



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Larissa Santos Chagas

Rigidez de esferas mínimas com área 4π

São Luís - MA

12 de agosto de 2025

Larissa Santos Chagas

Rigidez de esferas mínimas com área 4π

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes

São Luís - MA
12 de agosto de 2025

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Santos Chagas, Larissa.

Rigidez de esferas mínimas com área 4π / Larissa
Santos Chagas. - 2025.
57 f.

Orientador(a): Ivaldo Paz Nunes.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São
Luís, 2025.

1. Variedade Riemanniana Completa. 2. Esfera Mínima.
3. Curvatura Seccional. 4. Toro. 5. Cúspides
Hiperbólicas. I. Paz Nunes, Ivaldo. II. Título.

Larissa Santos Chagas

Rigidez de esferas mínimas com área 4π

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão.

Dissertação de Mestrado. São Luís - MA, 12 de agosto de 2025:

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes

Orientador

Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof^ª. Dr^a. Maria de Andrade Costa e Silva

Examinador Externo

Universidade Federal de Sergipe - UFS

Prof. Dr. Cicero Tiarlos Nogueira Cruz

Examinador Externo

Universidade Federal de Alagoas - UFAL

São Luís - MA

12 de agosto de 2025

Às minhas queridas e amadas avós Maria Emília e Maria Pereira.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por tudo, em especial por ter me concedido sabedoria e saúde para fazer o Mestrado Acadêmico em Matemática e para escrever essa dissertação.

Agradeço aos meus pais Alonso de Jesus Chagas e Conceição de Maria Santos Chagas por todo amor e carinho que sempre me deram. Por tudo que fazem para criarem eu e meus seis irmãos.

Agradeço também à minha avó Maria Emília Chagas Silveira por todo apoio e lições de vida que ela sempre me dera.

Não poderia deixar de agradecer aos meus amigos que estiveram presentes durante a realização do mestrado: à minha melhor amiga Sarah Richely que sempre orou por mim, à minha irmã do coração Amanda Dutra que me dava forças e alegrava meu dia com seu carisma, ao meu namorado que conheci no mestrado Gustavo Colins que me inspirava, ao meu parceiro de geometria Gabriel Araújo que teve um papel importante tanto na elaboração da minha monografia quanto agora da minha dissertação.

Também sou grata aos meus queridos amigos do mestrado Maria Carla, Carlos Eduardo, Fábio Almeida, Uanderson Farias, Gleidson Filadelfo, Amália Regina, Carla Beatriz, Ítalo Bruno, Yofer Flores, Frank Vinícius, Isabelle Cristina, Raabe Rosa, Rafael Sousa e Alessandro Pudim por todo carinho e consideração que sempre tiveram comigo.

Agradeço ao meu orientador, professor Ivaldo Nunes, que desde a graduação vem me ensinado Geometria de uma forma única. Por ter me emprestado o livro "A Janela de Euclides" que mudou a minha vida e fez me apaixonar pela Geometria Diferencial. Agradeço por toda sua dedicação, suas explicações usando sempre elementos geométricos para entender o que era abstrato. A sua paciência e gentileza também sou grata.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMAT-UFMA) Giovanne Ferreira, Vanessa Ribeiro, Anselmo Raposo, Gustavo Silvestre, José Vanterler, José Santana, Sandra Imaculada, Emerson Araujo, Renata de Farias e AdeCarlos Carvalho pelas lições aprendidas e pelos encorajamentos.

Agradeço a todos os professores do departamento de Matemática da UFMA nas pessoas da Valdiane Sales, minha mentora e da Kayla Rocha, as quais me deram ótimos e frutíferos conselhos a respeito da Matemática e da vida.

Não posso deixar de agradecer ao professor Elivaldo Macedo com quem também aprendi Geometria e que dedicou um pouco do seu tempo para me ensinar Variedades Diferenciáveis. Sou grata pela dúvidas sanadas e pelo incentivo.

Agradeço também ao professor José Edilson da UFPA pela contribuição nesse trabalho e pelos diversos conselhos dados.

Agradeço à FAPEMA pelo apoio financeiro o qual foi de suma importância para a realização do Mestrado Acadêmico em Matemática.

Por fim, agradeço à banca examinadora que se disponibilizou para ler e avaliar essa dissertação. Tenho certeza que as sugestões dadas são essenciais para o enriquecimento da temática.

“Pois meus pensamentos não são os vossos, e vosso modo de agir não é o meu, diz o Senhor; mas tanto quanto o céu domina a terra, tanto é superior à vossa a minha conduta e meus pensamentos ultrapassam os vossos.”

(Isaías 55.8,9)

Resumo

Neste trabalho, dissertaremos sobre dois teoremas devidos a Mazet e Rosenberg em (Mazet; Rosenberg, 2014). Tais resultados caracterizam uma 3-variedade Riemanniana completa M sob certas condições. O primeiro teorema requer que a curvatura seccional de M satisfaça $0 \leq K \leq 1$, e afirma que se uma 2-esfera mínima mergulhada Σ em M tem área $|\Sigma|$ igual a 4π , então M é isométrica a uma esfera canônica $(\mathbb{S}^3, g_{can})$ com curvatura seccional igual a 1 ou a um quociente do produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. O segundo teorema é um teorema de rigidez para cúspides hiperbólicas no qual M tem curvatura seccional $K \leq -1$, e estabelece que se T é um toro de curvatura média constante igual a 1 mergulhado em M então o lado convexo de T em M é isométrico a $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}_+$ (cúspide hiperbólica).

Palavras-chave: variedade Riemanniana completa, esfera mínima, curvatura seccional, toro, cúspides hiperbólicas.

Abstract

In this work, we will prove two theorems due to Mazet and Rosenberg in (Mazet; Rosenberg, 2014). These results characterize a complete Riemannian 3-manifold M under certain conditions. The first theorem requires that a sectional curvature of M satisfies $0 \leq K \leq 1$, and states that if a minimal embedded 2-sphere Σ in M has area $|\Sigma|$ equal to 4π , then M is isometric to a canonical sphere $(\mathbb{S}^3, g_{can})$ with sectional curvature equal to 1 or a quotient of the product $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. The second theorem is a rigidity theorem for hyperbolic cusps in which M has sectional curvature $K \leq -1$, and states that if T is a torus of constant mean curvature equal to 1 embedded in M then the convex side of T in M is isometric to $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}_+$ (hyperbolic cusp).

Keywords: complete Riemannian manifold, minimal sphere, sectional curvatures, torus, hyperbolic cusp.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Variedade diferenciável.	15
Figura 2 – Diferenciabilidade.	16
Figura 3 – A diferencial de φ	17
Figura 4 – Toro de revolução.	18
Figura 5 – Curva em uma variedade Riemanniana.	22

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	PRELIMINARES	14
2.1	Variedades diferenciáveis	14
2.2	Variedades Riemannianas	20
2.2.1	Métricas Riemannianas	20
2.2.2	Conexão Riemanniana	22
2.2.3	Geodésicas	25
2.2.4	Curvaturas	29
2.2.5	Imersões isométricas	31
2.2.6	Variedades Riemannianas completas	36
2.2.7	Fórmulas de variação	37
2.2.8	Espaço Hiperbólico	40
2.2.9	Espaços de curvatura constante	41
2.3	Resultado de EDO	42
3	ESFERAS MÍNIMAS DE ÁREA 4π E RIGIDEZ DE VARIEDADES TRIDIMENSIONAL	43
4	EXISTÊNCIA DE CÚSPIDES HIPERBÓLICAS	52
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
	Referências	57

1 Introdução

A Geometria Diferencial é um ramo da Matemática que visa estudar as propriedades geométricas dos objetos por meio do uso das ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral. Nesse contexto, um dos objetivos principais é entender a geometria e topologia dos espaços por meio da noção de curvatura.

Uma das classes de resultados que despertam grande interesse em Geometria Diferencial, em particular na Geometria Riemanniana, são os resultados de comparação. Em geral, supomos que a variedade Riemanniana em questão é mais (ou menos) curvada que um espaço modelo com curvatura (seccional, de Ricci ou escalar, por exemplo) constante. Nesse caso, o objetivo é comparar alguma propriedade geométrica ou topológica (área, diâmetro, comprimento de geodésicas fechadas, etc) da variedade Riemanniana com a respectiva propriedade no modelo.

Um teorema de comparação clássico e importante é o Teorema de Bonnet-Myers ((Bonnet, 1970) e (Myers, 1941)), o qual diz o seguinte: *seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n completa com curvatura de Ricci satisfazendo $Ric_g \geq \frac{1}{r^2}$, para algum $r > 0$. Então o diâmetro de (M, g) é menor ou igual do que o diâmetro da esfera $S^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de raio $r > 0$. Em particular, (M, g) é compacta.*

Ao obter-se uma comparação como no teorema de Bonnet-Myers acima, surge uma pergunta natural: *o que podemos dizer quando, no teorema acima, o diâmetro de (M, g) é igual a πr , o diâmetro de $S^n(r)$?* Em um artigo de 1975, Cheng provou (Cheng, 1975) que, nesse caso, (M, g) é isométrica à esfera $S^n(r)$. A esse tipo de fenômeno, damos o nome de rigidez. Ou seja, a comparação no teorema de Bonnet-Myers é rígida, ou seja, comparamos o diâmetro da variedade com uma cota, que é o diâmetro do modelo, e a cota somente é atingida na geometria modelo.

Um outro teorema de comparação é o Teorema de Toponogov (Cheeger; Ebin, 1975). Esse teorema diz que em uma esfera (S^2, g) com curvatura de Gauss $0 \leq K \leq 1$, o comprimento de toda geodésica fechada simples é maior ou igual a 2π . Além disso, temos rigidez, ou seja, se vale a igualdade então (S^2, g) é isométrica à esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ com a métrica canônica.

Recentemente, Mazet e Rosenberg, no artigo intitulado *On minimal spheres of area 4π and rigidity* (Mazet; Rosenberg, 2014), conseguiram obter um versão do teorema de Toponogov em dimensão 3 onde, nesse caso, geodésicas fechadas simples são substituídas por esferas S^2 mínimas.

No artigo acima, Mazet e Rosenberg consideraram uma variedade Riemanniana

completa tridimensional (M, g) com curvatura seccional $0 \leq K \leq 1$.

Essa é justamente a ideia que os matemáticos Laurent Mazet e Harold Rosenberg desenvolveram no primeiro resultado do artigo *On minimal spheres of area 4π and Rigidity*, (Mazet; Rosenberg, 2014). Eles provaram que toda esfera mínima $\Sigma \simeq \mathbb{S}^2 \subset M$ mergulhada tem área maior ou igual a 4π com igualdade se, e somente se, (M, g) é isométrica à esfera unitária $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ com a métrica canônica ou a um quociente da variedade Riemanniana produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ é a esfera unitária com a métrica canônica.

Seguindo as mesmas ideias, Mazet e Rosenberg provaram um segundo resultado no artigo acima. Nesse outro resultado, eles provaram que se um 2-toro $T \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ com curvatura média igual a 1 estiver mergulhado em uma variedade Riemanniana completa tridimensional (M, g) com curvatura seccional $K \leq -1$, então T separa M e seu lado médio convexo é isométrico a uma cúspide hiperbólica.

O presente trabalho visa dissertar sobre os resultados acima, obtidos por Mazet e Rosenberg em (Mazet; Rosenberg, 2014). Com esse propósito, apresentaremos alguns preliminares acerca das variedades diferenciáveis que serão muito úteis na compreensão desses teoremas.

O trabalho está dividido em três capítulos.

No capítulo 2 abordaremos alguns conceitos e resultados sobre variedades diferenciáveis e variedades Riemannianas, dando ênfase àqueles que serão usados nas demonstrações dos teoremas 3.0.2 e 4.0.1.

No capítulo 3 apresentaremos uma demonstração do seguinte resultado:

Teorema 1.0.1 ((Mazet; Rosenberg, 2014)). *Seja M uma 3-variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $0 \leq K \leq 1$ e seja Σ esfera mínima mergulhada em M com $|\Sigma| = 4\pi$. Então M é isométrica à esfera $\mathbb{S}^3$ ou a um quociente de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.*

No capítulo 4, por sua vez, apresentaremos a demonstração do segundo teorema presente em (Mazet; Rosenberg, 2014) que diz:

Teorema 1.0.2. *Seja M uma 3-variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K \leq -1$ e seja T um 2-toro mergulhado em M com curvatura média constante igual a 1. Então, T separa M e seu lado médio convexo é isométrico a uma cúspide hiperbólica.*

2 Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados preliminares sobre variedades diferenciáveis e geometria Riemanniana que serão necessários para o entendimento dos resultados principais 3.0.2 e 4.0.1, provados por L. Mazet e H. Rosenberg, sobre os quais dissertaremos neste trabalho. Assumiremos que o leitor possui conhecimento prévio da geometria diferencial de curvas e superfícies.

Os conceitos, resultados e exemplos aqui expostos estão em (Do Carmo, 2010), (Do Carmo, 2019), (Boyce; DiPrima, 2010), (Manfio, s.d.[b]), (Manfio, s.d.[a]), (SANTOS, 2024) e (Caminha, 2010). Por questão de objetividade, omitiremos as demonstrações.

2.1 Variedades diferenciáveis

Intuitivamente, as variedades diferenciáveis são objetos que se parecem, pelo menos localmente, com o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ e, nas quais, é possível desenvolver as ideias do Cálculo Diferencial e Integral.

Nesta seção faremos uma abordagem dos principais conceitos e resultados das variedades diferenciáveis. Os resultados aqui presentes encontram-se em (Do Carmo, 2019) e (Manfio, s.d.[b]).

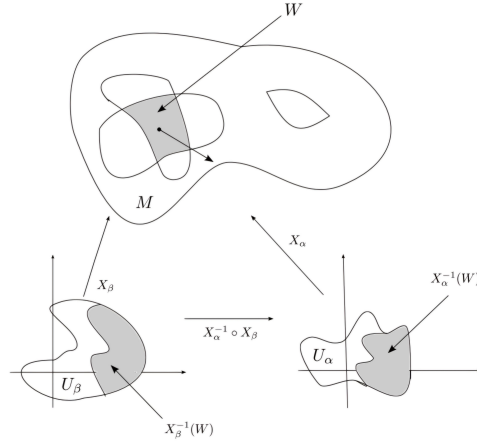
Definição 2.1.1. Uma **variedade diferenciável** n -dimensional é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável M e uma família de aplicações $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow$ definidas em abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ tais que:

1. $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para cada α , $\mathbf{x}_\alpha$ é um homeomorfismo entre U_α e o aberto $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \subset M$;
3. Para todo par α, β , as aplicações $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ são diferenciáveis (Figura 1).

Dizemos que o par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ (ou simplesmente a aplicação $\mathbf{x}_\alpha$) com $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é uma **parametrização** (ou sistema de coordenadas) de M em p , e $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é uma **vizinhança coordenada** de p . Uma família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma **estrutura diferenciável**. Além disso, denotaremos por M^n uma variedade diferenciável M n -dimensional (quando não houver perigo de confusão, usaremos apenas a notação M).

Exemplo 2.1.2 (Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$). Um exemplo trivial de variedade diferenciável é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com a estrutura diferenciável dada pela aplicação identidade $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Figura 1 – Variedade diferenciável.



Fonte: (SANTOS, 2024).

Exemplo 2.1.3 (Esfera $\mathbb{S}^n$). A n-esfera unitária

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

com a topologia induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$ é uma variedade diferenciável com uma estrutura diferenciável que pode ser introduzida, por exemplo, através do seguinte atlas:

- **Atlas de gráficos de hemisférios:** para cada $i = 1, \dots, n+1$, consideremos os seguintes conjuntos (hemisférios)

$$U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_i > 0\} \quad \text{e} \quad U_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_i < 0\}.$$

Seja

$$D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$$

o disco unitário em $\mathbb{R}^n$. As aplicações $\mathbf{x}_i^\pm : D_n \rightarrow \mathbb{S}^n$ definidas por

$$\mathbf{x}_i^\pm(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n x_j^2}, x_{i+1}, \dots, x_n \right)$$

são parametrizações de $\mathbb{S}^n$ com $\mathbf{x}_i^\pm(D_n) = U_i^\pm$. É um exercício padrão mostrar que a coleção $\{(U_i^\pm, \mathbf{x}_i^\pm)\}_{i=1}^{n+1}$ é um atlas de $\mathbb{S}^n$.

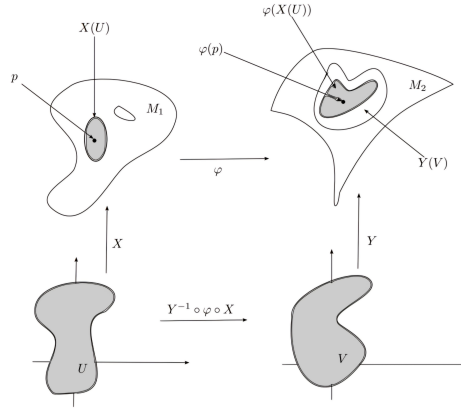
A relação básica entre variedades diferenciáveis é a noção de aplicação diferenciável.

Definição 2.1.4. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é **diferenciável** em $p \in M_1$ se, dada uma parametrização $\mathbf{y} : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $\varphi(p)$, existe uma parametrização $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ em p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subseteq \mathbf{y}(V)$ e a aplicação

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.1)$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$ (Figura 2). Dizemos que φ é diferenciável em um aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Figura 2 – Diferenciabilidade.



Fonte: (SANTOS, 2024).

A definição acima não depende da escolha das parametrizações (Do Carmo, 2019). A aplicação (2.1) é chamada a **expressão** de φ nas parametrizações x e y .

Definição 2.1.5. Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é chamada uma **curva** (diferenciável) em M . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja C^∞ o conjunto das funções reais diferenciáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. O **vetor tangente à curva** α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : C^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \Big|_{t=0} \quad f \in C^\infty.$$

Um **vetor tangente em p** é um vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p é indicado por $T_p M$.

Dada uma parametrização $x : U \rightarrow M$ com $x(0) = p$, é possível expressar a função f e a curva α em termos das derivadas de α nessa parametrização e concluir que o conjunto $T_p M$ munido com as operações usuais de funções é um espaço vetorial n -dimensional. A parametrização x determina uma **base associada** $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_0 \right\}$ em $T_p M$ e, tal base independe do sistema de coordenadas escolhido. Assim sendo, $T_p M$ é chamado o **espaço tangente** de M em p .

Com a definição de espaço tangente podemos apresentar o fibrado tangente de uma variedade.

Definição 2.1.6 (Fibrado tangente TM). Seja M uma variedade diferenciável. A cada ponto $p \in M$, associamos o espaço tangente $T_p M$, que é um espaço vetorial real de

dimensão n . A união disjunta de tais espaços é chamado **fibrado tangente** de M . Mais precisamente,

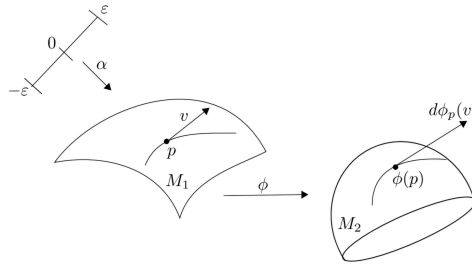
$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}.$$

Um fato importante sobre o fibrado tangente TM é que ele é variedade diferenciável $2n$ -dimensional. Uma demonstração pode ser encontrada em (Do Carmo, 2019).

Definiremos agora a diferencial de uma aplicação diferenciável.

Definição 2.1.7. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_p M_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é chamada a **diferencial** de α em p .

Figura 3 – A diferencial de φ .



Fonte: PRÓPRIA AUTORA.

Proposição 2.1.8. A aplicação linear $d\varphi_p$ definida acima é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Definição 2.1.9. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é um **difeomorfismo** se é diferenciável, bijetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável. φ é um **difeomorfismo local** em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

Definimos a seguir dois casos especiais de aplicações diferenciáveis que nos permitem estudar propriedades geométricas e topológicas das variedades.

Definição 2.1.10. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma **imersão** se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$.

Definição 2.1.11. Uma imersão $\varphi : M \rightarrow N$ que é um homeomorfismo sobre sua imagem $\varphi(M) \subseteq N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N é dita um **mergulho**.

Se $M \subset N$, a inclusão $i : M \rightarrow N$ é um mergulho. Nesse caso, dizemos que M é uma **subvariedade** de N .

Observamos que se $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$. A diferença $n - m$ é chamada a codimensão da imersão φ .

Exemplo 2.1.12. A inclusão $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(p) = (p, 0)$$

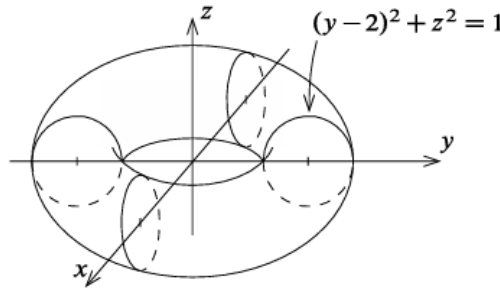
é um exemplo simples de imersão. De fato, φ é diferenciável e injetiva e temos $d\varphi_p = \varphi$ para todo $p \in \mathbb{R}^m$. Logo φ é uma imersão.

Exemplo 2.1.13. A aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi(x, y) = ((2 + \cos 2\pi y) \cos 2\pi x, (2 + \cos 2\pi y) \sin 2\pi x, \sin 2\pi y)$$

define um mergulho de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ em $\mathbb{R}^3$, sua imagem é chamado de **toro** e é obtido pela revolução do círculo $(y - 2)^2 + z^2 = 1$ no plano yz em torno do eixo z (Figura 4).

Figura 4 – Toro de revolução.



Fonte: (Lee, 2003).

Exemplo 2.1.14 (Superfície regular). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ as parametrizações de S . Por definição, temos que tais parametrizações formam uma estrutura diferenciável. Desse modo, as aplicações $\mathbf{x}_\alpha$ são diferenciáveis com inversas $\mathbf{x}_\alpha^{-1}$ diferenciáveis. Logo, cada $\mathbf{x}_\alpha$ é um mergulho de U_α em S . Além disso, como $i : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um mergulho, segue que S é uma subvariedade de $\mathbb{R}^3$.

A seguir definiremos o conceito de orientação em variedades diferenciáveis.

Definição 2.1.15. Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é **orientável** se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ tal que:

- (i) Para todo par α, β com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\mathbf{x}_\alpha \circ \mathbf{x}_\beta^{-1}$ tem determinante positivo.

Caso contrário, diz-se que M é **não-orientável**. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a definição 2.1.15 é chamada uma **orientação** de M . Então, M é dita **orientada**. Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem a definição 2.1.15 determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz a mesma definição.

Definição 2.1.16. Um **campo de vetores** X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_p M$, ou seja,

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow TM \\ p &\longmapsto X(p) \end{aligned}$$

Um campo é dito **diferenciável** se a aplicação acima é diferenciável.

Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M .

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ podemos expressar um campo diferenciável X em M em termos da parametrização x :

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ é a base associada a parametrização x .

Lema 2.1.17. Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M . Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in C^\infty(M)$ temos

$$Zf = (XY - YX)f.$$

Demonstração. Veja (Do Carmo, 2019). □

O campo vetorial Z obtido no lema acima é chamado o **colchete** $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y .

A operação colchete goza das seguintes propriedades:

Proposição 2.1.18. Sejam X, Y, Z campos diferenciáveis em M e a, b números reais, f e g funções diferenciáveis, então:

- i. (Anticomutatividade) $[X, Y] = -[Y, X]$;
- ii. (Linearidade) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$;
- iii. (Identidade de Jacobi) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$;
- iv. $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$.

Demonstração. Veja (Do Carmo, 2019). □

O colchete $[X, Y]$ é diferenciável e pode ser interpretado como uma derivada de Y ao longo das "trajetórias" de X .

2.2 Variedades Riemannianas

Nessa seção apresentaremos essa linguagem básica e alguns conceitos fundamentais da Geometria Riemanniana dos quais faremos uso nos capítulos 3 e 4. Um estudo mais detalhando pode ser visto em (Do Carmo, 2019), (Manfio, s.d.[a]) e (Lee, 2006).

2.2.1 Métricas Riemannianas

O ponto de partida para o estudo de Geometria Riemanniana é o conceito de **métrica Riemanniana**, o qual será apresentado a seguir. Seguiremos principalmente a abordagem apresentada em (Do Carmo, 2019).

Definição 2.2.1. Uma **métrica Riemanniana** em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $x : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .

Vale notar que esta definição de métrica Riemanniana não depende da escolha da parametrização.

Definição 2.2.2. Uma variedade diferenciável M com uma dada métrica Riemanniana g é chamada uma **variedade Riemanniana** (M, g) .

No que segue, indicaremos uma variedade Riemanniana (M, g) apenas por M , explicitando sua métrica g quando for conveniente.

Exemplo 2.2.3 (Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$). No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, podemos identificar

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Assim, a métrica é dada por

$$\langle e_i, e_j \rangle_p = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

isto é,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

Chamamos essa métrica de **métrica canônica** de $\mathbb{R}^n$. No caso $n = 1$, isto é, na reta $\mathbb{R}$, a métrica canônica é denotada por dt^2 .

Definição 2.2.4 (Métrica induzida). Seja M uma variedade diferenciável e $(\overline{M}, \overline{g})$ uma variedade Riemanniana. Se $f : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão então $\overline{g}$ induz uma métrica em M por f , dada por

$$f^* \overline{g}(u, v) = \overline{g}_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)) \quad (2.2)$$

para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_p M$. A métrica $f^* \bar{g}$ assim definida é chamada **métrica induzida** em X pela aplicação f . Denotando $g = f^* \bar{g}$, obtemos a variedade Riemanniana (M, g) . Em particular, se M é uma subvariedade de $\bar{M}$ então a métrica g de M é induzida por $f = i : M \rightarrow \bar{M}$.

Exemplo 2.2.5 (Esfera $\mathbb{S}^n$). A n -esfera unitária $\mathbb{S}^n$ munida com a métrica induzida pelo espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ é uma variedade Riemanniana.

Exemplo 2.2.6 (Métrica produto). Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) duas variedades Riemannianas e considere o produto cartesiano $M_1 \times M_2$, respectivamente. Consideremos $M_1 \times M_2$ com a estrutura diferenciável produto e sejam $\pi_1 : M_1 \times M_2$, definidas por $\pi_1(p, q) = p$, e $\pi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$, dada por $\pi_2(p, q) = q$, as projeções canônicas. Definimos então uma métrica Riemanniana g (**métrica produto**) pondo:

$$g(u, v) = g_1(d\pi_1 \cdot u, d\pi_1 \cdot v)_p + g_2(d\pi_2 \cdot u, d\pi_2 \cdot v)_q$$

para todo $(p, q) \in M_1 \times M_2$, $u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$. Como g_1 e g_2 são métricas Riemannianas, é possível mostrar que g é de fato uma métrica Riemanniana em $M_1 \times M_2$.

Exemplo 2.2.7 (Toro *flat* $\mathbb{T}^n$). O toro $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^n$ com produto produto, onde cada fator $\mathbb{S}^1$ está munida com a métrica induzida de $\mathbb{R}^2$, chama-se **toro flat**.

O resultado importante a seguir garante a existência de métricas Riemannianas em qualquer variedade diferenciável.

Proposição 2.2.8. Toda variedade diferenciável M admite uma métrica Riemanniana g .

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Apresentaremos na definição seguinte uma noção de equivalência entre variedades Riemannianas.

Definição 2.2.9. Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado uma **isometria** se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df(u), df(v) \rangle_{f(p)} \quad (2.3)$$

para todo $p \in M$, $u, v \in T_p M$.

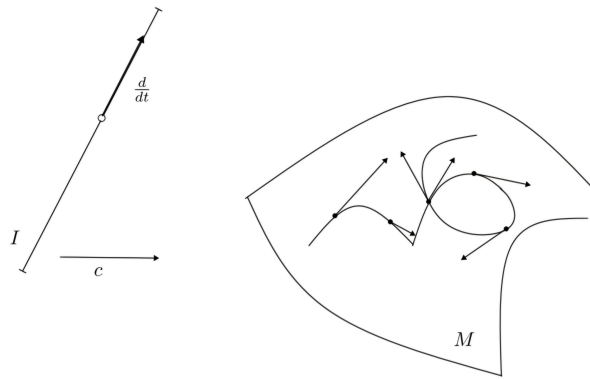
Definição 2.2.10. Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma **isometria local** em $p \in M$, se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo (2.3).

Dada uma variedade Riemanniana M , podemos definir, usando sua métrica Riemanniana, o comprimento de curvas em M . Introduziremos agora algumas definições e resultados acerca desse conceito.

De fato, sendo M uma variedade Riemanniana e $c : I \rightarrow M$ uma curva em M , podemos definir o **comprimento da curva** $c : I \rightarrow M$ de $t = a$ a $t = b$ por

$$L_a^b(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt. \quad (2.4)$$

Figura 5 – Curva em uma variedade Riemanniana.



Fonte: PRÓPRIA AUTORA.

Finalizamos essa subseção apresentando o conceito de campos vetoriais ao longo de curvas em variedades diferenciáveis.

Definição 2.2.11. Seja M uma variedade diferenciável e $c : I \rightarrow M$ uma curva em M . Um **campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$** é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Dizemos que V é **diferenciável** se para todo $f \in C^\infty(M)$, a função $t \rightarrow V(t)f$ é diferenciável em I .

2.2.2 Conexão Riemanniana

Uma conexão Riemanniana (ou conexão de Levi-Civita) é uma maneira de conceituar a diferenciação de campos de vetores em uma variedade Riemanniana. Nessa subseção, apresentaremos algumas propriedades relativas às conexões afins, enfatizando as conexões Riemannianas.

Definição 2.2.12. Uma **conexão afim** ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$,
- (ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$,
- (iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$,

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Exemplo 2.2.13 (Conexão Euclidiana). Identificando espaços tangentes em $\mathbb{R}^n$ com o próprio $\mathbb{R}^n$, vetores tangentes com vetores em $\mathbb{R}^n$ e campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$ com aplicações suaves $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, podemos definir a **conexão euclidiana** $\nabla : \mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ por

$$(\nabla_X Y)_p = dY_p(X_p),$$

ou seja, a derivada direcional do campo Y em p na direção de X_p . Em coordenadas, usando a definição de diferencial em $\mathbb{R}^n$,

$$dY_p(X_p) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) e_j,$$

ou seja,

$$\nabla_X Y = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Enunciaremos agora um resultado de existência e unicidade de derivada covariante ao longo de curvas em uma variedade diferenciável munida de uma conexão afim.

Proposição 2.2.14. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado **derivada covariante de V ao longo de c** , tal que :

- a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
- b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde V é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I .
- c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y.$$

. Em particular, em $\mathbb{R}^n$, $\frac{DV}{dt}$ é a derivada usual.

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Definição 2.2.15. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo de vetores V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado **paralelo** quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Diante da breve apresentação a respeito de conexões afins, introduziremos então as conexões Riemannianas que junto às métricas Riemannianas, geodésicas e curvatura integram o conjunto de conceitos básicos da Geometria Riemanniana.

Definição 2.2.16. Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana com uma conexão afim ∇ . Dizemos que ∇ é **compatível** com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c , tivermos

$$\langle P, P' \rangle = \text{constante}.$$

Uma caracterização alternativa de uma conexão compatível com a métrica Riemanniana de uma variedade Riemanniana M é dada pelo seguinte resultado.

Proposição 2.2.17. Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ temos que

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Em outras palavras, dizer que uma conexão é compatível é dizer que podemos aplicar a regra do produto usual quando derivamos o produto interno de campos de vetores.

Um outro conceito importante nesse estudo é o de conexão simétrica em uma variedade diferenciável M .

Definição 2.2.18. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita **simétrica** quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{para todo } X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (2.5)$$

Enunciaremos agora o teorema fundamental dessa subseção que introduz uma única conexão afim com características específicas em uma variedade Riemanniana qualquer.

Teorema 2.2.19 (Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:

- (a) ∇ é simétrica.
- (b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

A conexão afim dada pelo teorema acima é denominada **conexão Riemanniana** de M .

De agora em diante, M denotará uma variedade Riemanniana munida de uma conexão Riemanniana.

Exemplo 2.2.20 (Conexão Riemanniana em $\mathbb{R}^n$). A conexão euclidiana (Exemplo 2.2.13) é a conexão riemanniana de $\mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana (Exemplo 2.2.3). De fato, sejam $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável e sejam V, W campos de vetores tangentes a M ao longo de α . Como a derivada covariante em $\mathbb{R}^n$, obtida por meio da conexão euclidiana, é a derivada usual, é fácil ver que

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle.$$

Logo, a conexão euclidiana é compatível com a métrica euclidiana. Além disso, ela é simétrica, pois

$$\begin{aligned} [(\nabla_X Y)_p - (\nabla_Y X)_p](f) &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= [X, Y]_p(f). \end{aligned}$$

2.2.3 Geodésicas

Conhecidas como curvas com aceleração nula, as geodésicas fazem parte da linguagem básica das variedades Riemannianas e são caracterizadas por minimizarem o comprimento de arco para pontos “suficientemente próximos”.

Nesta subseção, faremos um breve estudo das geodésicas nas variedades Riemannianas.

Definição 2.2.21. Dizemos que uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ é uma **geodésica** se a derivada covariante de seu vetor tangente é identicamente nula, isto é,

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t) = 0$$

para todo $t \in I$.

Exemplo 2.2.22 (Geodésicas da Esfera). As geodésicas de uma esfera são grandes círculos (isto é, círculos cujos centros são o centro da esfera, que podem também ser obtidos intersectando a esfera com planos passando pela origem da esfera).

Veremos agora um resultado de equações diferenciais que será essencial na definição de aplicação exponencial.

Teorema 2.2.23. Se X é um campo C^∞ num aberto V de uma variedade M e $p \in V$, então existem um aberto $V_0 \subset V$, $p \in V_0$, um número $\delta > 0$, e uma aplicação C^∞ , $\varphi : (-\delta, \delta) \times V_0 \rightarrow M$ tais que a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única trajetória de X que no instante $t = 0$ passa pelo ponto q , para cada $q \in V_0$.

A aplicação descrita no teorema acima chama-se o fluxo de X em V .

Considerando TM o fibrado tangente de M definido em (2.1.6), podemos enunciar o seguinte resultado.

Lema 2.2.24. Existe um único campo G em TM cujas trajetórias são da forma $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$, onde γ é uma geodésica em M .

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Com isso em mente, definiremos campo geodésico e alguns resultados que permitirão definir a aplicação exponencial.

Definição 2.2.25. O campo G definido acima é chamado **campo geodésico** em TM e seu fluxo é o **fluxo geodésico** de TM .

Proposição 2.2.26. Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M$, $p \in V$, números $\delta > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$ e uma aplicação C^∞

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \mathcal{U} = \{(q, v) : q \in V, v \in T_q M, |v| < \varepsilon_1\},$$

tais que a curva $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v , para cada $q \in V$ e cada $u \in T_q M$ com $|v| < \varepsilon_1$.

O resultado acima afirma que se $|v| < \varepsilon_1$, a geodésica $\gamma(t, q, v)$ existe em um intervalo $(-\delta, \delta)$ e é única. Em verdade, é possível aumentar (diminuir) o intervalo de definição de uma geodésica diminuindo (aumentando) sua velocidade, isto é, o comprimento de seu vetor tangente. Isto decorre do seguinte lema de homogeneidade.

Lema 2.2.27 (Homogeneidade de uma geodésica). Se a geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, q, av)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, está definida no intervalo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ e

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

A Proposição 2.2.26 e a homogeneidade de uma geodésica permitem tornar o intervalo de definição de uma geodésica uniformemente grande numa vizinhança de p . Mais precisamente, temos o resultado que segue.

Proposição 2.2.28. Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M , um número real $\varepsilon > 0$ e uma aplicação $\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ de classe C^∞ , onde $\mathcal{U} = \{(q, v) \in TM; q \in V, w \in T_p M, |w| < \varepsilon\}$, tal que

$$t \rightarrow \gamma(t, q, w), \quad t \in (-2, 2),$$

é a única geodésica que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w , para cada $q \in V$ e cada $w \in T_p M$, com $|w| < \varepsilon$.

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Nesse contexto, podemos definir a aplicação exponencial.

Definição 2.2.29. Sejam $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto dado pela Proposição 2.2.28. Então, a aplicação $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v), \quad (q, v) \in \mathcal{U},$$

é chamada a **aplicação exponencial** em $\mathcal{U}$.

Observamos que $\exp$ é diferenciável e geralmente utilizamos a restrição de $\exp$ a um aberto do espaço tangente $T_p M$, a saber, $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$ dada por

$$\exp_q(v) = \exp(q, v)$$

onde $B_\varepsilon(0)$ é uma bola aberta centrada na origem 0 de $T_q M$ de raio ε . Notamos ainda que $\exp_q$ é diferenciável e $\exp_q(0) = q$.

Como já mencionado, um dos fatos importantes no estudo das geodésicas é que elas minimizam localmente o comprimento de arco. Daremos agora algumas definições preliminares acerca desse resultado.

Definição 2.2.30. Uma **curva diferenciável por partes** é uma aplicação contínua

$$c : [a, b] \rightarrow M$$

de um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ em M satisfazendo a seguinte condição: existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ de $[a, b]$ tal que as restrições $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, k-1$, são diferenciáveis. Dizemos que c lida os pontos $c(a)$ e $c(b)$. $c(t_i)$ é chamado um **vértice** de c , e o ângulo formado por $\lim_{t \rightarrow t_i^+} c'(t)$ com $\lim_{t \rightarrow t_i^-} c'(t)$ é chamado o **ângulo do vértice** $c(t_i)$.

Definição 2.2.31. Um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é chamado **minimizante** se

$$L(\gamma) \leq L(c),$$

onde $L(\cdot)$ indica o comprimento de uma curva e c é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Se $\exp_p$ é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem em $T_p M$, $\exp_p V = U$ é chamada uma **vizinhança normal** de p . Se $B_\varepsilon(0)$ é tal que seu fecho $\overline{B_\varepsilon} \subset V$, dizemos que $\exp_p B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$ é a **bola normal** centrada em p e raio ε .

O resultado a seguir caracteriza as geodésicas como curvas minimizantes locais.

Proposição 2.2.32. Sejam $p \in M$, U uma vizinhança normal de p , e $B \subset U$ uma bola normal centrada em p . Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ um segmento de geodésica com $\gamma(0) = p$. Se $c : [0, 1] \rightarrow M$ é qualquer cura diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ então

$$L(\gamma) \leq L(c)$$

e se a igualdade vale então $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$.

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Uma observação acerca do resultado acima é que ele não é global, pois se consideramos um arco suficientemente grande de geodésica ele pode deixar de ser minimizante. Por exemplo, as geodésicas de uma esfera são minimizantes até o ponto antípoda, passando deste, elas deixam de ser minimizantes.

Por outro lado, se uma curva c diferenciável por partes é minimizante, enunciaremos um resultado que afirma que c é uma geodésica. Para isso, necessitamos do seguinte teorema.

Teorema 2.2.33. Para cada $p \in M$ existe uma vizinhança W de p e um número $\delta > 0$, tais que, para cada $q \in W$, $\exp_q$ é um difeomorfismo em $B_\varepsilon(0) \subset T_q M$ e $W \subset \exp_q(B_\delta(0))$. Ou seja, W é uma vizinhança normal de cada um de seus pontos. Chamamos W de **vizinhança totalmente normal** de p em M .

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Da Proposição 2.2.32 e do Teorema 2.2.33 podemos afirmar que dados dois pontos $p, q \in M$ existe uma única geodésica minimizante γ de comprimento $< \delta$ ligando p a q .

Enunciaremos então o resultado esperado.

Corolário 2.2.34. Se uma curva diferenciável por parte $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, com parâmetro proporcional ao comprimento de arco, tem comprimento menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ então γ é uma geodésica. Em particular, γ é regular.

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

2.2.4 Curvaturas

Intuitivamente, a noção de curvatura em uma variedade Riemanniana está relacionada com o quanto tal variedade deixa de ser euclidiana. Esse conceito foi desenvolvido geometricamente por Riemann em 1868 e algebricamente por Christoffel em 1869.

Nessa seção apresentaremos uma definição de curvatura em variedades Riemannianas. Em particular, veremos a curvatura seccional que é uma generalização da curvatura Gaussiana das superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Definição 2.2.35. A **curvatura** R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Exemplo 2.2.36. A curvatura em $\mathbb{R}^n$ é identicamente nula. De fato, dados $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ onde $Z = (z_1, \dots, z_n)$ são as componentes do campo Z nas coordenadas canônicas do $\mathbb{R}^n$, podemos escrever:

$$\nabla_X \nabla_Y Z = (X(Y(z_1)), \dots, X(Y(z_n))) \quad \text{e} \quad \nabla_Y \nabla_X Z = (Y(X(z_1)), \dots, Y(X(z_n)))$$

e como $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ inferimos que

$$R(X, Y)Z = 0.$$

Considerando um sistema de coordenadas $\{x_i\}$ em torno de $p \in M$. Como $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$, obtemos

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = (\nabla_{\partial/\partial x_j} \nabla_{\partial/\partial x_i} - \nabla_{\partial/\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

em outras palavras, a curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante.

As proposições seguintes apresentam algumas propriedades de R .

Proposição 2.2.37. A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:

(i) R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

onde $f, g \in \mathcal{D}(M)$ e $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$.

- (ii) Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ é linear, isto é,

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z,$$

onde $f \in \mathcal{D}(M)$ e $Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Proposição 2.2.38 (Primeira Identidade de Bianchi).

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

De agora em diante, escreveremos $\langle X, Y, Z, T \rangle$ para representar $\langle R(X, Y)Z, T \rangle$.

Com o intuito de definirmos curvatura seccional, introduziremos agora algumas notações.

Dado um espaço vetorial V munido com um produto interno, faremos a seguinte identificação:

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bidimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in V$.

Proposição 2.2.39. Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bidimensional do espaço tangente $T_p M$ e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Definição 2.2.40. Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço de dimensão dois $\sigma \subset T_p M$, o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado **curvatura seccional** de M em p segundo σ .

Um fato importante a respeito da curvatura seccional é que a curvatura R fica completamente determinada se conhecemos $K(\sigma)$, para todo σ . Uma demonstração desse fato se encontra em (Do Carmo, 2019).

Dizemos que uma variedade Riemanniana M tem **curvatura seccional constante** igual a c se para todo ponto $p \in M$ e todo subespaço 2-dimensional $\sigma \subset T_p M$, temos

$$K(\sigma) = c.$$

O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ e a esfera unitária $\mathbb{S}^n$ são exemplos de variedades Riemannianas com curvatura seccional constante.

As variedades Riemannianas com essa característica tem um papel essencial no estudo da Geometria Riemanniana.

Através de combinações das curvaturas seccionais obtemos a curvatura de Ricci e a curvatura escalar que serão apresentadas a seguir.

Seja $x = z_n$ um vetor unitário em $T_p M$ e escolha uma base ortonormal $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a x .

Definição 2.2.41. Como a notação acima, a **curvatura de Ricci** é definida por

$$Ric_p(x) = \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle.$$

Definição 2.2.42. Ainda usando a notação dada, a **curvatura escalar** é dada por:

$$R(p) = \sum_j Ric_p(z_j) = \sum_{ij} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle.$$

Tanto a curvatura de Ricci como a escalar não dependem da base ortonormal escolhida.

2.2.5 Imersões isométricas

Nesta subseção, apresentaremos algumas notações, definições e resultados relacionados ao conceito de imersão isométrica que serão necessários para o entendimento dos resultados apresentados nos capítulos 3 e 4. Iniciamos com a definição de imersão isométrica.

Definição 2.2.43 (Imersões isométricas). Sejam (M^n, g) e $(\overline{M}^m, \overline{g})$ variedades Riemannianas. Uma **imersão isométrica** de (M, g) em $(\overline{M}, \overline{g})$ é uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ satisfazendo

$$g_p(u, v) = \overline{g}_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)) \quad (2.6)$$

para todo $p \in M$ e todos $u, v \in T_p M$.

Na definição acima, como $f : M \rightarrow \overline{M}$ é uma imersão, lembramos que necessariamente devemos ter $n \leq m$ e que o número $k = m - n$ chama-se a codimensão da imersão. Note que a métrica g de M , nesse caso, coincide com a métrica induzida em M por f , ou seja, $g = f^* \overline{g}$.

Como toda imersão é localmente um mergulho, cometeremos, em vários momentos, um abuso de notação e usaremos as seguintes identificações: $M \simeq f(M) \subset \overline{M}$ e $T_p M \simeq df_p(T_p M) \subset T_p \overline{M}$, para $p \in M$.

Para cada $p \in M$, o produto interno $\bar{g}_p$ em $T_p \overline{M}$ decompõe $T_p \overline{M}$ na soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

sendo $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$. Assim, se $v \in T_p \overline{M}$, então

$$v = v^T + v^N,$$

onde $v^T \in T_p M$ é componente tangencial e $v^N \in (T_p M)^\perp$ é a componente normal de v .

Consideremos agora uma imersão isométrica $f : (M, g) \rightarrow (\overline{M}, \bar{g})$. Sejam ∇ e $\bar{\nabla}$, respectivamente, as conexões Riemannianas de M e $\overline{M}$. Sejam X e Y campos locais de vetores tangentes em M e $\bar{X}, \bar{Y}$ extensões locais de X e Y , respectivamente, em $\overline{M}$. É conhecido que a conexão Riemanniana de (M, g) é dada por

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T,$$

onde o lado direito da igualdade acima é a componente tangencial de $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$. Desse modo, podemos definir também

$$\Pi(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp,$$

ou seja, $\Pi(X, Y)$ é um campo local em $\overline{M}$ normal a M .

No que segue, se $U \subset M$ é um aberto, indicaremos por $\mathcal{X}(U)^\perp$ os campos de vetores diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \simeq U$.

Uma propriedade importante de Π é dada a seguir.

Proposição 2.2.44. Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $\Pi : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$ dada por

$$\Pi(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear (com relação à multiplicação por funções em $C^\infty(U)$) e simétrica.

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Como $\Pi(X, Y)$ é bilinear, temos, exprimindo Π em um sistema de coordenadas, que o valor de $\Pi(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$. Logo, para todo $p \in M$, fica bem definida a forma bilinear $\Pi_p : T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^\perp$ dada por

$$\Pi_p(x, y) = \Pi(X, Y),$$

onde $X, Y \in C^\infty(U)$ são extensões locais quaisquer dos vetores x e y . Essa forma bilinear chama-se a *segunda forma fundamental* de f em $p \in M$.

Dado $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. A forma bilinear $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Pi_\eta(x, y) = \langle \Pi(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M,$$

chama-se a *segunda forma fundamental de f em $p \in M$ segundo o vetor normal η* .

Observemos que à aplicação bilinear Π_η fica associada uma aplicação linear autoadjunta $A_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ definida por

$$\langle A_\eta(x), y \rangle = \Pi_\eta(x, y), \quad x, y \in T_p M.$$

O próximo resultado nos fornece uma expressão da aplicação linear A_η associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

Proposição 2.2.45. Seja $p \in M$, $x \in T_p M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. Seja $\bar{\eta}$ uma extensão local de η normal a M . Então

$$A_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x \bar{\eta})^T.$$

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Exemplo 2.2.46 (Hipersuperfícies). Seja $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica com codimensão é igual 1. Nesse caso, dizemos que $f(M) \subset \bar{M}$ é uma **hipersuperfície**.

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como $A_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ é autoadjunto, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ com valores próprios reais $k_1 \leq \dots \leq k_n$, isto é,

$$A_\eta(e_i) = k_i e_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Se M e $\bar{M}$ são ambas orientáveis e estão orientadas (ou seja, escolhemos orientações para M e $\bar{M}$) então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que sendo $\{v_1, \dots, v_n\} \subset T_p M$ uma base na orientação de M , $\{v_1, \dots, v_n, \eta\} \subset T_p \bar{M}$ seja uma base na orientação de $\bar{M}$. Nesse caso, denominamos os e_i **direções principais** e os k_i **curvaturas principais** de f .

As funções simétricas de $k_1, \dots, k_n$ são invariantes geométricos da imersão. Por exemplo,

$$\det(A_\eta) = k_1 \cdots k_n$$

é denominada a **curvatura de Gauss-Kronecker** de f e

$$\frac{1}{n}(k_1 + \dots + k_n)$$

é denominada a **curvatura média** de f .

O seguinte resultado, chamado equação de Gauss, relaciona a curvatura seccional de M com a curvatura seccional de $\overline{M}$ e a segunda forma fundamental de cada uma.

Dados $x, y \in T_p M \subset T_p \overline{M}$ vetores linearmente independentes, indicaremos por $K(x, y)$ e $\overline{K}(x, y)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, do plano gerado por x e y .

Teorema 2.2.47 (Gauss). *Sejam $p \in M$ e $x, y \in T_p M$ vetores ortonormais. Então*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle \Pi(x, x), \Pi(y, y) \rangle - |\Pi(x, y)|^2. \quad (2.7)$$

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Observação 1. A fórmula de Gauss (2.7), no caso em que $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície, admite uma forma mais simples. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, $|\eta| = 1$. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ para a qual $A_\eta = A$ é diagonal, ou seja,

$$A(e_i) = k_i e_i, \quad i = 1, \dots, n$$

onde $k_1 \leq \dots \leq k_n$ são valores próprios de A . Assim,

$$\Pi(e_i, e_i) = \Pi_\eta(e_i, e_i)\eta = k_i \eta \text{ e } \Pi(e_i, e_j) = \Pi_\eta(e_i, e_j)\eta = 0$$

se $i \neq j$. Portanto, podemos escrever

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = k_i k_j. \quad (2.8)$$

Em particular, quando $n = 2$ e $\overline{M}$ tem curvatura seccional nula (flat), a curvatura seccional de $T_p M$ em M coincide com a curvatura de Gauss.

Exemplo 2.2.48 (Curvatura de $\mathbb{S}^n$). A curvatura seccional da esfera unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é constante e igual a 1. Com efeito, seja $\eta(y) = -y \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|y| = 1$, uma orientação de $\mathbb{S}^n$. A aplicação normal de Gauss é dada por $-I$, onde I é a identidade de $\mathbb{S}^n$. Isso implica que a aplicação autoadjunta associada a H_η tem todos os seu autovalores próprios iguais a 1. Ou seja, para todo $p \in \mathbb{S}^n$, todo $v \in T_p \mathbb{S}^n$ é um vetor próprio com autovalor 1. Logo, por (2.8) temos

$$K(u, v) = 1$$

para todo $u, v \in T_p \mathbb{S}^n$, uma vez que, a curvatura seccional de $\mathbb{R}^{n+1}$ é identicamente nula, isto é, $\overline{K}(u, v) = 0$.

Definição 2.2.49. Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é dita **geodésica** em $p \in M$ se a segunda forma fundamental II_p é identicamente nula em p . A imersão f é **totalmente geodésica** se ela é geodésica para todo $p \in M$.

O seguinte resultado justifica ao termo “imersão geodésica”.

Proposição 2.2.50. Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se, e somente se, toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em $f(p)$.

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

A proposição acima permite concluir que a curvatura seccional $K(\sigma, p)$ do subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$ em p é a curvatura Gaussiana em p de uma pequena superfície formada por geodésicas de M que saem de p e são tangentes a σ .

Chegamos agora ao conceito de imersão isométrica mínima o qual é um conceito mais fraco do que imersão geodésica e será de grande importância no decorrer dessa dissertação.

Seja $f : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão isométrica. Dado $p \in M$, o vetor $\vec{H}_p \in (T_p M)^\perp$ definido por

$$\vec{H}_p = \text{tr } \Pi_p = \sum_{i=1}^n \Pi_p(e_i, e_i),$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\} \subset T_p M$ é qualquer base ortonormal, chama-se o *vetor curvatura média* de f em $p \in M$. Por sua vez, fixado $\eta \in (T_p M)^\perp$, o escalar

$$H_\eta(p) = \frac{1}{n} \langle \vec{H}_p, \eta \rangle = \frac{1}{n} \text{tr}(A_\eta)(p)$$

chama-se a *curvatura média* de f em p segundo o vetor normal η .

Definição 2.2.51. Uma imersão isométrica $f : M \rightarrow \overline{M}$ é **mínima** se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_p M)^\perp$ tem-se

$$H_\eta(p) = 0.$$

Se escolhermos um referencial ortonormal $\eta_1, \dots, \eta_k$ de vetores em $\mathcal{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de p em que f é um mergulho, podemos escrever, em p ,

$$\Pi(x, y) = \sum_{i=1}^k \Pi_i(x, y) \eta_i, \quad x, y \in T_p M, \quad i = 1, \dots, k,$$

onde $\Pi_i = \Pi_{\eta_i}$, $i = 1, \dots, k$. Logo, o vetor curvatura média pode ser escrito como

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (\text{tr } A_i) \eta_i,$$

onde $A_i = A_{\eta_i}$. Observamos ainda que f é mínima se, e somente se, $H(p) = 0$ para todo $p \in M$.

Observação 2. Seja $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^3$ uma imersão mínima. Seja também $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ para qual $A_\eta = A$ é diagonal como na Observação (1). Sendo mínima, temos $\text{tr}(A) = k_1 + k_2 = 0$, e assim, $k_1 = -k_2$. Logo,

$$\det(A) = k_1 k_2 = -(k_2)^2 \leq 0. \tag{2.9}$$

Se $\det(A) = 0$ então $k_1 = k_2 = 0$. Isso implica que a curvatura média H é identicamente nula e a superfície M^2 é totalmente geodésica. Reciprocamente, se M^2 é totalmente geodésica temos $\det(A) = 0$.

2.2.6 Variedades Riemannianas completas

Faremos um estudo sucinto acerca das relações entre propriedades locais e globais de uma variedade Riemanniana M . O ambiente para essa análise são as variedades Riemannianas completas que são caracterizadas por terem geodésicas definidas para qualquer valor do parâmetro.

Um importante resultado advindo desse estudo é que dados dois pontos quaisquer de uma variedade Riemanniana completa, existe uma geodésica minimizante ligando esses dois pontos.

Definição 2.2.52. Uma variedade Riemanniana M é **(geodesicamente) completa** se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, $\exp_p$, está definida para todo $v \in T_p M$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.2.53. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana conexa. Dados dois pontos quaisquer $p, q \in M$, seja $\Omega_{p,q}$ o conjunto de todas as curvas diferenciáveis por partes $c_{p,q}$ ligando p a q em M é uma variedade Riemanniana conexa. A **distância** $d(p, q)$ é definida por

$$d(p, q) = \inf_{c \in \Omega_{p,q}} L(c).$$

Proposição 2.2.54. Com a distância d , M é um espaço métrico, isto é, (M, d) satisfaz as seguintes propriedades, para todos $p, q, r \in M$:

1. $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$;
2. $d(p, q) = d(q, p)$;
3. $d(p, q) \geq 0$ e $d(p, q) = 0 \iff p = q$.

Demonstração. Ver (Lee, 2006). □

Observamos que se em uma variedade Riemanniana M com $p, q \in M$, existir uma geodésica minimizante γ ligando p a q , então

$$d(p, q) = L(\gamma).$$

Sendo (M, d) um espaço métrico, então d induz uma topologia em M . Um resultado importante, enunciado a seguir, é que a topologia em M definida por sua estrutura diferenciável e a topologia em M induzida por d coincidem.

Proposição 2.2.55. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana conexa. Então a topologia induzida por d , a distância induzida por g , em M coincide com a topologia em M dada pela estrutura diferenciável.

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Enunciaremos agora o resultado central das variedades Riemannianas completas. Em particular, o teorema abaixo nos diz que (M, g) ser (geodesicamente) completa é equivalente a (M, d) ser um espaço métrico completo. Além disso, nesse caso tem-se que quaisquer dois pontos de M podem ser ligados por uma geodésica minimizante.

Teorema 2.2.56 (Ropf-Rinow). Seja M uma variedade Riemanniana e seja $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $\exp_p$ está definida em todo $T_p M$;
- (b) Os subconjuntos limitados e fechados de M são compactos;
- (c) M é completa como espaço métrico;
- (d) M é geodesicamente completa;
- (e) Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset M$, $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$ e $\cup_n K_n = M$, tais que se $q_n \notin K_n$, então $d(p, q) \rightarrow \infty$.

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

- (f) Para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $L(\gamma) = d(p, q)$.

Demonstração. Ver (Do Carmo, 2019). □

Uma consequência importante do resultado acima é a seguinte.

Corolário 2.2.57. Se M é compacta, então M é completa.

Demonstração. Segue imediatamente do item (b). □

2.2.7 Fórmulas de variação

Apresentaremos nesta subseção algumas fórmulas de variação que serão úteis na demonstração dos teoremas 3.0.2 e 4.0.1. Para um aprofundamento nesses resultados ver (SANTOS, 2024), (Colding; Minicozzi, 2011) e (Caminha, 2010).

No que segue, M denotará uma variedade Riemanniana $(n + 1)$ -dimensional e Σ uma hipersuperfície fechada sem bordo.

Definição 2.2.58. Seja $f : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão. Dizemos que uma aplicação diferenciável $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é uma **variação** de f , se:

- (a) As aplicações $f_t : \Sigma \rightarrow M$ definidas por $f_t(x) = F(x, t)$ são imersões para todo t ;
- (b) $f_0 = f$.

Nesse caso, o campo $V = \frac{\partial f_t}{\partial t}|_{t=0}$ chama-se o *campo variacional da variação* em $t = 0$.

Suponha que $F : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma variação da imersão $f : \Sigma \rightarrow M$, de Σ em uma variedade Riemanniana (M, g) , e seja $f_t = F(\cdot, t)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, seja $d\sigma_t^2 = f_t^*g$ a métrica induzida em Σ pela imersão f_t . A seguir vamos calcular a fórmula de variação para $d\sigma_t^2$. Seja N_t o vetor unitário normal a $\Sigma_t = f_t(\Sigma)$ e seja

$$\rho_t = \left\langle \frac{\partial f_t}{\partial t}, N_t \right\rangle.$$

Para simplificar, vamos supor que $\frac{\partial f_t}{\partial t} = \rho_t N_t$ para todo t .

Dado $p \in \Sigma$ e coordenadas locais $(x_1, \dots, x_n)$ de Σ em p , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(d\sigma_t^2)_{ij} &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial t}} \frac{\partial f_t}{\partial x_i}, \frac{\partial f_t}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f_t}{\partial x_i}, \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial t}} \frac{\partial f_t}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} \frac{\partial f_t}{\partial t}, \frac{\partial f_t}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f_t}{\partial x_i}, \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_j}} \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\rangle \\ &= \rho_t \left(\left\langle \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f_t}{\partial x_i}, \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_j}} N_t \right\rangle \right) \\ &= -2\rho_t(\Pi_t)_{ij}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde $\Pi_t = \Pi_{N_t}$ é a segunda forma fundamental (escalar) de Σ_t e ∇ denota a conexão Riemanniana de (M, g) .

Exemplo 2.2.59 (Variação pela exponencial normal). Seja $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta imersa em uma variedade Riemanniana (M^{n+1}, g) completa. Suponha que Σ e M são ambas orientáveis. Seja $N : \Sigma \rightarrow (T\Sigma)^\perp$ um campo de vetores unitários normais a Σ . Usando a aplicação exponencial de M podemos definir uma variação de Σ . De fato, seja $f : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow M$ definida por

$$f(p, t) = \exp_p(tN(p)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Essa variação de Σ será útil nas demonstrações dos Teoremas 4.0.1 e 4.0.1. Note que para cada $p \in \Sigma$, a curva $\gamma : t \in \mathbb{R} \rightarrow f(p, t) \in M$ é geodésica de M com condição inicial $\gamma(0) = p \in \Sigma$ e $\gamma'(0) \in (T_p\Sigma)^\perp$.

Observamos agora que como Σ é compacta e imersa em M , existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $f : \Sigma \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow M$ é uma imersão. Além disso, a métrica induzida pode ser escrita

como $ds_t^2 + dt^2$, onde $ds_t^2 = f_t^*g$, onde $f_t : \Sigma \rightarrow M$ é a imersão dada por $f_t(p) = f(p, t)$. De fato, temos que para todo sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ de Σ em p temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p, t) \perp \frac{\partial f}{\partial t}(p, t).$$

(Veja, como referência, a Seção 4, Capítulo 10, de (Do Carmo, 2010)). Note também que $N_t(p) = \frac{\partial f}{\partial t}(p, t)$ é o vetor unitário normal à hipersuperfície $\Sigma_t = f_t(\Sigma)$.

No que segue, $|\Sigma|$ representará a área da hipersuperfície imersa com relação à métrica induzida pela imersão. Usando a fórmula da variação da métrica acima, temos a fórmula para a primeira variação da área.

Proposição 2.2.60 (Primeira Variação da Área). Suponha que Σ seja compacta (sem bordo). Seja $f : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão isométrica e $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma variação de uma imersão f com campo variacional $V = \frac{\partial f_t}{\partial t}$. Então

$$\frac{d}{dt}|\Sigma| = -2 \int_{\Sigma} \langle V, \vec{H} \rangle d\sigma_t, \quad (2.11)$$

onde $d\sigma_t$ é o elemento de área da métrica Riemanniana em Σ induzida por f .

Demonstração. Ver (SANTOS, 2024). □

Observação 3. Observamos que a fórmula (2.11) também é válida quando Σ é completa não compacta (nesse caso, consideramos variações com suporte compacto) e fechada com bordo (nesse caso, consideramos variações fixam o bordo Σ). Nesse último caso, quando permitimos variações do bordo Σ dentro do bordo do espaço ambiente (contexto de bordo livre), um termo extra de bordo aparece na fórmula da primeira variação de área (ver, por exemplo, (SANTOS, 2024)).

Uma consequência da fórmula (2.11) acima é que uma hipersuperfície compacta (sem bordo) $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ é mínima se, e somente se, Σ for um ponto crítico do funcional área.

Com efeito, se Σ for mínima, então segue imediatamente que Σ é um ponto crítico do funcional área $|\Sigma|$, uma vez que $\vec{H} \equiv 0$. Reciprocamente, suponha que Σ seja um ponto crítico do funcional $|\Sigma|$. Logo,

$$\int_{\Sigma} \langle V, \vec{H} \rangle d\sigma = 0.$$

Escolhendo $V = \vec{H}$, obtemos

$$\int_{\Sigma} \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle d\sigma = 0$$

e, portanto, $\vec{H} = 0$, ou seja, Σ é mínima.

Sejam $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow (M, g)$ uma variação de uma imersão $f : \Sigma^n \rightarrow (M^{n+1}, g)$ e $f_t(\Sigma) = \Sigma_t$. Sejam também N_t e H_t , respectivamente, o campo normal unitário e a curvatura média de Σ_t com respeito à N_t . Suponha que $\frac{\partial f_t}{\partial t}$ é normal a $\Sigma_t = f(\Sigma_t)$ para todo t . Então temos o seguinte resultado.

Proposição 2.2.61.

$$n \frac{dH}{dt} = \Delta_t \rho_t + Ric(N_t, N_t) \rho_t + |A_t|^2 \rho_t, \quad (2.12)$$

onde Δ_t é o operador Laplaciano de Σ na métrica $ds_t^2 = f_t^* g$, Ric é o tensor de Ricci de (M, g) , $A_t = A_{N_t}$ e $\rho_t = \left\langle \frac{\partial f_t}{\partial t}, N_t \right\rangle$.

Demonstração. Ver (Ambrozio, 2015). □

2.2.8 Espaço Hiperbólico

Nesta subseção apresentaremos o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$. Apresentaremos também uma variedade Riemanniana obtida a partir do espaço hiperbólico, chamada *cúspide hiperbólica* a qual servirá de geometria modelo no Teorema 4.0.1.

Definição 2.2.62 (Espaço hiperbólico). O *espaço hiperbólico n -dimensional*, denotado por $\mathbb{H}^n$, é o semiespaço superior aberto em $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

munido com a métrica Riemanniana

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2},$$

onde δ denota a métrica euclidiana.

O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa com curvatura seccional constante igual a -1 . Esta última característica de $\mathbb{H}^n$ é demonstrada em (Do Carmo, 2019).

A geometria hiperbólica, do ponto de vista histórico, foi a primeira geometria não euclidiana a ser conhecida e foi descoberta, de forma independente, pelos matemáticos Bolyai, Lobachevsky e Gauss no início do século XIX. Nela são válidos todos os quatro primeiros axiomas da Geometria Euclidiana, exceto o postulado das paralelas, o qual é violado da seguinte maneira: “*Dada uma reta r e um ponto $P \notin r$, existem infinitas retas passando por P e paralelas à reta r* ”.

Apresentaremos agora a *cúspide hiperbólica*. Focaremos no caso tridimensional para simplificar. Dados $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, defina $\varphi_{(m,n)}(x) = x + me_1 + ne_2$, $x \in \mathbb{H}^3$, onde $e_1 = (1, 0)$

e $e_2 = (0, 1)$. É fácil ver que $G = \{\varphi_{(m,n)} : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3; (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ forma um grupo de isometrias de $\mathbb{H}^3$. É fácil ver que G age de modo propriamente descontínuo em $\mathbb{H}^3$, ou seja, para todo $x \in \mathbb{H}^3$ existe um aberto $x \in U \subset \mathbb{H}^3$ tal que $\varphi_{(m,n)}(U) \cap U = \emptyset$ para todo $(m, n) \neq (0, 0)$. Logo, o espaço quociente $M^3 = \mathbb{H}^3/G$ possui uma estrutura de variedade diferenciável (para detalhes, indicamos o Exemplo 4.8, Seção 4, Capítulo 0, de (Do Carmo, 2019)). Além disso, podemos considerar a métrica do recobrimento em M^3 que é a única métrica g em M^3 que transformar a projeção canônica $\pi : \mathbb{H}^3 \rightarrow M^3 = \mathbb{H}^3/G$ em uma isometria local (veja, por exemplo, a Seção 4, Capítulo 7, de (Do Carmo, 2019) para detalhes).

Note que a variedade Riemanniana (M^3, g) pode ser vista como a variedade Riemanniana $(\mathbb{T}^2 \times (0, \infty), g = \frac{1}{x_3^2}(g_0 + dx_3^2))$, onde $(\mathbb{T}^2, g_0)$ é o toro flat.

Fazendo a mudança de variável $x_3 = e^t$, podemos identificar (M^3, g) com o produto $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ munido com a métrica $g = e^{-2t}g_0 + dt^2$. Essa variedade Riemanniana é completa, tem curvatura seccional constante igual a -1 e chama-se **cúspide hiperbólica**.

Além disso, cada seção $\mathbb{T}^2 \times \{t\}$ é totalmente umbílico e possui curvatura média constante igual a 1.

2.2.9 Espaços de curvatura constante

Por espaços de curvatura constante queremos dizer variedades Riemannianas que possuem curvatura seccional constante.

Os espaços de curvatura constante são amplamente estudados na Geometria Riemanniana. Alguns exemplos são o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com $K \equiv 0$, a esfera unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com $K \equiv 1$ e o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ com $K \equiv -1$. As três são variedades completas e simplesmente conexas.

Chamamos de **forma espacial** as variedades Riemannianas completas de curvatura seccional constante. Logo, podemos dizer que $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ são formas espaciais.

Além disso, quando multiplicamos uma métrica Riemanniana por uma constante k , a curvatura seccional dessa variedade é multiplicada por $1/k$. Desse modo, a menos de uma semelhança, podemos supor que a curvatura seccional constante de uma variedade é 1, 0 ou -1 .

Nesse contexto, é possível provar que essencialmente $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ são as únicas formas espaciais simplesmente conexas. Mais precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.2.63 (Killing-Hopf). Seja M^n uma forma espacial simplesmente conexa, de curvatura igual a K . Então M^n é isométrica a:

- (a) $\mathbb{H}^n$, se $K = -1$;

- (b) $\mathbb{R}^n$, se $K = 0$;
- (c) $\mathbb{S}^n$, se $K = 1$.

Demonstração. (Manfio, s.d.[a]).

□

2.3 Resultado de EDO

O Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para equações diferenciais ordinárias (EDO) é um resultado extremamente útil em diversos ramos da matemática, em particular, na Geometria Diferencial. Faremos uso desse teorema e, por esse motivo, enunciaremos a seguir na versão dada por (Boyce; Diprima, 2010).

Teorema 2.3.1 (Teorema de existência e unicidade de soluções de EDO). Considere o problema de valor inicial (PVI)

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.13)$$

Se f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em um intervalo aberto I contendo t_0 e y_0 é o valor inicial dado, então existe uma única solução para o PVI (2.13) definida para cada $t \in I$.

Demonstração. Ver (Boyce; Diprima, 2010).

□

3 Esferas mínimas de área 4π e rigidez de variedades tridimensional

Abordaremos neste capítulo uma demonstração do primeiro teorema do artigo *On minimal spheres of area 4π and rigidity* de Laurent Mazet e Harold Rosenberg, (Mazet; Rosenberg, 2014). Com esse intuito, apresentaremos inicialmente o Lema 3.0.1.

No que segue, $|\Sigma|$ denotará a área de Σ com respeito à métrica induzida e $\mathbb{S}^n$ representará a esfera com a métrica canônica g_{can} com curvatura Gaussiana igual a 1.

Lema 3.0.1. Seja M uma variedade Riemanniana n -dimensional com curvatura seccional $0 \leq K \leq 1$. Se Σ é uma esfera mínima imersa em M , então $|\Sigma| \geq 4\pi$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é totalmente geodésica e isométrica a $\mathbb{S}^2$.

Demonstração. Temos, pela equação de Gauss (2.2.47) que

$$K_\Sigma = \overline{K}_{T\Sigma} + \det(A) \quad (3.1)$$

onde K_Σ expressa a curvatura de Gauss da esfera Σ e $\overline{K}_{T\Sigma}$ denota a curvatura seccional do plano $T\Sigma \subset TM$ em M .

Além disso, como Σ é mínima, temos que $\det(A)_p \leq 0$ para todo $p \in \Sigma$ (ver Observação (2)) com igualdade se, e somente se, Σ é totalmente geodésica em p .

Como $\overline{K}_{T\Sigma} \leq 1$, temos $K_\Sigma \leq 1$. Portanto, sendo Σ uma esfera, segue do Teorema de Gauss-Bonnet que

$$4\pi = \int_\Sigma K_\Sigma \leq \int_\Sigma 1 = |\Sigma|. \quad (3.2)$$

Se vale a igualdade (3.2), então todas as desigualdades usadas acima são de fato igualdades. Em particular, $\det(A)_p = 0$ para todo $p \in \Sigma$, ou seja, Σ é totalmente geodésica, e $K_\Sigma = \overline{K}_{T\Sigma} = 1$, ou seja, Σ tem curvatura de Gauss constante igual a 1. Consequentemente, Σ é isométrica a $\mathbb{S}^2$. $\square$

O teorema a seguir é o principal resultado deste capítulo e sua importância reside no fato de caracterizar completamente a geometria de uma 3-variedade Riemanniana completa M com curvatura seccional entre 0 e 1 que possui uma esfera mínima mergulhada com área 4π .

Teorema 3.0.2. Seja M uma 3-variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $0 \leq K \leq 1$ e seja Σ esfera mínima mergulhada em M com $|\Sigma| = 4\pi$. Então M é isométrica à esfera $\mathbb{S}^3$ ou a um quociente de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja M uma 3-variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $0 \leq K \leq 1$ e seja $\Sigma \subset M$ uma esfera mínima mergulhada com área $|\Sigma| = 4\pi$. Em particular, pelo Lema 3.0.1, Σ é totalmente geodésica e isométrica a $\mathbb{S}^2$. Como M é completa, podemos definir

$$\begin{aligned} \varphi : \Sigma \times \mathbb{R} &\rightarrow M \\ (p, t) &\mapsto \exp_p(tN(p)), \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo diferenciável de vetores normais unitários ao longo de Σ .

A seguir, faremos o estudo da função φ restrita a $\Sigma \times \mathbb{R}_+$. O estudo de φ restrita a $\Sigma \times \mathbb{R}_-$ é feito de modo análogo. Faremos também um abuso de notação usando φ para denotar a restrição da aplicação (3.3) a subconjuntos do domínio $\Sigma \times \mathbb{R}$. Desse modo, consideremos a aplicação $\varphi : \Sigma \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M$.

Pela compacidade de Σ e usando o fato de que Σ está mergulhada (em particular, imersa) em M , podemos garantir que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi : \Sigma \times [0, \varepsilon) \rightarrow M$ também é uma imersão. Assim, definimos

$$\varepsilon_0 = \sup \{ \varepsilon > 0; \varphi : \Sigma \times [0, \varepsilon) \rightarrow M \text{ é uma imersão} \}.$$

Seja ds^2 métrica em $\Sigma \times [0, \varepsilon_0)$ induzida pela imersão $\varphi : \Sigma \times [0, \varepsilon_0) \rightarrow (M, g)$, ou seja, $ds^2 = \varphi^*g$. Nesse caso, podemos escrever $ds^2 = d\sigma_t^2 + dt^2$ onde $d\sigma_t^2$ é uma família diferenciável de métricas em Σ (ver Exemplo 2.2.59).

Com a métrica ds^2 , $\varphi : \Sigma \times [0, \varepsilon_0) \rightarrow M$ dado por $\varphi(p, t) = \exp_p(tN(p))$ se torna uma isometria local e, como M tem curvatura seccional entre 0 e 1, variedade Riemanniana $(\Sigma \times [0, \varepsilon_0), ds^2)$ também tem curvatura seccional entre 0 e 1.

A aplicação $\varphi_t = \varphi(\cdot, t) : \Sigma \rightarrow M$ é uma imersão cuja métrica induzida em Σ é justamente $d\sigma_t^2$, e define as superfícies $\Sigma_t = \Sigma \times \{t\}$ equidistantes a Σ . Notamos ainda que Σ_t são esferas em M e, além disso, $\Sigma_0 = \Sigma$ é totalmente geodésica e $(\Sigma, d\sigma_0^2)$ é isométrica a $\mathbb{S}^2$. Logo, a métrica $d\sigma_0^2$ tem curvatura seccional constante igual a 1.

Agora provaremos a seguinte afirmação.

Afirmação. Temos que:

1. $\varepsilon_0 = +\infty$ e $d\sigma_t^2 = d\sigma_0^2$ ou
2. $\varepsilon_0 = \pi/2$ e $d\sigma_t^2 = \cos^2 t \, d\sigma_0^2$.

Sejam $k_1(p, t)$ e $k_2(p, t)$ as curvaturas principais de Σ_t no ponto (p, t) com $k_1 \geq k_2$ e $H(p, t) = \frac{k_1 + k_2}{2}$ a curvatura média de Σ_t no ponto (p, t) com respeito ao vetor normal unitário ∂_t . Definimos então

$$\lambda(p, t) = \frac{k_1 - k_2}{2}.$$

Observamos que $\lambda \geq 0$ e $\lambda \equiv 0$ se, e somente se, as superfícies Σ_t são superfícies umbílicas.

Denotaremos por K_{Σ_t} a curvatura Gaussiana de Σ_t e por $\overline{K}_t$ a curvatura seccional do espaço tangente de Σ_t em M . Logo, pela equação de Gauss

$$K_{\Sigma_t} = \overline{K}_t + k_1 k_2.$$

Usando a definição de λ temos

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left((k_1)^2 - 2k_1 k_2 + (k_2)^2 \right) + \frac{1}{2} k_1 k_2 - \frac{1}{2} k_1 k_2 \\ &= \frac{1}{4} \left((k_1)^2 + 2k_1 k_2 + (k_2)^2 \right) - k_1 k_2 \\ &= \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right)^2 - k_1 k_2 \\ &= H^2 + \overline{K}_t - K_{\Sigma_t}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Como, por hipótese, $0 \leq \overline{K}_t \leq 1$ inferimos que

$$\lambda^2 \leq H^2 + 1 - K_{\Sigma_t}. \tag{3.5}$$

Integrando ambos os membros e considerando da_t o elemento de área de Σ_t , obtemos

$$\int_{\Sigma_t} \lambda^2 da_t \leq \int_{\Sigma_t} H^2 da_t + |\Sigma_t| - \int_{\Sigma_t} K_{\Sigma_t} da_t,$$

pois $\int_{\Sigma_t} da_t = |\Sigma_t|$.

Como as superfícies Σ_t são esferas, segue do Teorema de Gauss-Bonnet que

$$\int_{\Sigma_t} K_{\Sigma_t} da_t = 4\pi.$$

Portanto,

$$\int_{\Sigma_t} \lambda^2 da_t \leq \int_{\Sigma_t} H^2 da_t + |\Sigma_t| - 4\pi. \tag{3.6}$$

De agora em diante usaremos a seguinte notação

$$F(t) = \int_{\Sigma_t} H^2 da_t + |\Sigma_t| - 4\pi.$$

De (3.6), podemos observar que $F(t) \geq 0$ e, se $F(t) = 0$ então $\lambda \equiv 0$, ou seja, a superfície Σ_t é umbílica e, além disso, $\overline{K}_t$ é constante igual a 1.

Afirmção 1. $F(t) = 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon_0)$.

Note que como Σ_0 é totalmente umbílica e $|\Sigma_0| = 4\pi$, temos que $F(0) = 0$.

A Primeira Variação da Área (2.2.60) expressa a derivada da área de Σ_t pela igualdade

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Sigma_t| = -2 \int_{\Sigma_t} H da_t. \quad (3.7)$$

A Proposição (2.2.61), por sua vez, estabelece a seguinte fórmula para a derivada da curvatura média de Σ_t

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(Ric(\partial_t) + |A_t|^2 \right), \quad (3.8)$$

onde $|A_t|^2 = (k_1)^2 + (k_2)^2$, Ric é o tensor de Ricci de $\Sigma \times [0, \varepsilon_0)$ e ∂_t é o vetor normal unitário de Σ_t .

Notemos que $Ric(\partial_t) \geq 0$, uma vez que as curvaturas seccionais de $\Sigma \times [0, \varepsilon_0)$ são não negativas. Logo

$$\frac{\partial H}{\partial t}(p, t) \geq 0.$$

O que implica que $H(p, t)$ é não decrescente. Como $H(p, 0) = 0$ então

$$H(p, t) \geq 0 \quad (3.9)$$

para todo $(p, t) \in \Sigma \times [0, \varepsilon_0)$.

Derivando F e usando (3.7) e (3.8), temos

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Sigma_t} H^2 da_t + |\Sigma_t| - 4\pi \right) \\ &= \int_{\Sigma_t} \left(2H \frac{\partial H}{\partial t} + H^2 \cdot (-2H) \right) da_t - \int_{\Sigma_t} 2H da_t \\ &= \int_{\Sigma_t} \left(2H \frac{\partial H}{\partial t} - 2H^3 \right) da_t - \int_{\Sigma_t} 2H da_t \\ &= \int_{\Sigma_t} \left(H(Ric(\partial_t) + |A_t|^2) - 2H^3 - 2H \right) da_t \\ &= \int_{\Sigma_t} H \left(Ric(\partial_t) + |A_t|^2 - 2H^2 - 2 \right) da_t \\ &= \int_{\Sigma_t} H \left((Ric(\partial_t) - 2) + (k_1)^2 + (k_2)^2 - 2H^2 \right) da_t \\ &= \int_{\Sigma_t} H \left((Ric(\partial_t) - 2) + (k_1)^2 + (k_2)^2 - 2 \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right)^2 \right) da_t \\ &= \int_{\Sigma_t} H \left((Ric(\partial_t) - 2) + (k_1)^2 + (k_2)^2 - \frac{1}{2} \left((k_1)^2 + 2k_1k_2 + (k_2)^2 \right) \right) da_t \\ &= \int_{\Sigma_t} H \left((Ric(\partial_t) - 2) + \frac{1}{2}(k_1)^2 - k_1k_2 + \frac{1}{2}(k_2)^2 \right) da_t \\ &= \int_{\Sigma_t} H \left((Ric(\partial_t) - 2) + \frac{1}{2} \left((k_1)^2 - 2k_1k_2 + (k_2)^2 \right) \right) da_t \\ &= \int_{\Sigma_t} H \left((Ric(\partial_t) - 2) + 2\lambda^2 \right) da_t, \end{aligned} \quad (3.10)$$

ou seja,

$$F'(t) = \int_{\Sigma_t} H \left((Ric(\partial_t) - 2) + 2\lambda^2 \right) da_t. \quad (3.11)$$

Como a curvatura seccional satisfaz $0 \leq \overline{K}_t \leq 1$, temos

$$\text{Ric}(\partial_t) - 2 \leq 0. \quad (3.12)$$

Logo,

$$F'(t) \leq 2 \int_{\Sigma_t} H \lambda^2 da_t.$$

Pela continuidade de H , dado $\varepsilon < \varepsilon_0$ existe uma constante $C \geq 0$ tal que $H(p, t) \leq C$ para todo $(p, t) \in \Sigma \times [0, \varepsilon]$. Então, por (3.6),

$$F'(t) \leq 2C \int_{\Sigma_t} \lambda^2 \leq 2CF(t). \quad (3.13)$$

para $t \in [0, \varepsilon]$.

Além disso, se considerarmos a função $\omega(t) = F(t)e^{-2Ct}$, $0 \leq t \leq \varepsilon$, então

$$\begin{aligned} \omega'(t) &= F'(t)e^{-2Ct} - 2CF(t)e^{-Ct} \\ &\leq 2CF(t)e^{-2Ct} - 2CF(t)e^{-2Ct} \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Assim, $\omega(t) \leq \omega(0) = 0$ para todo $0 \leq t \leq \varepsilon$. Portanto, temos que $F(t) \leq 0$ para $0 \leq t \leq \varepsilon$. Como sabemos que $F(t) \geq 0$, para $t \in [0, \varepsilon_0)$, obtemos

$$F(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [0, \varepsilon].$$

Por fim, como $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ é arbitrário, temos que $F(t) = 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon_0)$. Isso conclui a demonstração da Afirmação 1.

Como consequência desta afirmação, temos por (3.6) que $\lambda(p, t) = 0$ para todo $(p, t) \in \Sigma \times [0, \varepsilon_0)$ e, como visto, isto equivale a dizer que as superfícies Σ_t são umbílicas. Desse modo,

$$\Pi_t = Hd\sigma_t^2, \quad (3.15)$$

onde Π_t é a segunda forma fundamental de Σ_t . Logo, por (2.10), temos a igualdade

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\sigma_t^2) = -2Hd\sigma_t^2. \quad (3.16)$$

O fato de $\lambda \equiv 0$ também implica que vale a igualdade em (3.5), donde segue que $\overline{K}_t \equiv 1$. Além disso,

$$F'(t) = \int_{\Sigma_t} H (\text{Ric}(\partial_t) - 2) da_t = 0.$$

Por outro lado, de (3.9) e (3.12),

$$H (\text{Ric}(\partial_t) - 2) \leq 0.$$

Logo

$$H (\text{Ric}(\partial_t) - 2) = 0 \quad (3.17)$$

para todo $(p, t) \in \Sigma \times [0, \epsilon_0)$.

Como $\lambda(p, t) = 0$, ou seja, $k = k_1(p, t) = k_2(p, t)$ para todo $(p, t) \in \Sigma \times [0, \epsilon_0)$ temos que $H(p, t) = k$. Assim

$$\begin{aligned} |A_t|^2 &= (k_1)^2 + (k_2)^2 \\ &= 2k^2 \\ &= 2H^2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

De (3.8), concluímos que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2} \text{Ric}(\partial_t) + H^2. \tag{3.19}$$

Agora provaremos a seguinte afirmação.

Afirmação 2. Se $H(p, t) > 0$ para $(p, t) \in \Sigma \times (0, \epsilon_0)$, então $H(q, t) > 0$ para todo $q \in \Sigma$.

Suponha que $H(p, t) > 0$ e considere o conjunto $\Omega = \{q \in \Sigma; H(q, t) > 0\} \subset \Sigma$. Pela continuidade de H , Ω é um subconjunto aberto e não-vazio de Σ , pois $p \in \Omega$. Seja agora (q_k) uma sequência de pontos de Ω tal que $\lim q_k = q$. Mostraremos que $q \in \Omega$, provando assim que Ω é fechado.

De fato, pela definição de Ω , $H(q_k, t) > 0$ e, por (3.17), $\text{Ric}(\partial_t)(q_k, t) = 2$. Como Ric é contínua, temos que $\text{Ric}(\partial_t)(q, t) = 2$ e, consequentemente, $\frac{\partial H}{\partial t}(q, t) > 0$ por (3.19). Isso implica, por sua vez, que existe $s < t$ tal que $H(q, s) < H(q, t)$. Usando ainda (3.9), podemos escrever

$$0 \leq H(q, s) < H(q, t),$$

ou seja, $H(q, t) > 0$ e, portanto, $q \in \Omega$. Como q é arbitrário, concluímos que Ω é fechado. Logo, pela conexidade de Σ , obtemos a igualdade $\Omega = \Sigma$, finalizando a prova da Afirmação (2).

Em outras palavras, quando a curvatura média $H(p, t)$ é positiva em um ponto de uma superfície Σ_t equidistante a Σ , é positiva em todo ponto de Σ_t .

Definamos agora o conjunto

$$\Psi = \{t \in (0, \epsilon_0); H(p, t) > 0\}.$$

Se $\Psi = \emptyset$ então $H(p, t) = 0$ para todo $(p, t) \in \Sigma \times (0, \epsilon_0)$. Nesse caso, de (3.19) temos $\text{Ric}(\partial_t) = 0$ em $\Sigma \times (0, \epsilon_0)$.

Suponha agora que $\Psi \neq \emptyset$ e seja $\epsilon_1 = \inf \Psi$. Afirmamos que $\epsilon_1 = 0$.

De fato, se $\epsilon_1 > 0$ então

$$\begin{aligned} H(p, t) &= 0 & \text{para } (p, t) &\in \Sigma \times (0, \epsilon_1] \quad \text{e} \\ H(p, t) &> 0 & \text{para } (p, t) &\in \Sigma \times (\epsilon_1, \epsilon_0). \end{aligned}$$

Logo, de (3.17) e (3.19) obtemos

$$\begin{aligned} Ric(\partial_t) &= 0 & \text{em} & \Sigma \times (0, \varepsilon_1] & \text{e} \\ Ric(\partial_t) &= 2 & \text{em} & \Sigma \times (\varepsilon_1, \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Contudo, pela continuidade de $Ric(\partial_t)$, obtemos uma contradição. Portanto $\varepsilon_1 = 0$ e, nesse caso, $H(p, t) > 0$ para $(p, t) \in \Sigma \times (0, \varepsilon_0)$. Consequentemente, $Ric(\partial_t) = 2$ em $\Sigma \times (0, \varepsilon_0)$.

Resumindo e considerando que $H(p, 0) = 0$, temos duas possibilidades:

1. $H(p, t) = 0$ para todo $(p, t) \in \Sigma \times [0, \varepsilon_0)$ e $Ric(\partial_t) = 0$ em $\Sigma \times (0, \varepsilon_0)$ ou
2. $H(p, t) > 0$ para todo $(p, t) \in \Sigma \times (0, \varepsilon_0)$ e $Ric(\partial_t) = 2$ em $\Sigma \times [0, \varepsilon_0)$.

No primeiro caso, segue de (3.16) que

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\sigma_t^2) = 0,$$

logo,

$$d\sigma_t^2 = d\sigma_0^2$$

para todo $t \in [0, \varepsilon_0)$. Nesse caso, temos que $\varepsilon_0 = +\infty$. Além disso, sabemos que a esfera Σ com a métrica $d\sigma_0^2$ é isométrica a $\mathbb{S}^2$ e, portanto, o produto $\Sigma \times \mathbb{R}_+$ com a métrica ds^2 é isométrico ao cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_+$. Portanto, podemos concluir que φ define uma isometria local do cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_+$ em M .

No segundo caso, de (3.19) temos

$$\frac{\partial H}{\partial t}(p, t) = 1 + H^2.$$

Como $H(p, 0) = 0$, segue do Teorema de existência e unicidade de soluções de EDO (2.3.1) que

$$H(p, t) = \tan t.$$

Por outro lado, usando (3.16) podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial t}d\sigma_t^2 = -2 \tan t \, d\sigma_t^2,$$

e, por (2.3.1), inferimos que

$$d\sigma_t^2 = \cos^2 t \, d\sigma_0^2. \quad (3.20)$$

Além disso, segue da Afirmação (1) que a inequação em (3.6) é na verdade uma igualdade, valendo também a igualdade em (3.5), o que garante que a curvatura seccional $K_{\Sigma_t} = 1$ para todo $t \in [0, \varepsilon_0)$. Assim, de (3.20), concluímos que $\varepsilon_0 = \pi/2$.

Logo, o produto $\Sigma \times [0, \pi/2]$ com a métrica ds^2 é isométrico a um hemisfério da esfera $\mathbb{S}^3$ (por convenção o chamamos de hemisfério norte). Portanto, usando novamente o

fato de $\varphi : \Sigma \times [0, \pi/2] \rightarrow M$ ser uma isometria local, obtemos uma isometria entre M e o hemisfério norte de $\mathbb{S}^3$.

Fazendo o mesmo estudo da função φ restrita a $\Sigma \times \mathbb{R}_-$, obtemos no primeiro caso uma isometria local entre o cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_-$ e M , e no segundo caso, uma isometria local entre o hemisfério sul da esfera $\mathbb{S}^3$ e M .

Observamos ainda que nesse último estudo como Ric é contínua, não é possível invertermos as ordens das isometrias locais. Ou seja, não podemos ter no primeiro caso, uma isometria local entre o hemisfério sul da esfera $\mathbb{S}^3$ e M e, no segundo caso, uma isometria local entre o cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_-$ e M . Mais especificamente, o Ric na esfera é 2 enquanto que no cilindro é zero.

Unindo os dois estudos, obtemos uma isometria local

$$\phi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

no primeiro caso e, no segundo caso, uma isometria global

$$\phi : \mathbb{S}^3 \rightarrow M$$

Por fim, sendo $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^3$ simplesmente conexas, concluímos que ϕ é o recobrimento universal de M em qualquer um dos casos. Portanto, M é isométrica ao quociente de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ou a $\mathbb{S}^3$. $\square$

Observação 4. Na demonstração, como φ é injetiva em Σ , os possíveis quocientes de $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ são $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ ou seu quociente pelo subgrupo gerado por uma isometria da forma $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$, $(p, t) \mapsto (\alpha(p), t + t_0)$ sendo α uma isometria de $\mathbb{S}_1^2$ e $t_0 \neq 0$.

Observação 5. Observamos que o Lema (3.0.1) pode ser generalizado para esferas com curvatura média constante $H_0 \neq 0$ da seguinte maneira. De fato, seja Σ uma esfera com curvatura média H_0 constante imersa em uma n -variedade Riemanniana M com curvatura seccional $0 \leq K \leq 1$. Por (3.4) podemos escrever

$$K_\Sigma = \overline{K}_{T\Sigma} + H_0^2 - \lambda^2$$

Logo, como $0 \leq \overline{K}_{T\Sigma} \leq 1$ e $\lambda^2 \geq 0$ temos

$$K_\Sigma \leq 1 + H_0^2.$$

Integrando ambos os lados e usando o fato de que a curvatura média é constante, obtemos

$$\int_\Sigma K_\Sigma da \leq (1 + H_0^2)|\Sigma|.$$

Como Σ é uma esfera, pelo Teorema de Gauss-Bonnet inferimos que

$$4\pi \leq (1 + H_0^2)|\Sigma|.$$

Ou seja,

$$|\Sigma| \geq \frac{4\pi}{1 + H_0^2}.$$

Além disso, observe que $\frac{4\pi}{1+H_0^2}$ é a área de uma esfera geodésica em $\mathbb{S}^3$ de curvatura média H_0 .

Ademais, se $|\Sigma| = \frac{4\pi}{1+H_0^2}$ e $H_0 \neq 0$, podemos adaptar a demonstração do Teorema (3.0.2) para provar que o lado médio convexo constante de Σ , isto é, o lado para o qual vetor curvatura média $\vec{H}$ de Σ aponta, é isométrico a uma calota esférica de $\mathbb{S}^3$ com curvatura média H_0 constante (veremos no Teorema (4.0.1) abaixo um resultado similar no caso hiperbólico).

4 Existência de cúspides hiperbólicas

Neste capítulo, veremos a demonstração do segundo resultado presente em (Mazet; Rosenberg, 2014).

No que segue, o *lado médio convexo* de uma variedade Riemanniana é o lado no qual a curvatura média é não negativa.

Teorema 4.0.1. Seja M uma 3-variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K \leq -1$ e seja T um 2-toro mergulhado em M com curvatura média constante igual a 1. Então, T separa M e seu lado médio convexo é isométrico a uma cúspide hiperbólica.

Demonstração. Seguiremos praticamente os mesmos passos da demonstração do Teorema (3.0.2) e, por isso, usaremos alguns resultados já mostrados anteriormente.

Consideremos então a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : T \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow M \\ (p, t) &\mapsto \exp_p(tN(p)), \end{aligned}$$

onde N é um campo diferenciável de vetores normais unitários a T e $H_T = 2N$ é o vetor curvatura média de T .

Como T é compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi : T \times [0, \varepsilon) \rightarrow M$ é uma imersão. Seja pois

$$\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon > 0; \varphi \text{ é uma imersão em } T \times [0, \varepsilon)\}.$$

Seja ds^2 a métrica em $T \times [0, \varepsilon_0)$ induzida pela imersão $\varphi : T \times [0, \varepsilon_0) \rightarrow M$, isto é, $ds^2 = \varphi^*g$. Assim, escrevemos $ds^2 = d\sigma_t^2 + dt^2$, onde $d\sigma_t^2$ é uma família diferenciável de métricas em T .

Com a métrica ds^2 , obtemos uma isometria local $\varphi : T \times [0, \varepsilon_0) \rightarrow M$ de modo que a variedade Riemanniana $(T \times [0, \varepsilon_0), ds^2)$ tem curvatura seccional igual ou menor que -1 , pois a curvatura seccional de M satisfaz $K \leq -1$.

Além disso, $\varphi_t = \varphi(\cdot, t) : T \rightarrow M$ é uma imersão cuja métrica induzida em T é justamente $d\sigma_t^2$. Assim, podemos definir $T_t = T \times \{t\}$ como as superfícies equidistantes a $T = T_0$, para $t \in [0, \varepsilon_0)$. Observamos ainda que tais superfícies são toros.

Nesse contexto, sejam $k_1(p, t)$ e $k_2(p, t)$ as curvaturas principais de T_t em (p, t) com $k_1 \geq k_2$,

$$H(p, t) = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

a curvatura média de T_t no ponto (p, t) com respeito ao vetor normal unitário ∂_t e λ a aplicação definida por

$$\lambda(p, t) = \frac{k_1 - k_2}{2}.$$

Notemos que $\lambda \geq 0$ e $\lambda \equiv 0$ se, e somente se, T_t são superfícies umbílicas.

Considerando agora K_{T_t} a curvatura Gaussiana de T_t e $\overline{K}_t$ a curvatura seccional do espaço tangente de T_t em M temos, pela equação de Gauss, que

$$K_{T_t} = \overline{K}_t + k_1 k_2.$$

Usando (3.4), podemos escrever

$$\lambda^2 = H^2 + \overline{K}_t - K_{T_t}. \quad (4.1)$$

Como, por hipótese, $\overline{K}_t \leq -1$, segue que

$$\lambda^2 \leq H^2 - 1 - K_{T_t}. \quad (4.2)$$

Integrando ambos os membros obtemos

$$\int_{T_t} \lambda^2 da_t \leq \int_{T_t} H^2 da_t - |T_t| - \int_{T_t} K_{T_t} da_t. \quad (4.3)$$

Como T_t são superfícies compactas e orientáveis, temos pelo Teorema de Gauss-Bonnet que

$$\int_{T_t} K_{T_t} da_t = 0.$$

Logo,

$$\int_{T_t} \lambda^2 da_t \leq \int_{T_t} H^2 da_t - |T_t|. \quad (4.4)$$

Seja então

$$F(t) = \int_{T_t} H^2 da_t - |T_t|.$$

Vemos, por (4.4), que $F(t) \geq 0$ e $F(t) = 0$ se, e somente se, $\overline{K}_t = -1$ e $\lambda \equiv 0$. Logo, T_t é umbílica e, além disso, o toro T_t com a métrica $d\sigma_t^2$ é *flat*.

Afirmção 1. $F(t) = 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon_0)$.

Como, por hipótese, $H(p, 0) = 1$ então $F(0) = 0$.

Nesse contexto, as derivadas da área e da curvatura média são expressas como

$$\frac{\partial}{\partial t} |T_t| = - \int_{T_t} 2H da_t \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2} (Ric(\partial_t) + |A_t|^2), \quad (4.5)$$

onde $|A_t|^2 = (k_1)^2 + (k_2)^2$, Ric é o tensor de Ricci de $T \times [0, \varepsilon_0)$ e ∂_t é o vetor normal unitário de T_t .

Derivando F como em (3.10) e fazendo uso de (4.5), podemos escrever

$$F'(t) = \int_{T_t} H \left((Ric(\partial_t) + 2) + 2\lambda^2 \right) da_t. \quad (4.6)$$

Como a curvatura seccional satisfaz $\overline{K}_t \leq -1$,

$$Ric(\partial_t) + 2 \leq 0. \quad (4.7)$$

Logo,

$$F'(t) \leq 2 \int_{T_t} H \lambda^2 da_t.$$

Como $H(p, 0) = 1$ e pela continuidade de H , dado $\varepsilon < \varepsilon_0$ existe $C \geq 0$ tal que

$$0 < H(p, t) \leq C \quad (4.8)$$

para todo $(p, t) \in T \times [0, \varepsilon]$. Logo, segue de (4.4) que

$$F'(t) \leq 2C \int_{T_t} \lambda^2 \leq 2CF(t).$$

De (3.14) obtemos

$$F(t) \leq F(0)e^{2Ct} = 0$$

para quaisquer $t \in [0, \varepsilon]$. Assim, $F(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon_0)$. Por outro lado, sabemos que $F(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon_0)$, logo

$$F(t) = 0 \quad (4.9)$$

para todo $t \in [0, \varepsilon_0)$. Fazendo uso novamente da expressão (4.4), inferimos que

$$\lambda(p, t) = 0 \quad (4.10)$$

para $(p, t) \in T \times [0, \varepsilon_0)$ o que garante que $\overline{K}_t = -1$ e a métrica $d\sigma_t^2$ é *flat*. A expressão (4.10) também implica que as superfícies T_t equidistantes a T são todas umbílicas. Logo,

$$II_t = Hd\sigma_t^2, \quad (4.11)$$

onde II_t é a segunda forma fundamental de T_t em (p, t) segundo o vetor ∂_t .

De (4.9) e (4.10) obtemos

$$F'(t) = \int_{T_t} H(Ric(\partial_t) + 2)da_t = 0. \quad (4.12)$$

para todo $t \in [0, \varepsilon_0)$. Por outro lado, por (4.8) e (4.7) temos $H(Ric(\partial_t) + 2) \leq 0$. Logo,

$$H(Ric(\partial_t) + 2) = 0, \quad (4.13)$$

e, portanto,

$$Ric(\partial_t) = -2$$

em $T \times [0, \varepsilon_0)$.

Usando esse fato em (3.19) temos que

$$\frac{\partial H}{\partial t}(p, t) = -1 + H^2.$$

Como $H(p, 0) = 1$ podemos usar o Teorema de EDO (2.3.1) para garantir que

$$H(p, t) = 1$$

para todo $(p, t) \in T \times [0, \varepsilon_0)$.

Logo, por (4.11) temos

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\sigma_t^2) = -2d\sigma_t^2$$

e usando novamente o Teorema de EDO concluimos então que

$$d\sigma_t^2 = e^{-2t}d\sigma_0^2. \quad (4.14)$$

para todo $t \in [0, \varepsilon_0)$.

Além disso, sendo $\lambda \equiv 0$, $H = 1$ e $\overline{K}_t = -1$, temos por (4.1) que $K_{T_t} = 0$. E, como $d\sigma_t^2$ é *flat*.

Portanto, de (4.14) concluimos que $\varepsilon_0 = +\infty$. Isso implica que existe uma isometria entre $T \times \mathbb{R}_+$ e a variedade Riemanniana $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}_+$ (uma cúspide hiperbólica).

Como φ é uma isometria local entre $T \times \mathbb{R}_+$ e M , podemos concluir então que existe uma isometria local entre $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}_+$ e a variedade Riemanniana M . $\square$

5 Considerações Finais

Em suma, o presente trabalho desenvolveu os teoremas provados por Mazet e Rosenberg em (Mazet; Rosenberg, 2014). Tais resultados permitiram caracterizar uma variedade Riemanniana completa M tendo informações a respeito de sua curvatura seccional e de uma superfície Riemanniana mergulhada em M (esfera, no primeiro teorema, e toro, no segundo). Vimos a riqueza do estudo das variedades diferenciáveis, em particular, das superfícies e das variedades Riemannianas; tanto como preliminares como mesclados no decorrer da demonstração dos teoremas 3.0.2 e 4.0.1. Destacamos, por fim, a importância do trabalho de Mazet e Rosenberg, (Mazet; Rosenberg, 2014), para a linha de pesquisa da Geometria Diferencial, com ênfase nas Superfícies Mínimas.

Referências

AMBROZIO, Lucas C. Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds. **The Journal of Geometric Analysis**, Springer, v. 25, p. 1001–1017, 2015.

BONNET, O. Sur quelques propriétés des lignes géodésiques. **C. R. Ac. Sc. Paris**, **40**, **1311-1313**, 1970.

BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de contorno. **Rio de Janeiro-Editora Guanabara**, 2010.

CAMINHA, A. Notas de geometria diferencial. **Notas de aula**, 2010.

CHEEGER, Jeff; EBIN, David G. **Comparison theorems in Riemannian geometry**. [S. l.]: North-Holland publishing company Amsterdam, 1975. v. 9.

CHENG, Shiu Yuen. Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications. **Math. Z.**, v. 143, n. 3, p. 289–297, 1975. ISSN 0025-5874,1432-1823. DOI: [10.1007/BF01214381](https://doi.org/10.1007/BF01214381). Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01214381>.

COLDING, Tobias H; MINICOZZI, William P. **A course in minimal surfaces**. [S. l.]: American Mathematical Soc., 2011. v. 121.

DO CARMO, Manfredo P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. [S. l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

DO CARMO, Manfredo P. **Geometria Riemaniana**. [S. l.]: IMPA, Rio de Janeiro, 2019.

LEE, John M. **Riemannian manifolds: an introduction to curvature**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 176.

LEE, John M. **Smooth manifolds**. [S. l.]: Springer, 2003.

MANFIO, Fernando. Geometria Riemanniana. **Notas de Aula, ICMC-USP**.

MANFIO, Fernando. **Introdução à Topologia Diferencial, Notas de aula**. [S. l.]: ICMC-USP.

MAZET, Laurent; ROSENBERG, Harold. On minimal spheres of area 4π and rigidity. **Commentarii Mathematici Helvetici**, v. 89, n. 4, p. 921–928, 2014.

MYERS, S. B. Riemannian manifolds with positive mean curvature. **Duke Math. J.**, v. 8, p. 401–404, 1941. ISSN 0012-7094,1547-7398. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077492655>.

SANTOS, Gabriel Araújo. Rigidez de superfícies minimizantes de área em variedades tridimensionais. UFMA, 2024.