são as matrizes do modelo de espaço de estados, $\mathbf{x}_k = [x_{1,k} \ x_{2,k} \ \cdots \ x_{n,k}] \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{y}_k = [y_{1,k} \ y_{2,k} \ \cdots \ y_{p,k}] \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas, $\mathbf{u}_k = [u_{1,k} \ u_{2,k} \ \cdots \ u_{m,k}] \in \mathbb{R}^m$ é o vetor dos sinais de entrada.

2.1.1 Parâmetros de Markov

Há muitos tipos de entrada que são particularmente importante, tanto em aspectos teóricos quanto nos aspectos práticos. Dentre estes sinais, o sinal **impulso** é comumente utilizado para a identificação dos parâmetros modais de sistemas dinâmicos (JUANG, 2011). Considerando um sistema dinâmico de uma entrada e uma saída (SISO - do inglês *Single-input and single-output*) dado pelas Eqs. (2.1)-(2.2), com condições iniciais $x_0 = 0$ e aplicando uma entrada ao impulso, a propagação dos estados é dado como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} & \implies \mathbf{y}_0 = \mathbf{D} \\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{B} & \implies \mathbf{y}_1 = \mathbf{CB} \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{AB} & \implies \mathbf{y}_2 = \mathbf{CAB} \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \mathbf{x}_k = \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} & \implies \mathbf{y}_k = \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde os parâmetros de Markov são dados por:

$$\Xi_j = \begin{cases} \mathbf{D} & \text{se } j = 0 \\ \mathbf{C}(\mathbf{A})^{j-1}\mathbf{B} & \text{se } j > 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Os parâmetros de Markov são geralmente usados como a bases de muitos métodos de identificação de sistemas dinâmicos lineares, uma vez que, como observado na Eq. (2.4), as matrizes $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$ compõem a matriz de parâmetros de Markov Ξ . Deste modo, o problema de realização é dado como segue: dada uma medição y_k , estimar as matrizes do modelo de espaço de estados $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$, tal que as medições y_k sejam reproduzidas segundo as equação de

espaço de estados (JUANG; PAPPA, 1985). Uma vez que os parâmetros de Markov são dados a partir da resposta à entrada impulso, estes devem ser únicos para um dado sistema dinâmico linear. Assim, uma transformação no vetor de estados de um sistema, tal como $\hat{\mathbf{x}}_k = T\mathbf{x}_k$, produz os mesmos parâmetros de Markov (JUANG, 2011), tal que:

$$\Xi_k = \mathbf{C}T^{-1}(T\mathbf{A}T^{-1})^{k-1}T\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \quad (2.5)$$

Portanto, há um infinito número de transformações que geram a mesma sequência de parâmetros de Markov. Assim, conclui-se que a tripla $[T\mathbf{A}T^{-1}, T\mathbf{B}, \mathbf{C}T^{-1}]$ também é uma realização do sistema dado pelas Eqs. (2.1)-(2.2), desde que os autovalores (parâmetros modais) de $\mathbf{A}$ sejam mantidos. Caso o sistema seja nilpotente (Apêndice A.1), o sistema é assintoticamente estável e, assim, a relação entrada-saída do sistema dada por:

$$y_k = \sum_{j=1}^k \mathbf{C}\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{B}u(k-j) + \mathbf{D}u(k) \quad (2.6)$$

pode ser limitada a um número q_p de parâmetros de Markov, tal que:

$$y_k = \sum_{j=1}^{q_p} \mathbf{C}\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{B}u(k-j) + \mathbf{D}u(k) \quad (2.7)$$

Desta forma, uma vez que o sistema é assintoticamente estável, os parâmetros de Markov podem ser estimados via mínimos quadrados, como segue:

$$\Xi = \mathbf{Y}_k \mathbf{U}_{q_p}^T \left[\mathbf{U}_{q_p} \mathbf{U}_{q_p}^T \right]^{-1} \quad (2.8)$$

onde

$$\mathbf{Y}_k = [y_{p_q}, y_{p_q+1}, \dots, y_k] \quad (2.9)$$

$$\mathbf{U}_{q_p} = \begin{bmatrix} u_{q_p} & u_{q_p+1} & \cdots & u_k \\ u_{q_p-1} & u_{q_p} & \cdots & u_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0 & u_1 & \cdots & u_{k-q_p} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

2.1.2 Controlabilidade e Observabilidade

Na área de controle e identificação de sistemas, um questionamento pertinente é se todos os estados de um dado sistema são controláveis e/ou observáveis. Tal questão pode ser verificada a partir de técnicas utilizadas na representação no espaço de estados. A solução para Eqs. (2.1)-(2.2), no tempo discreto, é dado por:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^k \mathbf{A}^{j-1} \mathbf{B} u_{k-j} \quad (2.11)$$

ou na forma matricial

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-2} \\ \mathbf{u}_{k-3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.1.2.1 Controlabilidade

Um sistema LIT é dito controlável se os estados $\mathbf{x}$ podem ser alcançados a partir de qualquer estado inicial do sistema em um intervalo finito de tempo por alguma ação de controle. Em outras palavras, se for possível obter uma entrada capaz de transferir todas as variáveis de estado de um valor inicial desejado para um estado final desejado, o sistema é dito **controlável** (NISE, 2011).

Para determinar a controlabilidade de um sistema em um determinado instante de tempo, é condição necessária e suficiente que o estados nulos, em vez de todas as condições iniciais possíveis, possam ser transferidos para todos os estados finais possíveis. Para justificar essa afirmação, a equação de estado (2.11) pode ser formulada como segue:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{k-2} \\ \mathbf{u}_{k-3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Desta forma, se for possível demonstrar que o sistema pode ir do estado nulo $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ até um estado final desejado $\hat{\mathbf{x}}_k$, então pode-se mover os estados de qualquer ponto inicial $\mathbf{x}_0$ à um ponto final $\hat{\mathbf{x}}_k$.

Teorema 2.1. *Um sistema LIT, de dimensão finita, discreto no tempo, de ordem n é controlável se, e somente se, a matriz de controlabilidade $C \in \mathfrak{R}^{n \times km}$ possuir posto cheio, onde*

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Prova: ver Chen (1998)

2.1.2.2 Observabilidade

Um sistema LIT é dito observável se o conhecimento do sinal de entrada $\mathbf{u}_j$ e da saída $\mathbf{y}_j$ em um intervalo de tempo finito $0 < j < k$ determinarem completamente o estado $\mathbf{x}_k$. Em outras palavras, se for possível obter um vetor de estado inicial $\mathbf{x}_0$, a partir da medida de $\mathbf{u}_k$ e de $\mathbf{y}_k$ durante um intervalo de tempo finito a partir de um instante inicial, o sistema é dito observável (NISE, 2011).

Para determinar a observabilidade de um sistema, é condição necessária e suficiente que os estados iniciais da resposta a entrada nula possam ser determinados a partir da saída $\mathbf{y}_j$, ($j = 0, 1, \dots, k-1$), porque o conhecimento do estado inicial $\mathbf{x}_0$ e da entrada $\mathbf{u}_j$ permite o cálculo do estado $\mathbf{x}_{k-1}$ a partir da Eq. (2.11).

Teorema 2.2. *Um sistema LIT, de dimensão finita, discreto no tempo, de ordem n , com cálculo de saída dada pela Eq. (2.2), é observável se, e somente se, a matriz de observabilidade $O \in \mathbb{R}^{n \times kp}$ possuir posto cheio, onde*

$$O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Prova: ver Chen (1998)

2.1.3 Formulações estendidas do modelo de espaço de estados

A partir das equações do modelo de espaço de estados (2.1)-(2.2), formulações importantes para os métodos de identificação no espaço de estados de sistemas dinâmicos são apresentadas a seguir.

2.1.3.1 Formulação via matriz de Toeplitz

Seja dado um sistema dado pelas Eqs. (2.1)-(2.2), o histórico de saídas entre os instantes $k, k+1, \dots, k+q_f$, dado por $\bar{\mathbf{y}}_{k+q_f} = [\mathbf{y}_k^T \ \mathbf{y}_{k+1}^T \ \mathbf{y}_{k+2}^T \ \dots \ \mathbf{y}_{k+q_f-1}^T]^T$, obedece a seguinte relação:

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+q_f} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{q_f-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA}^{q_f-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{q_f-3}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+q_f-1} \end{bmatrix} = O\mathbf{x}_k + \mathcal{T}\bar{\mathbf{u}}_{k+q_f} \quad (2.16)$$

onde O é a matriz de observabilidade, $\bar{\mathbf{u}}_{k+q_f}$ é definida de forma similar a $\bar{\mathbf{y}}_{k+q_f}$ e $\mathcal{T}$ é a matriz de resposta ao impulso, também denominada matriz de Toeplitz, sendo composta pelos parâmetros de Markov, tal que:

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \Xi_0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \Xi_1 & \Xi_0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Xi_{j-1} & \Xi_{j-2} & \dots & \Xi_0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.1.3.2 Formulação com observador de estados

Baseado na teoria de FK, as Eqs. (2.1)-(2.2) podem ser dadas como segue:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{L}\mathbf{e}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \mathbf{e}_k \end{cases} \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{e}_k$ é um sequência de ruído branco com $E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] = \mathbf{R}_e$ e $\mathbf{L}$ é o ganho do FK. A Eq. (2.18) pode ser reescrita como segue:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \check{\mathbf{A}}\mathbf{x}_k + \check{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k + \mathbf{L}\mathbf{y}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \mathbf{e}_k \end{cases} \quad (2.19)$$

onde $\check{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}]$ e $\check{\mathbf{B}} = [\mathbf{B} - \mathbf{L}\mathbf{D}]$. Considerando o histórico de dados em uma janela de tempo dada de $k - q_p$ até $k - 1$, os seguinte vetores são definidos: $\bar{\mathbf{u}}_{k-q_p} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k-q_p}^T & \mathbf{u}_{k-q_p+1}^T & \cdots & \mathbf{u}_{k-1}^T \end{bmatrix}^T$, $\bar{\mathbf{y}}_{k+q_f} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k-q_p}^T & \mathbf{y}_{k-q_p+1}^T & \cdots & \mathbf{y}_{k-1}^T \end{bmatrix}^T$, sendo q_p e q_f deslocamentos à esquerda e à direita no tempo discreto, respectivamente. Desta forma, uma representação baseada na matriz de Toeplitz para Eq. (2.18) é dado a seguir:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{A}^{q_p} \mathbf{x}_{k-q_p} + \mathbf{C}_B \bar{\mathbf{u}}_{k-q_p} + \mathbf{C}_L \bar{\mathbf{e}}_{k-q_p} \\ \bar{\mathbf{y}}_{k+q_f} = \mathbf{O} \mathbf{x}_k + \mathcal{T} \bar{\mathbf{u}}_{k+q_f} + \mathcal{H} \bar{\mathbf{e}}_{k+q_f} \end{cases} \quad (2.20)$$

onde

$$\mathbf{C}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} & \mathbf{A}^{k-2} \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{L} & \mathbf{A}^{k-2} \mathbf{L} & \cdots & \mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{L} & \mathbf{I} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{q_f-2} \mathbf{L} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{q_f-3} \mathbf{L} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Para a Eq. (2.19), a representação baseada na matriz de Toeplitz é dada como segue:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \check{\mathbf{A}}^{q_p} \mathbf{x}_{k-q_p} + \check{\mathbf{C}}_B \bar{\mathbf{u}}_{k-q_p} + \check{\mathbf{C}}_L \bar{\mathbf{y}}_{k-q_p} \\ \bar{\mathbf{y}}_{k+q_f} = \check{\mathbf{O}} \mathbf{x}_k + \check{\mathcal{T}} \bar{\mathbf{u}}_{k+q_f} + (\mathbf{I} - \check{\mathcal{H}}) \bar{\mathbf{y}}_{k+q_f} + \bar{\mathbf{e}}_{k+q_f} \end{cases} \quad (2.24)$$

onde $\check{\mathbf{C}}_B$, $\check{\mathbf{C}}_L$, $\check{\mathbf{O}}$ e $\check{\mathcal{T}}$ são definidas de forma similar a Eqs.(2.21), (2.22), (2.15) e (2.17).

$$\check{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\mathbf{L} & \mathbf{I} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_f-2} \mathbf{L} & \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_f-3} \mathbf{L} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Assumindo que a matriz $\check{\mathbf{A}}$ seja nilpotente, a contribuição dos estados $\mathbf{x}_{k-q_p}$ é muito pequena e a equação de estados na Eq. (2.24) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_k = \check{\mathbf{C}}_B \bar{\mathbf{u}}_{k-q_p} + \check{\mathbf{C}}_L \bar{\mathbf{y}}_{k-q_p} \quad (2.26)$$

assim, os estados $\mathbf{x}_k$ podem ser estimados a partir de amostras de entradas e saídas em instantes passados.

2.1.4 Método de subespaço via parâmetros de Markov

Pré-multiplicando a matriz de observabilidade $\check{\mathbf{O}}$ na Eq. (2.26), tem-se:

$$\check{\mathbf{O}}\mathbf{x}_k = \check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{C}}_B \bar{\mathbf{u}}_{k-q_p} + \check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{C}}_L \bar{\mathbf{y}}_{k-q_p} \quad (2.27)$$

tal que

$$\check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{C}}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_p-1}\check{\mathbf{B}} & \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_p-2}\check{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{C}\check{\mathbf{B}} \\ \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_p}\check{\mathbf{B}} & \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_p-1}\check{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{B}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_p+q_f-2}\check{\mathbf{B}} & \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_p+q_f-3}\check{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_f-1}\check{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{C}}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_p-1}\mathbf{L} & \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_p-2}\mathbf{L} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{L} \\ \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_p}\mathbf{L} & \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_p-1}\mathbf{L} & \dots & \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}\mathbf{L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_p+q_f-2}\mathbf{L} & \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_p+q_f-3}\mathbf{L} & \dots & \mathbf{C}\check{\mathbf{A}}^{q_f-1}\mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

onde os elementos das matrizes acima são os parâmetros de Markov da representação de espaço de estados com observador (Eq. (2.18)), tal que

$$\check{\mathbf{x}}_{k-j}^{(u)} = \begin{cases} \mathbf{D} & \text{if } j = 0 \\ \mathbf{C}(\check{\mathbf{A}})^{j-1}\check{\mathbf{B}} & \text{if } j > 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\check{\mathbf{x}}_{k-j}^{(y)} = \mathbf{C}(\check{\mathbf{A}})^{j-1}\mathbf{L} \quad (2.31)$$

Considerando que $\check{\mathbf{A}}$ é nilpotente, as matrizes $\check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{C}}_B$ e $\check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{C}}_L$ são dadas como segue:

$$\check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{C}}_B = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{x}}_{k-q}^{(u)} & \check{\mathbf{x}}_{k-q_p+1}^{(u)} & \dots & \check{\mathbf{x}}_{k-q_p+q_f-1}^{(u)} & \dots & \check{\mathbf{x}}_{k-1}^{(u)} \\ \mathbf{0} & \check{\mathbf{x}}_{k-q_p}^{(u)} & \dots & \check{\mathbf{x}}_{k-q_p+q_f-2}^{(u)} & \dots & \check{\mathbf{x}}_{k-2}^{(u)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \check{\mathbf{x}}_{k-q_p}^{(u)} & \dots & \check{\mathbf{x}}_{k-q_f}^{(u)} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{C}}_L = \begin{bmatrix} \check{\Xi}_{k-q}^{(y)} & \check{\Xi}_{k-q_p+1}^{(y)} & \cdots & \check{\Xi}_{k-q_p+q_f-1}^{(y)} & \cdots & \check{\Xi}_{k-1}^{(y)} \\ \mathbf{0} & \check{\Xi}_{k-q_p}^{(y)} & \cdots & \check{\Xi}_{k-q_p+q_f-2}^{(y)} & \cdots & \check{\Xi}_{k-2}^{(y)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \check{\Xi}_{k-q_p}^{(y)} & \cdots & \check{\Xi}_{k-q_f}^{(y)} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

2.1.4.1 Estimação dos parâmetros de Markov do Observador

Em Chiuso e Picci (2005) é demonstrado que um vetor auto-regressivo com entradas exógenas (no inglês *Vector Auto-Regressive eXogenous input VARX*) dado por

$$\mathbf{y}_k = \sum_{j=0}^{q_p} \check{\Xi}_{k-j}^{(u)} \mathbf{u}_{k-j} + \sum_{j=1}^{q_p} \check{\Xi}_{k-j}^{(y)} \mathbf{y}_{k-j} \quad (2.34)$$

pode ser aplicado para aproximar a dinâmica de um sistema dado pela Eq. (2.18).

Proposição 2.1. *Se a matriz $\check{\mathbf{A}}$ for nilpotente, o sistema dinâmico é sistema assintoticamente estável e contribuição do estado $\mathbf{x}_{k-q_p}$ é muito pequena na Eq. (2.20). Deste modo, os parâmetros de Markov do Observador estão relacionados com o VARX, dado na Eq. (2.34).*

Prova: ver Chiuso e Picci (2005).

Portanto a Eq. (2.34) pode ser reescrita como segue:

$$\mathbf{y}_k = \check{\Xi} \delta_k + \mathbf{e}_k \quad (2.35)$$

onde $\delta_k = [\bar{\mathbf{u}}_{k-q_p}^T \quad \mathbf{u}_{k-q_p}^T \quad (\bar{\mathbf{y}}_{k-q_p})^T]^T$ e $\check{\Xi} = [\Xi_{k-p}^{(u)}, \dots, \Xi_k^{(u)}, \Xi_{k-p}^{(y)}, \dots, \Xi_{k-1}^{(y)}]$. Dado um conjunto de dados entre os instantes q_p e k ($k > q_p$), uma formulação em batelada é dada por:

$$\mathbf{Y}_k = \check{\Xi} \Delta_k \quad (2.36)$$

onde

$$\mathbf{Y}_k = [\mathbf{y}_{q_p+1} \quad \mathbf{y}_{q_p+2} \quad \cdots \quad \mathbf{y}_k], \quad (2.37)$$

$$\Delta_k = [\delta_{q_p+1} \quad \delta_{q_p+2} \quad \cdots \quad \delta_k] \quad (2.38)$$

Desta forma, os parâmetros de Markov do observador podem ser estimados via mínimos quadrados, dado como segue:

$$\check{\Xi}_k = \mathbf{Y}_k (\Delta_k)^T \left[\Delta_k (\Delta_k)^T \right]^{-1} \quad (2.39)$$

2.1.4.2 Estimação em batelada dos estados

Descrição do problema: Dado um conjunto de dados de entradas e saídas do instante $k = \{0, 1, \dots, N-1\}$, estimar as matrizes $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{L}]$.

Baseado na teoria apresentada anteriormente, a estimação em batelada do histórico dos estados $\mathbf{X}$ pode ser realizada aplicando o Algoritmo 1, dado a seguir:

Algoritmo 1: Estimação batelada dos estados**Entrada:** $\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_k, q_p, q_f$ **Saída:** $\mathbf{X}$ **Passo 1:** Estimar os parâmetros de Markov da representação com observador de estados (Eq. (2.39)).**Passo 2:** Calcular as matrizes $\check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{C}}_B$ (Eq. (2.32)) e $\check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{C}}_L$ (Eq. (2.33)).**Passo 3:** Calcular a formulação em batelada da Eq. (2.27) como segue:

$$\check{\mathbf{O}}\mathbf{X} = \check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{C}}_B\bar{\mathbf{U}}_{q_p} + \check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{C}}_L\bar{\mathbf{Y}}_{q_p} \quad (2.40)$$

onde $\bar{\mathbf{U}}_{q_p} = [\bar{\mathbf{u}}_0 \ \bar{\mathbf{u}}_1 \ \bar{\mathbf{u}}_2 \ \cdots \ \bar{\mathbf{u}}_{N-q_p}]^T$ e $\bar{\mathbf{Y}}_{q_p} = [\bar{\mathbf{y}}_0 \ \bar{\mathbf{y}}_1 \ \bar{\mathbf{y}}_2 \ \cdots \ \bar{\mathbf{y}}_{N-q_p}]^T$, tal que N é o número de dados na batelada.

Passo 4: Aplicar decomposição de valores singulares (do ingles *Singular Value Decomposition* - SVD) no lado direito da Eq. (2.40), como segue:

$$\check{\mathbf{O}}\mathbf{X} = [\mathbf{U}_n \ \mathbf{U}_\perp] \begin{bmatrix} \Sigma_n^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n \\ \mathbf{V}_\perp \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

onde a ordem do sistema n é definida pelos n valores singulares significativos, onde $\sigma_n \gg \sigma_{n+1}$.

Passo 5: Estimar o histórico dos valores de estados como segue:

$$\hat{\mathbf{X}} = (\Sigma_n^s)^{1/2} \mathbf{V}_n \quad (2.42)$$

2.1.4.3 Estimação das matrizes do modelo no espaço de estados

Dadas as equações de estados (2.1) e (2.1), a formulação em batelada das mesmas é dada a seguir:

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{A}\mathbf{X}_{N-1} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{N-1} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{Y}_N = \mathbf{C}\mathbf{X}_N + \mathbf{D}\mathbf{U}_N \quad (2.44)$$

onde $\mathbf{X}_N = [\mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_N]$, $\mathbf{U}_N = [\mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_N]$ e $\mathbf{Y}_N = [\mathbf{y}_2 \ \mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_N]$. Reescrevendo a Eq. (2.43), tem-se:

$$\mathbf{X}_N = [\mathbf{A} \ \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1} \\ \mathbf{U}_{N-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Theta}^{(x)} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1} \\ \mathbf{U}_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Desta forma, a solução de mínimos quadrados para a Eq. (2.45) é dada por:

$$\boldsymbol{\Theta}^{(x)} = \mathbf{X}_N \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1}^T & \mathbf{U}_{N-1}^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1} \\ \mathbf{U}_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1}^T & \mathbf{U}_{N-1}^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (2.46)$$

De modo similar, desenvolvendo a Eq. (2.44), tem-se:

$$\mathbf{Y}_N = [\mathbf{C} \ \mathbf{D}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1} \\ \mathbf{U}_{N-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Theta}^{(y)} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1} \\ \mathbf{U}_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

A solução de mínimos quadrados para Eq. (2.47) é dada por:

$$\boldsymbol{\Theta}^{(y)} = \mathbf{Y}_N \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N-1}^T & \mathbf{U}_{N-1}^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_N \\ \mathbf{U}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_N^T & \mathbf{U}_N^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (2.48)$$

2.2 Modelagem Fuzzy tipo-2

A modelagem fuzzy é o método de descrever as características de um dado sistema através de um coleção de regras fuzzy **SE-ENTÃO** (TAKAGI; SUGENO, 1985; HORIKAWA; FURUHASHI; UCHIKAWA, 1992) dada como segue:

SE proposição do antecedente **ENTÃO** proposição do consequente

O conceito de modelagem e análise baseados em variáveis linguísticas foi introduzido por Zadeh (1973) e tem sido aplicada consideravelmente na literatura (KIM et al., 1997; TEH et al., 2018). A estrutura lógica das regras fuzzy facilita o entendimento e análise do modelo de uma forma semi-qualitativa, próximo da maneira de como humanos inferem sobre o mundo real (BABUSKA, 2012). Em um dado contexto, a caracterização de um problema por meio de variáveis linguísticas pode ser mais apropriada do que valores numéricos precisos, uma vez que a sobreposição entre os conjuntos fuzzy (funções de pertinência) garantem a generalização em situações não capturadas completamente pelas regras (BABUSKA, 2012). Os conceitos de SIF podem ser empregadas para modelagem de sistemas de varias formas, como, por exemplo, sistemas fuzzy baseados em regras (ANGELOV; BUSWELL, 2002; JÚNIOR; SERRA, 2017) e modelos regressivos fuzzy lineares (PETERS, 1994; SONG et al., 2005). Em relação a proposição do consequente, um modelo fuzzy podem ser classificados como:

- *Modelos fuzzy linguísticos*: neste tipo de modelo, tanto a proposição do antecedente quanto do consequente são conjuntos fuzzy;
- *Modelos fuzzy Takagi-Sugeno*: neste tipo de modelo, o consequente das regras é dados por funções matemática, onde estas estão em função das variáveis linguísticas utilizadas no antecedente.

A seguir serão apresentadas os principais conceitos de SIF tipo-2 *Takagi-Sugeno*, assim como metodologias para modelagem fuzzy a partir de dados experimentais.

2.2.1 Revisão de Lógica Fuzzy Tipo-2

Muito frequentemente, os dados utilizados para desenvolver as regras do sistemas fuzzy são incertos. Tais incertezas conduzem as funções de pertinência do antecedente e/ou consequente a produzirem valores incertos. Desta maneira, os conjuntos fuzzy convencionais, denominados de conjuntos fuzzy tipo-1, são incapazes de lidar com incertezas presente dos dados (MENDEL; JOHN, 2002; CASTILLO, 2011).

2.2.1.1 Conjuntos Fuzzy tipo-2

Os conjuntos fuzzy tipo-2, diferente dos conjuntos tipo-1, tem a capacidade de lidar com incertezas, uma vez que as funções de pertinência são incertas, sendo capazes de modelar e minimizar os efeitos de tais incertezas. Em ZADEH (1975) o conceito de conjuntos fuzzy tipo-2 foi apresentado como uma extensão dos conjuntos fuzzy tipo-1. Um conjunto fuzzy tipo-2 é caracterizado por uma função de pertinência, tal que o grau de pertinência de cada elemento desta função é um conjunto fuzzy entre $[0, 1]$, onde os graus de pertinência são valores *crisp* entre $[0, 1]$. Estes conjuntos podem ser usados quando se há incertezas em relação ao grau de pertinência, ou seja, incerteza sobre a forma da função.

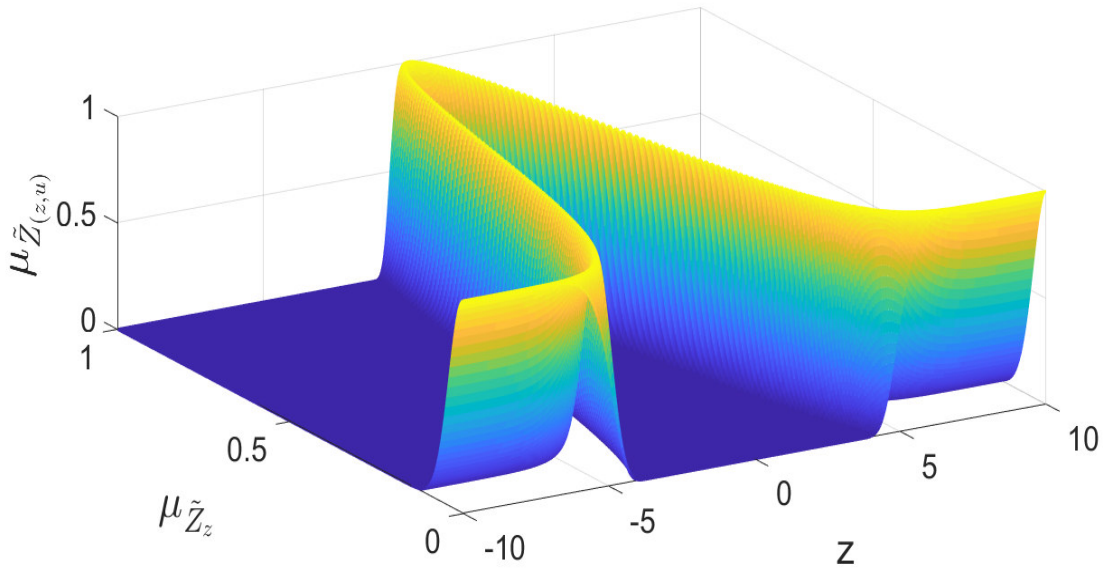
Um conjunto tipo-2, denominado por $\tilde{Z}$, pode ser representada formalmente por (MENDEL; JOHN, 2002):

$$\tilde{Z} = \{((x, u), \mu_{\tilde{Z}(z, u)}) \mid \forall z \in \mathcal{Z} \quad \forall u \in J_z \subseteq [0, 1]\} \quad (2.49)$$

onde $\mathcal{Z}$ é o universo de discurso, J_z é denominado o grau de pertinência primário e $\mu_{\tilde{Z}(z, u)}$ é uma função de incerteza relacionada com o grau de pertinência J_z , ou seja, para cada grau de pertinência J_z tem associada um a si uma função de incerteza $\mu_{\tilde{Z}(z, u)}$ (exemplo: um dado z apresenta valor de pertinência $\mu_{\tilde{Z}(z)} = 0.8$ com incerteza de $\mu_{\tilde{Z}(z, u)} = 0.92$). A seguir, definições importantes a cerca de conjuntos fuzzy tipo-2, são apresentadas:

Definição 2.1. *Função de tipo-2 geral:* São funções onde tanto o graus de pertinência primário e o secundário estão contido no intervalo $[0, 1]$ (KARNIK; MENDEL, 1998; KARNIK; MENDEL; LIANG, 1999). Na Fig. 1 é dado um exemplo de função gaussiana tipo-2 geral.

Figura 1 – Função de pertinência gaussiana tipo-2 geral



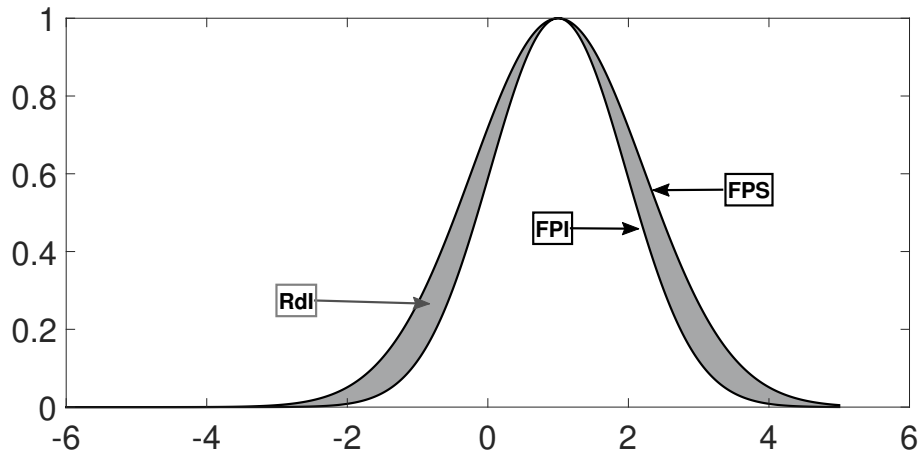
Fonte: Autor

Definição 2.2. *Função de tipo-2 intervalar:* é um caso especial dos conjuntos fuzzy tipo-2, onde a terceira dimensão tem valor de pertinência sempre igual a 1, ou seja, $\mu_{\tilde{Z}(z,u)} = 1$. Desta forma, uma função de pertinência tipo-2 intervalar pode ser definida por duas funções tipo-1, sendo uma função de pertinência superior (FPS) e uma inferior (FPI), sendo definida como segue:

$$\tilde{Z} = \{1/[\bar{\mu}_{\tilde{Z}}(z), \underline{\mu}_{\tilde{Z}}(z)] \mid \forall z \in \mathcal{Z}\} \quad (2.50)$$

As funções tipo-2 intervalares atualmente são mais utilizadas (SAHA; KONAR; NAGAR, 2017; SHARMA; TYAGI, 2017; KHOOBAN et al., 2017; JIANG et al., 2018; LE, 2019), uma vez que o custo computacional é menor quando comparado as funções tipo-2 gerais (LIANG; MENDEL, 2000b; MENDEL; JOHN, 2002). Na Fig. 2 é dada um exemplo de função gaussiana tipo-2 intervalar. Nestes termos, este trabalho tem como foco a utilização de sistemas fuzzy baseado em conjuntos tipo-2 intervalares.

Figura 2 – Função de pertinência gaussiana tipo-2 intervalar



Fonte: Autor

Definição 2.3. *Rastro de Incerteza (Rdl):* matematicamente, o rastro de incerteza de um conjunto tipo-2 intervalar é a união de todas as funções de pertinências primárias (MENDEL; JOHN, 2002). Em outras palavras, a rastro de incerteza é uma região limitada que representa a incerteza sobre os graus de pertinência primário. Para conjuntos fuzzy tipo-2 intervalares, a Rdl é definida como o espaço entre a função de pertinência superior (FPS) e uma inferior (FPI), como ilustrado na Fig. 2.

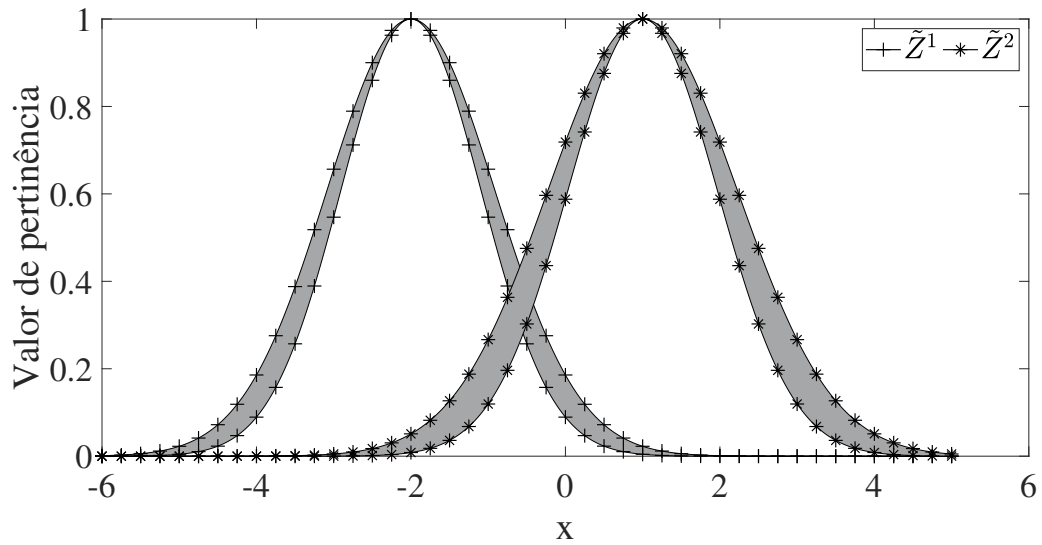
2.2.1.2 Operações entre conjuntos fuzzy tipo-2 intervalares

Outro aspecto importante para implementação SIF tipo-2 é a definição das operações entre conjuntos fuzzy tipo-2, as quais são: união, intercessão e complemento. O modo para calcular tais operações é dado pelo princípio de extensão de Zadeh (ZADEH, 1975). Desta forma, seja dois conjuntos fuzzy tipo-2 intervalares (Fig. 3), definidos como segue:

$$\tilde{Z}_1 = 1/[\bar{\mu}_{Z^1}(z), \underline{\mu}_{Z^1}(z)] \quad (2.51)$$

$$\tilde{Z}_2 = 1/[\bar{\mu}_{Z^2}(z), \underline{\mu}_{Z^2}(z)] \quad (2.52)$$

onde as operações para esses conjuntos são definidas a seguir.

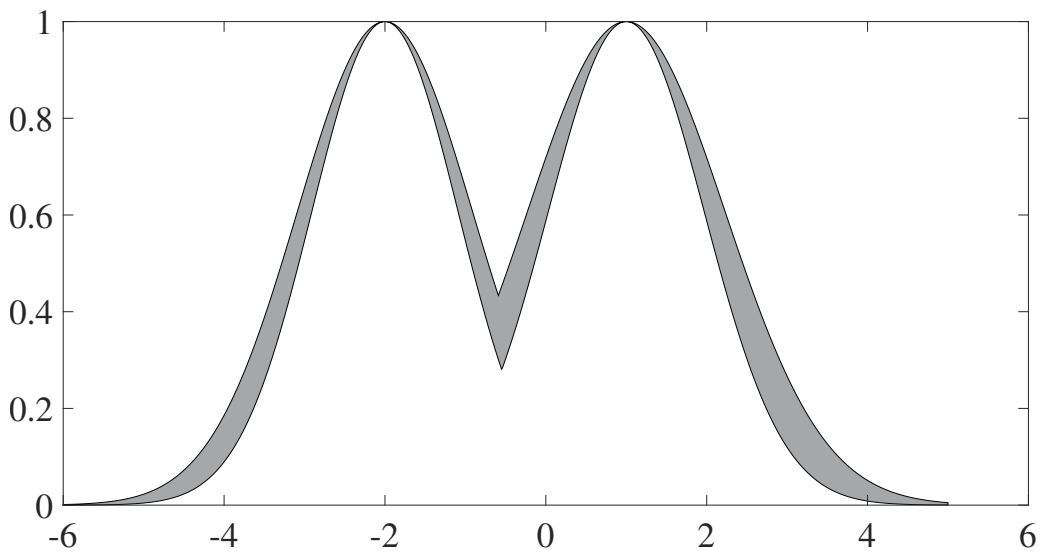
Figura 3 – Conjuntos $\tilde{Z}_1$ e $\tilde{Z}_2$ 

Fonte: Autor

Definição 2.4. *União:* A operação de união entre os conjuntos $\tilde{Z}_1$ e $\tilde{Z}_2$ é dada por:

$$\tilde{Z}_1 \cup \tilde{Z}_2 = 1/[\bar{\mu}_{\tilde{Z}_1}(z) \cup \bar{\mu}_{\tilde{Z}_2}(z), \underline{\mu}_{\tilde{Z}_1}(z) \cup \underline{\mu}_{\tilde{Z}_2}(z)] \quad (2.53)$$

ou seja, a união de dois conjuntos fuzzy tipo-2 intervalar é realizada pela operação da união entre os conjuntos fuzzy superior e pela união dos conjuntos fuzzy inferior. A operação de união é ilustrada na Fig. 4.

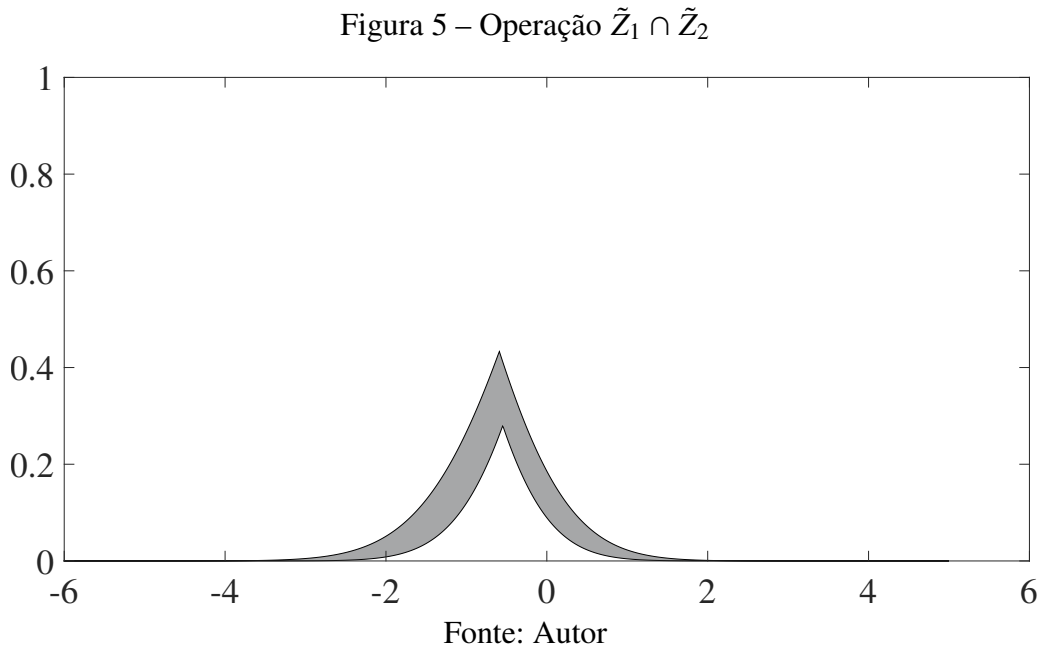
Figura 4 – Operação $\tilde{Z}_1 \cup \tilde{Z}_2$ 

Fonte: Autor

Definição 2.5. *Intercessão:* A operação de intercessão entre os conjuntos $\tilde{Z}_1$ e $\tilde{Z}_2$ é dada por:

$$\tilde{Z}_1 \cap \tilde{Z}_2 = 1/[\bar{\mu}_{\tilde{Z}_1}(x) \cap \bar{\mu}_{\tilde{Z}_2}(z), \underline{\mu}_{\tilde{Z}_1}(z) \cap \underline{\mu}_{\tilde{Z}_2}(z)] \quad (2.54)$$

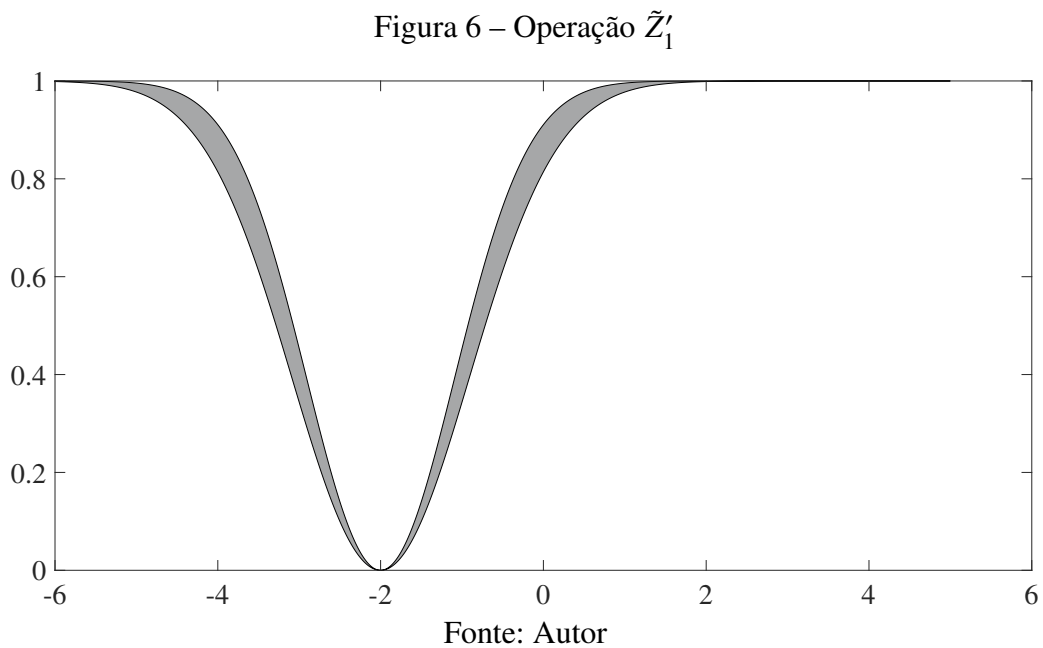
ou seja, a união de dois conjuntos fuzzy tipo-2 intervalar é realizada pela operação da intercessão entre os conjuntos fuzzy superior e pela intercessão dos conjuntos fuzzy inferior. A operação de intercessão é ilustrada na Fig. 5.



Definição 2.6. *Complemento:* A operação de complemento para um conjunto $\tilde{Z}$ é dada por:

$$\tilde{Z}' = 1/[1 - \bar{\mu}_{\tilde{Z}}(z), 1 - \underline{\mu}_{\tilde{Z}}(z)] \quad (2.55)$$

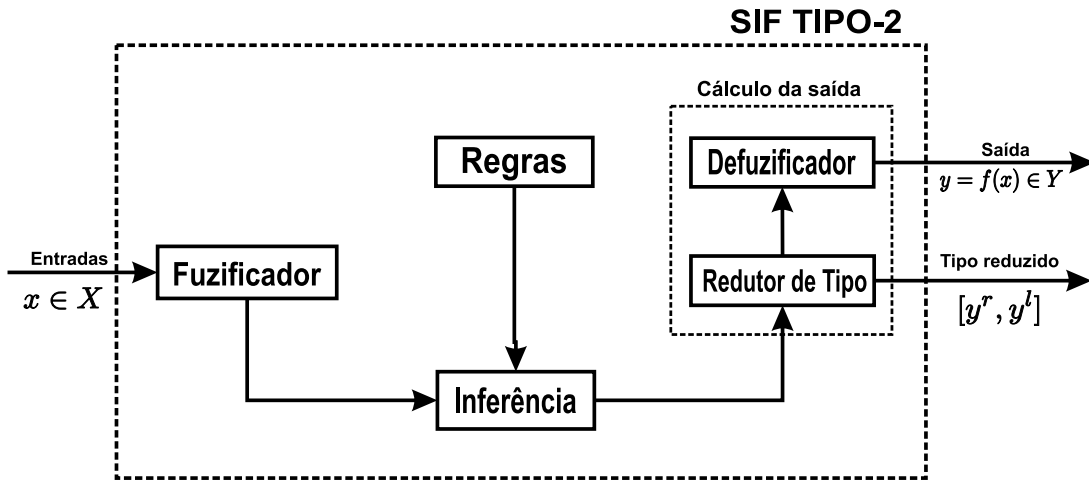
ou seja, o complemento de um conjunto fuzzy tipo-2 intervalar é realizada pela operação de complemento nos conjuntos fuzzy superior e inferior. A operação de complemento é ilustrada na Fig. 6.



2.2.2 Sistemas de inferência fuzzy intervalar tipo-2 Takagi-Sugeno

Um SIF tipo-2 (SIF-T2) é formada por uma base de c regras **SE-ENTÃO** as quais são compostas por duas partes: proposição do antecedente e do consequente. Segundo Castillo (2011), os conceitos de lógica fuzzy não se altera de um sistema tipo-1 para um sistema tipo-2 e, em geral, não mudará também para qualquer sistema tipo- n . Portanto, sistemas fuzzy de maior tipo indica somente o grau de fuzificação da função de pertinência. Uma vez que tipos maiores de SIF apenas altera apenas a natureza da função de pertinência e das operações a serem realizadas, entretanto, os princípios básicos de lógica fuzzy são independentes da natureza das funções de pertinência. Na Fig. 7 é ilustrada a estrutura de SIF tipo-2. Considerando a estrutura para o caso tipo-1, os sistemas de inferência fuzzy tipo-2 apresentam uma versão estendida dos métodos de defuzificação. Uma vez que o processo de defuzificação para sistemas de inferência fuzzy tipo-1 resulta em um valor *crisp* y , para o caso tipo-2, resulta em intervalo, ou seja, $\tilde{y} = [y^l, y^r]$, onde l e r representam os limites inferior e superior, respectivamente. Uma vez que esta operação transforma o conjunto saída tipo-2, calculada pelo bloco de inferência, em um intervalo $\tilde{y} = [y^l, y^r]$, denomina-se esta operação de **redução de tipo**. A defuzificação é uma operação matemática em função do intervalo $\tilde{y} = [y^l, y^r]$, de modo a obter um valor (tipo-0) para a saída do SIF tipo-2. As definições dos blocos do SIF tipo-2 é dada a seguir:

Figura 7 – Estrutura de SIF Tipo-2



Fonte: Autor

Definição 2.7. *Fuzificador*: Este bloco realiza o mapeamento de um ponto $z_j \in \mathcal{Z}_j$ em um conjunto tipo-2 $\tilde{Z}_j$, ou seja, $\mu_{\tilde{Z}_j}(z_j) = 1/\tilde{\mu}_{\tilde{Z}_j}(z_j) = 1/[\bar{\mu}_{\tilde{Z}_j}(z_j), \underline{\mu}_{\tilde{Z}_j}(z_j)]$, onde $j = 1, 2, \dots, n_z$, sendo n_z é a quantidade de variáveis linguísticas, $\mathcal{Z} \equiv \mathcal{Z}_1 \times \mathcal{Z}_2 \times \dots \times \mathcal{Z}_{n_z}$ é o universo de discurso de entrada.

Definição 2.8. *Regras*: Este bloco contém as c regras do SIF tipo-2, onde o antecedente é composto por conjuntos fuzzy tipo-2. A forma generalizada de uma regra é dada por:

$$R^i : \text{SE } z_1 \text{ é } \tilde{Z}_1^i \text{ E } z_2 \text{ é } \tilde{Z}_2^i \text{ E } \dots \text{ E } z_{n_z} \text{ é } \tilde{Z}_{n_z}^i \text{ ENTÃO } y \text{ é } \tilde{Y}^i \quad (2.56)$$

onde z_j são as variáveis de entrada, $\tilde{Z}^j$ são conjuntos fuzzy tipo-2, $\tilde{Y}^i$ é conjunto de saída, $y^i \in \mathcal{Y}$ é a proposição do consequente, $\mathcal{Y}$ é o universo de discurso da saída, $i = 1, 2, \dots, c$ e $j = 1, 2, \dots, n_z$.

Definição 2.9. *Inferência:* O bloco de inferência realiza a composição das regras, resultando em um mapeamento dos conjuntos tipo-2 de entrada para conjuntos tipo-2 de saída (CASTILLO, 2007). Neste bloco são realizadas as operações de união ($\cup$) e intercessão ($\cap$). Sendo $\tilde{Z}_t^i = \tilde{Z}_1 \times \tilde{Z}_2 \times \dots \times \tilde{Z}_{n_z}$, a Eq. 2.56 pode ser formulada como segue:

$$R^i : \tilde{Z}_1^i \times \tilde{Z}_2^i \times \dots \times \tilde{Z}_{n_z}^i \rightarrow \tilde{Y}^i \quad (2.57)$$

Portanto R^i pode ser definido pela função de pertinência $\mu_{R^i}(\mathbf{z}, y)$ onde

$$\mu_{R^i}(\mathbf{z}, y) = \mu_{\tilde{Z}_t^i \rightarrow \tilde{Y}^i}(\mathbf{z}, y) = [\mu_{\tilde{Z}_1^i}(z_1) * \mu_{\tilde{Z}_2^i}(z_2) * \dots * \mu_{\tilde{Z}_{n_z}^i}(z_{n_z})] * \tilde{Y}^i \quad (2.58)$$

onde $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{n_z}]$ e $*$ representa a norma-T.

Definição 2.10. *Redutor de Tipo:* Este bloco realiza a redução de tipo dos conjuntos fuzzy tipo-2 de saída em um valor intervalar $\tilde{y} = [y^r, y^l]$. Os limites $[y^r, y^l]$ são calculados pelo método de redução de tipo centros dos conjuntos o qual é dado como segue (KARNIK; MENDEL, 2001; CASTILLO, 2011):

$$y_{cdc} = [y^r, y^l] = \int_{y_1 \in [y_1^r, y_1^l]} \dots \int_{y_c \in [y_c^r, y_c^l]} \int_{\tilde{Z}_1^1} \dots \int_{\tilde{Z}_c^c} 1 / \frac{\sum_{j=1}^c \tilde{Z}_t^j(\mathbf{z}) y_j}{\sum_{j=1}^c \tilde{Z}_t^j(\mathbf{z})} \quad (2.59)$$

Apesar do cálculo da Eq. (2.59) não ser realizada por uma fórmula fechada, os valores reais dos limites $[y^r, y^l]$ podem ser aproximados por métodos iterativos, como o algoritmo proposto por Karnik e Mendel (2001), o qual é largamente usado na literatura. Em Wu e Mendel (2009) é proposto uma melhoria ao algoritmo KM, que reduz o tempo de calculo dos limites $[y^r, y^l]$.

Definição 2.11. *Defuzificador:* Este bloco realiza o cálculo da saída *crisp* y do SIF tipo-2. Uma vez calculado os limites $y_{cdc} = [y^r, y^l]$, a saída y é calculado em função destes limites, ou seja, $y = f(y^r, y^l)$. Na literatura, o defuzificador geralmente utilizado é dado a seguir:

$$y = \frac{y^r + y^l}{2} \quad (2.60)$$

Os SIFs tipo-2 intervalar Takagi-Sugeno são descritos por regras fuzzy **SE-ENTÃO** que representam relações de entrada-saída de uma sistema (CASTILLO, 2011), tal que o antecedente é formado por conjuntos fuzzy tipo-2 intervalares e o consequente é dado por uma função matemática. Assim, a forma generalizada da i -ésima regra de um SIF tipo-2 intervalar Takagi-Sugeno é dado por:

$$R^i : \text{SE } z_1 \text{ é } \tilde{Z}_1^i \text{ E } z_2 \text{ é } \tilde{Z}_2^i \text{ E } \dots \text{ E } z_{n_z} \text{ é } \tilde{Z}_{n_z}^i \text{ ENTÃO } \tilde{y} = f(\mathbf{z}, \Theta^i) \quad (2.61)$$

onde $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{n_z}]$ é as variáveis de entrada, y^i é saída na i -ésima regra, Θ^i são os parâmetros do consequente na i -ésima regra e $\tilde{Z}_{n_z}^i$ é o conjunto fuzzy tipo-2 intervalar, o qual pode ser um termo linguístico como "aproximadamente", "em torno de", etc.

Uma vez definido o SIF tipo-2 intervalar TS, este pode ser classificado de acordo com a tabela a seguir (KAYACAN, 2011):

Tabela 1 – Tipos de SIF-T2I TS

	Modelo I	Modelo II
Proposição do antecedente	Função de pertinência tipo-2	Função de pertinência tipo-2
Proposição do consequente	Parâmetros com incertezas	Parâmetros <i>crisp</i>

Fonte: (KAYACAN, 2011)

Definição 2.12. *Modelo I:* Denominado também como modelo A2-C1 (antecedente tipo-2 - consequente tipo-1), é composto por funções de pertinência tipo-2 no antecedente e consequente com parâmetros incertos. Considerando que $f(\mathbf{x}, \Theta^i)$ é uma função linear, a regra generalizada do modelo A2-C1 é dada por:

$$R^i : \text{SE } x_1 \text{ é } \tilde{Z}_1^i \text{ E } \dots \text{ E } x_{n_z} \text{ é } \tilde{Z}_{n_z}^i \text{ ENTÃO } \tilde{y} = \sum_{j=1}^{n_z} \tilde{a}_j^i x_j + \tilde{b}^i \quad (2.62)$$

onde $\tilde{y}^i = [\bar{y}^i, \underline{y}^i]$ é a saída intervalar na i -ésima, $\tilde{a}_j^i$ e $\tilde{b}^i$ são parâmetros incertos na i -ésima regra, definidos por $\tilde{a}_j^i = [\bar{a}_j^i, \underline{a}_j^i] = [a_j^i + \psi_j^i, a_j^i - \psi_j^i]$ e $\tilde{b}^i = [\bar{b}^i, \underline{b}^i] = [b^i + \psi_{b^i}^i, b^i - \psi_{b^i}^i]$. A saída para este modelo é dado pela Eq. (2.59).

Definição 2.13. *Modelo II:* Denominado também como modelo A2-C0 (antecedente tipo-2 - consequente tipo-0), é composto por funções de pertinência tipo-2 no antecedente e consequente com parâmetros *crisp* (certos). Considerando que $f(\mathbf{x}, \Theta^i)$ é uma função linear, a regra generalizada do modelo A2-C0 é dada por:

$$R^i : \text{SE } x_1 \text{ é } \tilde{Z}_1^i \text{ E } \dots \text{ E } x_{n_z} \text{ é } \tilde{Z}_{n_z}^i \text{ ENTÃO } \tilde{y} = \sum_{j=1}^{n_z} a_j^i x_j + b^i \quad (2.63)$$

Uma vez que $\tilde{y}^i = \underline{y}^i$, a saída para o modelo A2-C0 pode ser calculada pela formula fechada, como exemplificado em Nie e Tan (2008), Kayacan (2011):

$$y_{A2-C0} = \frac{\sum_{i=1}^c \bar{f}^i y^i}{\sum_{i=1}^c \bar{f}^i} + \frac{\sum_{i=1}^c \underline{f}^i y^i}{\sum_{i=1}^c \underline{f}^i} \quad (2.64)$$

onde $\tilde{f}^i = [\bar{f}^i, \underline{f}^i]$ é a força de ativação da i -ésima regra, dada por:

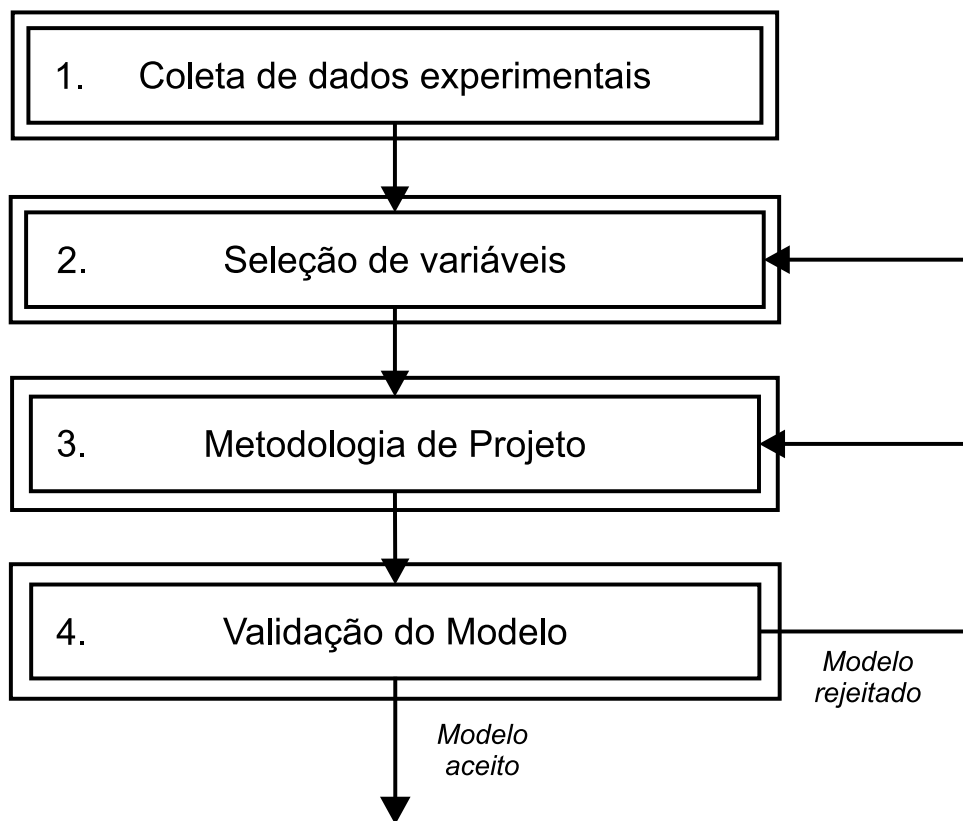
$$\bar{f}^i = \bar{\mu}_{\tilde{Z}_1^i}(x) * \bar{\mu}_{\tilde{Z}_2^i}(z) * \dots * \bar{\mu}_{\tilde{Z}_{n_z}^i}(z) \quad (2.65)$$

$$\underline{f}^i = \underline{\mu}_{\tilde{Z}_1^i}(x) * \underline{\mu}_{\tilde{Z}_2^i}(z) * \dots * \underline{\mu}_{\tilde{Z}_{n_z}^i}(z) \quad (2.66)$$

2.2.3 Identificação Fuzzy Tipo-2

A identificação fuzzy é uma área na modelagem fuzzy que se refere a metodologias que utilizam dados experimentais para projetar SIF. Segundo Takagi e Sugeno (1985), a identificação fuzzy é caracterizada por dois pontos: 1) ferramentas matemáticas para expressar um modelo do sistema e 2) métodos de identificação. A ferramenta matemática é importante para prover a interpretabilidade e capacidade de generalização ao modelo fuzzy. O método de identificação é baseado na partições fuzzy do espaço multidimensional formados pelos dados experimentais. Assim, para cada subespaço fuzzy, uma relação linear é criada (TAKAGI; SUGENO, 1985; SERRA; BOTTURA, 2009). A Fig. 8 apresenta os passos do processo de identificação de sistemas, os quais serão descritos a seguir.

Figura 8 – Etapas do processo de identificação de sistemas



Fonte: Autor

Passo 1: Coleta de dados experimentais — Este é um passo inicial importante para realizar a identificação de um sistema dinâmico, uma vez que a partir destes dados, informações relevantes podem ser extraídas a cerca do comportamento do sistema físico em estudo. Uma questão importante é que, preferencialmente, o(s) sinal(s) de entrada aplicado(s) ao sistema deve(m) excitá-lo em toda sua faixa de operação, tanto em amplitude, quanto em frequência, deste modo, aumentando a capacidade do modelo fuzzy em rastrear a(s) saída(s) do sistema dinâmico. Outro fator importante é a quantidade de amostras, sendo que quanto maior o conjunto de amostras, mais informações podem ser obtidas sobre a dinâmica do sistema físico.

Passo 2: Seleção de variáveis — Neste passo, a partir do conjunto de dados experimentais, obtido no passo anterior, são escolhidas as variáveis que serão utilizados no processo de identificação. No objetivo de definir um modelo fuzzy que relaciona dinamicamente duas ou mais variáveis de um sistema dinâmico, parte-se do princípio de que há correlação significativa entre tais variáveis, ou seja, há uma relação de causa e efeito. Desta forma, deve-se eleger variáveis importantes dentro do escopo de identificação pretendido.

Passo 3: Metodologia de projeto — Neste passo é determinada a estrutura do SIF e o(s) método(s) que serão utilizado no intuito de obter um modelo fuzzy que emule o comportamento dinâmico do sistema físico. A escolha da estrutura resume-se em determinar a proposição do antecedente, ou seja, as funções de pertinência, e a estrutura dos submodelos na proposição do consequente (modelo auto-regressivo, função de transferência, modelo no espaço de estados, etc). Uma vez definida a estrutura do SIF, métodos para a estimação dos parâmetros das função de pertinência e dos submodelos no consequente são aplicados no intuito de se obter os parâmetros do SIF. Dentro deste contexto, duas abordagens principais para a integração de conhecimento e dados para a definição de conjunto de regras para um modelo fuzzy são dados (BABUSKA, 2012): **métodos de ajuste de modelo** e **métodos identificação de modelo**, os quais são descritos nas Seções 2.2.3.1 e 2.2.3.2, respectivamente.

Passo 4: Validação do modelo — Neste passo avalia-se o modelo fuzzy obtido, determinado se tal modelo cumpre com os requisitos propostos no início do processo de identificação. Questões como capacidade de generalização e interpretabilidade da base de regras podem ser fatores importantes dentro do processo de validação do modelo. Assim, após as análises, pode-se concluir se o modelo fuzzy obtido pode ser aceito ou rejeitado. No último caso, mudanças na estratégia de identificação dentro dos passos 2 ou 3 podem ser feitas no sentido de obter melhores resultados.

2.2.3.1 Métodos de ajuste de modelo

Nessa abordagem, defini-se uma estrutura de modelo fuzzy inicial, onde os parâmetros do antecedente e do consequente podem ser ajustados por algoritmos de treinamento. Tais algoritmos, denominados de algoritmos de aprendizado supervisionado, exploram o fato de que o modelo fuzzy pode ser abordado com uma estrutura em camadas, similar as redes neurais artificiais. Assim, esta abordagem é geralmente denominada de modelagem neuro-fuzzy (BABUSKA, 1998). Essas técnicas tem como objetivo ajustar os parâmetros da rede neuro-fuzzy (antecedente e consequente) a partir da otimização de uma função de custo, onde a minimização de uma função do erro de estimação é comumente adotada, ou seja:

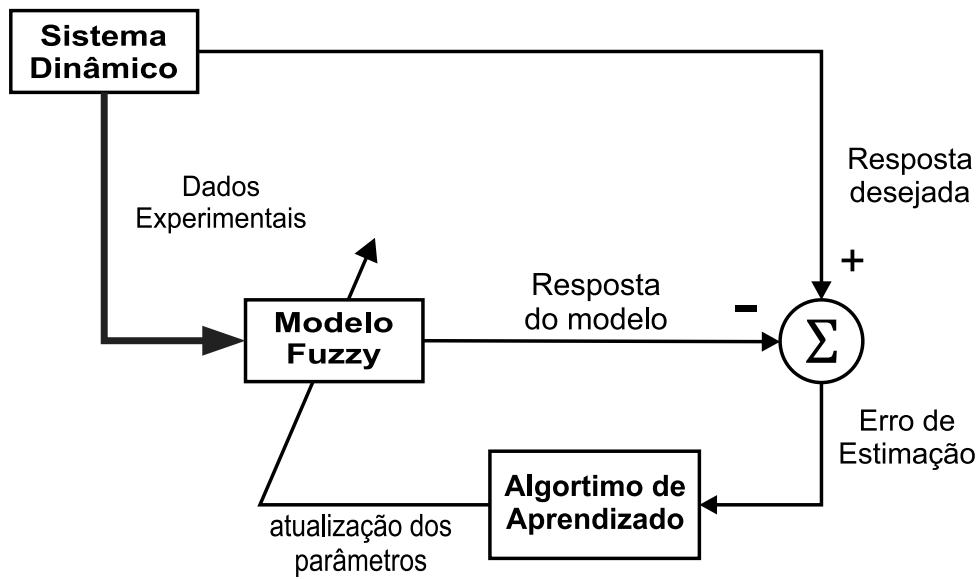
$$\min_{\Theta \in \mathcal{R}^{n_z}} \mathcal{E}(z, \Theta) \quad (2.67)$$

onde Θ são os parâmetros da rede neuro-fuzzy, $\mathcal{E}(\bullet)$ é uma função de erro de estimação $e(\bullet)$ que é dado por:

$$e(z, \Theta) = y - \hat{y}(z, \Theta) \quad (2.68)$$

A Fig. 9 apresenta o fluxo do aprendizado supervisionado, onde observa-se que o sinal de erro adiciona um mecanismo de controle de modo a aplicar ajustes aos parâmetros Θ no sentido de aproximar a saída do modelo fuzzy da saída real do sistema (HAYKIN, 1998).

Figura 9 – Diagrama de Blocos do Aprendizado supervisionado



Fonte: Autor

Entre os algoritmos geralmente usados nesta abordagem, citam-se: gradiente descendente (ABIYEV et al., 2011; ZHAO; LI; IRWIN, 2013; LIU; YANG, 2017; SIMINSKI, 2017), Filtro de Kalman Estendido (FKE) (STAVRAKLOUDIS; THEOCHARIS, 2007; RUBAAI; YOUNG, 2011; KHANESAR et al., 2012), algoritmos meta-heurísticos (LENG; MCGINNITY; PRASAD, 2006; LI; WU, 2011; HSU; JUANG, 2013). Entretanto, uma vez que os parâmetros da rede neuro-fuzzy são calculados para no sentido de minimizar o erro de estimação, a interpretabilidade do modelo fuzzy como um todo pode ser comprometida.

2.2.3.2 Métodos de identificação de modelo

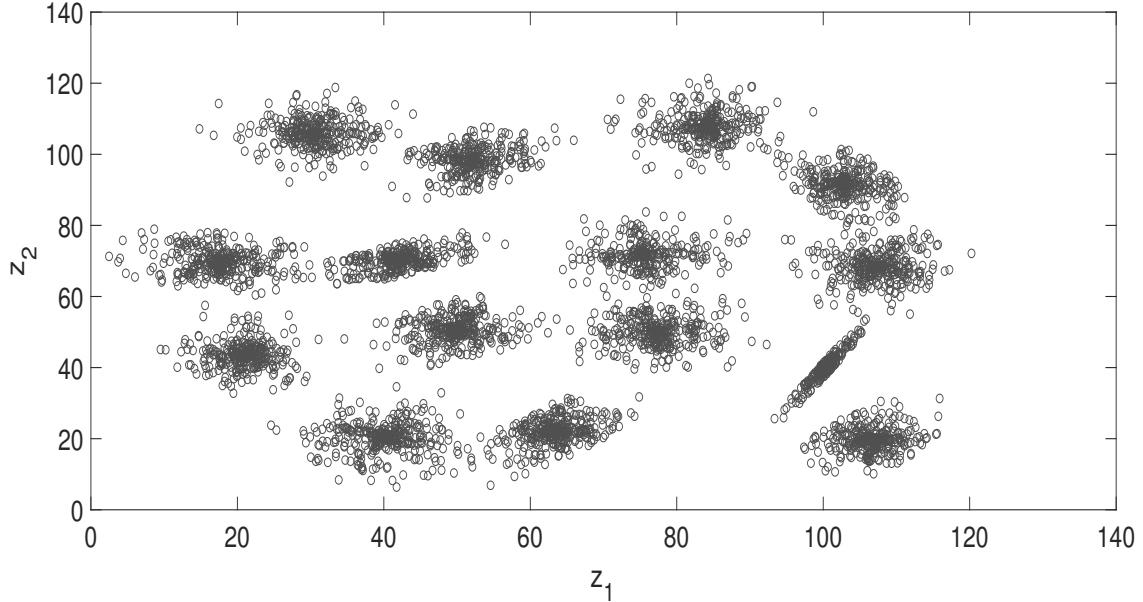
Nessa abordagem, a estrutura do modelo fuzzy é obtida a partir dos dados experimentais. Neste contexto, técnicas de aprendizado não supervisionado podem ser utilizadas, tais como algoritmos de agrupamento fuzzy, no sentido de extrair conhecimento, de forma autônoma, a partir do espaço de dados, criando partições fuzzy (CASTILLO, 2007). Os algoritmos de agrupamento fuzzy permitem localizar agrupamentos de dados a partir da análise do grau de similaridade, tal que, em um cenário de um espaço de dados $\mathcal{Z}$, o grau de similaridade pode ser

representado por uma norma de distância (GUSTAFSON; KESSEL, 1978; BABUSKA, 2012; GOYAL; MITTAL; SETHI, 2016). O agrupamento é realizado através de vetores de dados $\mathbf{z}_k = [z_k^1 \ z_k^2 \ \cdots \ z_k^{n_z}]^T$, onde, no contexto de identificação, esses vetores podem ser constituídos por dados experimentais de entrada/saída em instante de tempo passados. Desta forma, um conjunto formado por N vetores é definido como $\mathbf{Z} = \mathbf{z}_k | k = 1, 2, \dots, N$, dado como segue:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n_z} & z_{n_z 2} & \cdots & z_{n_z N} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

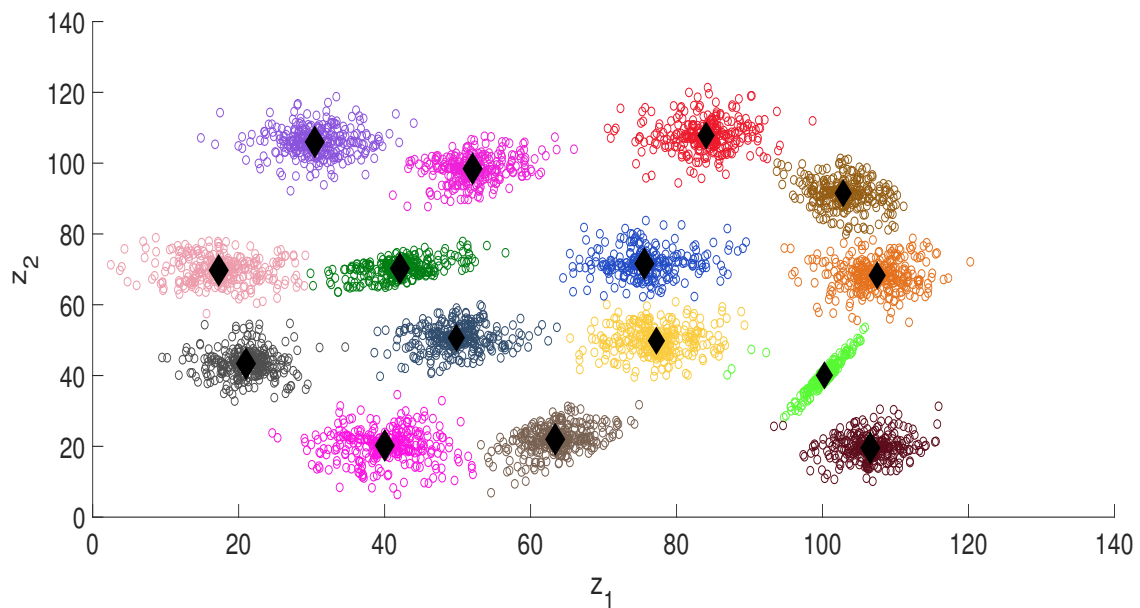
Na Fig. 10 é mostrado um conjunto de dados $\mathbf{Z}$ com $n_z = 2$ variáveis, $N = 500$ amostras. Neste exemplo de conjunto de dados, o agrupamento fuzzy tem com objetivo encontrar os agrupamentos de dados (partições fuzzy), $c = 15$ neste exemplo, a partir da similaridade entre os dados. Uma vez aplicado o agrupamento fuzzy, o resultado esperado é ilustrado na Fig. 11, onde cada agrupamento define uma regra do SIF, assim como os parâmetros do antecedente, sendo estes os centros e as zonas de influência.

Figura 10 – Exemplo de conjunto de dados bidimensional



Fonte: Autor

Figura 11 – Partições fuzzy obtidas pelo algoritmo de agrupamento fuzzy, onde os losangos pretos representam os centros dos agrupamentos



Fonte: Autor

Dentre os algoritmos de agrupamento fuzzy, citam-se Gustafson e Kessel (1978), Hwang e Rhee (2007), Chen, Xu e Xia (2014), Rubio e Castillo (2014), Chelly e Elouedi (2015), Goyal, Mittal e Sethi (2016).

2.2.3.3 Abordagem híbrida

As abordagem de **ajuste de modelo e estimação de modelo** também podem ser combinadas para o projeto de SIF (ÇAVDAR, 2016; CHAGHARI; FEIZI-DERAKHSHI; BALAFAR, 2018), onde esta abordagem pode ser utilizada como metodologias de identificação fuzzy tipo-2 (JUANG; TSAO, 2008; LIN; CHANG; LIN, 2014). Desta forma, os algoritmos de agrupamento são utilizados para determinar as partições fuzzy e os parâmetros das funções de pertinência, assim, uma vez definida a base de regras, técnicas de ajuste de modelo são utilizadas para estimar o RdI e, de acordo com o modelo TS escolhido (A2-C0 ou A2-C1), os graus de incerteza dos parâmetros do consequente.

2.2.3.4 Estimação dos parâmetros do consequente

Uma vez determinada o método de obtenção da base de regras do modelo fuzzy TS, deve-se determinar um meio de estimar os parâmetros dos submodelos na proposição do consequente. Técnicas de aprendizado supervisionado são utilizadas para realizar esta tarefa. Quanto ao tipo de abordagem de estimação, citam-se:

Aprendizado global: nesta abordagem, os parâmetros de todos os submodelos são estimados simultaneamente, de modo que os parâmetros obtidos minimizam o erro de estimação do modelo

fuzzy, como segue:

$$\min_{\Theta_f \in \mathbb{R}^{n_z}} V(\Theta_f, k) \quad (2.70)$$

onde $V(\Theta_f, k)$ a função de custo é dada por:

$$V(\Theta_f, k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (y_j - \hat{y}_j)^2 \quad (2.71)$$

e Θ_f são os parâmetros dos submodelos

$$\Theta_f = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_c] \quad (2.72)$$

Esta abordagem geralmente gera modelos bem mais precisos, entretanto, a interpretabilidade dos submodelos é comprometida (BABUSKA, 2012).

Aprendizado local: nesta abordagem, os parâmetros de cada submodelo são estimados separadamente, de modo a minimizar o erro de estimação local, ou seja, o erro entre a saída do i -ésimo submodelo e a saída real, como segue:

$$\min_{\theta^i \in \mathbb{R}^{n_z}} V(\theta^i, k) \quad (2.73)$$

onde $V(\theta^i, k)$ a função de custo é dada por:

$$V(\theta^i, k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (y_j - \hat{y}_j^i)^2 \quad (2.74)$$

onde θ^i e $\hat{y}_j^i$ são os parâmetros e a saída do i -ésimo submodelo, respectivamente. Esta abordagem pode prover uma maior interpretabilidade dos submodelos, entretanto, os modelos fuzzy tendem a ser menos precisos quando comparado à aprendizagem global.

Para a estimação da proposição do consequente, técnicas baseada em mínimos quadrados (ZDEŠAR; DOVŽAN; ŠKRJANC, 2014; WANG et al., 2016), variável instrumental (SERRA; BOTTURA, 2007; FILHO; SERRA, 2018) e algoritmo de auto-realização (PIRES; SERRA, 2018; SANTOS; SERRA, 2018) podem ser considerados.

2.2.4 Identificação Fuzzy Tipo-2 Evolutiva

Com base nos métodos de identificação fuzzy apresentados anteriormente, observa-se que estes dependem de um conjunto de dados experimentais coletados a priori e/ou da determinação de um modelo pré-definido com estrutura fixa. Para superar essas limitações, métodos integrando SIF e sistemas evolutivos foram desenvolvidos (ANGELOV; FILEV, 2004; LUGHOFFER; BOUCHOT; SHAKER, 2011; SILVA et al., 2014). Neste sentido, os métodos evolutivos baseiam-se em modelos orientado a dados que são automaticamente adaptados, ampliados e evoluídos automaticamente em tempo real com base no fluxo de dados. Assim,

um SIF evolutivo tem a capacidade de adaptar seus parâmetros assim como variar o número de regras a cada novo dado recebido e, portanto, sendo capazes de suportar quaisquer cenários de modelagem de sistemas dinâmicos a partir de um fluxo de dados contínuo e de medições dinâmicas em tempo real (PEDRYCZ; GOMIDE, 2007; LUGHOFER, 2011).

Os agrupamentos fuzzy evolutivos são técnicas utilizadas para obter SIF evolutivos. De modo geral, os algoritmos de agrupamento fuzzy evolutivo são aplicados nos seguintes cenários (LUGHOFER, 2011):

- Atualização e/ou extensão de um modelo já existente a partir de novas informações, no sentido de agregar novas dinâmicas do sistema físico ainda que não foram modeladas, de modo a melhorar a predição, ação de controle e melhor cobertura do espaço de dados para evitar extrapolações quando operando com novas amostras;
- Obter um modelo a partir de uma grande base de dados, onde o processamento em batelada é impossibilitado devido a limitações de memória;
- Esquecimento de dinâmicas aprendidas anteriormente, no sentido de permitir uma adaptação gradual dos parâmetros em tempo de reagir as mudanças no conjunto de dados experimentais.

Os agrupamentos fuzzy evolutivos realizam a análise do espaço de dados a medida que um novo dado é apresentado, de modo a aplicar mecanismos que realizem a evolução do SIF, os quais são descritos a seguir:

Criação de agrupamento: Tem como objetivo detectar novos agrupamentos no espaço de dados. A partir de um novo dado, este mecanismo analisa a necessidade de criar um novo agrupamento por meio de métricas, tais como potencial de representatividade (ANGELOV; FILEV, 2004; JÚNIOR; SERRA, 2017), distância (ZDEŠAR; DOVŽAN; ŠKRJANC, 2014; FILHO; SERRA, 2018) ou grau de compatibilidade Lemos, Caminhas e Gomide (2011), Angelov (2012). Uma vez satisfeita a condição de criação, o dado atual torna-se o centro e inicializa-se a zona de influência do novo agrupamento:

$$c_{k+1} = c_k + 1 \quad (2.75)$$

$$\mathbf{z}_{k+1}^{c*} = \mathbf{z}_k \quad (2.76)$$

$$\Sigma_{k+1}^c = \Sigma_0 \quad (2.77)$$

Adaptação dos agrupamentos: Tem como objetivo atualizar a posição dos centros e as zonas de influência dos agrupamentos. Uma vez processado o novo dado, este mecanismo atualiza a posição dos centros e a zona de influência dos agrupamentos existentes com base no novo dado,

tal que:

$$\mathbf{z}_{k+1}^{i*} = \mathbf{z}_k^{i*} + \Delta_{\mathbf{z}^{i*}}(\mathbf{z}_k) \quad (2.78)$$

$$\Sigma_{k+1}^i = \Sigma_k^i + \Delta_{\Sigma^i}(\mathbf{z}_k) \quad (2.79)$$

onde $\Delta_{\bullet}(\mathbf{z}_k)$ é o ajuste dado em função do novo dado e definida de acordo com o algoritmo evolutivo aplicado.

Fusão de agrupamentos: Tem como objetivo realizar a fusão de agrupamentos sobreposto. A cada instante de tempo, este mecanismo analisa a disposição dos agrupamentos no espaço de dados por meio da posição dos centros e da zona de influencia entre dois candidatos, $\mathbf{z}_k^{i*}$ e $\mathbf{z}_k^{j*}$, a fusão. Uma vez atendida da condição de fusão, os dois agrupamentos são unidos, dando origem a um novo agrupamento, tal que:

$$c_{k+1} = c_k - 1 \quad (2.80)$$

$$\mathbf{z}_{k+1}^{(i \cup j)*} = f(\mathbf{z}_k^{i*}, \mathbf{z}_k^{j*}) \quad (2.81)$$

onde a nova zona de influência é dada segundo o algoritmo evolutivo aplicado.

Exclusão de agrupamento: Tem como objetivo excluir agrupamentos sem relevância para a base de regras do SIF. Este mecanismo verifica o grau de representatividade de cada agrupamento, caso o grau de representatividade seja menor que um limiar definido pelo especialista, o agrupamento é eliminado da base de conhecimento.

Vale ressaltar que os algoritmos de agrupamentos evolutivo presente na literatura não aplicam todos os mecanismo de evolução, tal que os mecanismos utilizados são definidos de acordo com cada metodologia.

No contexto de sistemas de inferência tipo-2, os parâmetros das funções de pertinência, estimadas pelo algoritmo de agrupamento, possuem incertezas associadas ou à posição dos centros ou à zona de influência, de modo a definir o RdI da função de pertinência, tal que:

$$\tilde{\mathbf{z}}^{i*} = [\mathbf{z}^{i*} + \psi_z^i, \mathbf{z}^{i*} - \psi_z^i] \quad (2.82)$$

ou

$$\tilde{\Sigma}^i = [\Sigma^i + \psi_{\Sigma}^i, \Sigma^i - \psi_{\Sigma}^i] \quad (2.83)$$

onde ψ_z^i é a incerteza sobre a posição do centro e ψ_{Σ}^i é a incerteza sobre a zona de influência no i -ésimo agrupamento. A estimação das incertezas sobre os parâmetros da função de pertinência tipo-2 pode ser realizada por meio de duas abordagens:

Aprendizado supervisionado: nesta abordagem, as incertezas ψ^i são estimado de modo a otimizar o desempenho da estimação do modelo fuzzy tipo-2. Técnicas de aprendizagem baseadas em gradiente descendente são comumente utilizadas para estimação das incertezas sobre as funções

de pertinência tipo-2 (JUANG; TSAO, 2008; LIN et al., 2013; TUNG; QUEK; GUAN, 2013). Neste contexto, a processo de adaptação das incertezas associadas as funções de pertinência é dada por:

$$\psi_{k+1}^i = \psi_k^i + \Delta_{\psi^i}(\mathbf{e}_k) \quad (2.84)$$

Agrupapamento fuzzy tipo-2: nesta abordagem, o algoritmo de agrupamento evolutivo define as incertezas ψ^i de acordo com o fluxo de dados. Na literatura, algoritmos apresentados por Das, Subramanian e Sundaram (2015) e Pratama et al. (2017) representam esta abordagem. Neste contexto, o processo de adaptação das incertezas associadas as funções de pertinência é dada por:

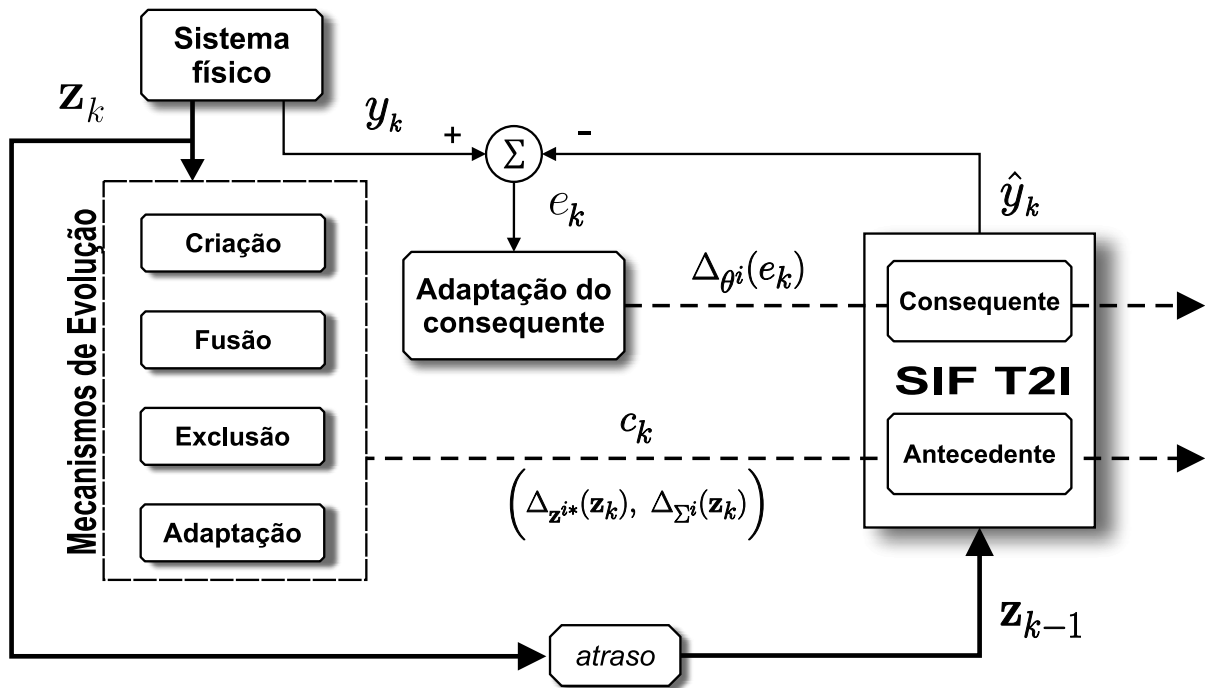
$$\psi_{k+1}^i = \psi_k^i + \Delta_{\psi^i}(\mathbf{z}_k) \quad (2.85)$$

Uma vez realizado o processo evolutivo para a adaptação da base de regras do SIF, deve-se realizar a atualização dos parâmetros do consequente. Técnicas recursivas são aplicadas para esta finalidade (JUANG; TSAO, 2008; LIN et al., 2013; LIN et al., 2015), onde o ajuste dos parâmetros é dada em função do erro, onde:

$$\theta_{k+1}^i = \theta_k^i + \Delta_{\theta^i}(\mathbf{e}_k) \quad (2.86)$$

A Fig. 12 mostra o diagrama de blocos genérico da identificação fuzzy evolutiva de um sistema dinâmico baseada em SIF.

Figura 12 – Diagrama de blocos do processo de identificação fuzzy evolutiva



Fonte: Autor

3 METODOLOGIA FUZZY EVOLUTIVA TIPO-2 INTERVALAR PARA IDENTIFICAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

Neste capítulo, aspectos importantes do modelo neuro-fuzzy tipo-2, assim como a formulação matemática para estimação recursiva do antecedente e consequente das regras, serão apresentadas.

3.1 Estrutura da Rede de Inferência Neuro-Fuzzy tipo-2 Intervalar

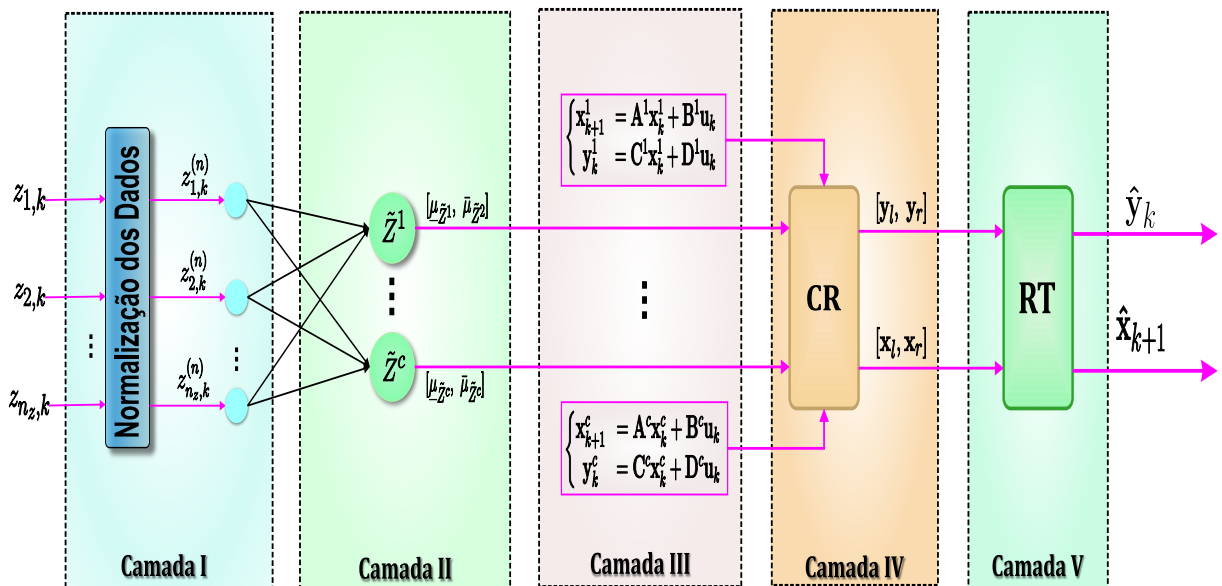
A estrutura de modelo fuzzy proposta nesta dissertação é dada por uma sistema de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar (JUANG; HUANG; CHENG, 2010; TUNG; QUEK; GUAN, 2013), como ilustrada na Fig. 13.

A estrutura neuro-fuzzy tipo-2 se divide em cinco camadas: camada de entrada, camada de fuzificação, camada do consequente, camada de composição das regras tipo-2 e camada de redução de tipo. A forma geral das proposições SE-ENTÃO do sistema de inferência é dada por:

$$\text{Regra } i : \text{ SE } \mathbf{z}_k \text{ é } \tilde{Z}^i \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}^i \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $i = 1, 2, \dots, c$ é o número das regras, $\mathbf{z}_k = [z_{1,k} \ z_{2,k} \ \dots \ z_{n_z,k}] \in \mathcal{R}^{n_z}$ são as variáveis de entrada do antecedente, $\mathbf{A}^i \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}^i \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C}^i \in \mathcal{R}^{p \times n}$ e $\mathbf{D}^i \in \mathcal{R}^{p \times m}$ são as matrizes do modelo de espaço de estados da i -ésima regra, $\mathbf{x}_k^i = [x_{1,k}^i \ x_{2,k}^i \ \dots \ x_{n,k}^i] \in \mathcal{R}^n$ é o vetor de estados para i -ésima regra, $\mathbf{y}_k^i = [y_{1,k}^i \ y_{2,k}^i \ \dots \ y_{p,k}^i] \in \mathcal{R}^p$ é o vetor de saídas para i -ésima regra,

Figura 13 – Configuração proposta do sistema de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar



Fonte: Autor

$\mathbf{u}_k = [u_{1,k} \ u_{2,k} \ \cdots \ u_{m,k}] \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor dos sinais de entrada e $\tilde{Z}^i$ é o conjunto fuzzy tipo-2 intervalar da i -ésima regra. A descrição de cada camada da estrutura fuzzy é dada nas subseções a seguir.

3.1.1 Camada I - Dados de Entrada

A primeira camada da estrutura neuro-fuzzy tipo-2 intervalar é a camada de entrada. Os nós desta camada representam variáveis físicas relacionadas ao sistema dinâmico a ser identificado. Uma vez que estas variáveis físicas podem operar em diferente faixas de valores, o uso da normalização de dados se torna útil, de modo a ajustar as variáveis em uma única faixa. Desta maneira, o operador de normalização max-min é adotado, no sentido de superar mal-condicionamento e garantir convergência estável dos parâmetros antecedente, assim como permitir a construção de novas características (regras) a partir dos dados experimentais. O operador de normalização max-min é dado por:

$$z_{j,k}^{(n)} = \frac{z_{j,k} - z_j^{\min}}{z_j^{\max} - z_j^{\min}}, \text{ for } j = 1, 2, \dots, n_z \quad (3.2)$$

onde $z_{j,k}^{(n)} \in [0, 1]$, $z_j^{\min}$ e $z_j^{\max}$ são os valores máximo e mínimo da j -th variável, respectivamente, e $\mathbf{z}_{n,k}^{(n)} = [z_{1,k}^{(n)} \ z_{2,k}^{(n)} \ \cdots \ z_{n_z,k}^{(n)}]$ é o vetor de variáveis normalizadas, com n_z sendo o número de variáveis.

3.1.2 Camada II - Fuzificação

A segunda camada da estrutura neuro-fuzzy tipo-2 tem a função de realizar a operação de fuzificação. Cada nó desta camada representa um conjunto fuzzy tipo-2 intervalar, o qual é estimado via algoritmo de agrupamento gaussiana multivariável evolutivo, onde este é também responsável pelo ajuste da formato das funções de pertinência e pela criação de novas regras a partir do espaço de dados de forma online. A fuzificação é um mapeamento $\mathfrak{R}^{n_z} \rightarrow \mathfrak{R}^2$, onde o vetor de dados experimentais normalizados $\mathbf{z}_{n,k}^{(n)}$ pertence ao conjunto fuzzy tipo-2 intervalar $\tilde{Z}^i$ com um grau de pertinência intervalar $\tilde{\mu}_{\tilde{Z}^i}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) = [\mu_{\tilde{Z}^i}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}), \bar{\mu}_{\tilde{Z}^i}^i(\mathbf{z}_k^{(n)})]$ que é calculado como segue:

$$\tilde{\mu}_{\tilde{Z}^i}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) = \left[m_{\underline{\mu}} \exp \left(-\frac{1}{2} M_{\underline{\Sigma}^i}(\mathbf{z}_k^{(n)}, \mathbf{z}^{i*}) \right), \exp \left(-\frac{1}{2} M_{\bar{\Sigma}^i}(\mathbf{z}_k^{(n)}, \mathbf{z}^{i*}) \right) \right] \quad (3.3)$$

onde $m_{\underline{\mu}} \in [0, 1]$ é o valor máximo do grau da função de pertinência inferior, sendo $M_{\underline{\Sigma}^i}(\bullet)$ e $M_{\bar{\Sigma}^i}(\bullet)$ definidos a seguir:

$$M_{\underline{\Sigma}^i}(\mathbf{z}_k^{(n)}, \mathbf{z}^{i*}) = (\mathbf{z}_k^{(n)} - \mathbf{z}^{i*})^T (\underline{\Sigma}^i)^{-1} (\mathbf{z}_k^{(n)} - \mathbf{z}^{i*}) \quad (3.4)$$

$$M_{\bar{\Sigma}^i}(\mathbf{z}_k^{(n)}, \mathbf{z}^{i*}) = (\mathbf{z}_k^{(n)} - \mathbf{z}^{i*})^T (\bar{\Sigma}^i)^{-1} (\mathbf{z}_k^{(n)} - \mathbf{z}^{i*}) \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{z}^{i*} = [z_1^{i*} \ z_2^{i*} \ \dots \ z_{n_z}^{i*}]$ é vetor do centro, com $\underline{\Sigma}^i$ e $\bar{\Sigma}^i$ sendo as matrizes de dispersão inferior e superior, respectivamente.

3.1.3 Camada III - Consequente

A terceira camada da estrutura neuro-fuzzy tipo-2 tem o objetivo de realizar uma operação aritmética em função das variáveis linguísticas do antecedente como uma proposição do consequente. A função aritmética adotada é baseada na estrutura de modelo linear no espaço de estado, o qual permite a representação do comportamento dinâmico de sistemas físicos multivariáveis. Desta forma, o consequente da i -ésima regra é dado por:

$$\mathbf{y}_k^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k \quad (3.6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}^i \mathbf{u}_k \quad (3.7)$$

3.1.4 Camada IV - Composição das Regras

A quarta camada relaciona os graus de pertinência tipo-2 calculados na camada II com os modelos lineares de espaço de estados da camada III. Assim, os estados tipo-2 intervalares $[\mathbf{x}_k^l, \mathbf{x}_k^r]$ e as saídas tipo-2 intervalares $[\mathbf{y}_k^l, \mathbf{y}_k^r]$ do sistemas de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar são calculados a partir da composição de todas as regras da base de conhecimento, onde l e r apresentam os limites inferior e superior, respectivamente. O processo de composição das regras adotado é dado por:

$$\mathbf{y}_k^r = \max \left[\frac{\sum_{i=1}^c \bar{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) \mathbf{y}_k^i}{\sum_{i=1}^c \bar{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) + \sum_{i=1}^c \underline{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)})}, \frac{\sum_{i=1}^c \underline{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) \mathbf{y}_k^i}{\sum_{i=1}^c \bar{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) + \sum_{i=1}^c \underline{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)})} \right] \quad (3.8)$$

$$\mathbf{y}_k^l = \min \left[\frac{\sum_{i=1}^c \bar{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) \mathbf{y}_k^i}{\sum_{i=1}^c \bar{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) + \sum_{i=1}^c \underline{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)})}, \frac{\sum_{i=1}^c \underline{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) \mathbf{y}_k^i}{\sum_{i=1}^c \bar{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) + \sum_{i=1}^c \underline{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)})} \right] \quad (3.9)$$

$$\mathbf{x}_k^r = \max \left[\frac{\sum_{i=1}^c \bar{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) \mathbf{x}_k^i}{\sum_{i=1}^c \bar{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) + \sum_{i=1}^c \underline{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)})}, \frac{\sum_{i=1}^c \underline{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) \mathbf{x}_k^i}{\sum_{i=1}^c \bar{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) + \sum_{i=1}^c \underline{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)})} \right] \quad (3.10)$$

$$\mathbf{x}_k^l = \min \left[\frac{\sum_{i=1}^c \bar{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) \mathbf{x}_k^i}{\sum_{i=1}^c \bar{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) + \sum_{i=1}^c \underline{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)})}, \frac{\sum_{i=1}^c \underline{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) \mathbf{x}_k^i}{\sum_{i=1}^c \bar{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) + \sum_{i=1}^c \underline{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)})} \right] \quad (3.11)$$

3.1.5 Camada V - Redutor de Tipo

A quinta camada realiza a redução de tipo para calcular os estados $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ e as saídas $\hat{\mathbf{y}}_k$ do sistema de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar. O processo é definido por duas operações aritméticas, dadas por:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \begin{bmatrix} v_1^{x,l} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2^{x,l} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_n^{x,l} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1}^l + \begin{bmatrix} v_1^{x,r} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2^{x,r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_n^{x,r} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1}^r \quad (3.12)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \begin{bmatrix} v_1^{y,l} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2^{y,l} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_p^{y,l} \end{bmatrix} \mathbf{y}_k^l + \begin{bmatrix} v_1^{y,r} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2^{y,r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_p^{y,r} \end{bmatrix} \mathbf{y}_k^r \quad (3.13)$$

onde $v_{j,l}$ e $v_{j,r}$, para $j = 1, 2, \dots, p$, são pesos adaptativos estimados pelo método de mínimos quadrados recursivo, como descrito no **Algoritmo 2**. O valor inicial da matriz de covariância do erro $\mathbf{P}_{d,0}^j$ e $\mathbf{P}_{s,0}^j$ satisfazem $\mathbf{P}_{d,0}^j = 1/r_1 \mathbf{I}$ e $\mathbf{P}_{s,0}^j = 1/r_2 \mathbf{I}$, respectivamente, tal que $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\mathbf{v}_{d,k}^j = [v_j^{y,l} \ v_j^{y,r}]$ e $\mathbf{v}_{s,k}^j = [v_j^{x,l} \ v_j^{x,r}]$.

Algoritmo 2: Estimação os parâmetros de redução de tipo - atualizar_redutor_tipo(•)

Entrada: $\mathbf{y}_k^r, \mathbf{y}_k^l, \mathbf{x}_k^r, \mathbf{x}_k^l, \mathbf{v}_{d,k}, \mathbf{v}_{s,k}, \mathbf{P}_d, \mathbf{P}_s$

Saída: $\mathbf{v}_{d,k}, \mathbf{v}_{s,k}, \mathbf{P}_d, \mathbf{P}_s$

para $j = 1$ **até** p **faça**

$$\mathbf{P}_{d,k}^j = \frac{1}{\beta_1} \mathbf{P}_{d,k-1}^j \left[\mathbf{I} - \frac{[y_j^r \ y_j^l]^T [y_j^r \ y_j^l] \mathbf{P}_{d,k-1}^j}{\beta_1 + [y_j^r \ y_j^l] \mathbf{P}_{d,k-1}^j [y_j^r \ y_j^l]^T} \right] \quad (3.14)$$

$$\mathbf{v}_{d,k}^j = \mathbf{v}_{d,k}^j + \mathbf{P}_{d,k}^j \left[y_{j,k} - [y_j^r \ y_j^l] \mathbf{v}_{d,k}^j \right] \quad (3.15)$$

fim

para $j = 1$ **até** n **faça**

$$\mathbf{P}_{s,k}^j = \frac{1}{\beta_1} \mathbf{P}_{s,k-1}^j \left[\mathbf{I} - \frac{[x_j^l \ x_j^r]^T [x_j^l \ x_j^r] \mathbf{P}_{s,k-1}^j}{\beta_1 + [x_j^l \ x_j^r] \mathbf{P}_{s,k-1}^j [x_j^l \ x_j^r]^T} \right] \quad (3.16)$$

$$\mathbf{v}_{s,k}^j = \mathbf{v}_{s,k}^j + \mathbf{P}_{s,k}^j \left[x_{j,k} - [x_j^l \ x_j^r] \mathbf{v}_{s,k}^j \right] \quad (3.17)$$

fim

3.2 Estimação Evolutiva do Antecedente

O algoritmo adotado particiona o espaço de entrada em funções de pertinência Gaussianas multivariáveis tipo-2 intervalar, caracterizado por um centro $\mathbf{z}_k^{i*} \in \mathfrak{R}^{n_z}$ e uma matriz de

dispersão (simétrica e definida positiva) $\hat{\Sigma}_k^i \in \mathfrak{R}^{n_z \times n_z}$, com $i = 1, 2, \dots, c$ onde c é o número de agrupamentos.

A estimação evolutiva dos parâmetros do antecedente tipo-2 é baseado em **Aprendizado Participatório** (PL) (YAGER, 1990; SILVA et al., 2014). Esta abordagem leva em conta o impacto de novas informações à base de conhecimento do sistema neuro-fuzzy tipo-2, ou seja, a compatibilidade/incompatibilidade de uma informação nova implica na atualização/preservação da base de conhecimento atual, o que prover uma estimação mais robusta a efeitos de *outliers* inerentes aos dados experimentais dos parâmetros do antecedente. Portanto, duas importantes variáveis são definidas: o grau de compatibilidade e de índice de excitação. O grau de compatibilidade, dado por ρ_k^i , de uma nova informação $\mathbf{z}_k^{(n)}$ para o i -ésimo agrupamento é calculado como segue:

$$\rho_k^i = \exp \left(-\frac{1}{2} M_{\hat{\Sigma}_k^i}(\mathbf{z}_k^{(n)}, \mathbf{z}_k^{i*}) \right) \quad (3.18)$$

com

$$M_{\hat{\Sigma}_k^i}(\mathbf{z}_k^{(n)}, \mathbf{z}_k^{i*}) = \left(\mathbf{z}_k^{(n)} - \mathbf{z}_k^{i*} \right)^T \left(\hat{\Sigma}_k^i \right)^{-1} \left(\mathbf{z}_k^{(n)} - \mathbf{z}_k^{i*} \right) \quad (3.19)$$

onde $\rho_k^i \in [0, 1]$, tal que $\rho_k^i = 1$ significa que a nova informação é completamente compatível ao i -ésimo agrupamento.

O índice de excitação, dado por a_k^i , supervisiona a criação de novas regras baseado no grau de compatibilidade de informações dentro de uma janela de tempo e é definido como a probabilidade cumulativa de ocorrer violações de compatibilidade t_v de um limiar de grau de compatibilidade T_ρ em uma janela de tempo w , sendo calculado como segue:

$$a_k^i = P(T_{v,k}^i < t_v) = \sum P(T_{v,k}^i = t_v) \quad (3.20)$$

tal que a função probabilidade $P(T_{v,k}^i = t_v)$ é caracterizado por uma distribuição binomial com probabilidade de sucesso λ , calculado como segue:

$$P(T_{v,k}^i = t_v^i) = \binom{w}{t_v^i} \lambda^{t_v^i} (1 - \lambda)^{w-t_v^i}, \quad t_v = 0, \dots, w \quad (3.21)$$

onde o número de violações $t_{v,k}^i$ do limiar de grau de compatibilidade T_ρ no i -ésimo agrupamento, é dado por:

$$t_{v,k}^i = \begin{cases} \sum_{j=0}^{w-1} o_{k-j}^i, & k > w \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.22)$$

com o_k^i sendo uma variável binária dada como segue:

$$o_k^i = \begin{cases} 1, & \text{para } \rho_k^i < T_\rho \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.23)$$

onde T_ρ é o limiar de grau de compatibilidade.

3.2.1 Mecanismo de Criação de agrupamentos

Na literatura, varias métricas são usadas para criação de agrupamentos em metodologias de SIF evolutivos (ANGELOV; BUSWELL, 2002; LUGHOFFER, 2008; MACIEL; GOMIDE; BALLINI, 2013; COSTA; SERRA, 2015; PIRES; SERRA, 2016). Nesta proposta, o grau de compatibilidade e o índice de excitação são considerados, onde a condição para criação de novos agrupamentos, denominado **Condição A**, é dada a seguir:

$$\text{SE } \rho_k^i < T_\rho \forall i \text{ E } a_k^\chi > T_a \text{ ENTÃO } \mathbf{z}^{c_k+1*} = \mathbf{z}_k^{(n)} \quad (3.24)$$

onde $\chi = \arg \max \rho_k^i$, c_k é o índice do agrupamento com maior grau de compatibilidade para o dado $\mathbf{z}(n)_k$ e T_a é o limiar do índice de excitação.

3.2.2 Mecanismo de Adaptação dos Agrupamentos

Na abordagem de aprendizado participativo, caso uma nova regra não seja criada, o sistema de inferência neuro-fuzzy considera a adaptação do agrupamento com maior grau de compatibilidade para o nova informação, como segue:

$$G_k = \alpha(\rho_k^\chi)^{1-a_k^\chi} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{z}_k^{\chi*} = \mathbf{z}_{k-1}^{\chi*} + G_k(\mathbf{z}_k^{(n)} - \mathbf{z}_{k-1}^{\chi*}) \quad (3.26)$$

$$\hat{\Sigma}_k^\chi = (1 - G_k)(\hat{\Sigma}_{k-1}^\chi - G_k(\mathbf{z}_k^{(n)} - \mathbf{z}_{k-1}^{\chi*})(\mathbf{z}_k^{(n)} - \mathbf{z}_{k-1}^{\chi*})^T) \quad (3.27)$$

onde $\alpha \in [0, 1]$ é a taxa de aprendizado e G_k é o ganho de adaptação no tempo discreto k .

3.2.3 Mecanismo de Fusão de Agrupamentos

O critério de fusão é baseado no grau de compatibilidade entre o agrupamento χ , o qual foi atualizado (ou criado), e um agrupamento j , no tempo discreto k , como segue:

$$\rho_k(\mathbf{z}_k^{\chi*}, \mathbf{z}_k^{j*}) = \exp\left(-\frac{1}{2} M_{\hat{\Sigma}_k^\chi}(\mathbf{z}_k^{\chi*}, \mathbf{z}_k^{j*})\right) \quad (3.28)$$

onde o critério de fusão, denominado como **Condição B**, dado a seguir:

$$\text{SE } \rho_k(\mathbf{z}_k^{\chi*}, \mathbf{z}_k^{j*}) > T_\rho \text{ OU } \rho_k(\mathbf{z}_k^{\chi*}, \mathbf{z}_k^{j*}) > T_\rho \text{ ENTÃO fundir } [\mathbf{z}^{\chi*}, \mathbf{z}^{j*}] \quad (3.29)$$

O **Algoritmo 3** apresenta a implementação do algoritmo de agrupamento fuzzy evolutivo de gaussiana multivariável.

Algoritmo 3: Agrupamento Evolutivo Gaussiano Multivariável - AEGM(●)

```

entrada :  $\mathbf{z}^{(n)}, \mathbf{z}^*, \hat{\Sigma}, w, \hat{\Sigma}_0, \psi, \psi_0, c$ 
saída :  $\mathbf{z}^*, \hat{\Sigma}, \psi, \rho, created, merged$ 

% calcular  $\rho^i$  e  $a^i$  para todos agrupamentos
para  $i = 1$  até  $c$  faça
    Calcule  $M(\mathbf{z}^{(n)}, \mathbf{z}^{i*})$  - Eq. (3.19)
    Compute  $\rho^i$  - Eq. (3.18)
    se  $\rho^i < T_\rho$  então
        |  $o^i = 1$ 
    senão
        |  $o^i = 0$ 
    fim

    se  $k > w$  então
        |  $nv^i = \sum_{l=0}^{w-1} o_{k-l}^i$ 
        |  $a^i = p\left(T_{k,v}^i < t_v^i\right)$ 
    senão
        |  $a^i = 0$ 
    fim

fim
 $\chi = \arg \max_i \rho^i$ 
se Condição A (3.24) então
    % Criar novo agrupamento
     $c = c + 1$ 
     $\mathbf{z}^{c*} = \mathbf{z}^{(n)}$ 
     $\hat{\Sigma}^c = \hat{\Sigma}_0$ 
     $\psi^c = \psi_0$ 
     $\chi = c$ 
     $created = \text{sim}$ 
senão
    | Atualizar agrupamento usando as Eqs. (3.25)-(3.27)
fim

% Procurar por grupos similares
para  $i = 1$  até  $c$  faça
    se Condição B (3.29) então
        | % Fundir agrupamentos similares  $[\chi, i]$ 
        |  $\mathbf{z}^{\chi*} = (\mathbf{z}^{i*} + \mathbf{z}^{\chi*})/2$ 
        |  $\hat{\Sigma}^\chi = \hat{\Sigma}_0$ 
        |  $c = c - 1$ 
        |  $merged = [\chi, i]$ 
    fim
fim

```

3.2.4 Estimação Paramétrica das Funções de Pertinência Tipo-2 Intervalar via Filtro de Kalman Estendido

Nesta proposta, o RdI da i -ésima função de pertinência é representado por uma matriz de dispersão tipo-2 $\tilde{\Sigma}_k^i = [\underline{\Sigma}_k^i, \bar{\Sigma}_k^i]$ que representa a zona de influência incerta do i -ésimo agrupamento e definida como segue:

$$\tilde{\Sigma}_k^i = [\hat{\Sigma}_k^i - \Psi_k^i, \hat{\Sigma}_k^i + \Psi_k^i] \quad (3.30)$$

onde $\Psi_k^i \in \mathcal{R}^{n_z \times n_z}$ é uma matriz diagonal, ou seja, $\Psi_k^i = \text{diag}([\psi_{1,k}^i, \psi_{2,k}^i, \dots, \psi_{n_z,k}^i])$, onde, por questões de conveniência, ψ^i representa a diagonal principal de Ψ_k^i . A estimação das funções de pertinência tipo-2 intervalares pode ser definida na formada de equação de espaço de estados não-linear como segue:

$$\psi_{k+1}^i = f(\psi^i) + \omega_k = \mathbf{I}\psi_k^i + \omega_k \quad (3.31)$$

$$\check{\mathbf{y}}_k^i = h(\psi_k^i) + v_k = \gamma_k^i(\mathbf{z}_{n,k})\mathbf{y}_k^i + v_k \quad (3.32)$$

onde $\check{\mathbf{y}}^i = f(\psi^i)$ é a saída do sistema de inferência neuro-fuzzy da i -ésima regra, ω_k é o ruído de processo, v_k é o ruído de medição, os quais são assumidos como distribuição gaussiana. O grau de ativação tipo-2 da i -ésima regra é dado por:

$$\gamma_k^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) = \frac{(\bar{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}) + \underline{\mu}^i(\mathbf{z}_k^{(n)}))}{\sum_{j=1}^c \bar{\mu}^j(\mathbf{z}_k^{(n)}) + \sum_{j=1}^c \underline{\mu}^j(\mathbf{z}_k^{(n)})} \quad (3.33)$$

A estimação das funções de pertinência tipo-2 intervalares deve minimizar a seguinte função de custo:

$$\mathbf{V}(\psi, k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(\check{\mathbf{y}}_j - \check{\mathbf{y}}_j^i \right)^T \left(\check{\mathbf{y}}_j^{(i)} - \check{\mathbf{y}}_j^i \right) \quad (3.34)$$

onde

$$\check{\mathbf{y}}_k^{(i)} = \gamma_k^i(\mathbf{z}_k^{(n)})\mathbf{y}_k \quad (3.35)$$

$$\check{\mathbf{y}}_j^i k = \gamma_k^i(\mathbf{z}_k^{(n)})\mathbf{y}_k^i \quad (3.36)$$

para $j = 1, 2, \dots, c_k$.

Utilizando um algoritmo de estimação baseado no filtro de Kalman estendido, os graus de incerteza ψ^i são calculados como segue:

$$\mathbf{K}_k^i = \mathbf{P}_{f,k}^i (\mathbf{H}_k^i)^T \left[\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k^i \mathbf{P}_{f,k}^i (\mathbf{H}_k^i)^T \right]^{-1} \quad (3.37)$$

$$\psi_{k+1}^i = \psi_k^i + \mathbf{K}_k^i \left(\check{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \check{\mathbf{y}}_k^i \right) \quad (3.38)$$

$$\mathbf{P}_{f,k+1}^i = \mathbf{P}_{f,k}^i - \mathbf{K}_k^i \mathbf{H}_k^i \mathbf{P}_{f,k}^i + \mathbf{Q}_k \quad (3.39)$$

onde $\mathbf{K}_k^i$ é o ganho de Kalman, $\mathbf{P}_{f,k}^i \in \mathcal{R}^{n_z \times n_z}$ ($\mathbf{P}_{f,0}^i = r_3 \mathbf{I}$ e $r_3 > 0$) é a matriz de resíduos, $\mathbf{R}_k \in \mathcal{R}^{p \times p}$ é a matriz de covariância do ruído de medida, $\mathbf{Q}_k \in \mathcal{R}^{n_z \times n_z}$ é a matriz de covariância do ruído de processo. A matriz de observação $\mathbf{H}_k^i \in \mathcal{R}^{p \times n}$ é definida como uma matriz Jacobiana é dado por:

$$\mathbf{H}_k^i = \left. \frac{\partial h(\boldsymbol{\psi}^i)}{\partial \boldsymbol{\psi}^i} \right|_{\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}_k} \quad (3.40)$$

De acordo com (HAYKIN, 2001), a matriz de covariância $\mathbf{R}_k$ pode ser dada como uma função inversa de uma taxa de aprendizado ζ , ou seja, $\mathbf{R}_k = \zeta^{-1} \mathbf{W}_k^{-1}$. Assim, a Eq. (3.37) pode ser formulada como segue:

$$\mathbf{K}_k^i = \mathbf{P}_{f,k}^i \mathbf{H}_k^i \left[\zeta^{-1} \mathbf{W}_k^{-1} + \mathbf{H}_k^i \mathbf{P}_{f,k}^i (\mathbf{H}_k^i)^T \right]^{-1} \quad (3.41)$$

onde $\zeta \in [0, 1]$ é a taxa de aprendizado para o filtro de Kalman estendido e $\mathbf{W}_k$ é uma matriz de peso. A implementação do algoritmo de aprendizado via filtro de Kalman estendido é mostrado no **Algoritmo 4**.

Algoritmo 4: Algoritmo de aprendizado via filtro de Kalman estendido - FKE(•)

```

entrada:  $\boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{z}_k^{(n)}, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{z}^*, \hat{\Sigma}, \mathbf{P}_{f,k}, \zeta, \mathbf{C}, \mathbf{D}, c$ 
saída:  $\boldsymbol{\psi}_{k+1}, \mathbf{P}_{f,k+1}$ 

para  $i = 1$  até  $c$  faça
    Calcular  $[\underline{\Sigma}_k^i, \bar{\Sigma}_k^i]$ , - Eq. (3.30)
    Calcular  $\tilde{\mu}_{\tilde{Z}^i}^i = [\underline{\mu}_{\tilde{Z}^i}^i, \bar{\mu}_{\tilde{Z}^i}^i]$  - Eqs. (3.3)-(3.5)
    Calcular  $\gamma_i$  - Eq. (3.33)
    Calcular  $\check{\mathbf{y}}_k^{(i)}$  e  $\check{\mathbf{y}}_k^i$  - Eqs. (3.35)-(3.36)
    Calcular  $\mathbf{H}^i$  - Eq. (3.40)
fim

%  $\boldsymbol{\psi}^i$  and  $\mathbf{P}_f$  atualizar
para  $i = 1$  até  $c$  faça
    Calcular  $\mathbf{K}_k^i$  - Eq. (3.41)
    Calcular  $\boldsymbol{\psi}_{k+1}^i$  - Eq. (3.38)
    Calcular  $\mathbf{P}_{f,k+1}^i$  - Eq. (3.39)
fim

```

3.3 Estimação Paramétrica do Consequente

De acordo com a Eq. (3.1), na Seção 3.1, o modelo linear de espaço de estados local da proposição do consequente da i -ésima regra do sistema de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^i &= \mathbf{A}^i \hat{\mathbf{x}}_k^i + \mathbf{B}^i \mathbf{u}_k \\ \hat{\mathbf{y}}_k^i &= \mathbf{C}^i \hat{\mathbf{x}}_k^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (3.42)$$

Considerando a inclusão de um observador de estados à Eq. (3.42), tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^i &= \mathbf{A}^i \hat{\mathbf{x}}_k^i + \mathbf{B}^i \mathbf{u}_k + \mathbf{L}^i \mathbf{e}_k \\ \hat{\mathbf{y}}_k^i &= \mathbf{C}^i \hat{\mathbf{x}}_k^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k + \mathbf{e}_k^i\end{aligned}\quad (3.43)$$

onde $\mathbf{e}_k^i = \mathbf{y}_k^i - \hat{\mathbf{y}}_k^i$ e $\mathbf{L}^i$ são denominados como sequencia de inovação de ruído branco e a matriz ganho de Kalman local da i -ésima regra, respectivamente.

Assumindo que as propriedades de controlabilidade e observabilidade sejam satisfeitas (HOUTZAGER; WINGERDEN; VERHAEGEN, 2012; NI; LIU; WU, 2018), a Eq. (3.43) pode ser formulada como segue:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^i = (\mathbf{A}^i)^{q_p} \hat{\mathbf{x}}_{k-q_p}^i + \mathbf{C}_B^i \bar{\mathbf{u}}_{k-q_p} + \mathbf{C}_L^i \bar{\mathbf{e}}_{k-q_p}^i \quad (3.44)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+q_f}^i = \mathbf{O}^i \hat{\mathbf{x}}_k^i + \mathcal{T}^i \bar{\mathbf{u}}_{k+q_f} + \mathcal{H}^i \bar{\mathbf{e}}_{k+q_f}^i \quad (3.45)$$

onde q_p e q_f são os deslocamentos à esquerda e à direita no tempo discreto, respectivamente, sendo

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}_{k-q_p} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k-q_p} \\ \mathbf{u}_{k-q_p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k-1} \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{u}}_{k+q_f} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+q_f-1} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{y}}_{k-q_p}^i &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k-q_p}^i \\ \mathbf{y}_{k-q_p-1}^i \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k-1}^i \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{y}}_{k+q_f}^i &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k^i \\ \mathbf{y}_{k+1}^i \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k+q_f-1}^i \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{e}}_{k-q_p}^i &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{k-q_p}^i \\ \mathbf{e}_{k-q_p+1}^i \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{k-1}^i \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{e}}_{k+q_f}^i &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_k^i \\ \mathbf{e}_{k+1}^i \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{k+q_f-1}^i \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O^i &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}^i \\ \mathbf{C}^i \mathbf{A}^i \\ \vdots \\ \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^{q_f-1} \end{bmatrix} \\
C_B^i &= \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^i)^{q_p-1} \mathbf{B}^i & (\mathbf{A}^i)^{q_p-2} \mathbf{B}^i & \dots & \mathbf{A}^i \mathbf{B}^i & \mathbf{B}^i \end{bmatrix} \\
C_L^i &= \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^i)^{q_p-1} \mathbf{L}^i & (\mathbf{A}^i)^{q_p-2} \mathbf{L}^i & \dots & \mathbf{A}^i \mathbf{L}^i & \mathbf{L}^i \end{bmatrix} \\
\mathcal{T}^i &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}^i & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^i \mathbf{B}^i & \mathbf{D}^i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^{q_f-2} \mathbf{B} & \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^{q_f-3} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{D}^i \end{bmatrix} \\
\mathcal{H}^i &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^i \mathbf{L}^i & \mathbf{I} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^{q_f-2} \mathbf{L} & \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^{q_f-3} \mathbf{L} & \dots & \mathbf{I} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

onde $O^i \in \mathbb{R}^{pq_f \times n}$ é matriz de observabilidade, $C_B^i \in \mathbb{R}^{n \times q_p m}$ e $C_L^i \in \mathbb{R}^{n \times pq_p}$ são as matrizes de controlabilidade estendidas relacionadas com as entradas e com o observador de estados, respectivamente, $\mathcal{T}^i \in \mathbb{R}^{q_f p \times q_f m}$ e $\mathcal{H}^i \in \mathbb{R}^{q_f m \times q_f m}$ são as matrizes de resposta ao impulso com estrutura de bloco triangular inferior.

3.3.1 Cálculo dos Parâmetros de Markov Fuzzy

Seja um preditor auto-regressivo com entradas exógenas equivalente a Eq. (3.43) dado por:

$$\mathbf{y}_k^i = \sum_{j=1}^q \Xi_{k-j}^{i,(u)} \mathbf{u}_{k-j} + \sum_{j=1}^q \Xi_{k-j}^{i,(y)} \mathbf{y}_{k-j}^i \quad (3.46)$$

Segundo (CHIUSO; PICCI, 2005), se a matriz de transição $\mathbf{A}^i$ é nilpotente, a contribuição do vetor de estados $\mathbf{x}_{k-q_p}$ é arbitrariamente pequena na Eq. (3.44), ou seja, $(\mathbf{A}^i)^{q_p} \approx \mathbf{0}$. Desta forma os parâmetros de Markov do sistema dado pela Eq. 3.43 pode ser relacionada com as matrizes

$\Xi^{i,(u)}$ e $\Xi^{i,(y)}$ (CHIUSO; PICCI, 2005), como segue:

$$\Xi_{k-j}^{i,(u)} = \begin{cases} \mathbf{D}^i & \text{se } j = 0 \\ \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^{j-1} \mathbf{B}^i & \text{se } j > 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\Xi_{k-j}^{i,(y)} = \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^{j-1} \mathbf{L}^i \quad (3.48)$$

A partir da Eq. (3.47) e Eq. (3.48), a matriz de parâmetros de Markov (JUANG, 2011; WU et al., 2015) pode ser definida como segue:

$$\Xi^i = \begin{bmatrix} \Xi_{k-p}^{i,(u)} & \cdots & \Xi_k^{i,(u)} & \Xi_{k-p}^{i,(y)} & \cdots & \Xi_{k-1}^{i,(y)} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

tal que a Eq. (3.46) pode ser formulada como segue:

$$\mathbf{y}_k^i = \Xi^i \delta_k^i + \mathbf{e}_k \quad (3.50)$$

onde $\delta_k^i = \left[\bar{\mathbf{u}}_{k-q_p}^T, \mathbf{u}_k^T, (\bar{\mathbf{y}}_{k-q_p}^i)^T \right]^T$. Considerando $k > q_p$, a representação em batelada da Eq. (3.50) é dada por:

$$\mathbf{Y}_k^i = \Xi^i \Delta_k^i \quad (3.51)$$

onde

$$\mathbf{Y}_k^i = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{q_p+1}^i & \mathbf{y}_{q_p+2}^i & \cdots & \mathbf{y}_k^i \end{bmatrix}, \quad \Delta_k^i = \begin{bmatrix} \delta_{q_p+1}^i & \delta_{q_p+2}^i & \cdots & \delta_k^i \end{bmatrix}$$

Desta forma, o cálculo em batelada da saída do sistema de inferência neural-fuzzy tipo-2 intervalar é dada como segue:

$$\mathbf{Y}_k = \sum_{i=1}^c \Xi^i \Delta_k^i \Gamma_k^i \quad (3.52)$$

onde $\Gamma_k^i = \text{diag}\left(\left[\gamma_{q_p+1}^i, \gamma_{q_p+2}^i, \cdots, \gamma_k^i\right]\right)$, tal que $\gamma_{q_p+1}^i$ é calculado pela Eq. (3.33).

Nesta proposta, a abordagem local para a solução em batelada da Eq. (3.52) é adotada, no sentido de prover uma melhor interpretabilidade do sistema de inferência neural-fuzzy tipo-2 intervalar e dada por:

$$\Xi_k^i = \mathbf{Y}_k \Gamma_k^i (\Delta_k^i)^T \left[\Delta_k^i \Gamma_k^i (\Delta_k^i)^T \right]^{-1} \quad (3.53)$$

onde a relação $q_p \geq q_f \geq n/p$ deve ser satisfeita de modo que a Eq. (3.53) seja solucionada pelo método de mínimos quadrados (NI; LIU; WU, 2018), $\mathbf{Y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{q_p+1} & \mathbf{y}_{q_p+2} & \cdots & \mathbf{y}_k \end{bmatrix}$ é a matriz de dados de saída, e os parâmetro de Markov Ξ_k^i calculados minimizam a seguinte função de custo:

$$\mathbf{V}(\Xi^i, k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \gamma_j^i \left(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_j^i \right)^T \left(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_j^i \right) \quad (3.54)$$

Expandindo a Eq. (3.53) para o tempo discreto $k + 1$, tem-se:

$$\Xi_{k+1}^i = \mathbf{Y}_{k+1} \Gamma_{k+1}^i (\Delta_{k+1}^i)^T \left[\Delta_{k+1}^i \Gamma_{k+1}^i (\Delta_{k+1}^i)^T \right]^{-1} \quad (3.55)$$

onde $\mathbf{Y}_{k+1} = [\mathbf{Y}_k \ \mathbf{y}_{k+1}]$ e $\Delta_{k+1}^i = [\Delta_k^i \ \delta_{k+1}^i]$. A matriz de covariância na Eq. 3.55, é definida como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^i &= [\Delta_{k+1}^i \Gamma_{k+1}^i (\Delta_{k+1}^i)^T]^{-1} \\ &= [(\mathbf{P}_k^i)^{-1} + \gamma_{k+1}^i \delta_{k+1}^i (\delta_{k+1}^i)^T]^{-1} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Usando o lema da matriz inversa na Eq. (3.56), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^i &= \mathbf{P}_k^i - \frac{\gamma_{k+1}^i \mathbf{P}_k^i \delta_{k+1}^i (\delta_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i}{1 + \gamma_{k+1}^i (\delta_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i \delta_{k+1}^i} \\ &= \mathbf{P}_k^i \left[\mathbf{I} - \frac{\gamma_{k+1}^i \delta_{k+1}^i (\delta_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i}{1 + \gamma_{k+1}^i (\delta_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i \delta_{k+1}^i} \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

Substituindo (3.56) em (3.55), resulta:

$$\begin{aligned} \Xi_{k+1}^i &= [\mathbf{Y}_k \ \mathbf{y}_{k+1}] \begin{bmatrix} \Gamma_k^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_{k+1}^i \end{bmatrix} [\Delta_k^i \ \delta_{k+1}^i]^T \mathbf{P}_{k+1}^i \\ &= [\mathbf{Y}_k \Gamma_k^i (\Delta_k^i)^T + \gamma_{k+1}^i \mathbf{y}_{k+1} (\delta_{k+1}^i)^T] \mathbf{P}_{k+1}^i \end{aligned} \quad (3.58)$$

A partir da Eq. (3.53), a seguinte relação é obtida:

$$\Xi_k^i = \mathbf{Y}_k \Gamma_k^i (\Delta_k^i)^T \mathbf{P}_k^i \Leftrightarrow \Xi_k^i (\mathbf{P}_k^i)^{-1} = \mathbf{Y}_k \Gamma_k^i (\Delta_k^i)^T \quad (3.59)$$

e a partir da Eq. (3.56), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^i &= [(\mathbf{P}_k^i)^{-1} + \gamma_{k+1}^i \delta_{k+1}^i (\delta_{k+1}^i)^T]^{-1} \\ (\mathbf{P}_{k+1}^i)^{-1} &= (\mathbf{P}_k^i)^{-1} + \gamma_{k+1}^i \delta_{k+1}^i (\delta_{k+1}^i)^T \end{aligned} \quad (3.60)$$

A partir das Eqs. (3.59)-(3.60), a Eq. (3.58) pode ser formulada como segue:

$$\begin{aligned} \Xi_{k+1}^i &= [\Xi_k^i (\mathbf{P}_k^i)^{-1} + \gamma_{k+1}^i \mathbf{y}_{k+1} (\delta_{k+1}^i)^T] \mathbf{P}_{k+1}^i \\ &= \left[\Xi_k^i [(\mathbf{P}_{k+1}^i)^{-1} - \gamma_{k+1}^i \delta_{k+1}^i (\delta_{k+1}^i)^T] + \gamma_{k+1}^i \mathbf{y}_{k+1} (\delta_{k+1}^i)^T \right] \mathbf{P}_{k+1}^i \\ &= \Xi_k^i - \gamma_{k+1}^i \delta_{k+1}^i (\delta_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_{k+1}^i + \gamma_{k+1}^i \mathbf{y}_{k+1} (\delta_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_{k+1}^i \\ &= \Xi_k^i + \gamma_{k+1}^i [\mathbf{y}_{k+1} - \Xi_k^i \delta_{k+1}^i] (\delta_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_{k+1}^i \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde a Eq. (3.61) é a estimação recursiva dos parâmetros de Markov Ξ_{k+1}^i para i -ésima regra.

Para dinâmicas variantes no tempo, uma abordagem pragmática permite a utilização do seguinte critério:

$$\mathbf{V}(\Xi^i, k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \beta_2^{k-j} \left[\gamma_j^i (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_j^i)^T (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_j^i) \right] \quad (3.62)$$

Desta forma, os parâmetros de Markov, que minimiza a Eq. (3.62), podem ser estimados, recursivamente, pelas equações a seguir:

$$\mathbf{P}_{k+1}^i = \frac{1}{\beta_2} \mathbf{P}_k^i \left[\mathbf{I} - \frac{\gamma_{k+1}^i \boldsymbol{\delta}_{k+1}^i (\boldsymbol{\delta}_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i}{\beta_2 + \gamma_k^i (\boldsymbol{\delta}_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i \boldsymbol{\delta}_{k+1}^i} \right] \quad (3.63)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{k+1}^i = \boldsymbol{\Xi}_k^i + \gamma_{k+1}^i [\mathbf{y}_{k+1} - \boldsymbol{\Xi}_k^i \boldsymbol{\delta}_{k+1}^i] (\boldsymbol{\delta}_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_{k+1}^i \quad (3.64)$$

onde o valor inicial de $\mathbf{P}_0^i$ deve satisfazer $\mathbf{P}_0^i = r_4 \mathbf{I}$, tal que $r_4 > 0$.

3.3.2 Estimação dos submodelos em Espaço de Estados

A partir dos parâmetros de Markov $\boldsymbol{\Xi}_k^i$, as matrizes $\boldsymbol{\Lambda}_k^i$ e $\boldsymbol{\Upsilon}_k^i$ são definidas como segue:

$$\boldsymbol{\Lambda}_k^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_{k-q}^{i,(u)} & \boldsymbol{\Xi}_{k-q_p+1}^{i,(u)} & \cdots & \boldsymbol{\Xi}_{k-q_p+q_f-1}^{i,(u)} & \cdots & \boldsymbol{\Xi}_{k-1}^{i,(u)} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Xi}_{k-q_p}^{i,(u)} & \cdots & \boldsymbol{\Xi}_{k-q_p+q_f-2}^{i,(u)} & \cdots & \boldsymbol{\Xi}_{k-2}^{i,(u)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Xi}_{k-q_p}^{i,(u)} & \cdots & \boldsymbol{\Xi}_{k-q_f}^{i,(u)} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\boldsymbol{\Upsilon}_k^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_{k-q}^{i,(y)} & \boldsymbol{\Xi}_{k-q_p+1}^{i,(y)} & \cdots & \boldsymbol{\Xi}_{k-q_p+q_f-1}^{i,(y)} & \cdots & \boldsymbol{\Xi}_{k-1}^{i,(y)} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Xi}_{k-q_p}^{i,(y)} & \cdots & \boldsymbol{\Xi}_{k-q_p+q_f-2}^{i,(y)} & \cdots & \boldsymbol{\Xi}_{k-2}^{i,(y)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Xi}_{k-q_p}^{i,(y)} & \cdots & \boldsymbol{\Xi}_{k-q_f}^{i,(y)} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

O vetor de estados $\mathbf{x}_k^i$ na Eq. (3.44) pode ser calculado em função de $\bar{\mathbf{u}}_{k-q_p}$, $\bar{\mathbf{y}}_{k-q_p}$, $\boldsymbol{\Lambda}_k^i$ e $\boldsymbol{\Upsilon}_k^i$, como segue (NI et al., 2018; NI; LIU; WU, 2018):

$$\mathbf{x}_k^i = \mathbf{S} [\boldsymbol{\Lambda}_k^i \bar{\mathbf{u}}_{k-q_p} + \boldsymbol{\Upsilon}_k^i \bar{\mathbf{y}}_{k-q_p}] \quad (3.67)$$

onde $\mathbf{S} \in \mathfrak{R}^{n \times (mf-n)}$ deve ser uma matriz definida positiva, selecionada pelo usuário, no sentido de assegurar que a estimação recursiva do vetor de estados $\mathbf{x}_k^i$ seja convergente (NI; LIU; WU, 2018). A partir da Eq. (3.67), o vetor de estados $\tilde{\mathbf{x}}_k$ é estimado como segue:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^{c_k} \gamma_k^i \mathbf{x}_k^i \quad (3.68)$$

Uma vez calculado o vetor de estado $\tilde{\mathbf{x}}_k$, as matrizes $[\mathbf{A}_k^i, \mathbf{B}_k^i, \mathbf{C}_k^i, \mathbf{D}_k^i]$ podem ser estimadas via algoritmo de mínimos quadrados ponderados fuzzy. Como as Eqs. (3.7) e (3.7) são desacopladas, as equações de espaço de estados pode ser formulada como segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^i \\ \mathbf{y}_{k-1}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^i & \mathbf{B}^i \\ \mathbf{C}^i & \mathbf{D}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1}^i \\ \mathbf{u}_{k-1}^i \end{bmatrix} = \mathbf{\Theta}^i \mathbf{v}_{k-1}^i \quad (3.69)$$

Seja a função de custo $\mathbf{V}(\mathbf{\Theta}_k^i, k)$ dada como segue:

$$\mathbf{V}(\mathbf{\Theta}_k^i, k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \beta_3^{k-j} \left[\gamma_j^i \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{j+1} \\ \mathbf{y}_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{j+1}^i \\ \mathbf{y}_j^i \end{bmatrix} \right)^T \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{j+1} \\ \mathbf{y}_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{j+1}^i \\ \mathbf{y}_j^i \end{bmatrix} \right) \right] \quad (3.70)$$

Assim, a estimação recursiva por mínimos quadrados ponderado fuzzy para $\mathbf{\Theta}_k^i$ é dado por:

$$\mathbf{P}_k^{\Theta^i} = \frac{1}{\beta_3} \mathbf{P}_{k-1}^{\Theta^i} \left[\mathbf{I} - \frac{\gamma_{k-1}^i \mathbf{v}_{k-1}^i (\mathbf{v}_{k-1}^i)^T \mathbf{P}_{k-1}^{\Theta^i}}{\beta_3 + \gamma_{k-1}^i (\mathbf{v}_{k-1}^i)^T \mathbf{P}_{k-1}^{\Theta^i} \mathbf{v}_{k-1}^i} \right] \quad (3.71)$$

$$\mathbf{\Theta}_k^i = \mathbf{\Theta}_{k-1}^i + \gamma_{k-1}^i \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{y}_{k-1} \end{bmatrix} - \mathbf{\Theta}_{k-1}^i \mathbf{v}_{k-1}^i \right) \mathbf{P}_k^{\Theta^i} \quad (3.72)$$

onde o valores iniciais de $\mathbf{P}_0^{\Theta^i}$ é usualmente selecionado como $\mathbf{P}_0^{\Theta^i} = r_5 \mathbf{I}$, tal que $r_5 > 0$.

Os passos para a estimação recursiva dos consequentes tipo-2 são apresentados no **Algoritmo 5**.

3.4 Aspectos de inicialização do algoritmo proposto

Inicialmente, considerando que não há conhecimento sobre o sistema físico, o número de regra é zero. O primeiro dado processado pelo algoritmo proposto é eleito como centro do primeiro agrupamento, ou seja, $\mathbf{z}^{1*} = \mathbf{z}_1$ e o valor inicial da matriz tipo-2 de dispersão é dado por $\tilde{\Sigma}_0 = [\hat{\Sigma}_0 - \Psi_0, \hat{\Sigma}_0 + \Psi_0]$, onde $\hat{\Sigma}_0 = \sigma_1 \mathbf{I}^{n_z}$ com $\sigma_1 \in [10^{-2}, 0.5]$ e $\Psi_0 = \sigma_2 \mathbf{1}^{1 \times n_z}$ with $\sigma_2 \in [10^{-10}, 10^{-4}]$. O primeiro modelo no espaço de estados local é inicializado como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \kappa \mathbf{I}^n, & \mathbf{B}_0 &= \kappa \mathbf{I}^{n \times m} \\ \mathbf{C}_0 &= \kappa \mathbf{I}^{p \times n}, & \mathbf{D}_0 &= \kappa \mathbf{I}^{p \times m} \end{aligned}$$

Os seguintes parâmetros são necessários para a abordagem proposta:

- Limite de compatibilidade T_ρ , que governa a geração de regras no procedimento de aprendizado. Não há valor padrão para este parâmetro, e sua escolha é feita empiricamente a partir do especialista. No entanto, em casos específicos, a escolha de T_ρ é feita por formulação analítica (consulte (LEMOS; CAMINHAS; GOMIDE, 2011)), o que não pode ser generalizado para todo problema de identificação.
- Taxa de aprendizado do algoritmo de agrupamento α , que determina o ganho de aprendizado adaptável (Eq. (3.25)), cujo valor deve ser definido em $10^{-5} < \alpha < 10^{-1}$, para evitar oscilações indesejáveis devido a valores espúrios contido no fluxo de dados.

Algoritmo 5: Algoritmo de Identificação Recursiva Fuzzy no Espaço de Estados - AIRFE(•)

Entrada: $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{\Xi}_k, \mathbf{P}_k, \mathbf{\Theta}_k^{(x)}, \mathbf{P}_k^{(x)}, \mathbf{P}_k^{(y)}, \mathbf{\Theta}_k^{(y)}, \gamma_k, c$
Saída: $\mathbf{\Xi}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+1}, \mathbf{\Theta}_k^{i,(x)}, \mathbf{P}_k^{i,(x)}, \mathbf{P}_{k+1}^{i,(y)}, \mathbf{\Theta}_{k+1}^{i,(y)}$
 $\mathbf{S} = [\mathbf{I}_{n \times n} \quad \mathbf{0}_{n \times (mf-n)}]$
 $\gamma_k = [\gamma_k^1 \quad \gamma_k^2 \quad \cdots \quad \gamma_k^c]$
%Passo 1: Atualizar os parâmetros de Markov fuzzy $\mathbf{\Xi}^i$
para $i = 1$ **até** c **faça**
 Calcular $\mathbf{P}_{k+1}^i$ - Eq. (3.63)
 Calcular $\mathbf{\Xi}_{k+1}^i$ - Eq. (3.61)
fim
%Passo 2: definir as matrizes $\mathbf{\Lambda}_k^i$ e $\mathbf{\Upsilon}_k^i$
para $i = 1$ **até** c **faça**
 Definir $\mathbf{\Lambda}_k^i$ - Eq.(3.65)
 Definir $\mathbf{\Upsilon}_k^i$ - Eq.(3.66)
fim
%Passo 3: Estimar o vetor de estados $\mathbf{x}_k^i$
para $i = 1$ **até** c **faça**
 Estimar $\mathbf{x}_k^i$ - Eq.(3.67)
fim
%Passo 4: Atualizar as matrizes $\mathbf{\Theta}^i$ e $\mathbf{P}^{\Theta i}$
para $i = 1$ **até** c **faça**
 Calcular $\mathbf{P}_k^{\Theta i}$ - Eq. (3.71)
 Calcular $\mathbf{\Theta}_k^i$ - Eq. (3.72)
fim

- Probabilidade de sucesso λ e janela de tempo w , que governam a criação da regra. A partir de λ , o limite de excitação é calculado por $T_a = 1 - \lambda$, onde o valor de λ depende de w . O intervalo para valores de λ , dado um valor de w , é definido em Lemos, Caminhas e Gomide (2011) da seguinte forma:

$$\lambda \geq \begin{cases} 0.01 & \text{Se } w \geq 100 \\ 0.05 & \text{Se } 20 \leq w < 100 \\ 0.10 & \text{Se } 10 \leq w < 20 \end{cases} \quad (3.73)$$

- Taxa de aprendizado ζ para o FKE, usada para estimar recursivamente os graus de incerteza ψ^i , cujos valores considerados são $\zeta < 10^{-1}$ para evitar grandes oscilações e instabilidade no processo de estimação recursiva.
- deslocamento a esquerda q_p do instante de tempo k , usado para estimar os parâmetros da proposição do consequente. Não há valor padrão para este parâmetro, e sua escolha é feita empiricamente a partir do especialista. No entanto, em casos específicos, um grande valor

de q_p é considerado, no sentido de garantir um bom desempenho de estimação (JUANG, 1994; JUANG, 2011).

- deslocamento a direita q_f do instante de tempo k , escolhido para garantir a relação $q_p \geq q_f \geq n/p$, conforme mencionado na Seção 3.3, em que n é a ordem do sistema e p é o número de saídas.
- Os parâmetros r_j (constantes de inicialização), com $j = 1, 2, \dots, 5$, que definem o valor inicial das matrizes de covariância. Os valores de r_j , escolhidos empiricamente pelo especialistas, estão relacionados à incerteza nos parâmetros estimados, de modo que valores grandes rapidamente levam à sua convergência, embora induzem a maiores oscilações na estimação dos parâmetros. (LJUNG, 1999).
- Os fatores de esquecimento β_j , com $j = 1, 2, 3$ e escolhidos geralmente no intervalo de $1 \geq \beta_j \geq 0.98$, são parâmetros que reduzem a influência de dados antigos na estimativa de parâmetros (JUANG, 1994; JUANG, 2011), de modo a melhorar o rastreamento de sistemas com dinâmicas variantes no tempo.

Por fim, o algoritmo completo da metodologia proposta é mostrado no **Algoritmo 6**.

3.5 Aspectos de convergência do erro de rastreio

Nesta seção serão abordados os aspectos de convergência do algoritmo de aprendizado proposto. Como visto na Seção 3.3, a saída dos sub-modelos pode ser calculado em função dos parâmetros de Markov local (Eq. (3.50)), onde a matriz $\mathbf{\Gamma}_k^i$ pode ser fatorada como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_k^i &= \check{\mathbf{\Gamma}}_k^i \check{\mathbf{\Gamma}}_k^i \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma_{q_p+1}^i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_{q_p+2}^i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\gamma_k^i} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma_{q_p+1}^i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_{q_p+2}^i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\gamma_k^i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Portanto, a solução via mínimos quadrados recursivo fuzzy dada pela Eq. (3.53) pode ser reformulada da seguinte forma:

$$\Xi_{LS}^i = \check{\mathbf{Y}}_k^i (\check{\mathbf{\Delta}}_k^i)^T \left[\check{\mathbf{\Delta}}_k^i (\check{\mathbf{\Delta}}_k^i)^T \right]^{-1} \quad (3.75)$$

onde

$$\check{\mathbf{Y}}_k^i = \mathbf{Y}_k^i \check{\mathbf{\Gamma}}_k^i \quad (3.76)$$

$$\check{\mathbf{\Delta}}_k^i = \mathbf{\Delta}_k^i \check{\mathbf{\Gamma}}_k^i \quad (3.77)$$

Algoritmo 6: Algoritmo Principal

```

Inicializar  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, \sigma_1, \sigma_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha, \zeta, \lambda, T_\rho, w, q_p, q_f$ 
 $\hat{\Sigma}_0, \psi_0, S, W$ 

 $k = 1$ 
Ler amostra  $\mathbf{z}_k^{(n)}$ 
%Inicializar primeiro agrupamento
 $c = 1$ 
 $\mathbf{z}^{c*} = \mathbf{z}_k^{(n)}, \hat{\Sigma}^c = \hat{\Sigma}_0, \psi^c = \psi_0, \Xi_k^c = \mathbf{0}$ 
 $\Theta_k^{(x)} = \Theta_0, \Theta_k^{(y)} = \Theta_0^{(y)}$ 
repetir
     $k = k + 1$ ; Ler amostra  $\mathbf{z}_k^{(n)}$ 
    %Predição
    para  $i = 1$  até  $c$  faça
        compute  $\mathbf{x}_k^i$  - Eq. (3.67)
        Calcule  $\mathbf{y}_k^i$  - Eq. (3.6)
        calcule  $\tilde{\mu}_{\tilde{Z}^i}^i = [\underline{\mu}_{\tilde{Z}^i}^i, \bar{\mu}_{\tilde{Z}^i}^i]$  - Eqs. (3.3)-(3.5)
    fim
    Calcular saída do modelo  $\hat{\mathbf{y}}_k$  - Eqs. (3.8),(3.9),(3.13)
    %Estimação dos parâmetros de redução de tipo - (Algoritmo 2)
     $[\mathbf{v}_{d,k}^j, \mathbf{v}_{s,k}^j, \mathbf{P}_d, \mathbf{P}_s] = \text{atualizar\_redutor\_tipo}(\mathbf{y}^r, \mathbf{y}^l, \mathbf{v}_{d,k}^j, \mathbf{v}_{s,k}^j, \mathbf{P}_d, \mathbf{P}_s)$ 
    %Estimação do Antecedente - (Algoritmo 3)  $[\mathbf{z}^*, \hat{\Sigma}, \psi, \rho_k, c_k, \text{created}, \text{merged}] =$ 
    AEGM( $\mathbf{z}^{(n)}, \mathbf{z}_0^*, \hat{\Sigma}, w, \hat{\Sigma}_0, \psi, \psi_0, c_k$ )
    se created então
         $\Xi_k^c = \frac{\sum_{i=1}^{c-1} \rho_k^i \Xi_k^i}{\sum_{i=1}^{c-1} \rho_k^i}$ 
         $\Theta_k^c = \frac{\sum_{i=1}^{c-1} \rho_k^i \Theta_k^i}{\sum_{i=1}^{c-1} \rho_k^i}$ 
         $\mathbf{P}_{f,k}^i = r_3 \mathbf{I}, \mathbf{P}_k^i = r_4 \mathbf{I}, \mathbf{P}_k^{\Theta^i} = r_5 \mathbf{I}$ 
    fim
    se merged  $\neq \emptyset$  então
         $\Xi_k^{idx} = \frac{\rho_k^{idx} \Xi_k^{idx} + \rho_k^i \Xi_k^i}{\rho_k^{idx} + \rho_k^i}$ 
         $\mathbf{P}_{f,k}^{idx} = r_3 \mathbf{I}, \mathbf{P}_k^{idx} = r_4 \mathbf{I}, \mathbf{P}_k^{\Theta^{idx}} = r_5 \mathbf{I}$ 
    fim

```

%Estimação consequente - (Algoritmo 5)

$$[\Xi_{k+1}, \mathbf{P}_{k+1}, \Theta_k^{i(x)}, \mathbf{P}_k^{i(x)}, \mathbf{P}_{k+1}^{i(y)}, \Theta_{k+1}^{i(y)}] = \text{AIRFE}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \Xi_k, \mathbf{P}_k, \Theta_k^{(x)}, \mathbf{P}_k^{(x)}, \mathbf{P}_k^{(y)}, \Theta_k^{(y)}, \gamma_k, c)$$

Extrair os matrizes de modelo de espaço de estados $[\mathbf{A}^i, \mathbf{B}^i, \mathbf{C}^i, \mathbf{D}^i]$ de $\Theta^{i(x)}$ e $\Theta^{i(y)}$

%Estimação das funções de pertinência tipo-2 - (Algorithm 4)

$$[\psi_{k+1}, \mathbf{P}_{f,k+1}] = \text{FKE}(\psi_k, \mathbf{z}_k^{(n)}, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{z}^*, \hat{\Sigma}, \mathbf{P}_{f,k}, \zeta, \mathbf{C}, \mathbf{D}, c)$$

até $\mathbf{z}_{k+1} = \emptyset$

Hipótese 3.1. *O modelo multivariável não-linear pode ser fielmente representado por uma estrutura de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar no espaço de estados, com c_R regras, tal que a forma geral da regra é dado por:*

$$\text{Regra}^{i=1,2,\dots,c_R} : \text{SE } \mathbf{z}_k \text{ é } \tilde{Z}^i \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{A}_R^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}_R^i \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k^i = \mathbf{C}_R^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}_R^i \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (3.78)$$

onde $(\bullet)_R$ (subscrito R) representa os parâmetros reais do modelo de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar no espaço de estados que representa fielmente o sistema não-linear.

Seja o cálculo em batelada da saída do i -ésimo submodelo, dado por:

$$\mathbf{Y}_k^i = \Xi_R^i \Delta_k^i + \mathbf{E}_k \quad (3.79)$$

onde $\mathbf{Y}_k^i = [\mathbf{y}_{q_p+1}^i \ \mathbf{y}_{q_p+2}^i \ \dots \ \mathbf{y}_k^i]$ e $\mathbf{E}_k$ é a matriz de erro. Através da Suposição 3.1 e considerando que a quantidade de regras estimadas seja igual ao numero de regras reais, ou seja, $c = c_R$, e realizando a substituição da Eq. (3.79) e Eq. (3.76), a Eq. (3.75) é reformulada como segue:

$$\Xi_{LS}^i = \Xi_R^i + \check{\mathbf{E}}_k^i (\check{\Delta}_k^i)^T \left[\check{\Delta}_k^i (\check{\Delta}_k^i)^T \right]^{-1} \quad (3.80)$$

onde $\check{\mathbf{E}}_k^i = \mathbf{E}_k \check{\Gamma}_k^i$. Seja a seguinte matriz de covariância:

$$\mathbf{P}_\delta^i = \left[\check{\Delta}_k^i (\check{\Delta}_k^i)^T \right] = \left[\frac{1}{k - q_p} \sum_{j=q_p}^k \check{\delta}_j \check{\delta}_j^T \right] \quad (3.81)$$

onde $\check{\delta}_j = \sqrt{\gamma_j^i} \delta_j = \sqrt{\gamma_j^i} [\bar{\mathbf{u}}_{k-q_p}^T \ \mathbf{u}_k^T \ (\bar{\mathbf{y}}_{k-q_p}^i)^T]^T$. Desta forma, a Eq. (3.80) é formulada como segue:

$$\Xi_{LS}^i = \Xi_R^i + \frac{1}{k - q_p} \left[\sum_{j=q_p}^k \check{\delta}_j \check{\delta}_j^T \right] (\mathbf{P}_\delta^i)^{-1} \quad (3.82)$$

De modo a analisar o comportamento da solução de mínimo quadrados ponderados fuzzy para $k \rightarrow \infty$, é apropriado assumir que $\mathbf{e}_k$ é um processo estocástico estacionário e $\mathbf{u}_k$ é um processo *quasi*-estacionário, tal que:

$$\mathbf{P}_u = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbf{u}_j \mathbf{u}_{k-j}^T \quad (3.83)$$

converge (com probabilidade 1) quando $k \rightarrow \infty$ (LJUNG, 1999), ou seja:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}_u = \bar{\mathbf{P}}_u \quad (3.84)$$

Desta forma, analisando $\mathbf{P}_{\delta}^i$ e $\frac{1}{k-q_p} \left[\sum_{j=q_p}^k \check{\mathbf{e}}_j^i \check{\boldsymbol{\delta}}_j^{iT} \right]$ quando $k \rightarrow \infty$, tem-se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\delta}^i \rightarrow \bar{\mathbf{P}}_{\delta}^i \quad (3.85)$$

$$\frac{1}{k-q_p} \sum_{j=q_p}^k \check{\mathbf{e}}_j^i \check{\boldsymbol{\delta}}_j^{iT} = \mathbf{P}_{\delta\check{\mathbf{e}}}^i \quad (3.86)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\delta\check{\mathbf{e}}}^i \rightarrow \bar{\mathbf{P}}_{\delta\check{\mathbf{e}}}^i \quad (3.87)$$

Em outras palavras, $\mathbf{P}_{\delta}^i$ converge (com probabilidade 1) para $\bar{\mathbf{P}}_{\delta}^i$ e similarmente, $\mathbf{P}_{\delta\check{\mathbf{e}}}^i$ converge (com probabilidade 1) para $\bar{\mathbf{P}}_{\delta\check{\mathbf{e}}}^i$ quando $k \rightarrow \infty$ (LJUNG, 1999). Assim, para $k \rightarrow \infty$, a Eq. (3.82) é dada como segue:

$$\boldsymbol{\Xi}_{LS}^i = \boldsymbol{\Xi}_R^i + \bar{\mathbf{P}}_{\delta\check{\mathbf{e}}}^i (\bar{\mathbf{P}}_{\delta}^i)^{-1} \quad (3.88)$$

Desta forma, para a estimação paramétrica do i -ésimo submodelo seja **convergente e consistente**, ou seja, $\boldsymbol{\Xi}_{LS}^i \rightarrow \boldsymbol{\Xi}_R^i$ quando $k \rightarrow \infty$, as seguintes condições necessárias devem ser satisfeitas (LJUNG, 1999):

- (C.1): $\bar{\mathbf{P}}_{\delta}^i$ é não singular. Esta condição é satisfeita caso $\mathbf{u}_k$ e $\mathbf{e}_k$ sejam independentes e $\mathbf{u}_k$ deve ser persistentemente excitante, com k suficientemente grande;
- (C.2): $\mathbf{e}_k$ é descrito por uma sequência de ruído branco. Neste caso $\bar{\mathbf{P}}_{\delta\mathbf{e}}^i = \mathbf{0}$, uma vez que $\mathbf{e}_k$ não é dependente de dados até o instante $k-1$.
- (C.3): Em consequência de (C.1), o grau de ativação deve ser maior que zero, ou seja, $\gamma_j^i > 0 \quad \forall i, \forall j$.

3.6 Aspectos sobre estabilidade de estimação

Seja a estimação recursiva dos parâmetros de Markov, dada pela Eq. (3.58):

$$\boldsymbol{\Xi}_{k+1}^i = \boldsymbol{\Xi}_k^i + \left[\check{\mathbf{y}}_{k+1}^i - \boldsymbol{\Xi}_k^i \check{\boldsymbol{\delta}}_{k+1}^i \right] (\check{\boldsymbol{\delta}}_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_{k+1}^i \quad (3.89)$$

Considerando $(\check{\boldsymbol{\delta}}_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_{k+1}^i = \check{\mathbf{G}}_{k+1}^i$, a Eq. (3.89) é formulada como segue:

$$\boldsymbol{\Xi}_{k+1}^i = \boldsymbol{\Xi}_k^i + \left[\check{\mathbf{y}}_{k+1}^i - \boldsymbol{\Xi}_k^i \check{\boldsymbol{\delta}}_{k+1}^i \right] \check{\mathbf{G}}_{k+1}^i \quad (3.90)$$

Reformulando a Eq. (3.90), tem-se:

$$\boldsymbol{\Xi}_{k+1}^i = \boldsymbol{\Xi}_k^i (\mathbf{I} - (\check{\boldsymbol{\delta}}_{k+1}^i) \check{\mathbf{G}}_{k+1}^i) + \check{\mathbf{y}}_{k+1}^i \check{\mathbf{G}}_{k+1}^i \quad (3.91)$$

Se um erro $\mathbf{e}_{\Xi_{k_0}^i}$ é introduzido no instante k_0 , a partir da Eq. (3.91), a propagação do erro do instante k_0 até $k + 1$ é dado por:

$$\Delta_{\Xi_k^i} = \mathbf{e}_{\Xi_{k_0}^i} \prod_{j=k_0}^{k+1} (\mathbf{I} - (\check{\delta}_{j+1}^i) \check{\mathbf{G}}_{j+1}^i) \quad (3.92)$$

Baseado na **Hipótese 3.1** e $c = c_R$, as propriedades da propagação do erro é dependente de:

$$\Phi(k_0, k + 1) = \prod_{j=k_0}^{k+1} (\mathbf{I} - (\check{\delta}_{j+1}^i) \check{\mathbf{G}}_{j+1}^i) \quad (3.93)$$

Baseado na Eq. (3.56), a matriz $\check{\mathbf{P}}_k^i$ pode ser expressa como segue:

$$\check{\mathbf{P}}_k^i = \left[\sum_{j=q_p}^k \beta_2^{k-j} \check{\delta}_j \check{\delta}_j^T \right]^{-1} \quad (3.94)$$

Assim, a Eq. (3.93) é expressa como segue:

$$\Phi(k_0, k + 1) = \beta_2^{k-k_0+1} \check{\mathbf{P}}_{k_0}^i (\check{\mathbf{P}}_{k+1}^i)^{-1} \quad (3.95)$$

Uma vez que $(\check{\mathbf{P}}_k^i)^{-1}$ permanece uniformemente limitada e o fator de esquecimento $\beta_2 < 1$, pode ser afirmado que o efeito do erro $\Delta_{\Xi_k^i}$ na estimação recursiva dada pela Eq. (3.90) decai exponencialmente (LJUNG; LJUNG, 1985). Sendo $\beta_2 = 1$, então $\check{\mathbf{P}}_{k_0}^i (\check{\mathbf{P}}_k^i)^{-1} \leq \mathbf{I}$, o que significa **estabilidade** de estimação dos parâmetros do consequente.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, a eficiência e aplicabilidade da metodologia proposta, de acordo com a formulação matemática apresentada no Capítulo 3, são discutidas por meio de resultados computacionais e experimentais, os quais são: identificação de um sistema dinâmico SISO não-linear, identificação recursiva de um sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa combinada, identificação recursiva de um sistema dinâmico não-linear multivariável e variante no tempo, identificação recursiva de um evaporador industrial de quatro estágios e a identificação recursiva de um helicóptero com dois graus de liberdade (2DoF, no inglês *2 Degrees-of-Freedom*).

A fim de avaliar e comprovar os resultados obtidos com o modelo neuro-fuzzy tipo-2 proposto, os seguintes critérios são utilizados:

- contabilização da variância (VAF, no inglês *Variance Accounted For*):

$$\text{VAF}(\%) = \left[1 - \frac{\text{var}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}{\text{var}(\mathbf{y})} \right] \times 100 \quad (4.1)$$

onde $\text{var}(\bullet)$ é a variância do sinal.

- Erro médio quadrático (MSE, no inglês *Mean Square Error*):

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2 \quad (4.2)$$

onde y é a saída do sistema dinâmico, $\hat{y}$ é a saída estimada e N é a quantidade de dados da base de dados.

- Erro médio quadrático normalizado (NMSE, no inglês *Normalized Mean Square Error*):

$$\text{NMSE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{(y_k - \hat{y}_k)^2}{\max(\mathbf{y}) - \min(\mathbf{y})} \quad (4.3)$$

onde $\text{NMSE} \in [0, 1]$.

- Raiz quadrada do erro médio quadrático (RMSE, no inglês *Root Mean Square Error*):

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2} \quad (4.4)$$

- Índice de erro não-dimensional (NDEI, no inglês *Non-Dimensional Error Index*):

$$\text{NDEI} = \frac{\text{RMSE}}{\text{std}(\mathbf{y})} \quad (4.5)$$

onde $\text{std}(\bullet)$ é o desvio padrão.

- Coeficiente R^2 :

$$R^2 = \frac{\sum_{k=1}^N (y_k - \text{media}(\mathbf{y}))^2}{\sum_{k=1}^N (y_k - \text{media}(\mathbf{y}))^2 + \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2} \quad (4.6)$$

onde $\text{media}(\bullet)$ é o valor médio do sinal.

Em relação aos parâmetros do algoritmo proposto, são descritos nos experimentos os conjuntos de parâmetros que produziram os melhores resultados de estimação.

4.1 Resultados computacionais

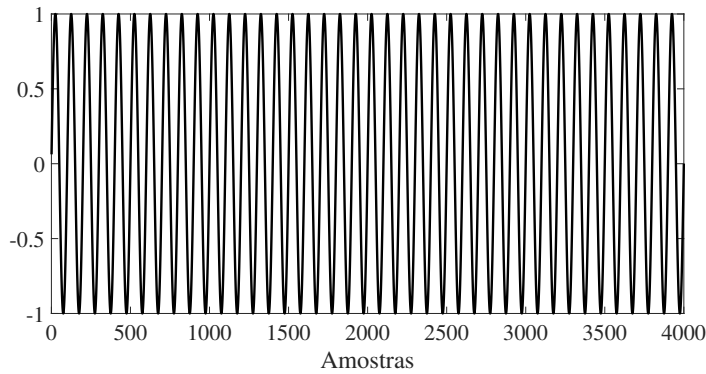
4.1.1 Sistema dinâmico SISO não-linear

O sistema dinâmico SISO não-linear, amplamente utilizado na literatura, é regido pela equação abaixo:

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + y_k^2} + u_k^3 \quad (4.7)$$

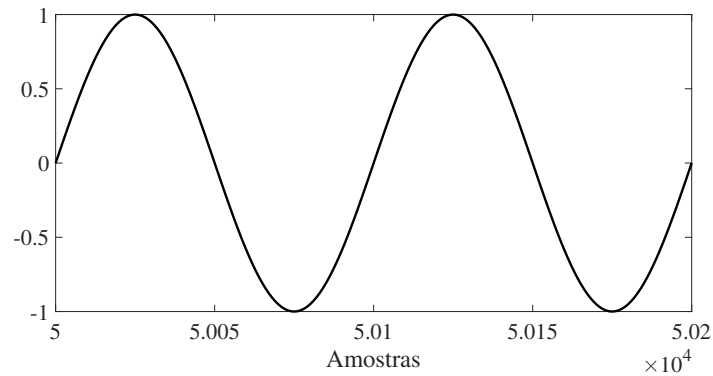
onde y_k é a saída do sistema dinâmico e $u_k = \sin(2\pi k/100)$ é o sinal de entrada. Para esta simulação, 50200 amostras de entrada/saída foram geradas, onde as amostras $k = 1, 2, \dots, 50000$ foram utilizadas para a etapa de treinamento e as amostras $k = 50001, 50002, \dots, 50200$ foram utilizadas para a etapa de validação. Nas Figs. 14–17 são mostradas os conjuntos de treinamento e de validação de entrada e saída, tal que, para melhor visualização, o conjunto de treinamento é ilustrado entre as amostras $k = 1, 2, \dots, 4000$.

Figura 14 – Conjuntos de dados do sinal de entrada do sistema dinâmico SISO não-linear para a etapa de treinamento.



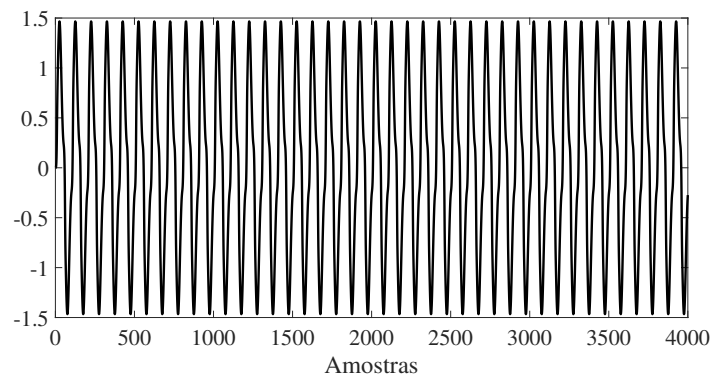
Fonte: Autor

Figura 15 – Conjuntos de dados do sinal de entrada do sistema dinâmico SISO não-linear para a etapa de validação.



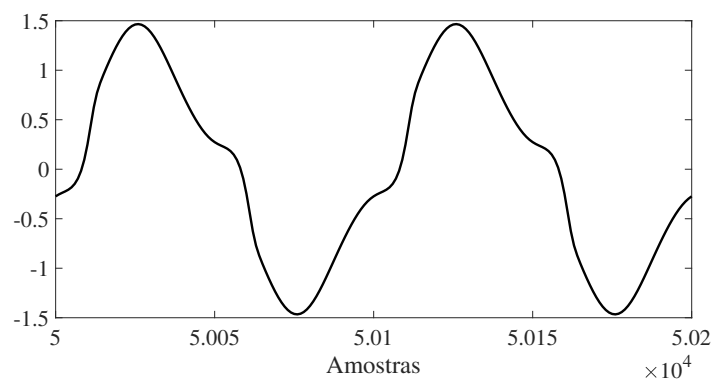
Fonte: Autor

Figura 16 – Conjuntos de dados do sinal de saída do sistema dinâmico SISO não-linear para a etapa de treinamento.



FONTE: Autor

Figura 17 – Conjuntos de dados do sinal de saída do sistema dinâmico SISO não-linear para a etapa de validação.



Fonte: Autor

De modo a representar o comportamento do sistema dinâmico SISO não-linear, o sistema de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar no espaço de estados apresenta a seguinte base de

regra:

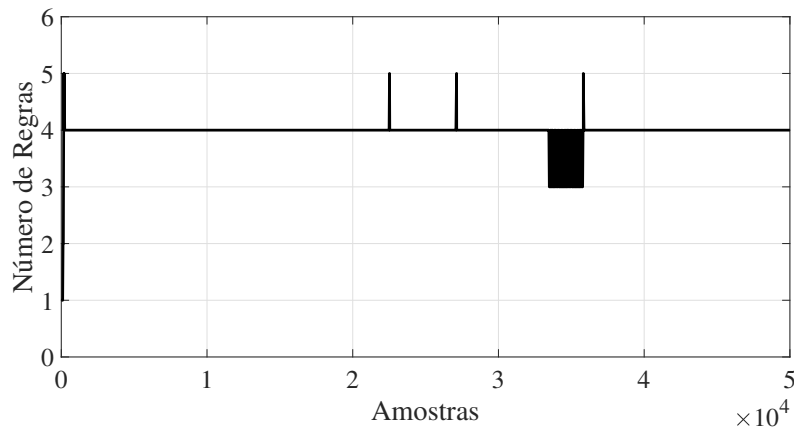
$$\text{Regra } i : \text{ SE } \mathbf{z}_k = [u_{k-1} \ y_{k-1}] \text{ é } \tilde{Z}^i \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i &= \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}^i u_k \\ y_k^i &= \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}^i u_k \end{cases} \quad (4.8)$$

onde o centro de $\tilde{Z}^i$ é dado por $\mathbf{z}_k^{i*} = [u^{i*} \ y^{i*}]$.

Para a implementação do algoritmo proposto, se adotou a seguinte parametrização: $m_{\underline{\mu}} = 0.9$ (máximo valor da FPI); $\lambda = 0.01$ (probabilidade de sucesso); $\alpha = 7 \times 10^{-4}$ (taxa de aprendizagem do algoritmo de agrupamento); $T_{\rho} = 0.7$ (limiar de compatibilidade); $w = 50$ (janela de tempo do algoritmo de agrupamento); $\sigma_1 = 0.10$ (constante para inicialização da matriz de dispersão); $\sigma_2 = 10^{-6}$ (constante para inicialização dos graus de incerteza); $\zeta = 3 \times 10^{-4}$ (taxa de aprendizado do FKE); $\beta_1 = 1$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros do redutor de tipo); $\beta_2 = 1$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros de Markov); $\beta_3 = 1$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros do modelo no espaço de estados); $r_1 = 10^{-6}$ (constante para inicialização da matriz de covariância - redução de tipo para os estados); $r_2 = 10^{-6}$ (constante para inicialização da matriz de covariância - redução de tipo para as saídas); $r_3 = 30$ (constante para inicialização da matriz de covariância - FKE); $r_4 = 10^1$ (constante para inicialização da matriz de covariância - estimação dos parâmetros de Markov); $r_5 = 10^1$ (constante para inicialização da matriz de covariância - estimação do modelo no espaço de estados); $q_p = 8$ (deslocamento a esquerda no tempo discreto k); $q_f = 6$ (deslocamento a direita no tempo discreto k); $n = 2$ (ordem do sistema); $\mathbf{S} = [\mathbf{I}^{n \times n} \ \mathbf{0}^{n \times (q_p q_f - n)}]$; $\kappa = 0$ (constante para inicialização do primeiro modelo no espaço de estados).

A variação do número de regras, durante a etapa de treinamento, é ilustrada na Fig. 18. Na amostra 121, a segunda regra é criada; na amostra 151 é criada a terceira regra; na amostra 164 é criada a quarta regra; o número de regras é 5 na amostra 175; na amostra 187 dois agrupamentos são fundidos e o número de regras é 4; na amostra 196 o número de regras é 5; dois agrupamentos são fundidos na amostra 201 e o número de regras é 4; no final da etapa de treinamento, o modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar apresentou 4 regras.

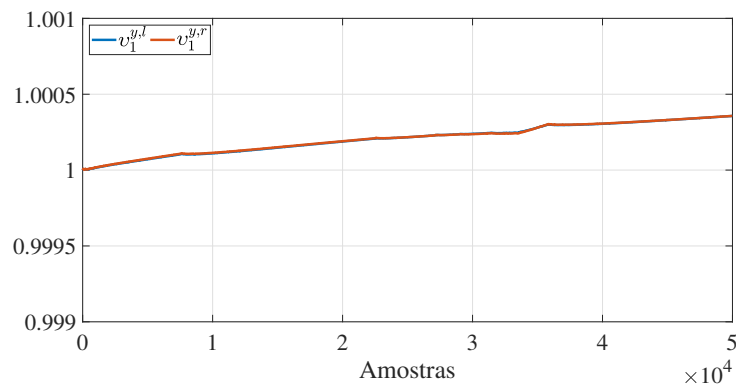
Figura 18 – Variação do número de regras na etapa de treinamento do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear



Fonte: Autor

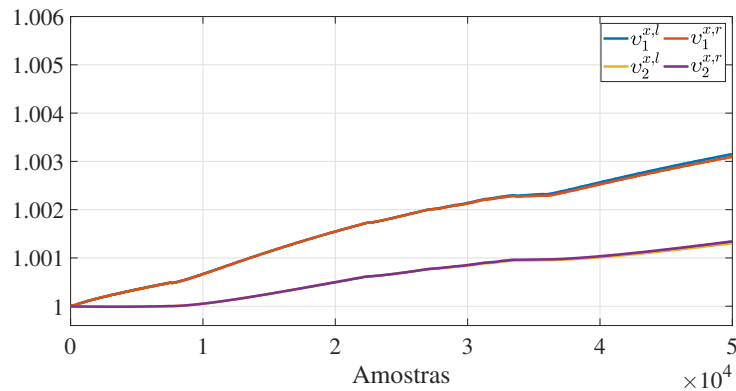
A estimação recursiva dos pesos $v_j^{x,l} |_{j=1,2}$, $v_j^{x,r} |_{j=1,2}$, $v_1^{y,l}$ e $v_1^{y,r}$, na camada de redução de tipo, é ilustrada nas Figs. 19–20. De acordo com a estimação dos pesos adaptativos, observa-se a eficiência do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para definir o comportamento do sistema dinâmico SISO não-linear, através da soma ponderada dos limites inferior e superior das regiões de incerteza obtidas na camada IV (camada de composição das regras) nas Eqs. (3.8)–(3.11).

Figura 19 – Variação dos pesos adaptativos $v_1^{y,l}$ e $v_1^{y,r}$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza, para a saída do sistema dinâmico SISO não-linear.



Fonte: Autor

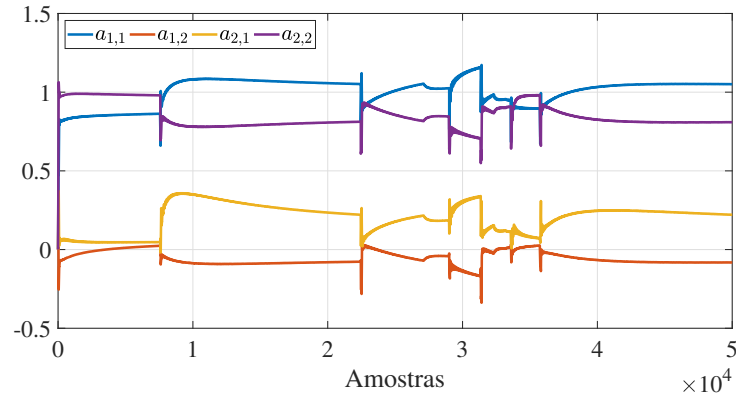
Figura 20 – Variação dos pesos adaptativos $v_j^{x,l} |_{j=1,2}$ e $v_j^{x,r} |_{j=1,2}$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza para os estados do sistema dinâmico SISO não-linear.



Fonte: Autor

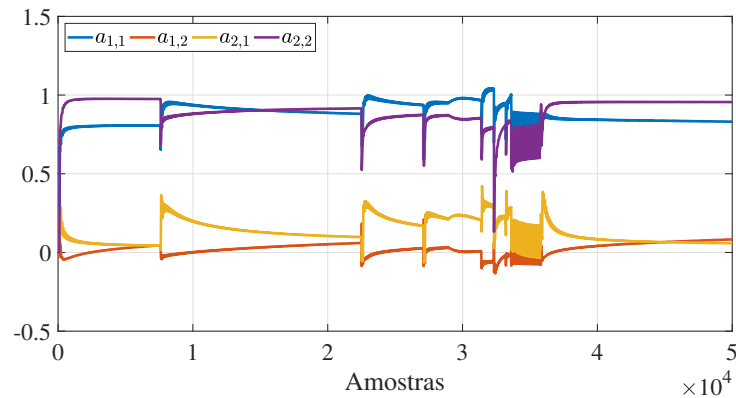
A estimação recursiva das matrizes dinâmicas $A^i |_{i=1,\dots,4}$ na proposição do consequente do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar, na etapa de treinamento, é ilustrada nas Figs. 21–24. Uma vez que o i -ésimo modelo linear no espaço de estados representa o comportamento linear do sistema dinâmico SISO não-linear em um ponto de operação definido a cada nova amostra, respectivamente, conclui-se, a partir da metodologia proposta, a eficiência do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar, através da combinação linear dos modelos no espaço de estados na camada do consequente, em modelar a não-linearidade inerente ao conjunto de dados, recursivamente.

Figura 21 – Variação dos elementos da matriz $\mathbf{A}^1$, na etapa de treinamento, para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear.



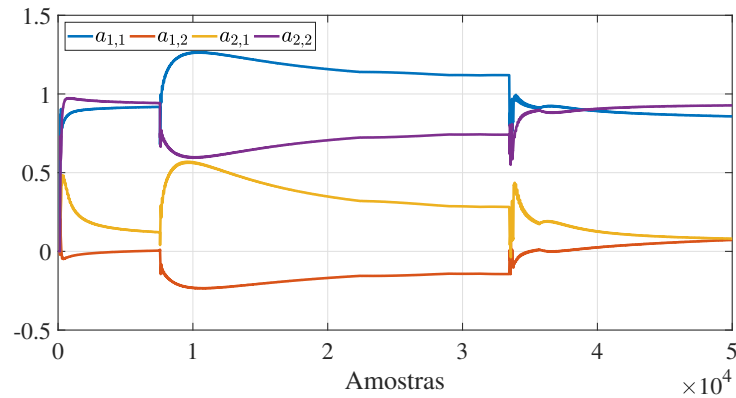
Fonte: Autor

Figura 22 – Variação dos elementos da matriz $\mathbf{A}^2$, na etapa de treinamento, para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear



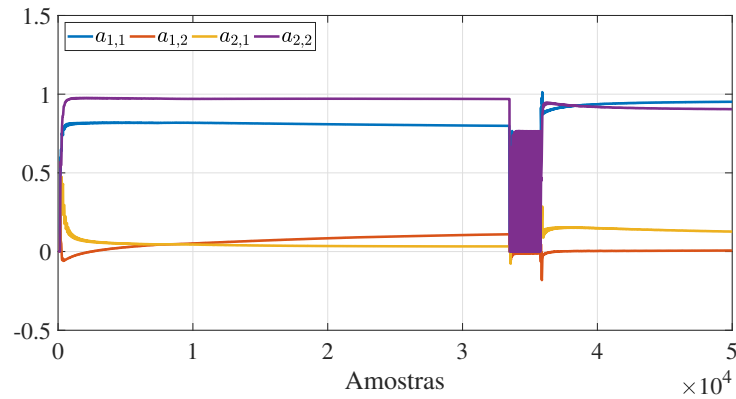
Fonte: Autor

Figura 23 – Variação dos elementos da matriz $\mathbf{A}^3$, na etapa de treinamento, para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear.



Fonte: Autor

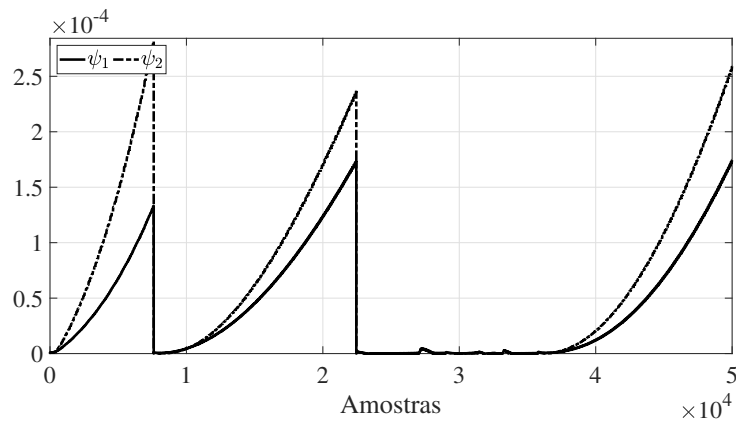
Figura 24 – Variação dos elementos da matriz A^4 , na etapa de treinamento, para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear.



Fonte: Autor

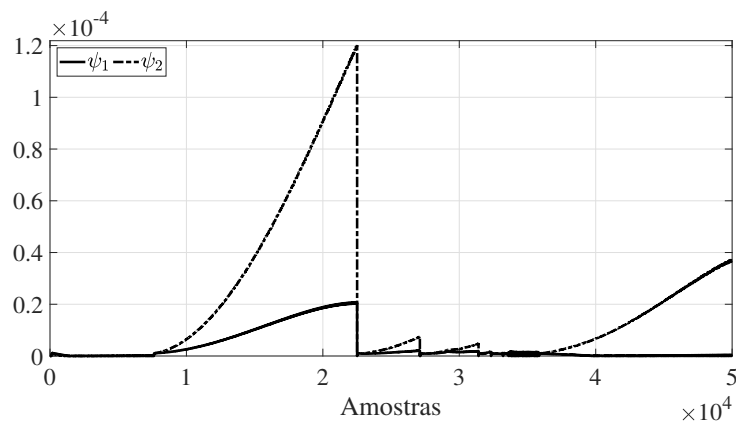
A estimação recursiva de $\psi^i | i=1, \dots, 4$ que são usados para representar os graus de incertezas e calcular a RdI das funções de pertinências, é ilustrada na Figs. 25–28.

Figura 25 – Variação dos elementos do vetor ψ^1 , na etapa de treinamento, para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear.



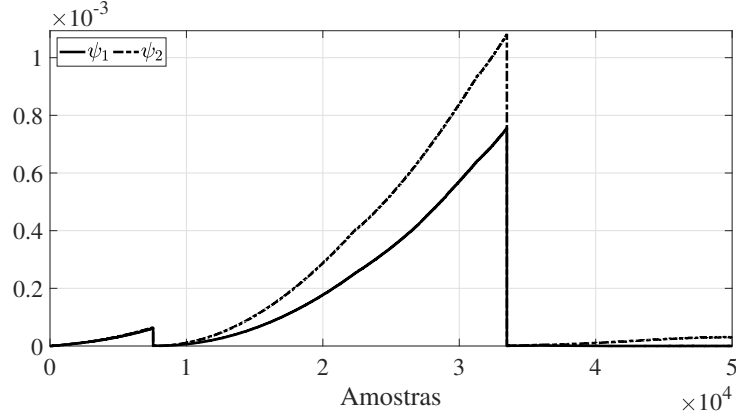
Fonte: Autor

Figura 26 – Variação dos elementos do vetor ψ^2 , na etapa de treinamento, para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear



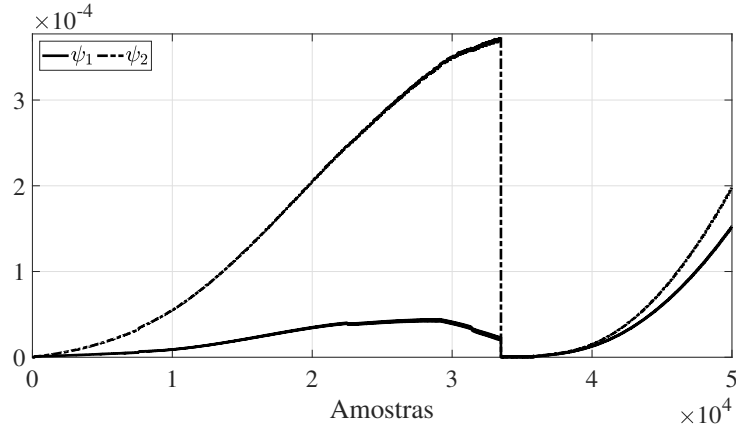
Fonte: Autor

Figura 27 – Variação dos elementos do vetor ψ^3 , na etapa de treinamento, para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear.



Fonte: Autor

Figura 28 – Variação dos elementos do vetor ψ^4 , na etapa de treinamento, para identificação do sistema dinâmico SISO não-linear.



Fonte: Autor

A base de regras do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar obtida na etapa de treinamento é dada a seguir:

$$\text{Regra}^1 : \text{SE } \mathbf{z}_k \text{ é } \tilde{Z}^i \text{ ENTÃO} \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i = \begin{bmatrix} 1.0508 & 0.2210 \\ -0.0818 & 0.8092 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k^i + \begin{bmatrix} 0.1606 \\ -0.0940 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1.0233 & 0.0194 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k - 0.0034 \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\text{Regra}^2 : \text{SE } \mathbf{z}_k \text{ é } \tilde{Z}^i \text{ ENTÃO} \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i = \begin{bmatrix} 0.8310 & 0.0585 \\ 0.0827 & 0.9558 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k^i + \begin{bmatrix} 0.2756 \\ -0.1549 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1.0210 & 0.0134 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k - 0.0054 \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\text{Regra}^3 : \text{SE } \mathbf{z}_k \text{ é } \tilde{Z}^i \text{ ENTÃO} \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i = \begin{bmatrix} 0.8576 & 0.0807 \\ 0.0727 & 0.9275 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k^i + \begin{bmatrix} 0.2730 \\ -0.1776 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1.0208 & 0.0128 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k - 0.0044 \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{Regra}^4 : \mathbf{SE} \mathbf{z}_k \text{ é } \tilde{Z}^i \text{ ENTÃO} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{k+1}^i = \begin{bmatrix} 0.9518 & 0.1270 \\ 0.0064 & 0.9047 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k^i + \begin{bmatrix} 0.1754 \\ -0.0981 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1.0197 & 0.0169 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + -0.0026 \mathbf{u}_k \end{array} \right. \quad (4.12)$$

onde os parâmetros das funções de pertinência tipo-2 intervalar são dados abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Regra}^1 : \bar{\Sigma}^1 &= \begin{bmatrix} 0.0715 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.0713 \end{bmatrix}, \underline{\Sigma}^1 = \begin{bmatrix} 0.0711 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.0708 \end{bmatrix} \\ \mathbf{z}^{1*} &= \begin{bmatrix} 0.3354 \\ 0.4385 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

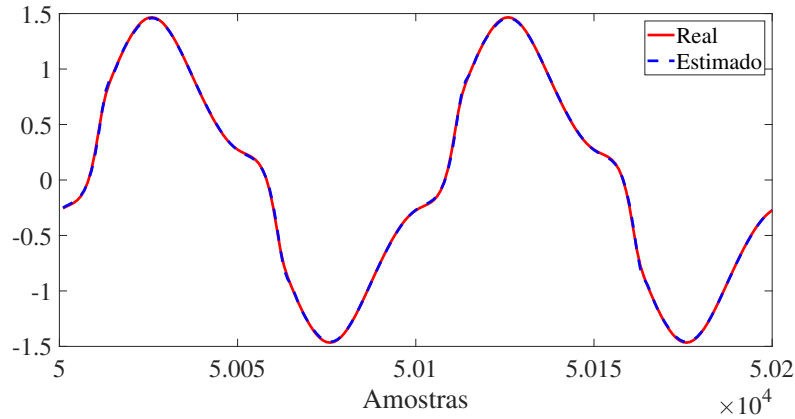
$$\begin{aligned} \mathbf{Regra}^2 : \bar{\Sigma}^2 &= \begin{bmatrix} 0.0652 & -0.0016 \\ -0.0016 & 0.0639 \end{bmatrix}, \underline{\Sigma}^2 = \begin{bmatrix} 0.0652 & -0.0016 \\ -0.0016 & 0.0638 \end{bmatrix} \\ \mathbf{z}^{2*} &= \begin{bmatrix} 0.9347 \\ 0.8801 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Regra}^3 : \bar{\Sigma}^3 &= \begin{bmatrix} 0.0605 & -0.0019 \\ -0.0019 & 0.0590 \end{bmatrix}, \underline{\Sigma}^3 = \begin{bmatrix} 0.0605 & -0.0019 \\ -0.0019 & 0.058 \end{bmatrix} \\ \mathbf{z}^{3*} &= \begin{bmatrix} 0.0681 \\ 0.1167 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Regra}^4 : \bar{\Sigma}^4 &= \begin{bmatrix} 0.0726 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.0723 \end{bmatrix}, \underline{\Sigma}^4 = \begin{bmatrix} 0.0723 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.0719 \end{bmatrix} \\ \mathbf{z}^{4*} &= \begin{bmatrix} 0.6665 \\ 0.5627 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

A resposta do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar obtida na etapa de treinamento, para rastrear a saída do sistema dinâmico SISO não-linear na etapa de validação é ilustrada na Fig. 29. A análise comparativa da metodologia proposta com outras amplamente citada na literatura, tais como SEIT2FNN (JUANG; TSAO, 2008), eT2FIS (TUNG; QUEK; GUAN, 2013), TSCIT2FNN (LIN; CHANG; LIN, 2014) and McIT2FIS (DAS; SUBRAMANIAN; SUNDARAM, 2015), é mostrada na Tab. 2, na qual observa-se uma performance competitiva.

Figura 29 – A resposta temporal do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar, na etapa de validação, para o rastreo da saída do sistema dinâmico SISO não-linear.



Fonte: Autor

Tabela 2 – Análise comparativa da metodologia proposta com algumas metodologias amplamente citadas na literatura, baseada no critério RMSE

Modelo	Referência	Número de regras	Número de parâmetros	RMSE
SEIT2FNN	(JUANG; TSAO, 2008)	3	36	0.0062
eT2FIS	(TUNG; QUEK; GUAN, 2013)	14	—	0.0520
TSCIT2FNN	(LIN; CHANG; LIN, 2014)	3	36	0.0084
McIT2FIS	(DAS; SUBRAMANIAN; SUNDARAM, 2015)	5	—	0.0008
Proposta	—	4	66	0.0052

Fonte: Autor

4.1.2 Sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa combinada

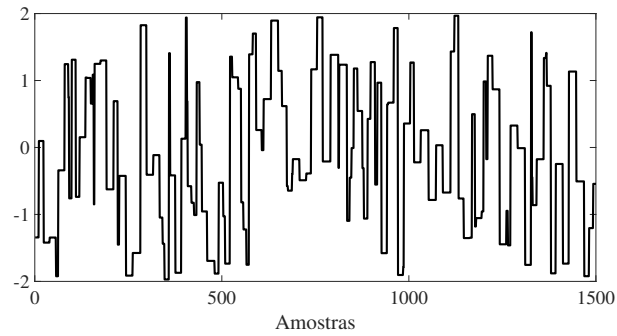
O sistema dinâmico multivariável não-linear que possui duas entradas $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]$ e duas saídas $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]$ e apresenta uma não-linearidade complexa combinada, é governado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} v_{1,k} &= 1.674u_{1,k} + 0.837u_{1,k}^2 - 0.5816u_{2,k} - 0.2908u_{2,k}^2 \\ v_{2,k} &= -0.141u_{1,k} + 0.0705u_{1,k}^2 - 0.1614u_{2,k} + 0.0807u_{2,k}^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} -0.025 & -0.100 \\ 0.190 & -0.050 \end{bmatrix} \mathbf{y}_{k-1} + \begin{bmatrix} 1.025 & 0.100 \\ -0.190 & 1.050 \end{bmatrix} \mathbf{v}_{k-1} \quad (4.18)$$

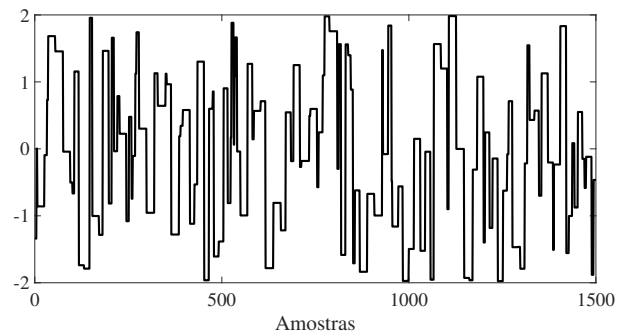
onde $u_{1,k}$ e $u_{2,k}$ são entradas, $\mathbf{v}_k = [v_{1,k} \ v_{2,k}]^T$ é o vetor de sinais intermediários e $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ é o vetor de saídas. Um conjunto de 1500 dados de entrada/saída foi gerado. Os sinais de entrada são múltiplos degraus de magnitude aleatória com distribuição uniforme entre $[-2, 2]$. O conjunto de entradas/saídas gerado é ilustrado nas Figs. 30–33.

Figura 30 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa para entrada u_1 .



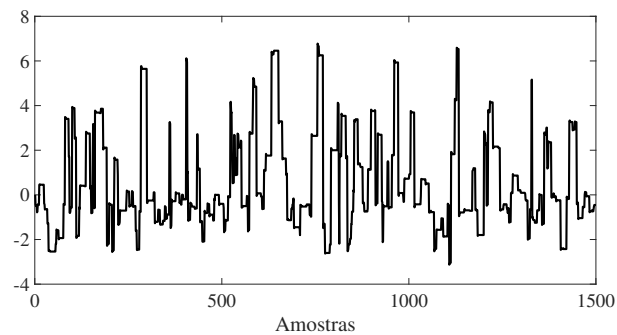
Fonte: Autor

Figura 31 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa para entrada u_2 .



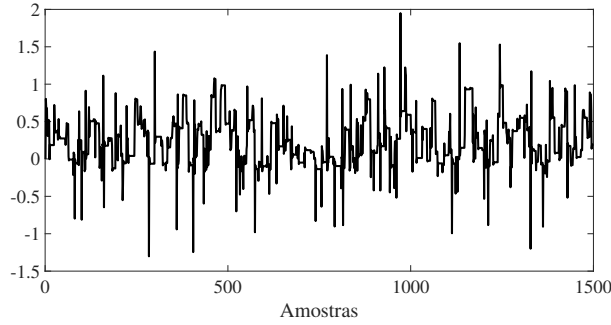
Fonte: Autor

Figura 32 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa para saída y_1 .



FONTE: Autor

Figura 33 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa para saída y_2 .



Fonte: Autor

De modo a representar o comportamento do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa, o sistema de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar no espaço de estados apresenta a seguinte base de regra:

$$\text{Regra } i : \text{ SE } \mathbf{z}_k = [\mathbf{u}_{k-1}^T \ \mathbf{y}_{k-1}^T] \text{ é } \tilde{Z}^i \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}^i u_k \\ y_k^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}^i u_k \end{cases} \quad (4.19)$$

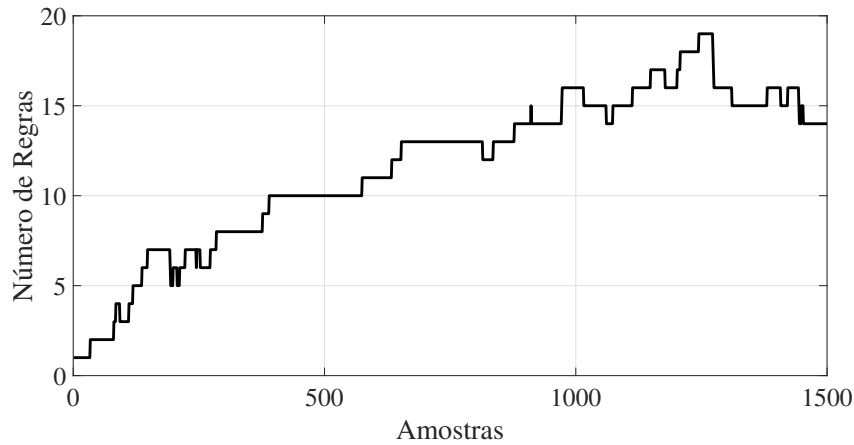
onde o centro de $\tilde{Z}^i$ é dado por $\mathbf{z}_k^{i*} = [u_1^{i*} \ u_2^{i*} \ y_1^{i*} \ y_2^{i*}]$.

Para a implementação do algoritmo proposto, se adotou a seguinte parametrização: $m_{\underline{\mu}} = 0.8$ (máximo valor da FPI); $\lambda = 0.05$ (probabilidade de sucesso); $\alpha = \times 10^{-3}$ (taxa de aprendizagem do algoritmo de agrupamento); $T_{\rho} = 0.5$ (limiar de compatibilidade); $w = 40$ (janela de tempo do algoritmo de agrupamento); $\sigma_1 = 0.095$ (constante para inicialização da matriz de dispersão); $\sigma_2 = 10^{-5}$ (constante para inicialização dos graus de incerteza); $\zeta = 3 \times 10^{-3}$ (taxa de aprendizado do FKE); $\beta_1 = 1$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros do redutor de tipo); $\beta_2 = 0.9999$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros de Markov); $\beta_3 = 0.9999$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros do modelo no espaço de estados); $r_1 = 10^{-2}$ (constante para inicialização da matriz de covariância - redução de tipo para os estados); $r_2 = 10^{-2}$ (constante para inicialização da matriz de covariância - redução de tipo para as saídas); $r_3 = 30$ (constante para inicialização da matriz de covariância - FKE); $r_4 = 10^3$ (constante para inicialização da matriz de covariância - estimação dos parâmetros de Markov); $r_5 = 10^3$ (constante para inicialização da matriz de covariância - estimação do modelo no espaço de estados); $q_p = 9$ (deslocamento a esquerda no tempo discreto k); $q_f = 6$ (deslocamento a direita no tempo discreto k); $n = 6$ (ordem do sistema); $\mathbf{S} = [\mathbf{I}^{n \times n} \ \mathbf{0}^{n \times (q_p q_f - n)}]$; $\kappa = 2 \times 10^{-2}$ (constante para inicialização do primeiro modelo no espaço de estados).

A variação do número de regras, de acordo com o comportamento do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa dada pelo fluxo de dados, é ilustrada na Fig. 34. Na amostra 34 a segunda regra é criada; na amostra 81 é criada a terceira regra; na amostra 85 é criada a quarta regra; o número de regras é 5 na amostra 175; na amostra 187 dois agrupamentos são fundidos e o número de regras é 3; o número de regras é 10 na amostra 390; na amostra 576 o

número de regras é 11; na amostra 653 o número de regras é 13; dois agrupamentos são fundidos na amostra 813 e o número de regras diminui para 12; o número de regras é 16 na amostra 975; na amostra 1246 e o número de regras é 19; no final da etapa de identificação recursiva, o modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar apresentou 14 regras.

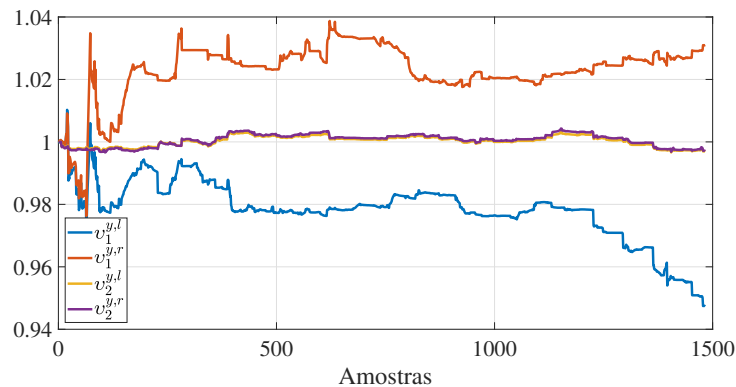
Figura 34 – Variação do número de regras no processo evolutivo do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para identificação recursiva do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa



Fonte: Autor

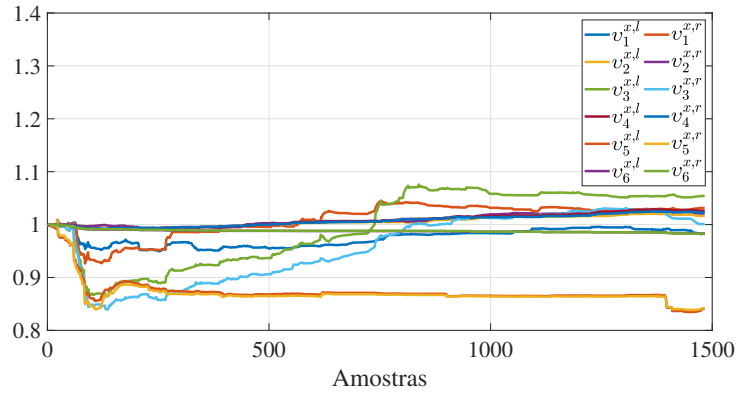
A estimação recursiva dos pesos $v_j^{x,l} | j=1,\dots,6$, $v_j^{x,r} | j=1,\dots,6$, $v_j^{y,l} | j=1,2$ e $v_j^{y,r} | j=1,2$, na camada de redução de tipo, é ilustrada nas Figs. 35–36. De acordo com a estimação dos pesos adaptativos, observa-se a eficiência do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para definir o comportamento do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa, através da soma ponderada dos limites inferior e superior das regiões de incerteza obtidas na camada IV (camada de composição das regras) nas Eqs. (3.8)–(3.11).

Figura 35 – Variação dos pesos adaptativos $v_j^{y,l} | j=1,2$ e $v_j^{y,r} | j=1,2$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza, para a saída do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.



Fonte: Autor

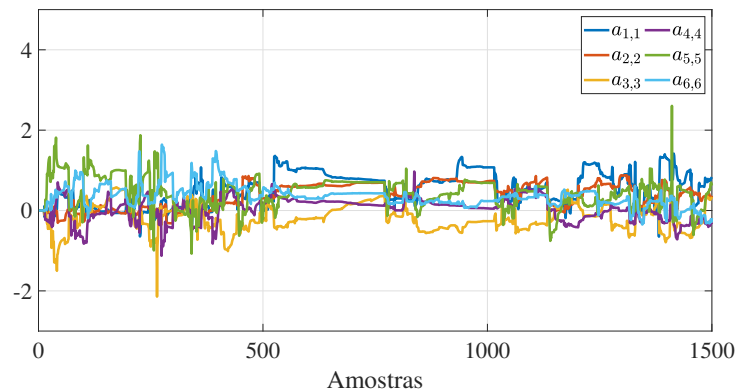
Figura 36 – Variação dos pesos adaptativos $v_j^{x,l} | j=1,...,6$ e $v_j^{x,r} | j=1,...,6$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza para os estados do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.



Fonte: Autor

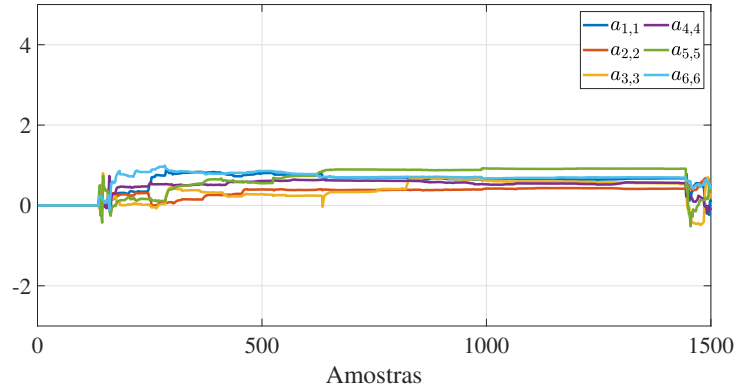
Por questões de visualização e interpretabilidade, a estimação recursiva dos elementos da diagonal principal para algumas matrizes dinâmicas $\mathbf{A}^i | i=1,4,7,10$ na proposição do consequente do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar é ilustrada nas Figs. 37–40. Uma vez que o i -ésimo modelo linear no espaço de estados representa o comportamento linear do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa em um ponto de operação definido a cada nova amostra, respectivamente, conclui-se, a partir da metodologia proposta, a eficiência do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar, através da combinação linear evolutiva dos modelos no espaço de estados na camada do consequente, em modelar a não-linearidade inerente ao conjunto de dados, recursivamente.

Figura 37 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^1$ para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.



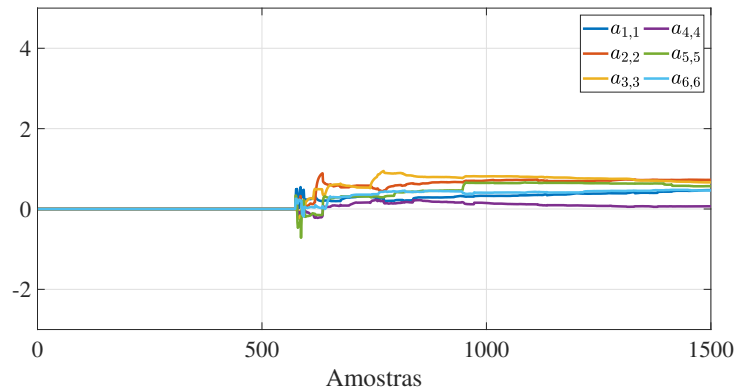
Fonte: Autor

Figura 38 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^4$ para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.



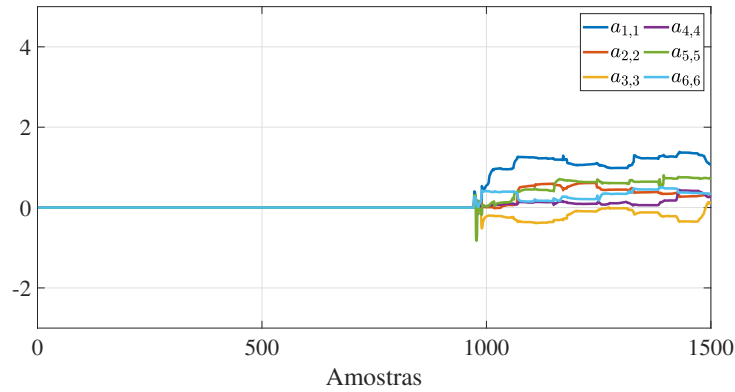
Fonte: Autor

Figura 39 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^7$ para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.



Fonte: Autor

Figura 40 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^{10}$ para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.



Fonte: Autor

A estimação recursiva para alguns vetores $\psi^i | i=1,4,7,10$ que são usados para representar os graus de incertezas e calcular a RdI das funções de pertinências, é ilustrada na Figs. 41–44.

Figura 41 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^1 para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.

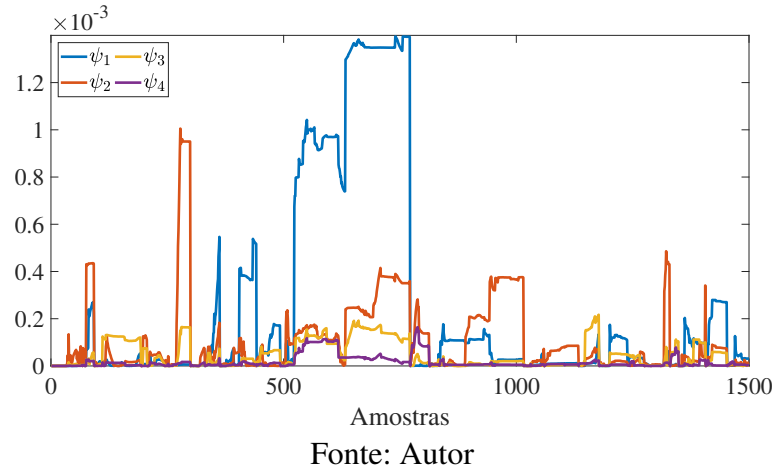


Figura 42 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^4 para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.

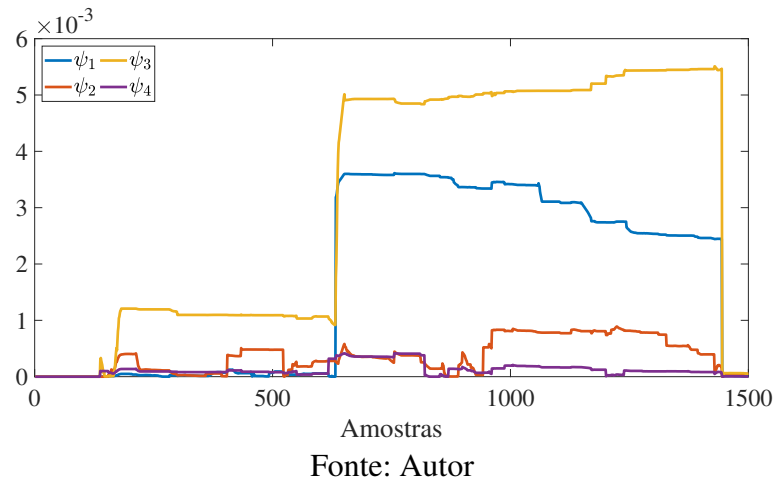


Figura 43 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^7 para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.

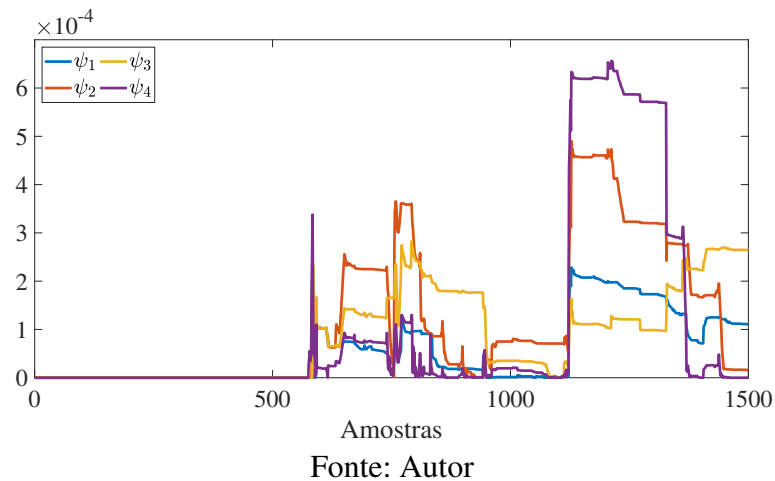
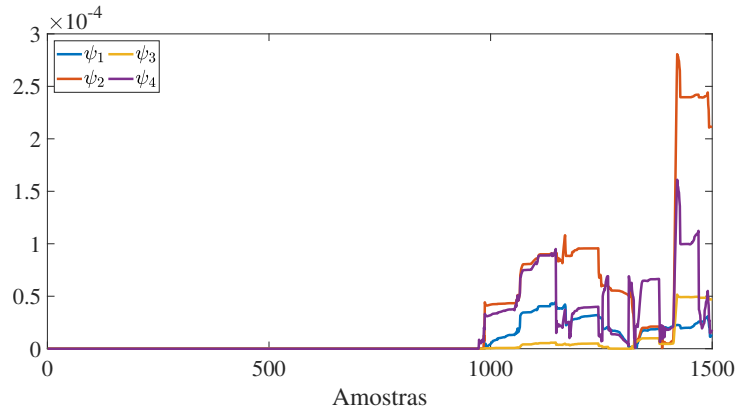


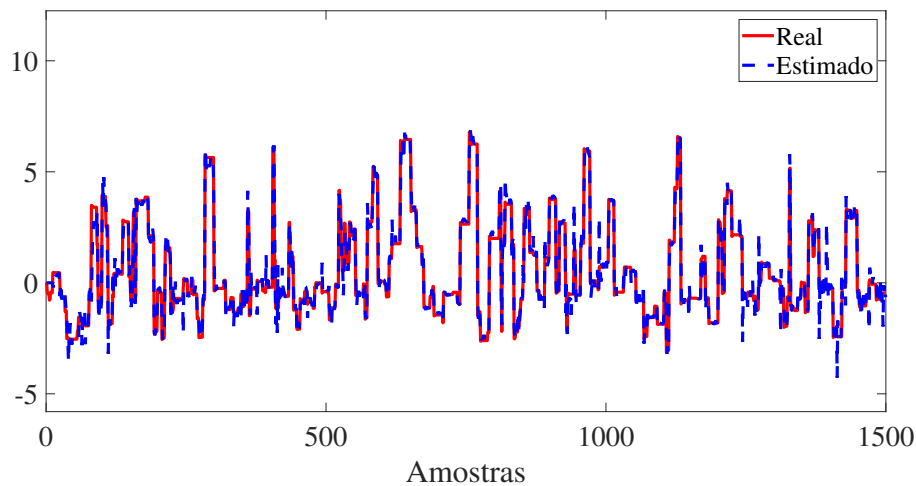
Figura 44 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^{10} para identificação do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.



Fonte: Autor

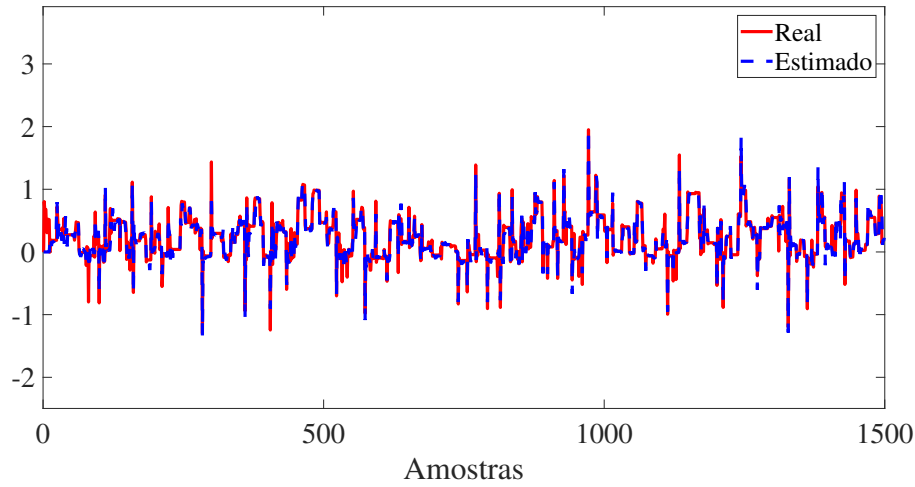
As respostas do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para rastrear as saídas do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa, na etapa de identificação recursiva, são ilustradas nas Figs. 45–46. A análise comparativa, ilustrando o melhor desempenho da metodologia proposta em relação à sua contrapartida tipo-1, segundo critério de MSE, é apresentada na Tab. 3.

Figura 45 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_1 do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.



FONTE: Autor

Figura 46 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_2 do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.



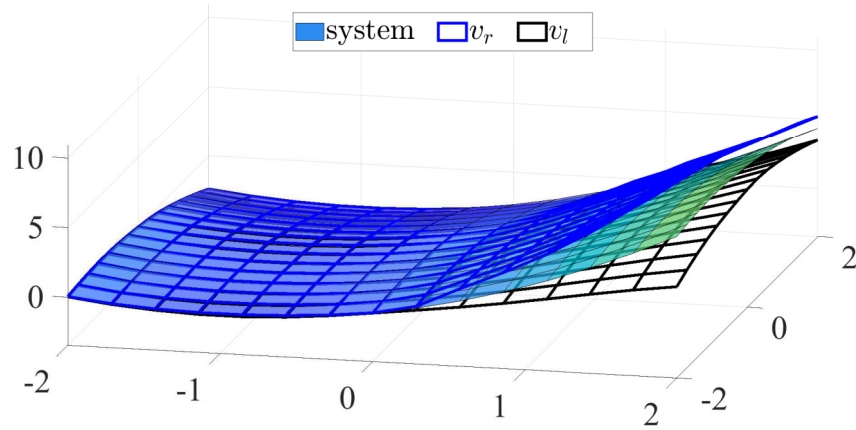
Fonte: Autor

Tabela 3 – Análise comparativa da metodologia proposta relacionada à sua contraparte do tipo 1, com base no critério de MSE (melhores valores em negrito).

		Proposta	Contraparte tipo-1
MSE	y_1	0.1873	0.2076
	y_2	0.0091	0.0116

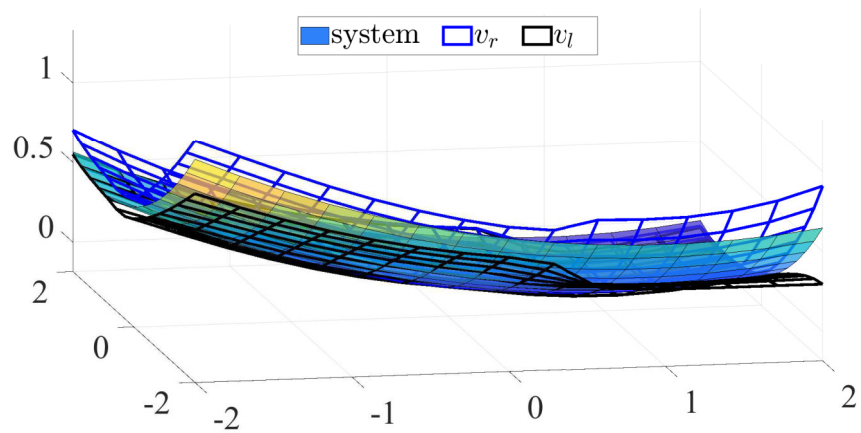
As estimações das não-linearidades estáticas superior e inferior são ilustradas nas Figs. 47–48. Uma vez que o cálculo das saídas tipo-2 são baseadas nas incertezas estimadas a partir dos dados experimentais, pode-se observar que a metodologia proposta calcula as superfícies inferior e superior em torno da superfície real. A estimulação da não-linearidades estáticas $\mathbf{v}_k = f(\mathbf{u}_k)$ do sistema dinâmico multivariável são ilustradas nas Figs. 49–50.

Figura 47 – Não-linearidade estática complexa real (superfície colorida) do sistema dinâmico multivariado e suas estimativas superior (linha sólida azul) e inferior (linha sólida preta) para o sinal v_1 .



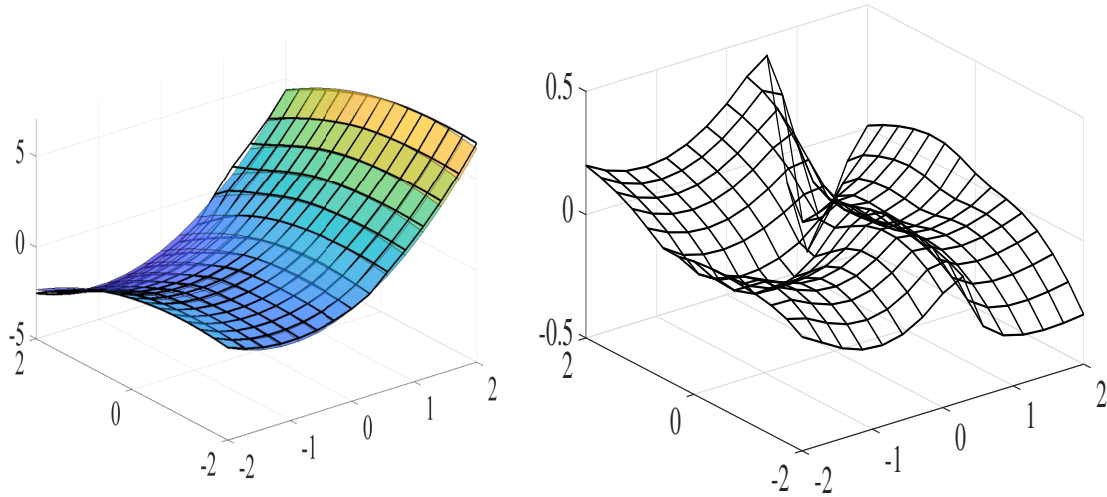
FONTE: Autor

Figura 48 – Não-linearidade estática complexa real (superfície colorida) do sistema dinâmico multivariado e suas estimativas superior (linha sólida azul) e inferior (linha sólida preta) para o sinal v_2 .



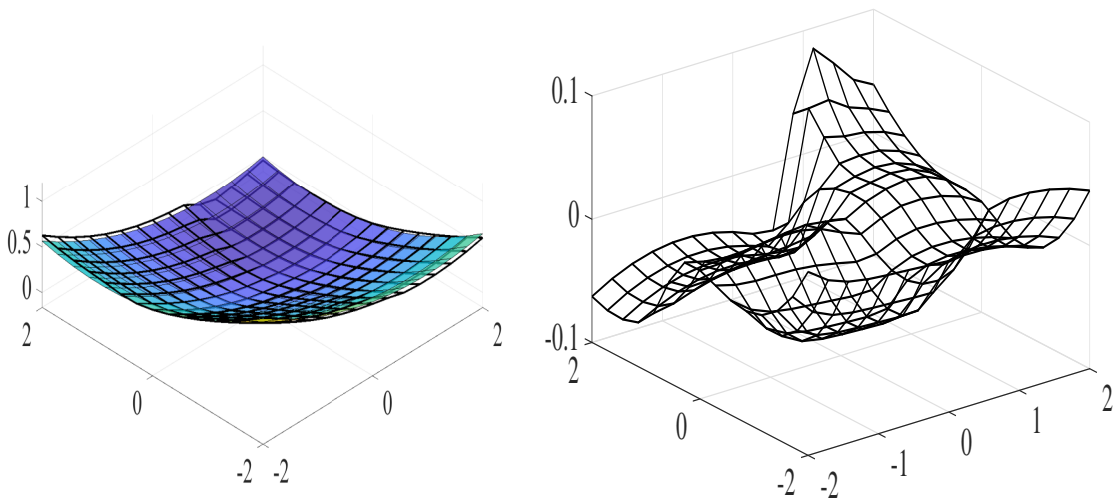
FONTE: Autor

Figura 49 – Não-linearidade estática complexa reais (superfícies coloridas) e estimadas (linha sólida preta) $v_1 = f(\mathbf{u}_k)$ do sistema dinâmico multivariável. Gráfico da esquerda: estimativa de não-linearidade estática complexa; gráfico da direita: erro na estimativa da não-linearidade estática complexa



Fonte: Autor

Figura 50 – Não-linearidade estática complexa reais (superfícies coloridas) e estimadas (linha sólida preta) $v_2 = f(\mathbf{u}_k)$ do sistema dinâmico multivariável. Gráfico da esquerda: estimativa de não-linearidade estática complexa; gráfico da direita: erro na estimativa da não-linearidade estática complexa



Fonte: Autor

4.1.3 sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo

O sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo é governado pelas seguintes equações:

$$\mathbf{v}_k = \begin{cases} v_{1,k} = \frac{1}{v_{1,k-1}^2 + 1} + \frac{1}{v_{3,k-1}^2 - 5} + u_{4,k}^3 \\ v_{2,k} = 0.1v_{2,k-1}v_{4,k-1} - 0.2u_{2,k} \\ v_{3,k} = 0.3v_{3,k-1} - 0.1v_{2,k-1} + u_{3,k}^3 - 0.01u_{4,k-1} \\ v_{4,k} = 0.3v_{4,k-1} + 0.2u_{1,k} - 0.3u_{4,k} \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} f_{1,k} & 0 & 0 & 0 \\ f_{2,k} & 8 & -1 & 0 \\ 1 & 20f_{1,k} & 0 & 1 \\ 0 & -12 & f_{2,k} & 2 \\ 1 & f_{2,k} & 0 & 4 \\ 0 & 8f_{1,k} & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \mathbf{v}_k \quad (4.21)$$

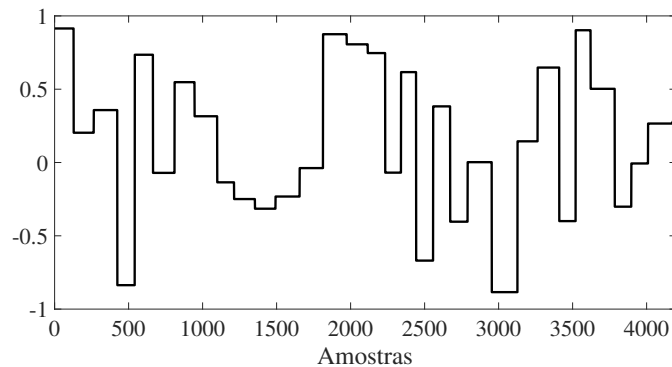
com

$$f_{1,k} = \begin{cases} 1 & \text{if } k \leq 1100 \\ \sin\left(\frac{2\pi k}{150}\right) & \text{if } 1100 < k \leq 2700 \\ -1 & \text{if } k > 2700 \end{cases} \quad (4.22)$$

$$f_{2,k} = \begin{cases} 0 & \text{if } k \leq 2700 \\ -1.5 & \text{if } k > 2700 \end{cases} \quad (4.23)$$

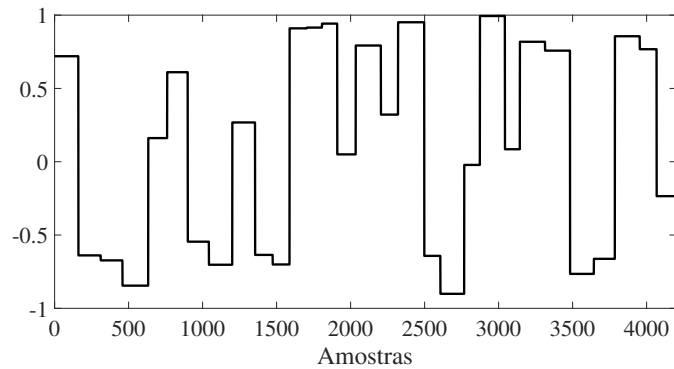
onde $u_{1,k}$, $u_{2,k}$, $u_{3,k}$ e $u_{4,k}$ são entradas, $\mathbf{v}_k = [v_{1,k} \ v_{2,k} \ v_{3,k} \ v_{4,k}]^T$ é o vetor de sinais intermediários, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ é o vetor de saídas, $f_{1,k}$ e $f_{2,k}$ são parâmetros variante no tempo. Foram obtidas 4200 amostras de entrada/saída, onde Os sinais de entrada são múltiplos degraus de magnitude aleatória com distribuição uniforme entre $[-1, 1]$ foram usados para as entradas $[u_{1,k} \ u_{2,k} \ u_{3,k}]$ e $u_{4,k} = \cos(2\pi k/250)$. O conjunto de dados de entrada/saída utilizado na simulação é ilustrado nas Figs.51 -60.

Figura 51 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para entrada u_1 .



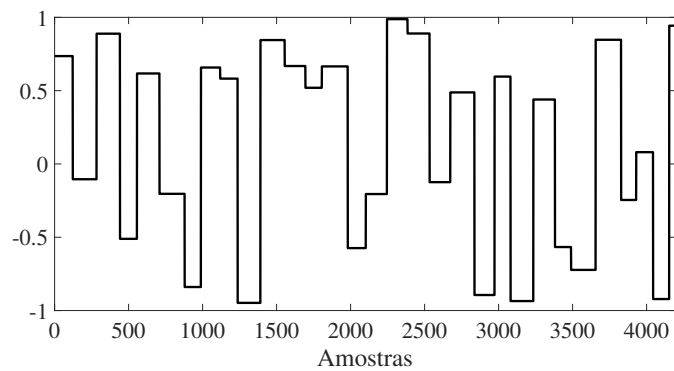
Fonte: Autor

Figura 52 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para entrada u_2 .



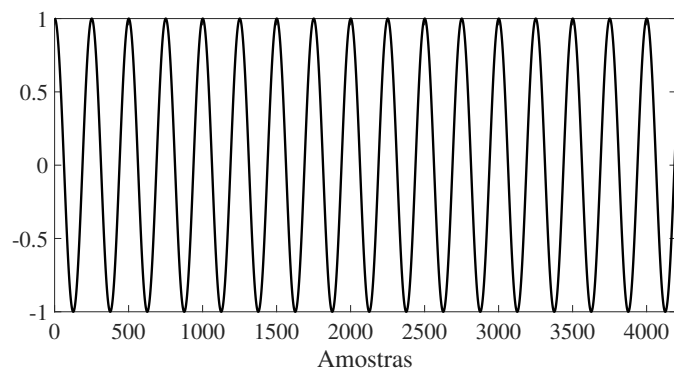
Fonte: Autor

Figura 53 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para entrada u_3 .



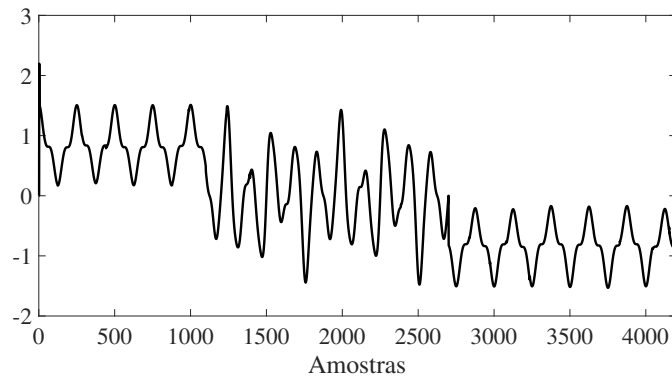
Fonte: Autor

Figura 54 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para entrada u_4 .



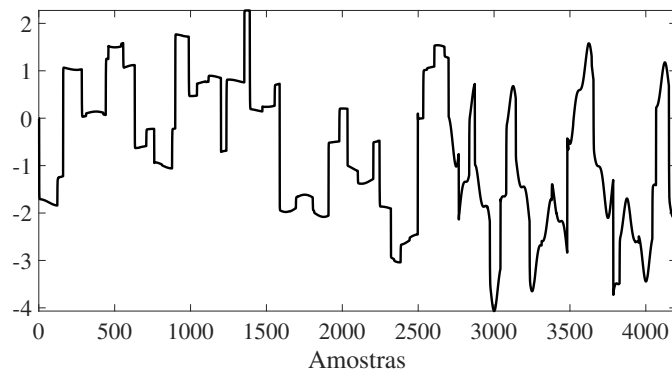
Fonte: Autor

Figura 55 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para saída y_1 .



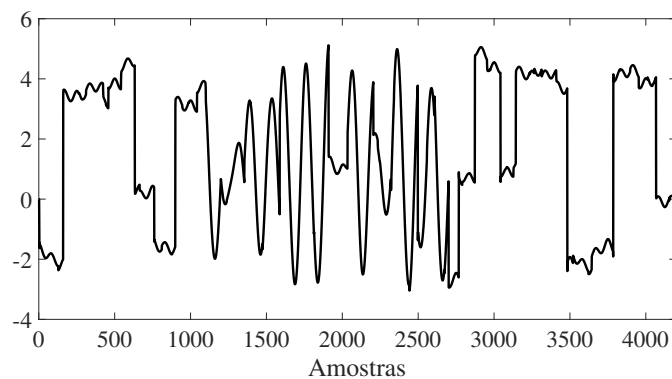
FONTE: Autor

Figura 56 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para saída y_2 .



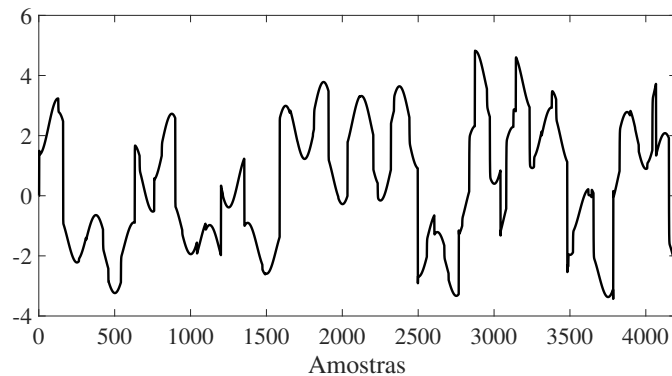
Fonte: Autor

Figura 57 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para saída y_3 .



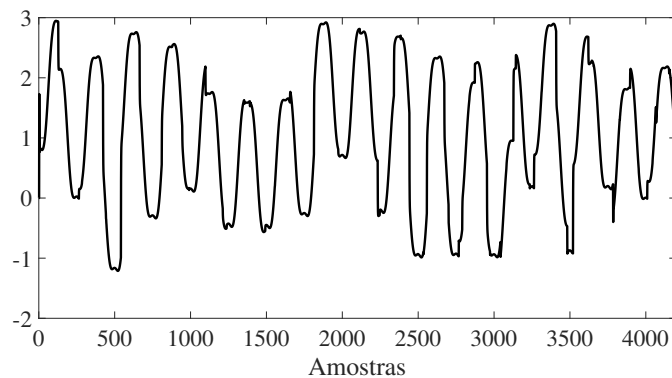
FONTE: Autor

Figura 58 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para saída y_4 .



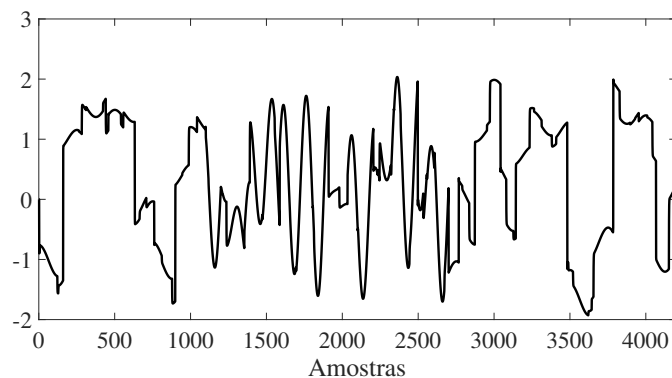
Fonte: Autor

Figura 59 – Conjunto de dados sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para saída y_5 .



FONTE: Autor

Figura 60 – Conjunto de dados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo para saída y_6 .



Fonte: Autor

De modo a representar o comportamento do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo, o sistema de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar no espaço de estados

apresenta a seguinte base de regra:

$$\text{Regra } i : \text{ SE } \mathbf{z}_k = [\mathbf{u}_{k-1}^T \ \mathbf{y}_{k-1}^T] \text{ é } \tilde{Z}^i \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i &= \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}^i u_k \\ y_k^i &= \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}^i u_k \end{cases} \quad (4.24)$$

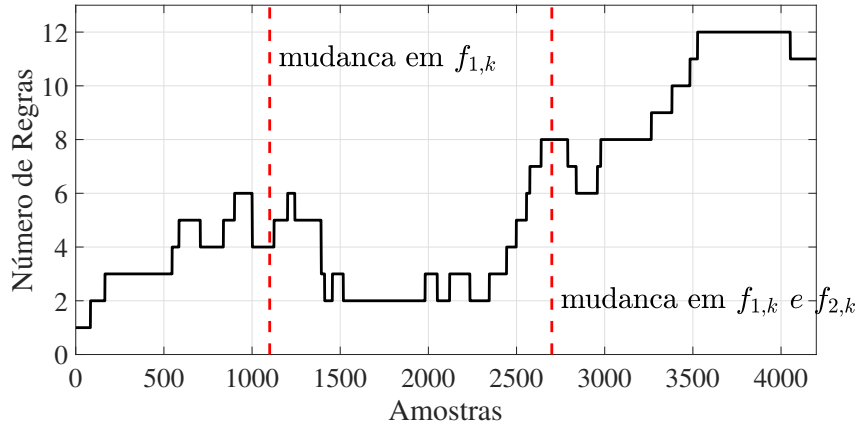
onde o centro de $\tilde{Z}^i$ é dado por $\mathbf{z}_k^{i*} = [u_1^{i*} \ u_2^{i*} \ u_3^{i*} \ u_4^{i*} \ y_1^{i*} \ y_2^{i*} \ y_3^{i*} \ y_4^{i*} \ y_5^{i*} \ y_6^{i*}]$.

Para a implementação do algoritmo proposto, se adotou a seguinte parametrização:

$m_\mu = 0.9$ (máximo valor da FPI); $\lambda = 0.05$ (probabilidade de sucesso); $\alpha = 4 \times 10^{-4}$ (taxa de aprendizagem do algoritmo agrupamento); $T_\rho = 0.21$ (limiar de compatibilidade); $w = 60$ (janela de tempo do algoritmo de agrupamento); $\sigma_1 = 0.21$ (constante para inicialização da matriz de dispersão); $\sigma_2 = 10^{-7}$ (constante para inicialização dos graus de incerteza); $\zeta = 3 \times 10^{-4}$ (taxa de aprendizado do FKE); $\beta_1 = 1$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros do redutor de tipo); $\beta_2 = 0.9999$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros de Markov); $\beta_3 = 0.998$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros do modelo no espaço de estados); $r_1 = 10^{-2}$ (constante para inicialização da matriz de covariância - redução de tipo para os estados); $r_2 = 10^{-2}$ (constante para inicialização da matriz de covariância - redução de tipo para as saídas); $r_3 = 30$ (constante para inicialização da matriz de covariância - FKE); $r_4 = 10^4$ (constante para inicialização da matriz de covariância - estimação dos parâmetros de Markov); $r_5 = 10^2$ (constante para inicialização da matriz de covariância - estimação do modelo no espaço de estados); $q_p = 14$ (deslocamento a esquerda no tempo discreto k); $q_f = 8$ (deslocamento a direita no tempo discreto k); $n = 6$ (ordem do sistema); $\mathbf{S} = [\mathbf{I}^{n \times n} \ \mathbf{0}^{n \times (q_p q_f - n)}]$; $\kappa = 0$ (constante para inicialização do primeiro modelo no espaço de estados).

A variação do número de regras, de acordo com a novo comportamento dado a cada amostra do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo, durante a identificação recursiva é ilustrada na Fig. 61. Na amostra 85 a segunda regra é criada; na amostra 177 a terceira regra é criada; na amostra 557 a quarta regra é criada; o número de regras é 5 na amostra 586; na amostra 707 dois agrupamentos são fundidos e o número de regras decai para 4; na amostra 838 o número de regras é 5; na amostra 901 número de regras é 6; o número de regras é 10 na amostra 223; dois agrupamentos são fundidos na amostra 365 e o número de regras decai para 13; o número de regras é 15 na amostra 409; entre as amostras 1000 e 1002, o número de regras decai de 6 para 4; na amostra 1100, a variável $f_1(k)$ é alterada e o número de regras aumenta de 4 para 5 na amostra 1125; entre as amostras 1241 e 1534, o número de regras decai de 6 para 2; na amostra 2700 o número de regras é 8 e a variável $f_1(k)$ e $f_2(k)$ são alteradas; entre as amostras 2790 e 2844, o número de regras decai de 8 para 6; na amostra 3551 o número de regras é de 12; no final da etapa de identificação recursiva, o modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar apresentou 11 regras.

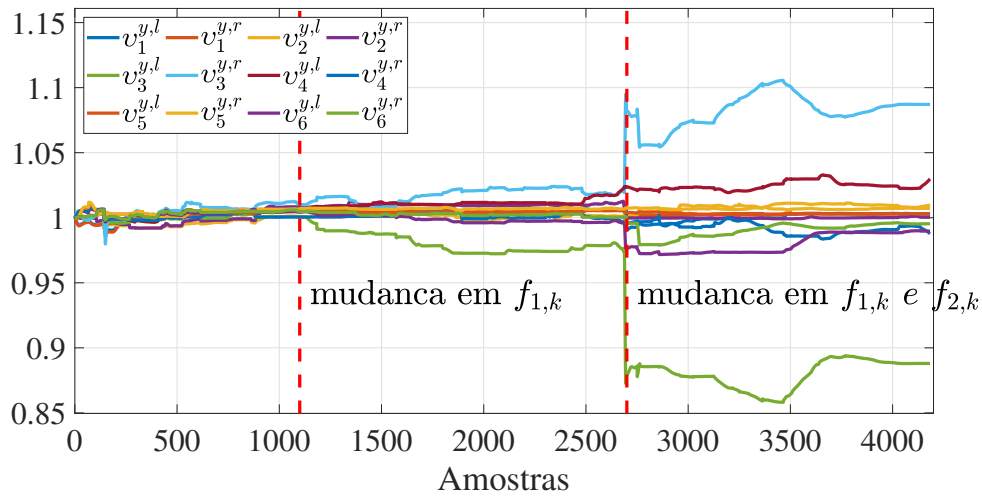
Figura 61 – Variação do número de regras no processo evolutivo do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para identificação recursiva do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre para o sistema dinâmico multivariado não linear variante no tempo.



Fonte: Autor

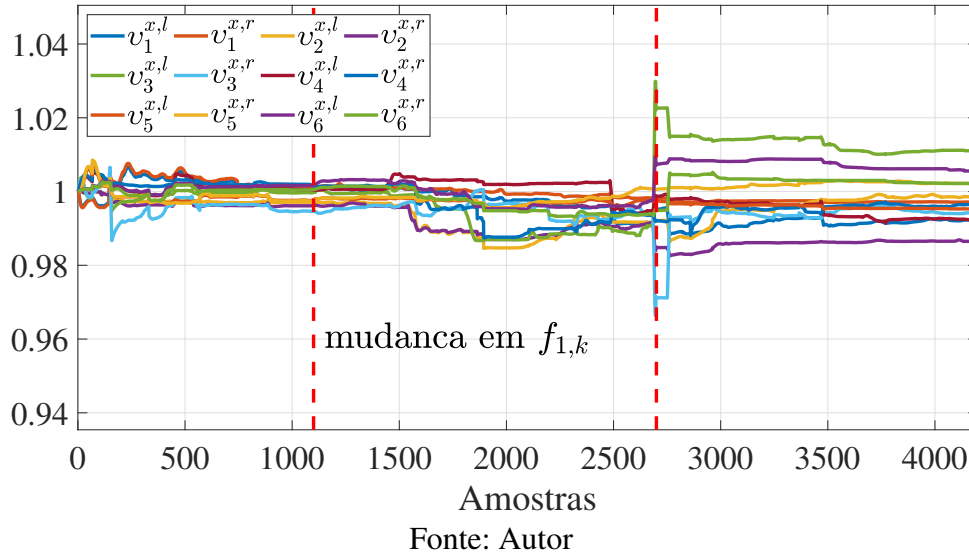
A estimação recursiva dos pesos $v_j^{x,l} | j=1,2$, $v_j^{x,r} | j=1,\dots,6$, $v_j^{y,l} | j=1,\dots,6$ e $v_j^{y,r} | j=1,2$, na camada de redução de tipo, é ilustrada nas Figs. 62–63. De acordo com a estimação dos pesos adaptativos, observa-se a eficiência do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para definir o comportamento do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo, através da soma ponderada dos limites inferior e superior das regiões de incerteza obtidas na camada IV (camada de composição das regras) nas Eqs. (3.8)–(3.11).

Figura 62 – Variação dos pesos adaptativos $v_j^{y,l} | j=1,\dots,6$ e $v_j^{y,r} | j=1,\dots,6$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com as regiões de incerteza, para a saída do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.



Fonte: Autor

Figura 63 – Variação dos pesos adaptativos $v_j^{x,l} | j=1,...,6$ e $v_j^{x,r} | j=1,...,6$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza para os estados do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.



Por questões de visualização e interpretabilidade, a estimação recursiva dos elementos da diagonal principal para algumas matrizes dinâmicas $\mathbf{A}^i | i=1,4,7,10$ na proposição do consequente do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar é ilustrada nas Figs. 64–67. Uma vez que o i -ésimo modelo linear no espaço de estados representa o comportamento linear do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo em um ponto de operação definido a cada nova amostra, respectivamente, conclui-se, a partir da metodologia proposta, a eficiência do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar, através da combinação linear evolutiva dos modelos no espaço de estados na camada do consequente, em modelar a não-linearidade e o comportamento variante no tempo inerente ao conjunto de dados, recursivamente.

Figura 64 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^2$ para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.

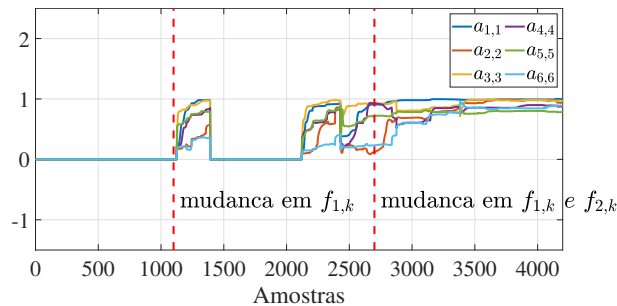
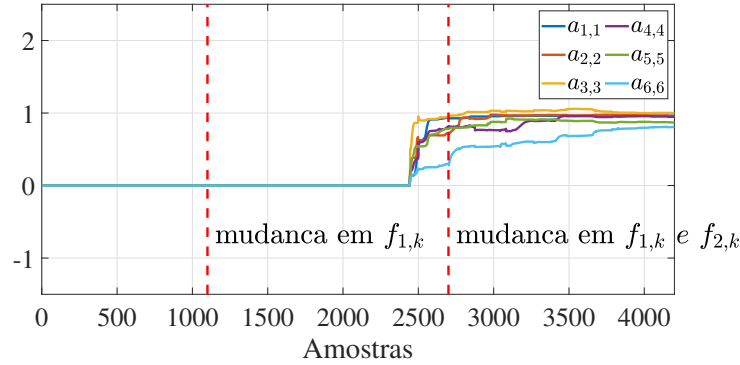
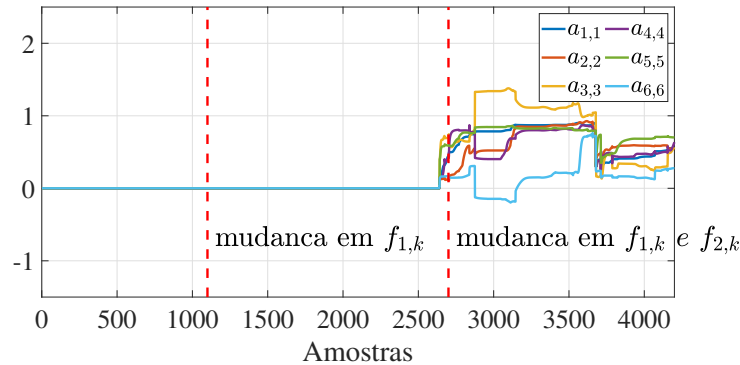


Figura 65 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^4$ para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.



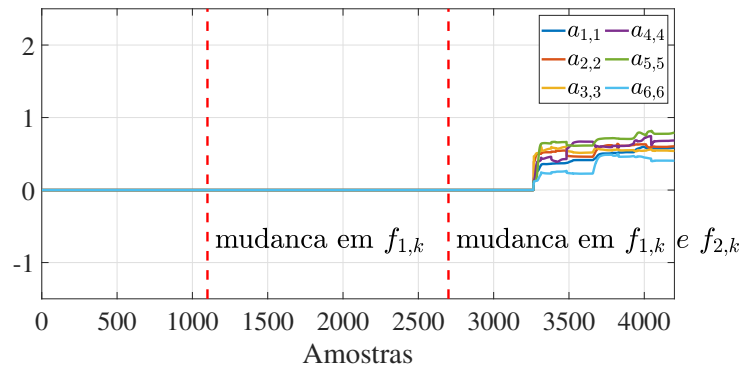
Fonte: Autor

Figura 66 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^6$ para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.



Fonte: Autor

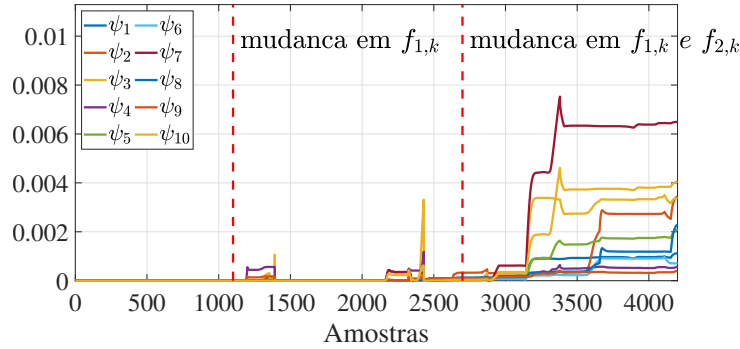
Figura 67 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^8$ para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.



Fonte: Autor

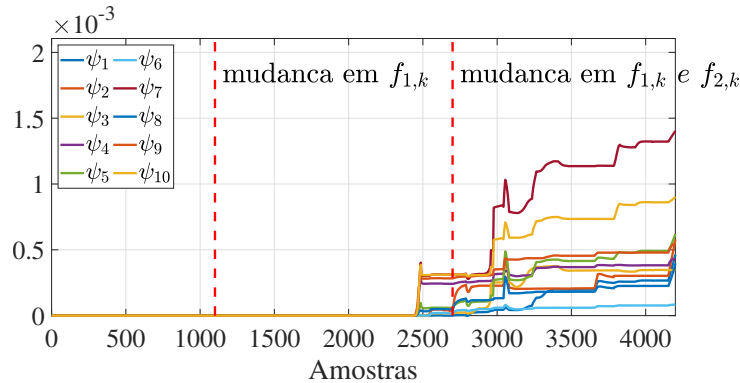
A estimação recursiva para alguns vetores $\psi^i | i=2,4,6,8$ que são usados para representar os graus de incertezas e calcular a RdI das funções de pertinências, são ilustradas na Figs. 68–71.

Figura 68 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^2 para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.



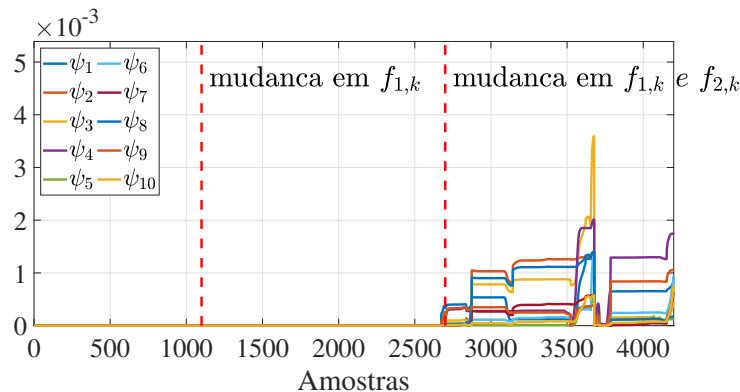
Fonte: Autor

Figura 69 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^4 para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.



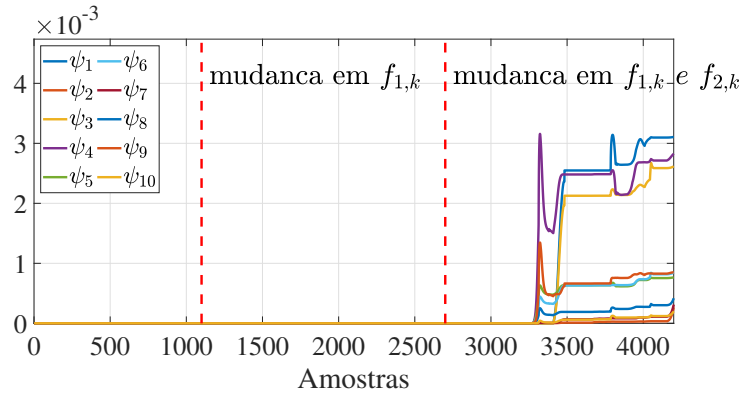
Fonte: Autor

Figura 70 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^6 para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.



Fonte: Autor

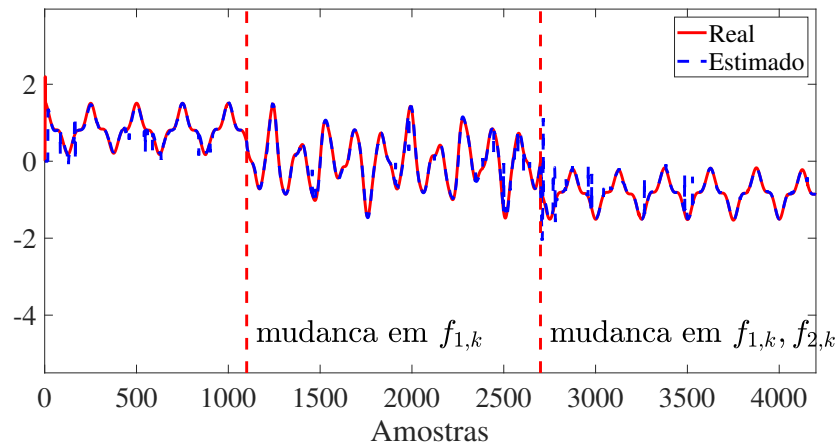
Figura 71 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^8 para identificação do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo. As linhas vermelhas verticais correspondem ao instante no qual uma mudança em $f_1(k)$ e $f_2(k)$ ocorre.



Fonte: Autor

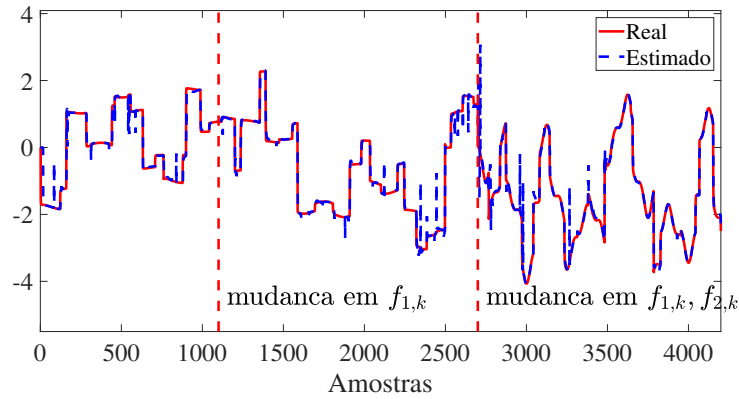
As respostas do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para rastrear as saídas do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo, na etapa de identificação recursiva, são ilustradas na Figs. 72–77. As performances da metodologia proposta, de acordo com os critérios RMSE, NDEI and R^2 , são apresentadas na Tab. 4, na qual são observadas as suas potencialidades em rastrear o comportamento variante no tempo de sistemas dinâmicos multivariável proposto como benchmark nesta dissertação.

Figura 72 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_1 do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo.



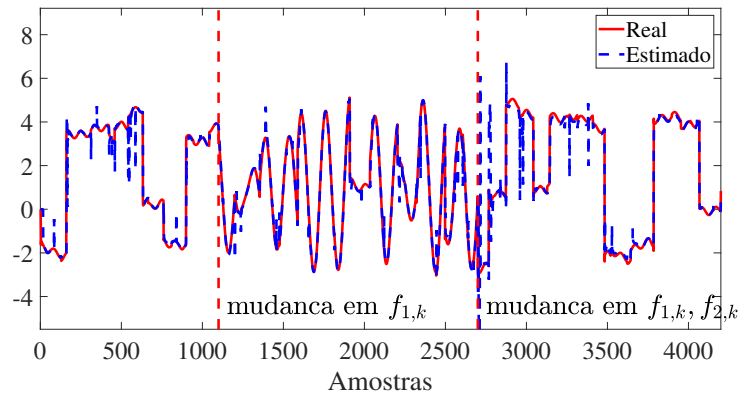
FORTE: Autor

Figura 73 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_2 do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo.



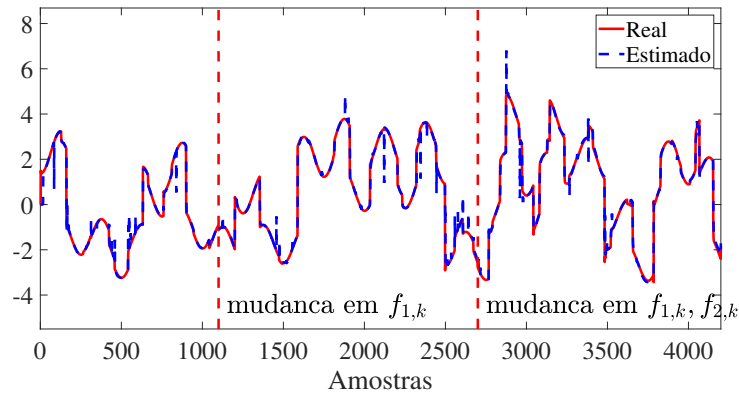
Fonte: Autor

Figura 74 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_3 do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo.



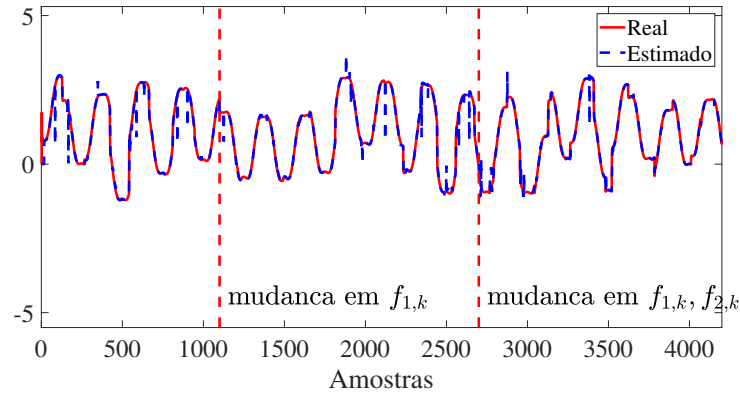
FONTE: Autor

Figura 75 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_4 do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo.



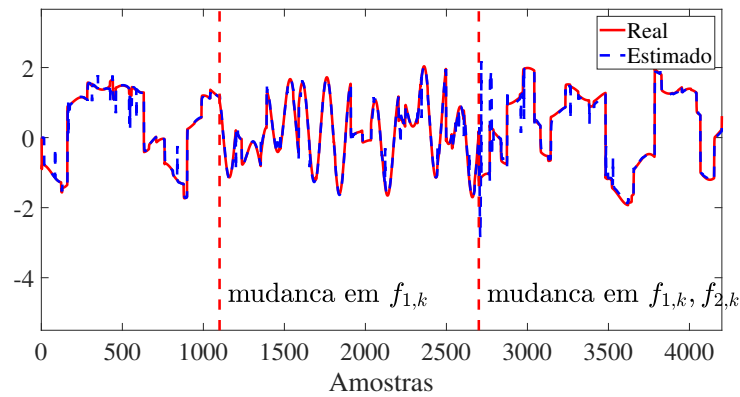
Fonte: Autor

Figura 76 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_5 do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo.



FONTE: Autor

Figura 77 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_6 do sistema dinâmico multivariável não-linear variante no tempo.



Fonte: Autor

Tabela 4 – Análise quantitativa da metodologia proposta, baseada nos critérios RMSE, NDEI e R^2

Critério	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
RMSE	0.1004	0.1799	0.4361	0.1972	0.1166	0.1672
NDEI	0.1242	0.1227	0.1788	0.0943	0.0996	0.1616
R^2	0.9846	0.9850	0.9685	0.9911	0.9902	0.9740

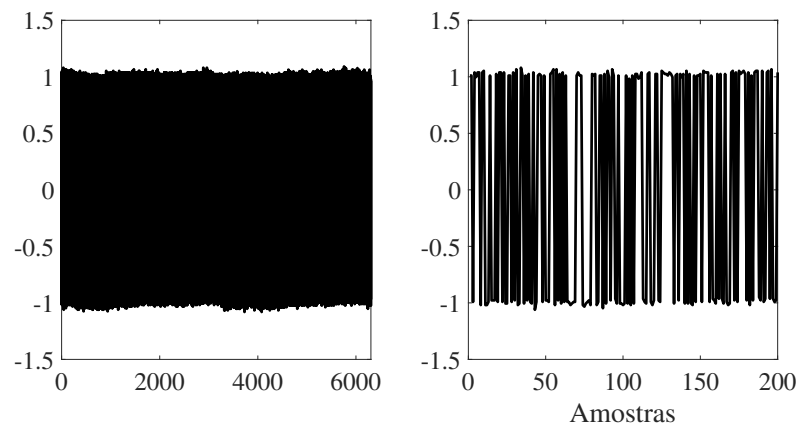
4.2 Resultados experimentais

4.2.1 Evaporador industrial de quatro estágios

O evaporador industrial de quatro estágios é um sistema dinâmico multivariável aplicado para reduzir o conteúdo líquido de um determinado insumo (ZHU et al., 1994; LUO; SONG,

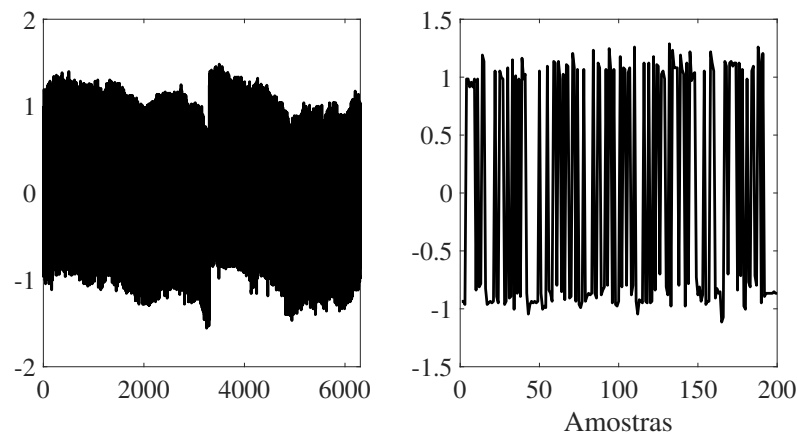
2014). Este sistema possui três entradas (o fluxo de alimentação do primeiro estágio do evaporador, o fluxo de vapor do primeiro estágio do evaporador e o fluxo da água de resfriamento) e três saídas (o conteúdo de matéria seca, o fluxo do produto a ser produzido e a temperatura do produto). O conjunto de dados experimentais utilizado consiste de 6305 amostras que estão disponíveis em *DaISy: Database for the Identification of Systems*¹. O conjunto de dados é ilustrado nas Figs. 78–83. De acordo com o processo de identificação adotado, apenas 5000 amostras são consideradas, onde as amostras $k = 1, 2, \dots, 2000$ foram utilizadas para o processo de treino e as amostras $k = 2001, 2002, \dots, 5000$ foram utilizadas para o etapa de identificação recursiva.

Figura 78 – Conjunto de dados do evaporador industrial para entrada u_1 , onde gráfico da esquerda mostra o conjunto total e o da direita, as 200 primeiras amostras



Fonte: Autor

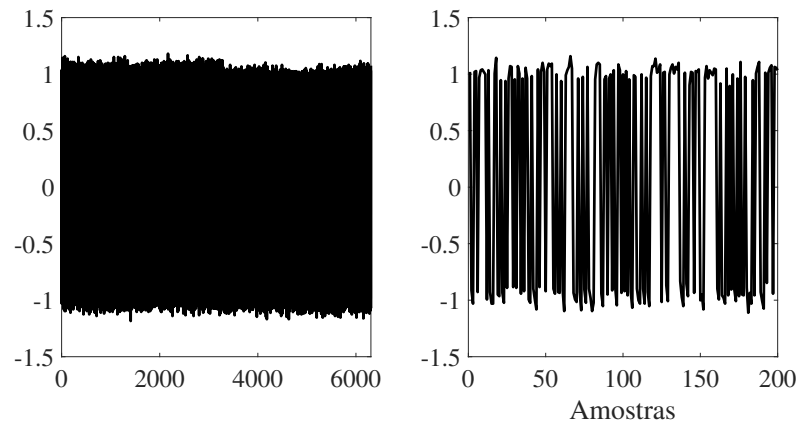
Figura 79 – Conjunto de dados do evaporador industrial para entrada u_2 , onde gráfico da esquerda mostra o conjunto total e o da direita, as 200 primeiras amostras



Fonte: Autor

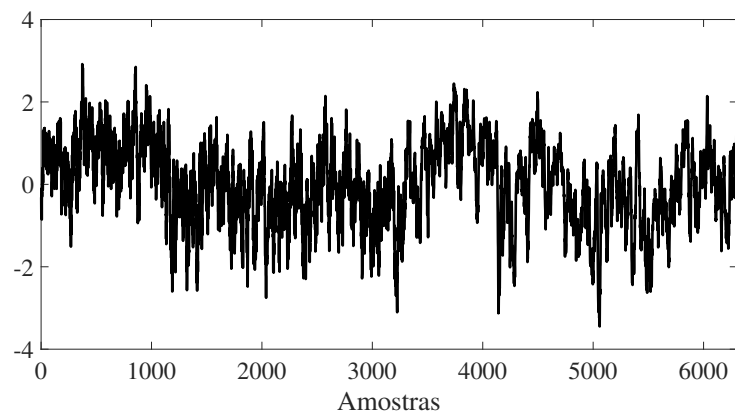
¹ ver <https://homes.esat.kuleuven.be/~tokka/daisydata.html>

Figura 80 – Conjunto de dados do evaporador industrial para entrada u_3 , onde gráfico da esquerda mostra o conjunto total e o da direita, a 200 primeiras amostras



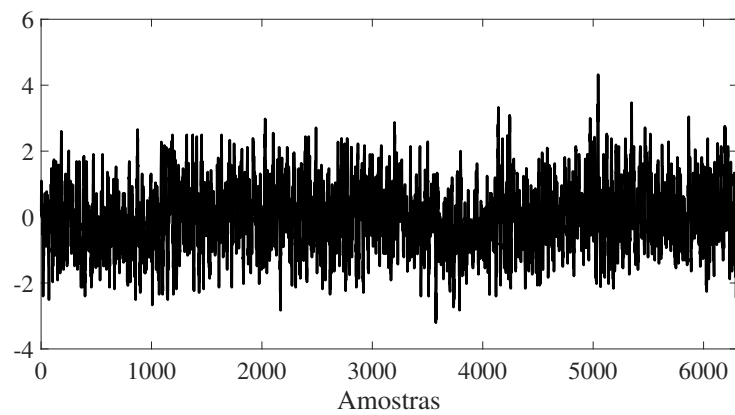
Fonte: Autor

Figura 81 – Conjunto de dados do evaporador industrial para saída y_1 .

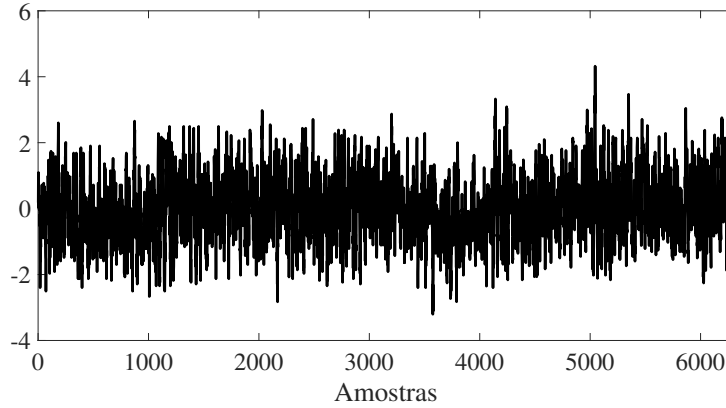


FONTE: Autor

Figura 82 – Conjunto de dados do evaporador industrial para saída y_2 .



Fonte: Autor

Figura 83 – Conjunto de dados do evaporador industrial para saída y_3 .

Fonte: Autor

De modo a representar o comportamento do evaporador industrial, o sistema de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar no espaço de estados apresenta a seguinte base de regra:

$$\text{Regra } i : \text{ SE } \mathbf{z}_k = [\mathbf{u}_{k-1}^T \ \mathbf{y}_{k-1}^T] \text{ é } \tilde{Z}^i \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}^i u_k \\ y_k^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}^i u_k \end{cases} \quad (4.25)$$

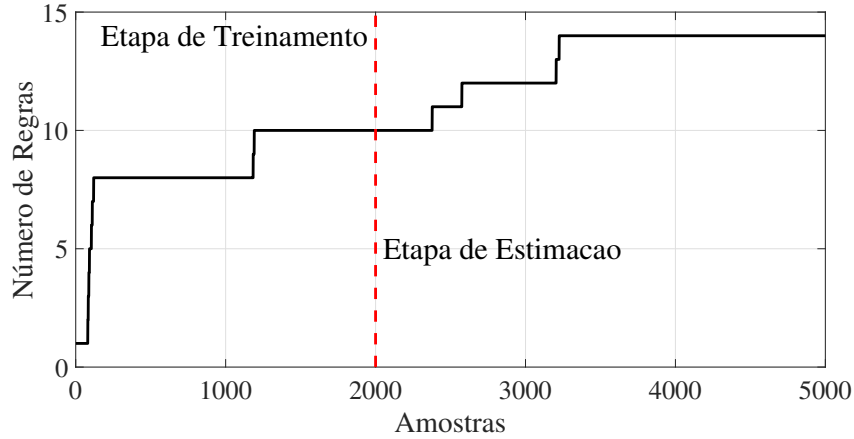
onde o centro de $\tilde{Z}^i$ é dado por $\mathbf{z}_k^{i*} = [u_1^{i*} \ u_2^{i*} \ u_3^{i*} \ y_1^{i*} \ y_2^{i*} \ y_3^{i*}]$.

Para a implementação do algoritmo proposto, se adotou a seguinte parametrização: $m_{\underline{\mu}} = 0.9$ (máximo valor da FPI); $\lambda = 0.05$ (probabilidade de sucesso); $\alpha = 2 \times 10^{-4}$ (taxa de aprendizagem do agrupamento); $T_\rho = 0.35$ (limiar de compatibilidade); $w = 60$ (janela de tempo do agrupamento); $\sigma_1 = 0.21$ (constante para inicialização da matriz de dispersão); $\sigma_2 = 10^{-7}$ (constante para inicialização dos graus de incerteza); $\zeta = 5 \times 10^{-4}$ (taxa de aprendizado do FKE); $\beta_1 = 1$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros do redutor de tipo); $\beta_2 = 0.9999$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros de Markov); $\beta_3 = 0.9999$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros do modelo no espaço de estados); $r_1 = 10^{-2}$ (constante para inicialização da matriz de covariância - redução de tipo para os estados); $r_2 = 10^{-2}$ (constante para inicialização da matriz de covariância - redução de tipo para as saídas); $r_3 = 30$ (constante para inicialização da matriz de covariância - FKE); $r_4 = 10^4$ (constante para inicialização da matriz de covariância - estimação dos parâmetros de Markov); $r_5 = 10^4$ (constante para inicialização da matriz de covariância - estimação do modelo no espaço de estados); $q_p = 15$ (deslocamento a esquerda no tempo discreto k); $q_f = 6$ (deslocamento a direita no tempo discreto k); $n = 6$ (ordem do sistema); $\mathbf{S} = [\mathbf{I}^{n \times n} \ \mathbf{0}^{n \times (q_p q_f - n)}]$; $\kappa = 0$ (constante para inicialização do primeiro modelo no espaço de estados).

A variação do número de regras, de acordo com o comportamento do evaporador industrial dada pelo fluxo de dados, é ilustrada na Fig. 84. Na amostra 81, a segunda regra é criada; na amostra 84, a terceira regra é criada; na amostra 88 a quarta regra é criada; na amostra 92 o número da regra é 5; na amostra 120 o número da regra é 8; o número de regra é de 10 na amostra 1191; na etapa de estimativa recursiva, o número de regras aumenta para 11 na amostra

2378; na amostra 2576 o número da regra é 12; no final do processo evolutivo, o sistema de inferência neuro-fuzzy tipo-2 tem regras de 14.

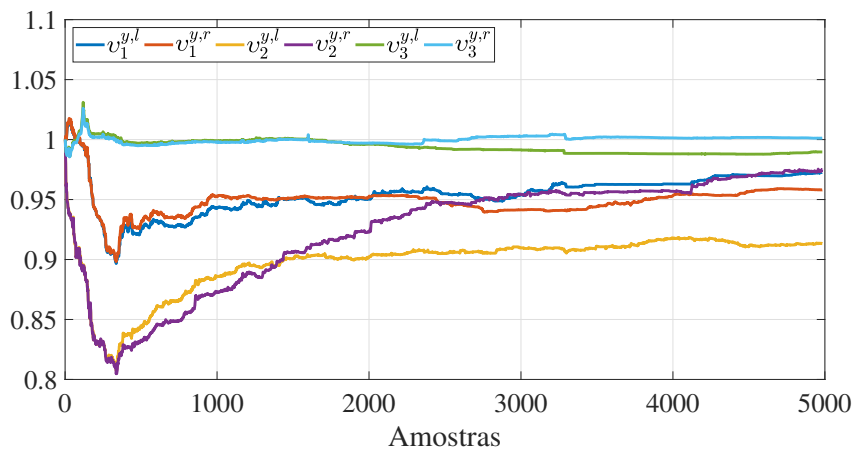
Figura 84 – Variação do número de regras no processo evolutivo do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para identificação recursiva do evaporador industrial. A linha vermelha define o final da etapa de treinamento e o início da etapa de identificação recursiva.



Fonte: Autor

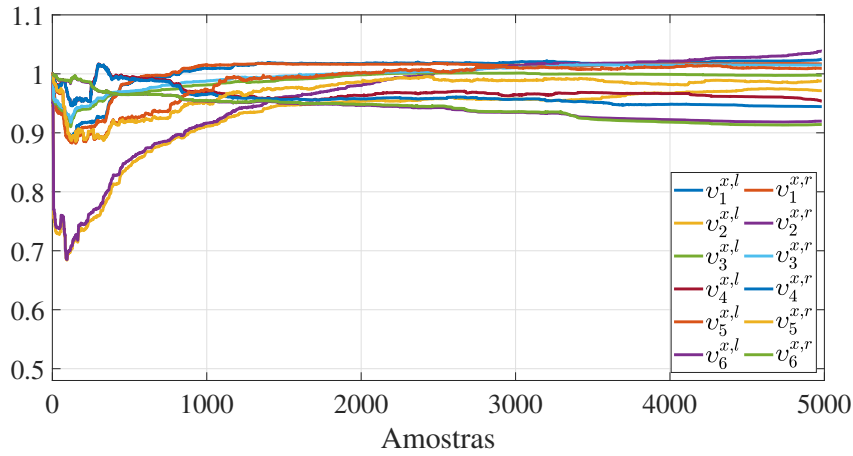
A estimação recursiva dos pesos $v_j^{x,l} | j=1,...,6$, $v_j^{x,r} | j=1,...,6$, $v_j^{y,l} | j=1,...,3$ e $v_j^{y,r} | j=1,...,3$, na camada de redução de tipo, é ilustrada nas Figs. 85–86. De acordo com a estimação dos pesos adaptativos, observa-se a eficiência do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para definir o comportamento do evaporador industrial, através da soma ponderada dos limites inferior e superior das regiões de incerteza obtidas na camada *IV* (camada de composição das regras) nas Eqs. (3.8)–(3.11).

Figura 85 – Variação dos pesos adaptativos $v_j^{y,l} | j=1,...,3$ e $v_j^{y,r} | j=1,...,3$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com as regiões de incerteza, para a saída do evaporador industrial.



Fonte: Autor

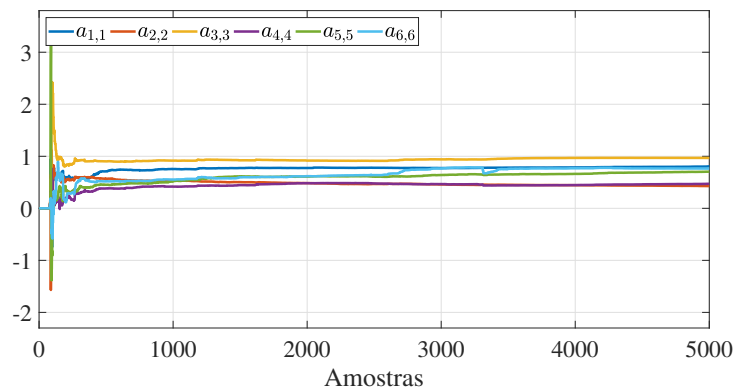
Figura 86 – Variação dos pesos adaptativos $v_j^{x,l} | j=1,\dots,6$ e $v_j^{x,r} | j=1,\dots,6$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza para os estados do evaporador industrial.



Fonte: Autor

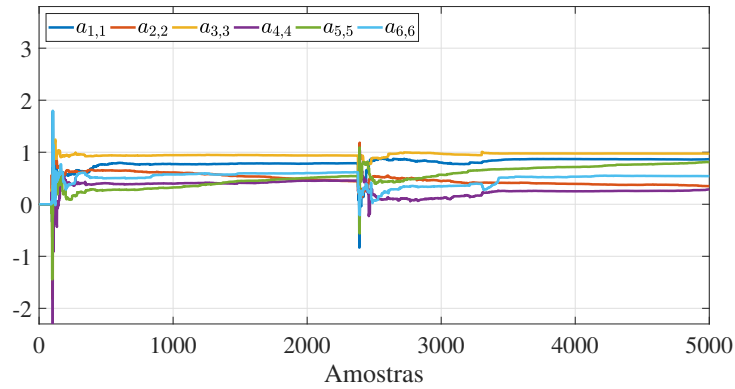
Por questões de visualização e interpretabilidade, a estimação recursiva dos elementos da diagonal principal para algumas matrizes dinâmicas $\mathbf{A}^i | i=2,5,8,11$ na proposição do consequente do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar é ilustrada nas Figs. 87–90. Uma vez que o i -ésimo modelo linear no espaço de estados representa o comportamento linear do evaporador industrial em um ponto de operação definido a cada nova amostra, respectivamente, conclui-se, a partir da metodologia proposta, a eficiência do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar, através da combinação linear evolutiva dos modelos no espaço de estados na camada do consequente, em modelar a não-linearidade inerente ao conjunto de dados, recursivamente.

Figura 87 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^2$ para identificação do evaporador industrial.



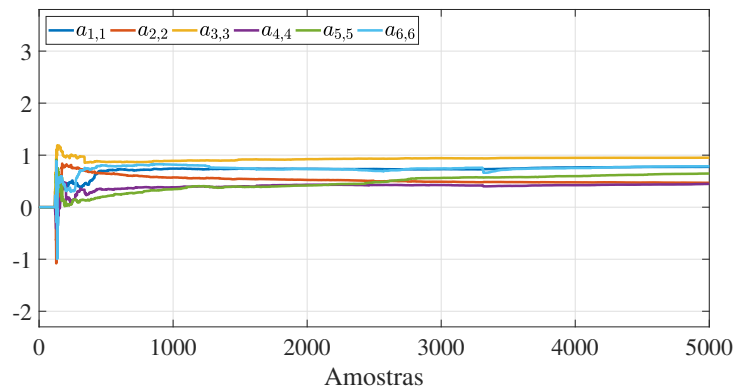
Fonte: Autor

Figura 88 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^5$ para identificação do evaporador industrial.



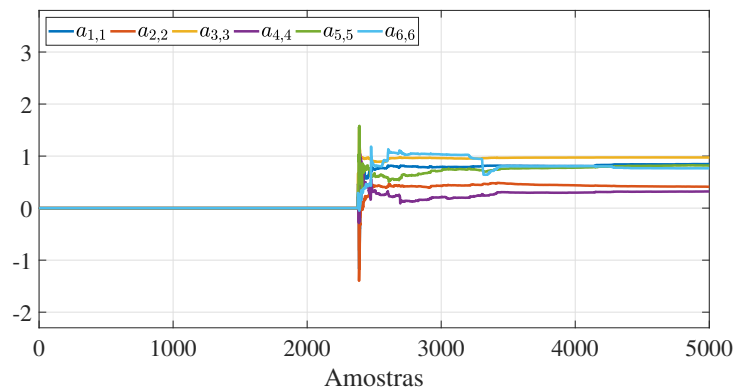
Fonte: Autor

Figura 89 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^8$ para identificação do evaporador industrial.



Fonte: Autor

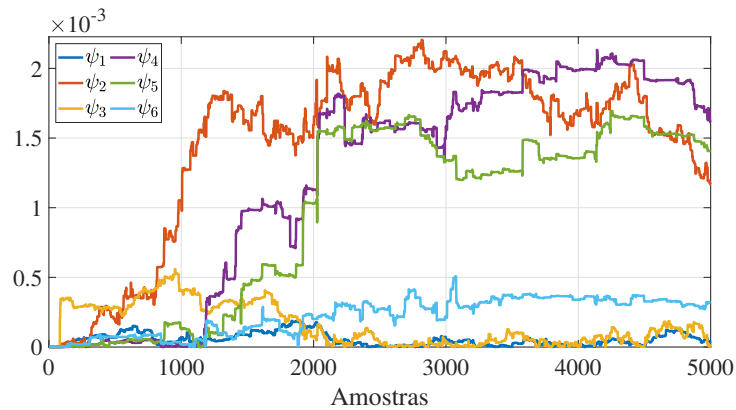
Figura 90 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^{11}$ para identificação do evaporador industrial.



Fonte: Autor

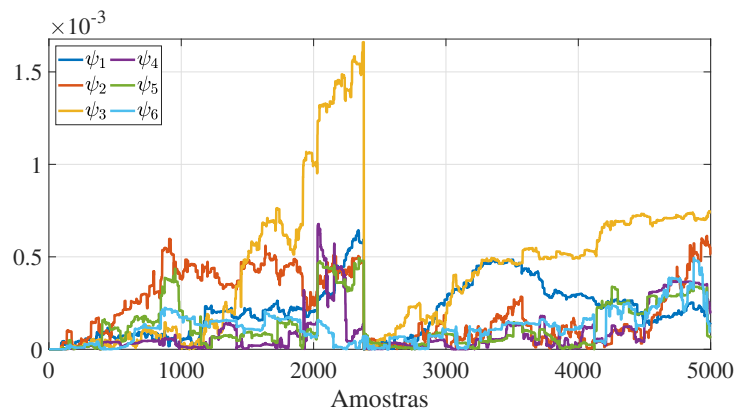
A estimação recursiva para alguns vetores $\psi^i | i=2,5,8,11$ que são usados para representar os graus de incertezas e calcular a RdI das funções de pertinências, é ilustrada na Figs. 91–94.

Figura 91 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^2 para identificação do evaporador industrial.



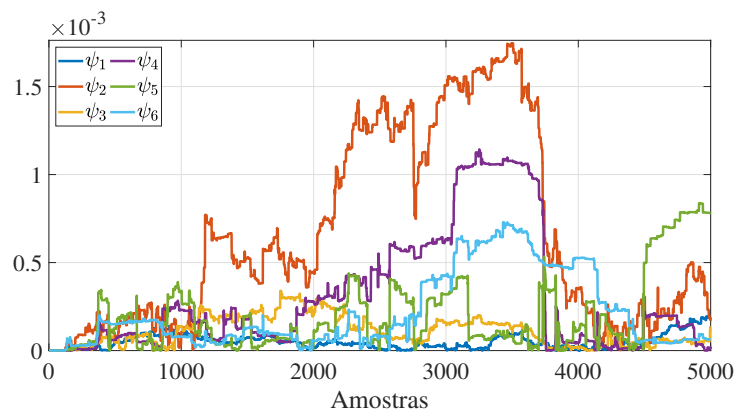
Fonte: Autor

Figura 92 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^5 para identificação do evaporador industrial.



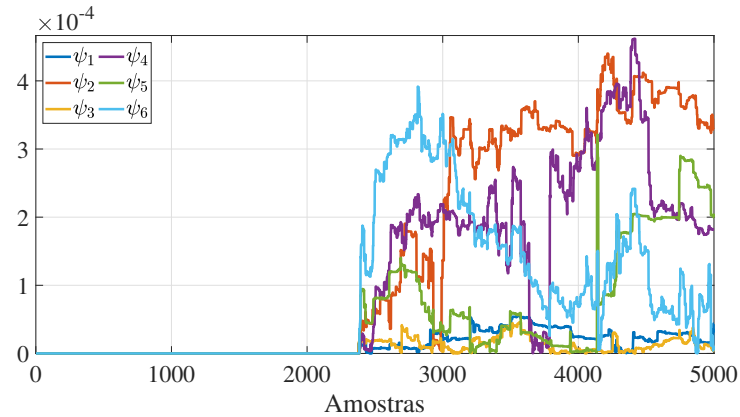
Fonte: Autor

Figura 93 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^8 para identificação do evaporador industrial.



Fonte: Autor

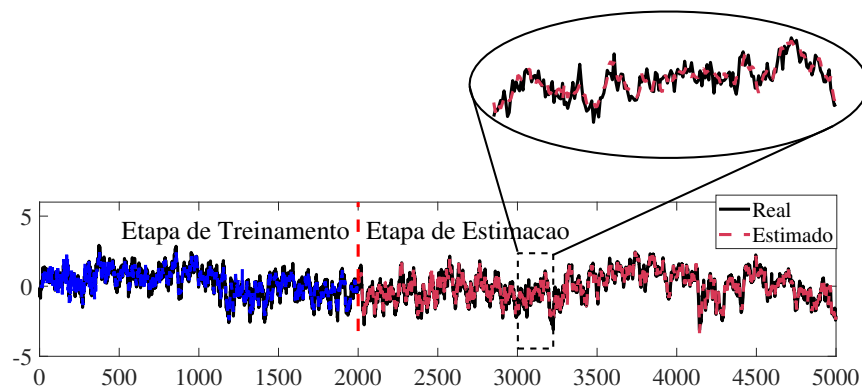
Figura 94 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^{11} para identificação do evaporador industrial.



Fonte: Autor

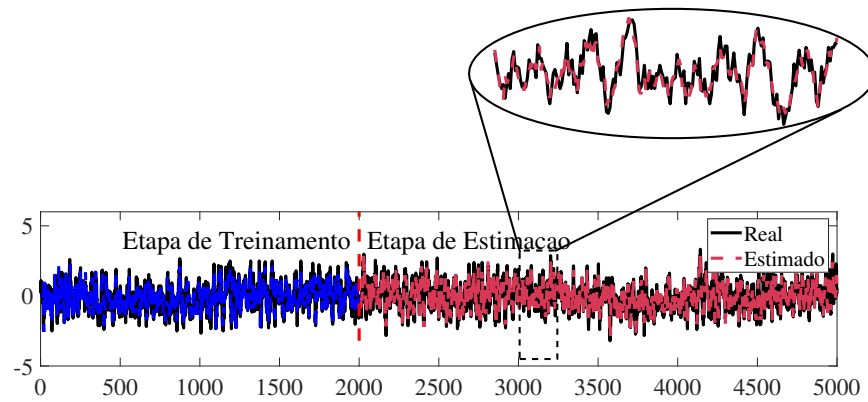
As respostas do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para rastrear as saídas do evaporador industrial, na etapa de identificação recursiva, são ilustradas na Figs. 95–97. A análise comparativa com algumas metodologias proeminentes como RBF-NARX e LSSVM-NARX apresentadas em Dong (2019), é mostrada na Tab. 5, na qual se observa um desempenho competitivo da metodologia proposta.

Figura 95 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_1 do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.



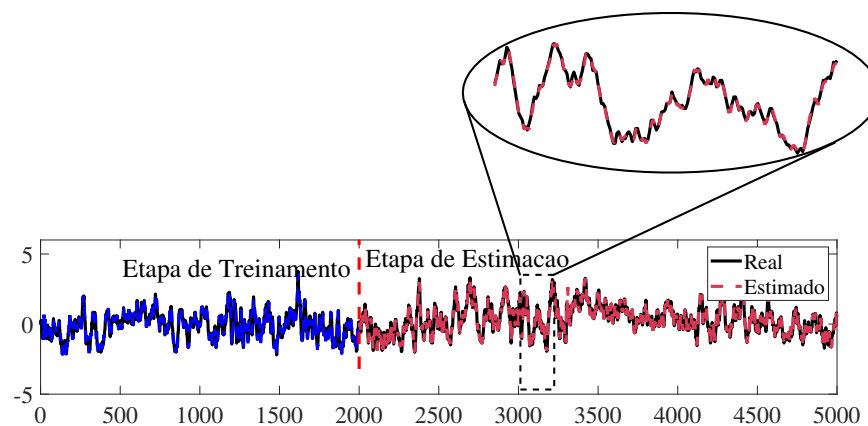
FONTE: Autor

Figura 96 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_2 do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.



Fonte: Autor

Figura 97 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída y_2 do sistema dinâmico multivariável com não-linearidade complexa.



Fonte: Autor

Tabela 5 – Análise comparativa da metodologia proposta com algumas metodologias proeminentes citadas na literatura, baseadas no critério de RMSE (melhores valores em negrito)

	Saída	RBF-NARX	LSSVM-NARX	Proposta
RMSE	y_1	0.245	0.246	0.254
	y_2	0.399	0.409	0.373
	y_3	0.138	0.102	0.092

4.2.2 Helicóptero com dois graus de liberdade

O helicóptero com dois graus de liberdade (2DOF), mostrado na Fig.98, é um sistema multivariável complexo e não-linear que possui alguns parâmetros inacessíveis (SUBRAMA-

NIAN; ELUMALAI, 2016; ZDEŠAR; DOVŽAN; ŠKRJANC, 2014). O helicóptero 2DOF possui duas variáveis de entrada: tensão aplicado no rotor principal u_ϕ e a tensão aplicado no motor da calda u_θ ; e duas saídas: ângulo de azimute ϕ e o ângulo de elevação θ .

Figura 98 – Imagem do helicóptero 2DOF.

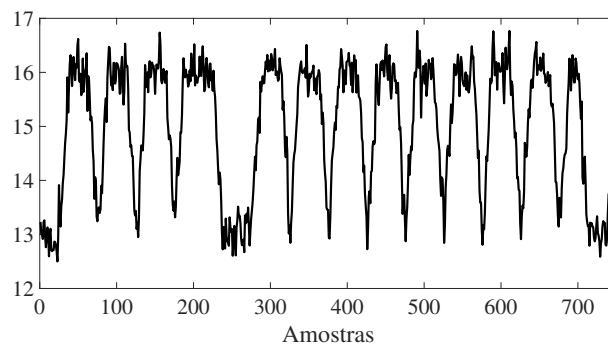


Fonte: Autor

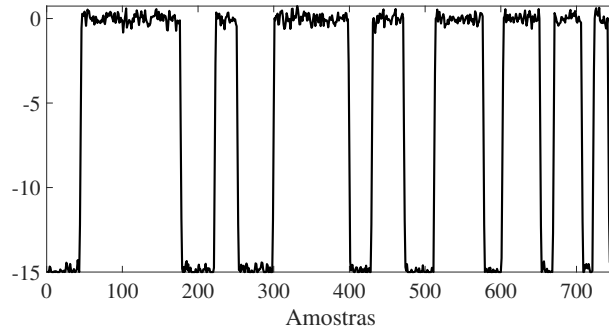
4.2.2.1 Estimação recursiva sem ruído de medição

Para este experimento, 750 amostras de entradas/saídas foram usadas para identificação recursiva do helicóptero 2DOF, onde os dados experimentais obtidos são ilustrados nas Figs. 99–102.

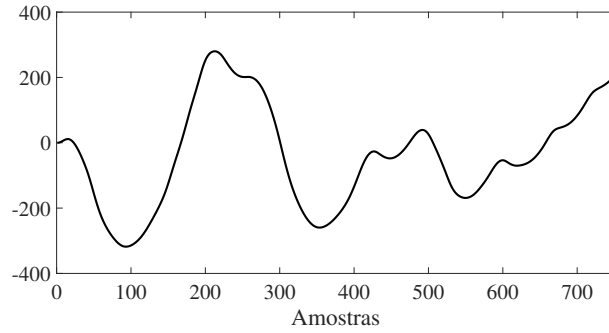
Figura 99 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para entrada u_θ .



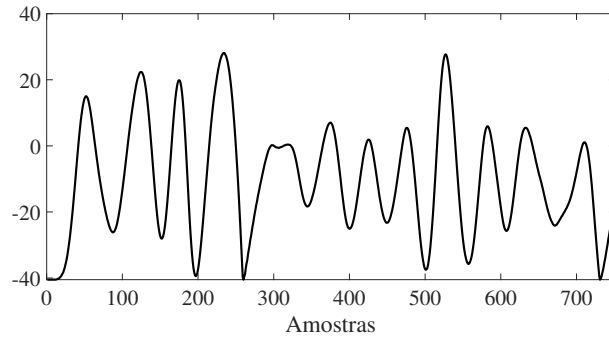
Fonte: Autor

Figura 100 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para entrada u_ϕ .

Fonte: Autor

Figura 101 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para saída ϕ .

FONTE: Autor

Figura 102 – Conjunto de dados do helicóptero 2DOF para saída θ .

Fonte: Autor

De modo a representar o comportamento do helicóptero 2DOF, o sistema de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar no espaço de estados apresenta a seguinte base de regra:

$$\text{Regra } i : \text{ SE } \mathbf{z}_k = [\mathbf{u}_{k-1}^T \mathbf{y}_{k-1}^T] \text{ é } \tilde{Z}^i \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}^i u_k \\ y_k^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}^i u_k \end{cases} \quad (4.26)$$

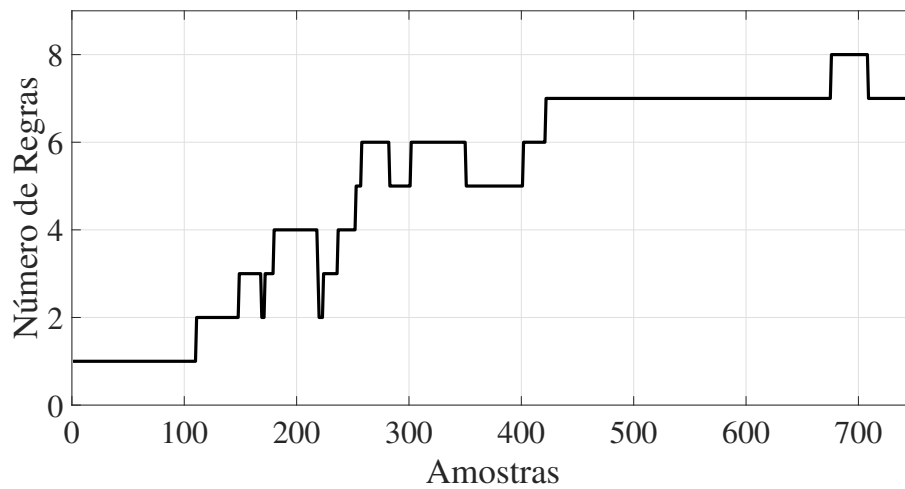
onde o centro de $\tilde{Z}^i$ é dado por $\mathbf{z}_k^{i*} = [u_\phi^{i*} u_\theta^{i*} \phi^{i*} \theta^{i*}]$, $\mathbf{y}_{k-1}^i = [\phi_{k-1}^i \theta_{k-1}^i]$ e $\mathbf{u}_{k-1} = [u_{\phi,k-1} u_{\theta,k-1}]$.

Para a implementação do algoritmo proposto, se adotou a seguinte parametrização: $m_\mu = 0.95$ (máximo valor da FPI); $\lambda = 0.01$ (probabilidade de sucesso); $\alpha = 10^{-3}$ (taxa

de aprendizagem do agrupamento); $T_p = 0.55$ (limiar de compatibilidade); $w = 110$ (janela de tempo do agrupamento); $\sigma_1 = 0.23$ (constante para inicialização da matriz de dispersão); $\sigma_2 = 10^{-5}$ (constante para inicialização dos graus de incerteza); $\zeta = 2 \times 10^{-3}$ (taxa de aprendizado do FKE); $\beta_1 = 1$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros do redutor de tipo); $\beta_2 = 0.9999$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros de Markov); $\beta_3 = 0.9999$ (fator de esquecimento - estimação dos parâmetros do modelo no espaço de estados); $r_1 = 10^{-2}$ (constante para inicialização da matriz de covariância - redução de tipo para os estados); $r_2 = 10^{-2}$ (constante para inicialização da matriz de covariância - redução de tipo para as saídas); $r_3 = 20$ (constante para inicialização da matriz de covariância - FKE); $r_4 = 10^3$ (constante para inicialização da matriz de covariância - estimação dos parâmetros de Markov); $r_5 = 10^4$ (constante para inicialização da matriz de covariância - estimação do modelo no espaço de estados); $q_p = 16$ (deslocamento a esquerda no tempo discreto k); $q_f = 7$ (deslocamento a direita no tempo discreto ks); $n = 4$ (ordem do sistema); $\mathbf{S} = [\mathbf{I}^{n \times n} \mathbf{0}^{n \times (q_p q_f - n)}]$; $\kappa = 0$ (constante para inicialização do primeiro modelo no espaço de estados).

A variação do número de regras, de acordo com o comportamento do helicóptero 2DOF dada pelo fluxo de dados, é ilustrada na Fig. 103. Na amostra 111 a segunda regra é criada; na amostra 149 a terceira regra é criada; na amostra 169, dois agrupamentos são mesclados e o número de regras é de 2; no exemplo 180 a quarta regra é criada; na amostra 2019, dois agrupamentos são mesclados e o número de regras é de 3; o número de regra é de 5 na amostra 253; o número de regra é de 6 na amostra 258; o número de regra é de 7 na amostra 422; na amostra 678 o número de regras é de 8; no final do processo evolutivo, o sistema de inferência neural-fuzzy tipo-2 tem regras de 8.

Figura 103 – Variação do número de regras no processo evolutivo do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para identificação recursiva do helicóptero 2DOF.



Fonte: Autor

A estimação recursiva dos pesos $v_j^{x,l} | j=1,\dots,4$, $v_j^{x,r} | j=1,\dots,4$, $v_j^{y,l} | j=1,2$ e $v_j^{y,r} | j=1,2$, na camada de redução de tipo, é ilustrada nas Figs. 104–105. De acordo com a estimação dos pesos

adaptativos, observa-se a eficiência do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para definir o comportamento do helicóptero 2DOF, através da soma ponderada dos limites inferior e superior das regiões de incerteza obtidas na camada *IV* (camada de composição das regras) nas Eqs. (3.8)–(3.11).

Figura 104 – Variação dos pesos adaptativos $v_j^{y,l}|_{j=1,2}$ e $v_j^{y,r}|_{j=1,2}$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza, para a saída do helicóptero 2DOF.

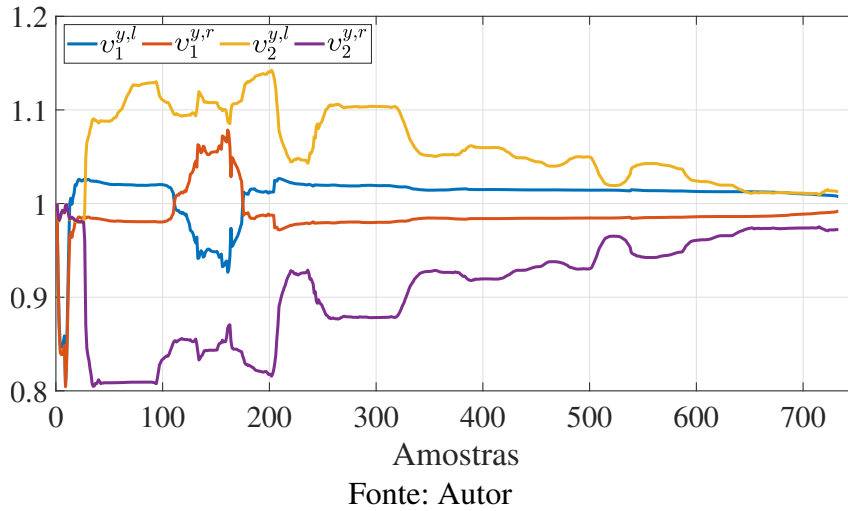
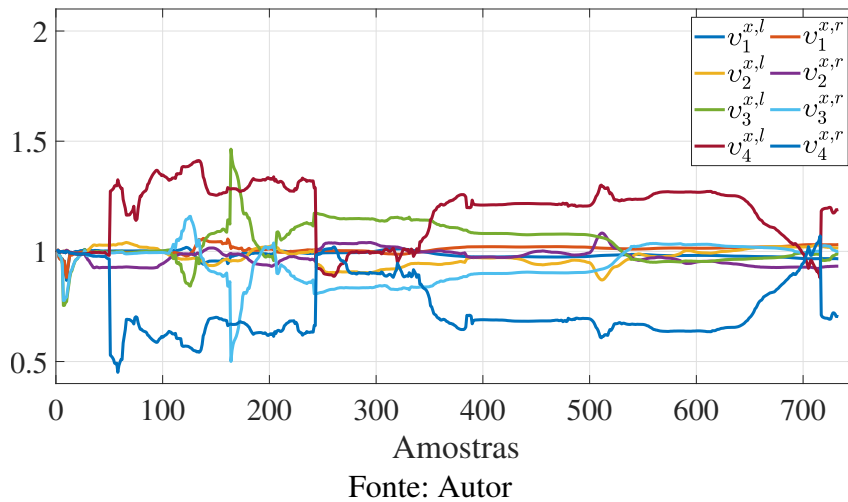


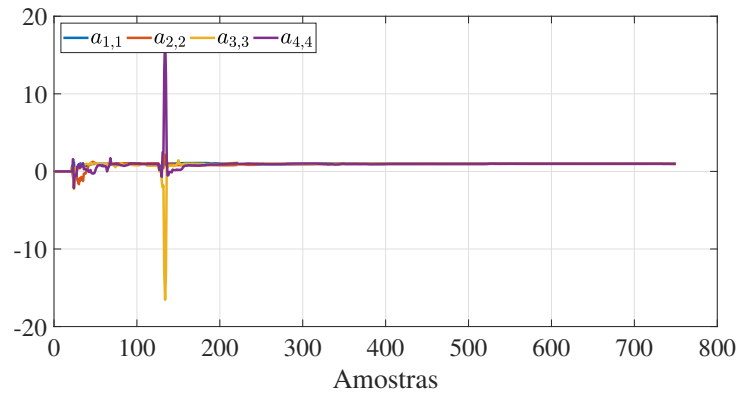
Figura 105 – Variação dos pesos adaptativos $v_j^{x,l}|_{j=1,\dots,4}$ e $v_j^{x,r}|_{j=1,\dots,4}$, na camada de redução de tipo, usados na soma ponderada dos limites inferior e superior, de acordo com a regiões de incerteza para os estados do helicóptero 2DOF.



Por questões de visualização e interpretabilidade, a estimação recursiva dos elementos da diagonal principal para algumas matrizes dinâmicas $\mathbf{A}^i|_{i=1,3,5,7}$ na proposição do consequente do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar é ilustrada nas Figs. 106–109. Uma vez que o i -ésimo modelo linear no espaço de estados representa o comportamento linear do helicóptero 2DOF em um ponto de operação definido a cada nova amostra, respectivamente, conclui-se, a partir da metodologia proposta, a eficiência do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar, através da

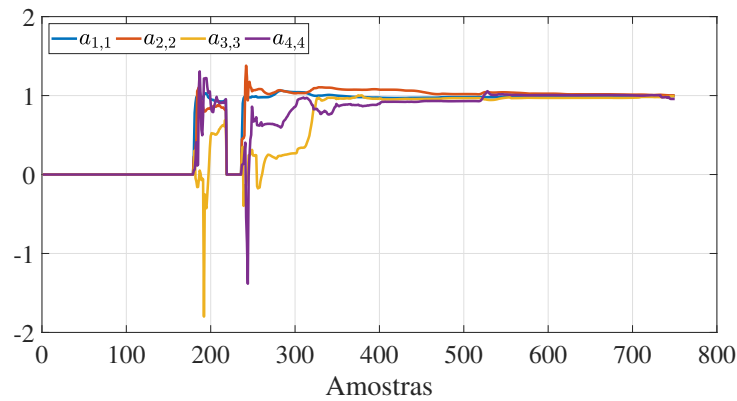
combinação linear evolutiva dos modelos no espaço de estados na camada do consequente, em modelar a não-linearidade inerente ao conjunto de dados, recursivamente.

Figura 106 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^1$ para identificação do helicóptero 2DOF.



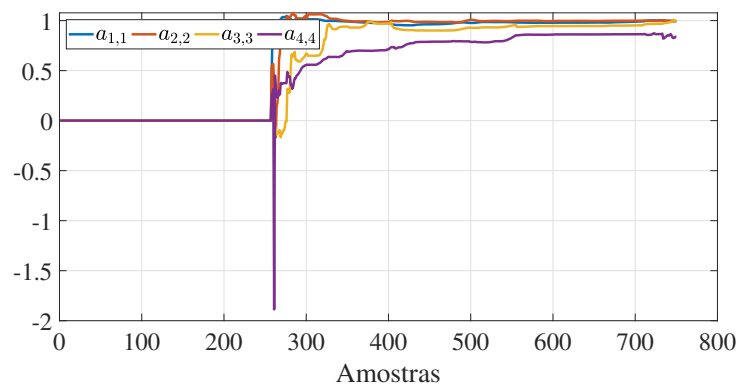
Fonte: Autor

Figura 107 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^3$ para identificação do helicóptero 2DOF.



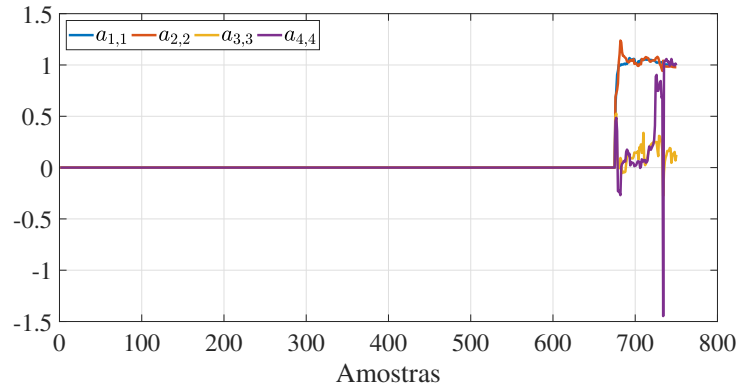
Fonte: Autor

Figura 108 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^5$ para identificação do helicóptero 2DOF.



Fonte: Autor

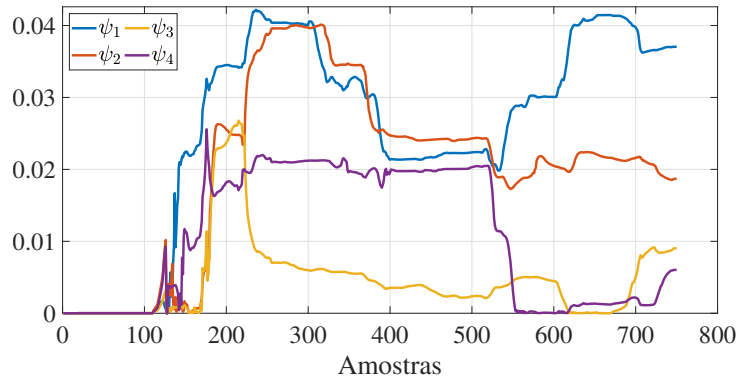
Figura 109 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^7$ para identificação do helicóptero 2DOF.



Fonte: Autor

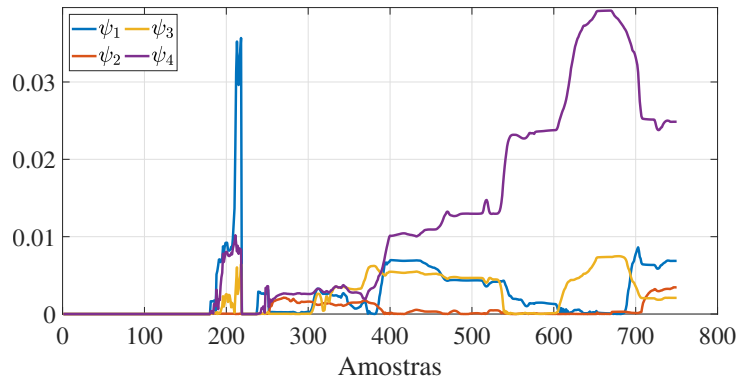
A estimação recursiva para alguns vetores $\psi^i | i=1,3,5,7$ que são usados para representar os graus de incertezas e calcular a RdI das funções de pertinências, é ilustrada na Figs. 110–113.

Figura 110 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^1 para identificação do helicóptero 2DOF.



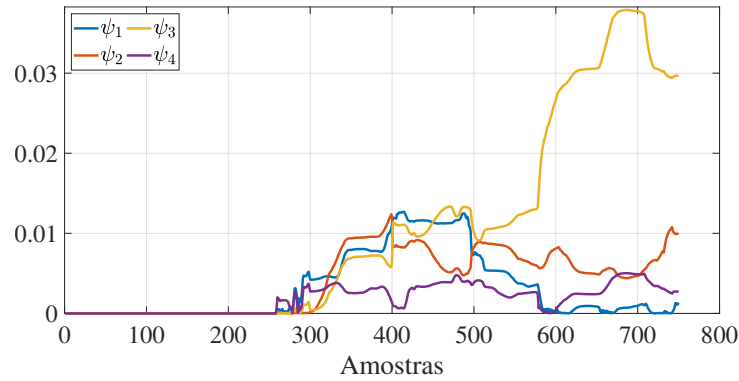
Fonte: Autor

Figura 111 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^3 para identificação do helicóptero 2DOF.



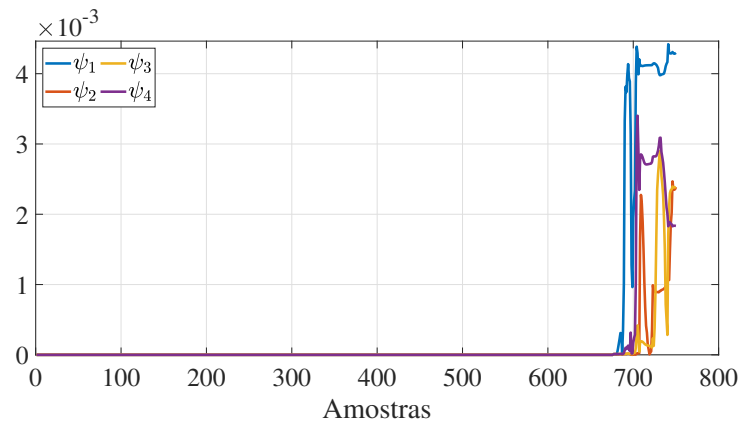
Fonte: Autor

Figura 112 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^5 para identificação do helicóptero 2DOF.



Fonte: Autor

Figura 113 – Estimação recursiva dos elementos do vetor ψ^7 para identificação do helicóptero 2DOF.



Fonte: Autor

As respostas do modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar para rastrear as saídas do helicóptero 2DOF, na etapa de identificação recursiva, são ilustradas na Figs. 114–115. A análise comparativa com a metodologia apresentada em Torres e Serra (2018), segundo os critérios de NMSE e VAF%, é apresentada na Tab. 6, na qual é observado um melhor desempenho da metodologia proposta.

Tabela 6 – Análise comparativa da metodologia proposta com a metodologia relevante da literatura, baseadas nos critérios de NMSE e VAF% (melhores valores em negrito)

Output		Methodology	
		Proposta	Proposta em Torres e Serra (2018)
VAF%	ϕ	99.98	97.17
	θ	98.78	98.06
NMSE	ϕ	1.17×10^{-3}	~
	θ	4.49×10^{-2}	~

Figura 114 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída ϕ do helicóptero 2DOF.

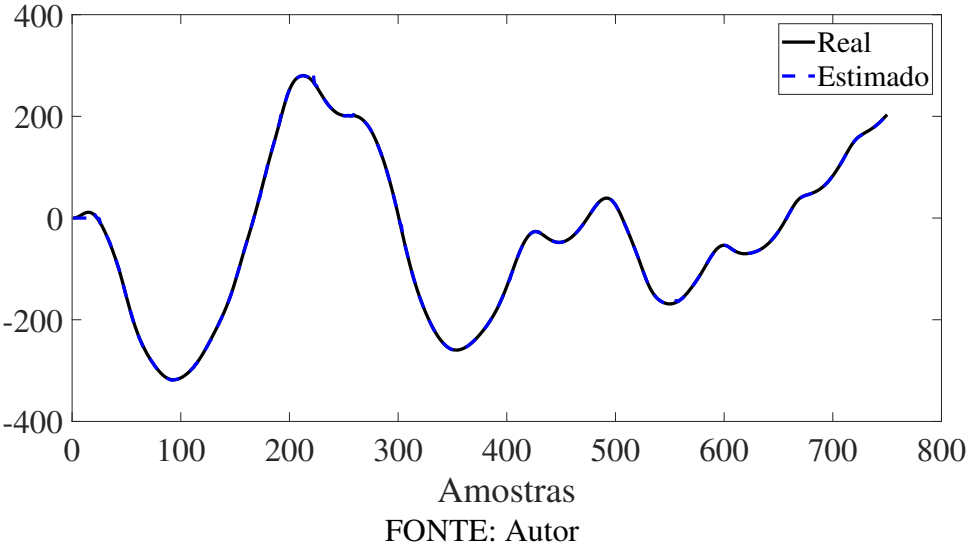
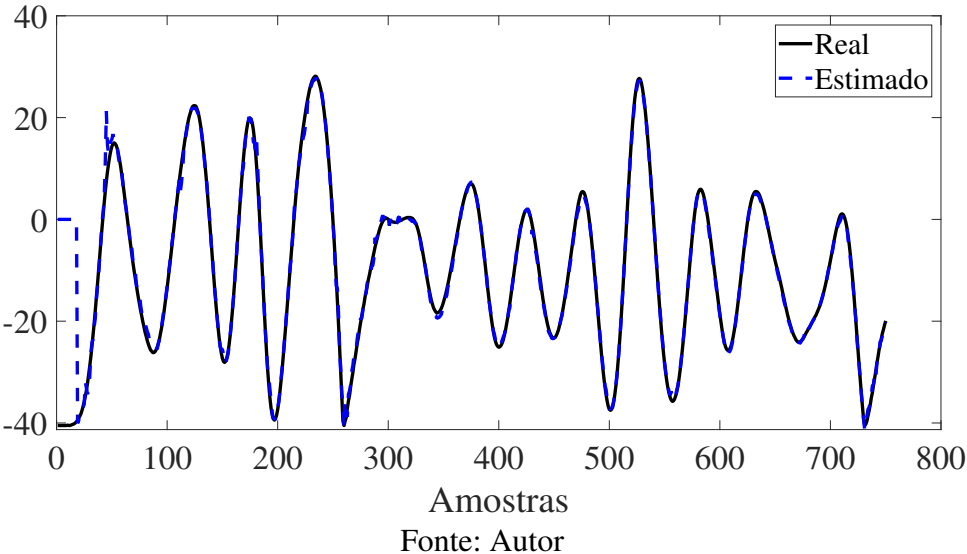


Figura 115 – Respostas temporal do modelo neural-fuzzy do tipo-2 intervalar no rastreamento da saída θ do helicóptero 2DOF.



4.2.2.2 Estimação recursiva com ruído de medição

Para este experimento, considera-se um ruído de medição ϖ gerado artificialmente com distribuição uniforme, onde o vetor de saída ruidoso é dado por:

$$\mathbf{y}_{n,k} = \mathbf{y}_k + \varpi_k \quad (4.27)$$

onde foi adotado ruídos de potências de $-24dB$ e $-4dB$.

A parametrização do algoritmo utilizada neste caso é a mesma do caso sem ruído de medida. Para a análise do desempenho da metodologia proposta, utilizou-se o método de Monte-Carlo, onde se realizou 10 realizações. Para análise comparativa, considerou-se a contraparte tipo-1 do modelo proposto. Os resultados obtidos são apresentados na Tab. 7.

Tabela 7 – NMSE (média $\pm$ desvio padrão) obtido pela metodologia proposta e sua contraparte tipo-1 para ruído de medição com potências de $-24dB$ e $-4dB$

	$-24dB$		$-4dB$	
	y_1	y_2	y_1	y_2
Proposto	$4.76 \times 10^{-4} \pm 6.34 \times 10^{-5}$	$5.25 \times 10^{-3} \pm 3.67 \times 10^{-4}$	$1.08 \times 10^{-2} \pm 2.21 \times 10^{-3}$	$8.99 \times 10^{-2} \pm 2.31 \times 10^{-2}$
Contraparte tipo-1	$5.41 \times 10^{-4} \pm 7.06 \times 10^{-5}$	$6.64 \times 10^{-3} \pm 3.95 \times 10^{-4}$	$1.40 \times 10^{-2} \pm 3.7 \times 10^{-3}$	$1.13 \times 10^{-1} \pm 3.07 \times 10^{-2}$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma abordagem de identificação sistemas dinâmicos multivariáveis baseada em modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar evolutiva no espaço de para foi proposta nesta dissertação.

O desempenho do da metodologia proposta foi avaliada através de resultados computacionais e experimentais, onde observou-se:

- Apresenta desempenho competitivo quando comparado à outras metodologias baseadas em inferência fuzzy tipo-2 intervalar (Seção 4.1.1).
- Além do comportamento dinâmico, o modelo neuro-fuzzy tipo-2 intervalar estimado rastreou as características estáticas do sistema real (Seção 4.1.2).
- Rápida adaptação em rastrear o comportamento sistemas dinâmicos multivariáveis não-lineares e variantes no tempo (Seção 4.1.3).
- Apresenta desempenho competitivo quando comparadas a metodologias relevantes em estimação recursiva (Seção 4.2.1).
- Apresenta desempenho superior quando comparadas a metodologias baseadas em modelos fuzzy no espaço de estados (Seção 4.2.2).
- Apresenta desempenho superior para sistemas dinâmicos com ruído de medição quando comparada a modelos fuzzy tipo-1 (Seção 4.2.2).

Dentre as principais conclusões sobre a metodologia apresentada, pode destacar os seguintes pontos:

- Metodologia orientada totalmente a dados experimentais;
- A metodologia evolutiva considera um modelo neural-fuzzy sem regras inicialmente, de modo que todas as regras são criadas a partir do fluxo de dados.
- Eficiência em rastrear a incerteza dinâmica inerente aos dados experimentais, adaptativamente. O algoritmo de agrupamento evolutivo estima os centros e o formato dos grupos, definindo o número de regras da rede de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar. O grau de compatibilidade e o índice de excitação são parâmetros importantes a serem calculados para uma nova informação, considerando todos os grupos criados. Baseado nestas métricas, condições para a variação do número de regras, criação ou fusão grupos, são utilizadas para permitir a adaptabilidade aos dados, obtendo-se, assim, uma nova estrutura do modelo de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar;

- Eficiência em rastrear a não-linearidade inerente aos dados experimentais, recursivamente. Um algoritmo recursivo de identificação no espaço de estados baseado em Mínimos Quadrados Ponderado é utilizado para a estimação do consequente das regras do sistemas de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar. O algoritmo realiza o cálculo dos parâmetros de *Markov* para todas as regras e, respectivamente, a partir destes parâmetros, os submodelos no espaço de estados são estimados de forma recursiva. Uma vez que o submodelo no espaço de estados, na i -ésima regra, representa um comportamento linear do sistema dinâmico em um ponto de operação, respectivamente, pode-se inferir a eficiência do modelo de inferência neuro-fuzzy tipo-2 intervalar, através da combinação linear evolutiva dos submodelos lineares no espaço de estados no consequente de cada regra, em rastrear a não-linearidade inerente ao conjunto de dados experimentais;
- Robustez a ruídos, perturbações e *outliers* inerentes aos dados experimentais. O algoritmo de agrupamento evolutivo calcula o grau de compatibilidade de uma nova informação, isto é, seu grau de pertinência associado a cada regra, o que indica se esta informação pertence ou não à base de conhecimento da rede de inferência neuro-fuzzy. Calcula-se também o grau de excitação, no sentido de avaliar se a nova informação representa, de forma persistente, um novo comportamento ainda não aprendido pelo modelo. Caso a nova informação não pertença à base de conhecimento e esta representa um novo comportamento dinâmico persistente, então um novo ponto de operação é adicionado à rede de inferência neuro-fuzzy. Caso contrário, esta é considerada como ruído, perturbação ou *outliers* e, portanto, é descartada do processo de aprendizagem. Além disso, o Filtro de Kalman Estendido (FKE) é utilizado para estimar a parametrização das funções de pertinência superior e inferior tal que os efeitos de ruídos e *outliers* sejam atenuados no estágio de redução de tipo.
- Estimação paramétrica é convergente e estável de acordo com as condições dadas nas Seções 3.5 e 3.6.

Para trabalhos posteriores, o uso da decomposição QR com reflexões de Householder. Esta abordagem garante robustez numérica na estimação dos parâmetros de Markov e das matrizes de espaço de estados, assim como superar possíveis problemas relacionados ao tempo de convergência paramétrica. Outra abordagem a ser considerada futuramente é o método de variáveis instrumentais no intuito de superar a alta variabilidade do fluxo de dados devido à presença de ruído.

APÊNDICE A – PROPRIEDADES DE MATRIZES

A.1 Matriz nilpotente

Uma matriz quadrada de ordem n diz-se uma matriz nilpotente se existir um número natural q tal que $\mathbf{A}^q = \mathbf{0}$, tal que $\mathbf{0}$ representa a matriz nula. O menor número natural que verifica a igualdade $\mathbf{A}^q = \mathbf{0}$, designa-se por índice de nilpotência da matriz $\mathbf{A}$.

REFERÊNCIAS

- ABIYEV, R. H. et al. A type-2 neuro-fuzzy system based on clustering and gradient techniques applied to system identification and channel equalization. *Applied Soft Computing*, Elsevier BV, v. 11, n. 1, p. 1396–1406, jan 2011. Citado na página 45.
- ABIYEV, R. H.; KAYNAK, O.; KAYACAN, E. A type-2 fuzzy wavelet neural network for system identification and control. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier BV, v. 350, n. 7, p. 1658–1685, sep 2013. Citado na página 23.
- ANGELOV, P. *Autonomous Learning Systems*. [S.l.]: Wiley-Blackwell, 2012. ISBN 1119951526. Citado na página 49.
- ANGELOV, P.; BUSWELL, R. Identification of evolving fuzzy rule-based models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 10, n. 5, p. 667–677, oct 2002. Citado 3 vezes nas páginas 22, 34 e 57.
- ANGELOV, P.; FILEV, D. An approach to online identification of takagi-sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 34, n. 1, p. 484–498, feb 2004. Citado 3 vezes nas páginas 22, 48 e 49.
- ANTONELLI, M. et al. Multiobjective evolutionary optimization of type-2 fuzzy rule-based systems for financial data classification. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 25, n. 2, p. 249–264, apr 2017. Citado na página 23.
- BABUSKA, R. *Fuzzy Modeling for Control*. [S.l.]: Springer"Science+Business Media, 1998. Citado na página 44.
- BABUSKA, R. *Fuzzy Modeling for Control*. [S.l.]: Springer Netherlands, 2012. ISBN 9401060401. Citado 5 vezes nas páginas 21, 34, 44, 46 e 48.
- BAKLOUTI, N.; ABRAHAM, A.; ALIM, A. A beta basis function interval type-2 fuzzy neural network for time series applications. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier BV, v. 71, p. 259–274, may 2018. Citado na página 23.
- CASTILLO, O. *Type-2 Fuzzy Logic in Intelligent Control Applications*. [S.l.]: Springer-Verlag GmbH, 2011. ISBN 3642246621. Citado 4 vezes nas páginas 22, 35, 40 e 41.
- CASTILLO, P. M. O. *Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 22, 41 e 45.
- ÇAVDAR, T. PSO tuned ANFIS equalizer based on fuzzy c-means clustering algorithm. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, Elsevier BV, v. 70, n. 6, p. 799–807, jun 2016. Citado na página 47.
- CHAGHARI, A.; FEIZI-DERAKHSHI, M.-R.; BALAFAR, M.-A. Fuzzy clustering based on forest optimization algorithm. *Journal of King Saud University - Computer and Information Sciences*, Elsevier BV, v. 30, n. 1, p. 25–32, jan 2018. Citado na página 47.

CHATTERJEE, A. et al. Augmented stable fuzzy control for flexible robotic arm using LMI approach and neuro-fuzzy state space modeling. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 55, n. 3, p. 1256–1270, mar 2008. Citado na página 21.

CHELLY, Z.; ELOUEDI, Z. Hybridization schemes of the fuzzy dendritic cell immune binary classifier based on different fuzzy clustering techniques. *New Generation Computing*, Springer Nature, v. 33, n. 1, p. 1–31, jan 2015. Citado na página 47.

CHEN, C.-T. *Linear System Theory and Design*. 3rd. ed. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 1998. ISBN 0195117778. Citado 3 vezes nas páginas 21, 28 e 29.

CHEN, N.; XU, Z. shui; XIA, M. mei. Hierarchical hesitant fuzzy k-means clustering algorithm. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, Springer Nature, v. 29, n. 1, p. 1–17, mar 2014. Citado na página 47.

CHIUSO, A.; PICCI, G. Consistency analysis of some closed-loop subspace identification methods. *Automatica*, Elsevier BV, v. 41, n. 3, p. 377–391, mar 2005. Citado 3 vezes nas páginas 32, 62 e 63.

COSTA, E. B. M.; SERRA, G. L. O. Optimal recursive fuzzy model identification approach based on particle swarm optimization. In: *2015 IEEE 24th International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*. [S.l.]: Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), 2015. Citado na página 57.

DAS, A. K.; SUBRAMANIAN, K.; SUNDARAM, S. An evolving interval type-2 neurofuzzy inference system and its metacognitive sequential learning algorithm. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 23, n. 6, p. 2080–2093, dec 2015. Citado 4 vezes nas páginas 23, 51, 81 e 82.

DONG, J. Recursive NARX model identification of nonlinear chemical processes with matrix invertibility analysis. *Computers & Chemical Engineering*, Elsevier BV, v. 121, p. 574–583, feb 2019. Citado na página 112.

EL-NAGAR, A. M. Nonlinear dynamic systems identification using recurrent interval type-2 tsk fuzzy neural network – a novel structure. *ISA Transactions*, 2017. ISSN 0019-0578. Citado na página 23.

EL-NAGAR, A. M.; EL-BARDINI, M. Parallel realization for self-tuning interval type-2 fuzzy controller. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier BV, v. 61, p. 8–20, may 2017. Citado na página 23.

EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. O. Algoritmo recursivo para identificação nebulosa tipo-2 de sistemas dinâmicos não-lineares. In: *Anais do XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 2065–2070. Nenhuma citação no texto.

EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. O. Identificação recursiva de sistemas dinâmicos multivariáveis no espaço de estados via parâmetros de markov baseada em inferência neural-fuzzy tipo-2 intervalar evolutiva. In: *Anais do XIV Simpósio Brasileiro de Automação inteligente*. [S.l.: s.n.], 2019. Nenhuma citação no texto.

EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. O. Multivariable state space recursive identification algorithm based on evolving type-2 neural fuzzy inference system. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 2019. Nenhuma citação no texto.

- EVANGELISTA, A. P. F.; SERRA, G. L. O. State space black-box modelling via markov parameters based on evolving type-2 neural-fuzzy inference system for nonlinear multivariable dynamic systems. *Fuzzy Set and Systems*, 2019. Nenhuma citação no texto.
- FILHO, O. D. R.; SERRA, G. L. O. Recursive fuzzy instrumental variable based evolving neuro-fuzzy identification for non-stationary dynamic system in a noisy environment. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier BV, v. 338, p. 50–89, may 2018. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.
- GOYAL, L. M.; MITTAL, M.; SETHI, J. K. Fuzzy model generation using subtractive and fuzzy c-means clustering. *CSI Transactions on ICT*, Springer Nature, v. 4, n. 2-4, p. 129–133, dec 2016. Citado 3 vezes nas páginas 21, 46 e 47.
- GUENOUNOU, O.; DAHHOU, B.; CHABOUR, F. TSK fuzzy model with minimal parameters. *Applied Soft Computing*, Elsevier BV, v. 30, p. 748–757, may 2015. Citado na página 21.
- GUSTAFSON, D.; KESSEL, W. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. In: *1978 IEEE Conference on Decision and Control including the 17th Symposium on Adaptive Processes*. [S.l.]: Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), 1978. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.
- HAGRAS, H. A. A hierarchical type-2 fuzzy logic control architecture for autonomous mobile robots. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 12, n. 4, p. 524–539, aug 2004. Citado na página 23.
- HAYKIN, S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation (2nd Edition)*. [S.l.]: Prentice Hall, 1998. ISBN 978-0132733502. Citado na página 45.
- HAYKIN, S. S. *Kalman Filtering and Neural Networks*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2001. ISBN 0471369985. Citado na página 60.
- HORIKAWA, S. i.; FURUHASHI, T.; UCHIKAWA, Y. On fuzzy modeling using fuzzy neural networks with the back-propagation algorithm. *IEEE Transactions on Neural Networks*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 3, n. 5, p. 801–806, 1992. Citado na página 34.
- HOUTZAGER, I.; WINGERDEN, J.-W. van; VERHAEGEN, M. Recursive predictor-based subspace identification with application to the real-time closed-loop tracking of flutter. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 20, n. 4, p. 934–949, jul 2012. Citado na página 61.
- HSU, C.-H.; JUANG, C.-F. Evolutionary robot wall-following control using type-2 fuzzy controller with species-DE-activated continuous ACO. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 21, n. 1, p. 100–112, feb 2013. Citado na página 45.
- HWANG, C.; RHEE, F. C.-H. Uncertain fuzzy clustering: Interval type-2 fuzzy approach to c-means. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), v. 15, n. 1, p. 107–120, feb 2007. Citado na página 47.
- JIANG, J.-A. et al. An interval type-2 fuzzy logic system for stock index forecasting based on fuzzy time series and a fuzzy logical relationship map. *IEEE Access*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 6, p. 69107–69119, 2018. Citado na página 36.

JUANG, C.-F.; HUANG, R.-B.; CHENG, W.-Y. An interval type-2 fuzzy-neural network with support-vector regression for noisy regression problems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 18, n. 4, p. 686–699, aug 2010. Citado na página 52.

JUANG, C.-F.; TSAO, Y.-W. A self-evolving interval type-2 fuzzy neural network with online structure and parameter learning. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 16, n. 6, p. 1411–1424, dec 2008. Citado 5 vezes nas páginas 23, 47, 51, 81 e 82.

JUANG, J. *Applied system identification*. [S.l.]: Prentice Hall, 1994. Citado na página 68.

JUANG, J.-N.; PAPPA, R. S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of guidance, control and dynamics*, v. 8, n. 5, p. 620–627, 1985. Citado na página 27.

JUANG, M. Q. P. J.-N. *Identification and Control of Mechanical Systems*. [S.l.]: CAMBRIDGE UNIV PR, 2011. ISBN 0521783550. Citado 4 vezes nas páginas 26, 27, 63 e 68.

JÚNIOR, S. E. R.; SERRA, G. L. de O. A novel intelligent approach for state space evolving forecasting of seasonal time series. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier BV, v. 64, p. 272–285, sep 2017. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 49.

KARNIK, N. N.; MENDEL, J. M. Introduction to type-2 fuzzy logic systems. In: *1998 IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings. IEEE World Congress on Computational Intelligence (Cat. No.98CH36228)*. [S.l.]: IEEE, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 35.

KARNIK, N. N.; MENDEL, J. M. Centroid of a type-2 fuzzy set. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 132, n. 1-4, p. 195–220, feb 2001. Citado na página 41.

KARNIK, N. N.; MENDEL, J. M.; LIANG, Q. Type-2 fuzzy logic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 7, n. 6, p. 643–658, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 35.

KAYACAN, E. *Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems: Theory and Design*. Tese (phdthesis) — Bogaziçi, jul. 2011. Citado na página 42.

KAYACAN, E.; KAYACAN, E.; KHANESAR, M. A. Identification of nonlinear dynamic systems using type-2 fuzzy neural networks—a novel learning algorithm and a comparative study. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 62, n. 3, p. 1716–1724, mar 2015. Citado na página 23.

KHANESAR, M. A. et al. Extended kalman filter based learning algorithm for type-2 fuzzy logic systems and its experimental evaluation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 59, n. 11, p. 4443–4455, nov 2012. Citado na página 45.

KHOOBAN, M. H. et al. An optimal general type-2 fuzzy controller for urban traffic network. *ISA Transactions*, Elsevier BV, v. 66, p. 335–343, jan 2017. Citado na página 36.

KIM, E. et al. A new approach to fuzzy modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 5, n. 3, p. 328–337, 1997. Citado na página 34.

KUMAR, A.; KUMAR, V. Evolving an interval type-2 fuzzy PID controller for the redundant robotic manipulator. *Expert Systems with Applications*, Elsevier BV, v. 73, p. 161–177, may 2017. Citado na página 23.

LE, T.-L. Self-organizing recurrent interval type-2 petri fuzzy design for time-varying delay systems. *IEEE Access*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 7, p. 10505–10514, 2019. Citado na página 36.

LEE, C.-H.; CHANG, F.-Y.; LIN, C.-M. An efficient interval type-2 fuzzy CMAC for chaos time-series prediction and synchronization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 44, n. 3, p. 329–341, mar 2014. Citado na página 23.

LEMOES, A.; CAMINHAS, W.; GOMIDE, F. Multivariable gaussian evolving fuzzy modeling system. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 19, n. 1, p. 91–104, feb 2011. Citado 3 vezes nas páginas 49, 66 e 67.

LENG, G.; MCGINNITY, T. M.; PRASAD, G. Design for self-organizing fuzzy neural networks based on genetic algorithms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 14, n. 6, p. 755–766, dec 2006. Citado na página 45.

LI, C.; WU, T. Adaptive fuzzy approach to function approximation with PSO and RLSE. *Expert Systems with Applications*, Elsevier BV, v. 38, n. 10, p. 13266–13273, sep 2011. Citado na página 45.

LI, H. et al. Observer-based fault detection for nonlinear systems with sensor fault and limited communication capacity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 61, n. 9, p. 2745–2751, sep 2016. Citado na página 21.

LI, H. et al. Control of nonlinear networked systems with packet dropouts: Interval type-2 fuzzy model-based approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 45, n. 11, p. 2378–2389, nov 2015. Citado na página 23.

LI, L. et al. Fuzzy observer-based fault detection design approach for nonlinear processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 47, n. 8, p. 1941–1952, aug 2017. Citado na página 21.

LIANG, Q.; MENDEL, J. M. Equalization of nonlinear time-varying channels using type-2 fuzzy adaptive filters. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, n. 5, p. 551–563, 2000. Citado na página 23.

LIANG, Q.; MENDEL, J. M. Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), v. 8, n. 5, p. 535–550, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 36.

LIN, C.-T. et al. An interval type-2 neural fuzzy system for online system identification and feature elimination. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 26, n. 7, p. 1442–1455, jul 2015. ISSN 2162-237X. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 51.

LIN, Y.-Y.; CHANG, J.-Y.; LIN, C.-T. A TSK-type-based self-evolving compensatory interval type-2 fuzzy neural network (TSCIT2fnn) and its applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 61, n. 1, p. 447–459, jan 2014. Citado 3 vezes nas páginas 47, 81 e 82.

- LIN, Y.-Y. et al. A mutually recurrent interval type-2 neural fuzzy system (MRIT2nfs) with self-evolving structure and parameters. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 21, n. 3, p. 492–509, jun 2013. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 51.
- LIU, Y.; YANG, D. Convergence analysis of the batch gradient-based neuro-fuzzy learning algorithm with smoothing $l_{1/2}$ regularization for the first-order takagi–sugeno system. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier BV, v. 319, p. 28–49, jul 2017. Citado na página 45.
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. [S.l.]: Prince Hall, 1999. ISBN 0138816409. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 71.
- LJUNG, S.; LJUNG, L. Error propagation properties of recursive least-squares adaptation algorithms. *Automatica*, Elsevier BV, v. 21, n. 2, p. 157–167, mar 1985. Citado na página 72.
- LUENBERGER, D. G. *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1979. Citado na página 21.
- LUGHOFFER, E. FLEXFIS: A robust incremental learning approach for evolving takagi–sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 16, n. 6, p. 1393–1410, dec 2008. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 57.
- LUGHOFFER, E. *Evolving Fuzzy Systems: Methodologies, Advanced Concepts and Applications*. [S.l.]: Springer, 2011. ISBN 9783642180866. Citado na página 49.
- LUGHOFFER, E.; BOUCHOT, J.-L.; SHAKER, A. On-line elimination of local redundancies in evolving fuzzy systems. *Evolving Systems*, Springer Nature, v. 2, n. 3, p. 165–187, may 2011. Citado na página 48.
- LUO, X.; SONG, Y. Adaptive predictive control: A data-driven closed-loop subspace identification approach. *Abstract and Applied Analysis*, Hindawi Limited, v. 2014, p. 1–11, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 104 e 105.
- MACIEL, L.; GOMIDE, F.; BALLINI, R. Enhanced evolving participatory learning fuzzy modeling: an application for asset returns volatility forecasting. *Evolving Systems*, Springer Nature, v. 5, n. 2, p. 75–88, nov 2013. Citado na página 57.
- MENDEL, J. M.; JOHN, R. I. B. Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 10, n. 2, p. 117–127, apr 2002. Citado 4 vezes nas páginas 22, 35, 36 e 37.
- MOHAMMADZADEH, A. et al. Robust H_∞ -based synchronization of the fractional-order chaotic systems by using new self-evolving nonsingleton type-2 fuzzy neural networks. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 24, n. 6, p. 1544–1554, Dec 2016. ISSN 1063-6706. Citado na página 23.
- NGO, P. D.; SHIN, Y. C. Modeling of unstructured uncertainties and robust controlling of nonlinear dynamic systems based on type-2 fuzzy basis function networks. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier BV, v. 53, p. 74–85, aug 2016. Citado na página 23.

- NI, Z.; LIU, J.; WU, Z. Identification of the time-varying modal parameters of a spacecraft with flexible appendages using a recursive predictor-based subspace identification algorithm. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, SAGE Publications, p. 1–19, apr 2018. Citado 3 vezes nas páginas 61, 63 e 65.
- NI, Z. et al. Identification of the state-space model and payload mass parameter of a flexible space manipulator using a recursive subspace tracking method. *Chinese Journal of Aeronautics*, Elsevier BV, may 2018. Citado na página 65.
- NIE, M.; TAN, W. W. Towards an efficient type-reduction method for interval type-2 fuzzy logic systems. In: *2008 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (IEEE World Congress on Computational Intelligence)*. [S.l.]: IEEE, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 42.
- NISE, N. *Control Systema Engineering*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2011. Citado na página 28.
- PÁRAMO-CARRANZA, L. A. et al. Discrete-time kalman filter for takagi–sugeno fuzzy models. *Evolving Systems*, Springer Nature, v. 8, n. 3, p. 211–219, apr 2017. Citado na página 21.
- PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. [S.l.]: JOHN WILEY & SONS INC, 2007. ISBN 0471788570. Citado na página 49.
- PETERS, G. Fuzzy linear regression with fuzzy intervals. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier BV, v. 63, n. 1, p. 45–55, apr 1994. Citado na página 34.
- PIRES, D.; SERRA, G. An approach for fuzzy kalman filter modeling based on evolving clustering of experimental data. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, IOS Press, v. 35, n. 2, p. 1819–1834, Aug 2018. ISSN 1064-1246. Citado 3 vezes nas páginas 22, 24 e 48.
- PIRES, D. S.; SERRA, G. L. O. Nonlinear dynamic system identification based on fuzzy kalman filter. In: *2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. [S.l.]: IEEE, 2016. Citado na página 57.
- PRATAMA, M. et al. PANFIS: A novel incremental learning machine. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 25, n. 1, p. 55–68, jan 2014. Citado na página 22.
- PRATAMA, M. et al. An incremental learning of concept drifts using evolving type-2 recurrent fuzzy neural networks. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 25, n. 5, p. 1175–1192, oct 2017. Citado na página 51.
- RUBAAI, A.; YOUNG, P. EKF-based PI-/PD-like fuzzy-neural-network controller for brushless drives. *IEEE Transactions on Industry Applications*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 47, n. 6, p. 2391–2401, nov 2011. Citado na página 45.
- RUBIO, E.; CASTILLO, O. Interval type-2 fuzzy clustering algorithm using the combination of the fuzzy and possibilistic c-mean algorithms. In: *2014 IEEE Conference on Norbert Wiener in the 21st Century (21CW)*. [S.l.]: Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), 2014. Citado na página 47.

SAHA, A.; KONAR, A.; NAGAR, A. K. EEG analysis for cognitive failure detection in driving using type-2 fuzzy classifiers. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 1, n. 6, p. 437–453, dec 2017. Citado na página 36.

SAMADI, M. F.; SAIF, M. State-space modeling and observer design of li-ion batteries using takagi–sugeno fuzzy system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 25, n. 1, p. 301–308, jan 2017. Citado na página 21.

SANTOS, J. A.; SERRA, G. L. O. Recursive identification approach of multivariable nonlinear dynamic systems based on evolving fuzzy hammerstein models. In: *2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. [S.l.]: IEEE, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 48.

SERRA, G.; BOTTURA, C. An IV-QR algorithm for neuro-fuzzy multivariable online identification. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 15, n. 2, p. 200–210, apr 2007. Citado na página 48.

SERRA, G.; BOTTURA, C. Fuzzy instrumental variable approach for nonlinear discrete-time systems identification in a noisy environment. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier BV, v. 160, n. 4, p. 500–520, feb 2009. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 43.

SHARMA, C.; TYAGI, B. Fuzzy type-2 controller design for small-signal stability considering time latencies and uncertainties in PMU measurements. *IEEE Systems Journal*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 11, n. 2, p. 1149–1160, jun 2017. Citado na página 36.

SILVA, A. et al. Real-time nonlinear modeling of a twin rotor MIMO system using evolving neuro-fuzzy network. In: *2014 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Control and Automation (CICA)*. [S.l.]: IEEE, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 56.

SIMINSKI, K. Interval type-2 neuro-fuzzy system with implication-based inference mechanism. *Expert Systems with Applications*, Elsevier BV, v. 79, p. 140–152, aug 2017. Citado na página 45.

SONG, K.-B. et al. Short-term load forecasting for the holidays using fuzzy linear regression method. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 20, n. 1, p. 96–101, feb 2005. Citado na página 34.

STAVRAKOUDIS, D. G.; THEOCHARIS, J. B. Pipelined recurrent fuzzy neural networks for nonlinear adaptive speech prediction. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 37, n. 5, p. 1305–1320, oct 2007. Citado na página 45.

SUBRAMANIAN, R. G.; ELUMALAI, V. K. Robust MRAC augmented baseline LQR for tracking control of 2 DoF helicopter. *Robotics and Autonomous Systems*, Elsevier BV, v. 86, p. 70–77, dec 2016. Citado na página 114.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), SMC-15, n. 1, p. 116–132, jan 1985. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 43.

- TEH, C. Y. et al. On modelling of data-driven monotone zero-order TSK fuzzy inference systems using a system identification framework. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), p. 1–1, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 34.
- TORRES, L. M. M.; SERRA, G. L. O. State-space recursive fuzzy modeling approach based on evolving data clustering. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer Nature, v. 29, n. 4, p. 426–440, jun 2018. Citado 3 vezes nas páginas 24, 120 e 121.
- TUNG, S.; QUEK, C.; GUAN, C. eT2fis: An evolving type-2 neural fuzzy inference system. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 220, p. 124–148, jan 2013. Citado 5 vezes nas páginas 23, 51, 52, 81 e 82.
- WANG, N. et al. Hybrid recursive least squares algorithm for online sequential identification using data chunks. *Neurocomputing*, Elsevier BV, v. 174, p. 651–660, jan 2016. Citado na página 48.
- WU, C.-Y. et al. A novel on-line observer/kalman filter identification method and its application to input-constrained active fault-tolerant tracker design for unknown stochastic systems. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier BV, v. 352, n. 3, p. 1119–1151, mar 2015. Citado na página 63.
- WU, D.; MENDEL, J. Enhanced karnik–mendel algorithms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 17, n. 4, p. 923–934, aug 2009. Citado na página 41.
- WU, H.; MENDEL, J. M. Introduction to uncertainty bounds and their use in the design of interval type-2 fuzzy logic systems. In: *10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. (Cat. No.01CH37297). [S.l.]: IEEE, 2002. Citado na página 23.
- WU, W. et al. A modified gradient-based neuro-fuzzy learning algorithm and its convergence. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 180, n. 9, p. 1630–1642, may 2010. Citado na página 21.
- YAGER, R. A model of participatory learning. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 20, n. 5, p. 1229–1234, 1990. Citado na página 56.
- ZADEH, L. A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), SMC-3, n. 1, p. 28–44, 1973. Citado na página 34.
- ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - 1. *Information Sciences*, v. 8x, p. 199–249, 1975. Citado 3 vezes nas páginas 22, 35 e 37.
- ZDEŠAR, A.; DOVŽAN, D.; ŠKRJANC, I. Self-tuning of 2 DOF control based on evolving fuzzy model. *Applied Soft Computing*, Elsevier BV, v. 19, p. 403–418, jun 2014. Citado 3 vezes nas páginas 48, 49 e 114.
- ZHAO, W.; LI, K.; IRWIN, G. W. A new gradient descent approach for local learning of fuzzy neural models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 21, n. 1, p. 30–44, feb 2013. Citado na página 45.
- ZHU, Y. et al. Comparison of three classes of identification methods. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier BV, v. 27, n. 8, p. 169–174, jul 1994. Citado 2 vezes nas páginas 104 e 105.