

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de
Eletricidade

*Modelagem Paramétrica de Cubas Eletrolíticas
para Predição do Efeito Anódico*

Antonio José da Silva

São Luís
2009

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de
Eletricidade

*Modelagem Paramétrica de Cubas Eletrolíticas
para Predição do Efeito Anódico*

Antonio José da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

São Luís
2009

Silva, Antonio José da

Modelagem Paramétrica de Cubas Eletrolíticas para Predição do Efeito Anódico / Antonio José da Silva. - São Luís, 2009.

93 f.

Dissertação (Mestrado em Engenharia de Eletricidade) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade, Universidade Federal do Maranhão, 2009.

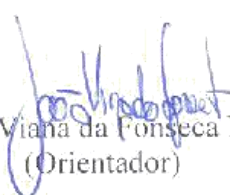
1. Controle automático 2. Cubas eletrolíticas - Modelagem 3. Efeito anódico. I. Título.

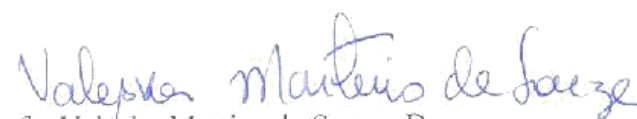
CDU: 62-52

**MODELAGEM PARAMÉTRICA DE CUBAS
ELETROLÍTICAS PARA PREDIÇÃO
DO EFEITO ANÓDICO**

Antonio José da Silva

Dissertação aprovada em 05 de junho de 2009.


Prof. João Viana da Fonseca Neto, Dr.
(Orientador)


Profa. Valeska Martins de Souza, Dra.
(Membro da Banca Examinadora)


Prof. Sebastian Yuri Cavalcanti Catunda, Dr.
(Membro da Banca Examinadora)

"Deus é um bom pai, te empurra sempre no sentido de caminhar, portanto mexa essa perna".

(Antonio José da Silva)

Dedicatória

A Deus, à minha família, em especial à minha mãe dona Marimi e minha avó dona Inocência.

Agradecimentos

À Deus pela minha existência, inspiração e por conceder a graça de trilhar este caminho;

Ao Prof^o. orientador João Viana da Fonseca Neto, pelo aprendizado, incentivo, companheirismo e pela sua forma dedicada de orientação e direcionamento preciso pelo caminho e pelo gosto da pesquisa;

À Daniele, pela paciência e companheirismo;

Ao PPGEE pela oportunidade, receptividade, atendimento. Ao Alcides sempre disposto a ajudar;

À Cristiane, Áurea e Sidlei pela saudável conviência nas disciplinas. Aos colegas do LCP : João Inácio, Márcio Cerqueira, Aline, Samy, Renan, Gustavo, Ivanildo, Fábio, Leandro e Marlon pela convivência e pelos saudáveis e saudosos momentos de aprendizagem, reflexão e descontração vivenciados ao longo desta gratificante jornada;

Aos professores Allan Kardec, Sophiane Labidi, Yuri Catunda que conjuntamente ao meu orientador deram suporte e direcionamento intelectual.

Aos professores que aceitaram fazer parte da banca examinadora;

À FAPEMA pelo apoio financeiro; e à Univima pelo apóio na figura da professora Vera Lobato.

À todas as pessoas que contribuíram de forma direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

RESUMO

O efeito anódico que ocorre nas cubas eletrolíticas é responsável pela emissão de gases como os PFC's, gases esses, que contribuem para o efeito estufa, além de comprometer sua capacidade produtiva. A partir dos sinais de tensão (saída) e corrente (entrada) são estimados modelos ARX e OE da cuba eletrolítica utilizando a Teoria de Identificação de Sistemas. Após a simulação são escolhidos os modelos com melhor ajuste à saída medida. Para a seleção são utilizados critérios estabelecidos ao longo da pesquisa. Os modelos ARX e OE das cubas eletrolítica, são construídos para representar o pleno estado de funcionamento da cuba. Baseados em dados reais e via propriedades algébricas, os modelos geram as funções de transferência específicas de cada modelo que são validadas com dados reais obtidos na indústria, a resposta no tempo, na frequência e velocidade de convergência são analisadas. A partir da função de transferência é feita a representação da fase normal de funcionamento da cuba eletrolítica, e pelas propriedades do modelo é feita a predição do efeito anódico identificando o aumento da tensão na fase de validação. Portanto, este trabalho apresenta a investigação de modelos paramétricos ARX e OE que melhor representam o funcionamento da cuba eletrolítica para possibilitar a predição do efeito anódico no processo produtivo do alumínio. Nesta dissertação propomos o desenvolvimento de modelos no domínio do tempo contínuo e discreto com um estudo das suas respostas transitória e de regime permanente assim como sua resposta em frequência de seu funcionamento normal e na fase que antecede o efeito anódico.

Palavras-Chave: Estimção Paramétrica, Função de Transferência, Modelo ARX, Modelo OE, Modelagem Paramétrica de Sistemas Dinâmicos, Cubas Eletrolíticas, Identificação de Sistemas, Efeito Anódico.

ABSTRACT

The Anode effect that occurs in electrolytic smelter pot is responsible for gases such as PFC's. These gases contribute to the greenhouse effect, and in addition jeopardizes its productive capacity. From the voltage (output) and current (input) are estimate ARX and OE models of the electrolytic smelter pot using the Systems Identification Theory, the ARX and OE models of the electrolytic smelter pot are built to represent the steady state operation and the anode effect occurrence. After the simulation are chosen the models with better adjustment to the measure exit. For the selection are used established criteria along the research, the ARX and OE models of electrolytic smelter pot, are built to represent the full state operation of the electrolytic smelter pot. Based on real data and via algebraic properties, the models generate the functions of specific transfer of each model that are validated with real data obtained in the industry, the answer in time, in the convergence frequency and speed are analyzed. From the transfer function is made the representation of the normal stage of operation of the electrolytic smelter pot, and by the properties of the estimate model is made the prediction the anode effect identifying the increase of the voltage in the validation stage. Therefore, this work introduces the investigation of ARX and OE parametric models how better represent the operation of the electrolytic smelter pot to can enable the prediction of the anode effect in the productive process of the aluminum. In this dissertation, we propose the models development in the domain of the continuous and discrete time with a study of her transitory answers and of steady state as well as your answer in frequency of your normal operation and in the phase that precedes the anode effect.

Keyword-Key: Parametric Estimation, Transfer Function, ARX model, OE models, Parametric modeling of Dynamic Systems, Electrolytic Smelter Pot, System identification, Anode Effect.

Lista de Tabelas

3.1	Classificação das Fases de uma Cuba Eletrolítica com Ocorrência do Efeito Anódico.	42
5.1	Modelos com Melhores Ajustes por Ordem Polinomial.	54
5.2	Modelos com Melhores Ajustes sem Atraso.	55
5.3	Modelos Seleccionados com os Pólos da Função de Transferência dentro do Círculo Unitário.	56
5.4	Índices de Predição e Ordem.	57
5.5	Horizonte de Predição dos Modelos.	57
5.6	Resposta ao Degrau dos Modelos Seleccionados.	59
5.7	Resposta ao Impulso dos Modelos Seleccionados.	59
5.8	Margem de Ganho e Fase dos Modelos Seleccionados.	60
5.9	Validação de Modelos da Cuba A com a Cuba B e Cuba C.	62
5.10	Validação de Modelos da Cuba A com a Cuba B e Cuba C com $nk - 0$	63
5.11	Validação de Modelos da Cuba C e Predição.	64
5.12	Validação de Modelos da Cuba C com $nk = 0$ e Predição.	64
5.13	Validação de Modelos da Cuba C com as Cubas B e A.	65
5.14	Validação de Modelos da Cuba C com as Cubas B e A para $nk = 0$	65
5.15	Validação de Modelos da Cuba B e Predição.	66
5.16	Validação de Modelos da Cuba C e Predição com $nk = 0$	66
5.17	Validação de Modelos da Cuba B com as Cubas C e A.	67
5.18	Validação de Modelos da Cuba B com as Cubas C e A para $nk = 0$	67
5.19	Modelos Seleccionados com os Pólos da Função de Transferência dentro do Círculo Unitário - Modelos OE.	68

Lista de Figuras

2.1	Representação do Modelo Caixa-Preta	17
2.2	Processo de Modelagem e Identificação	19
2.3	Aplicação das Técnicas de Identificação.	21
3.1	Tensão e Corrente de uma Cuba com Ocorrência de Efeito Anódico	43
4.1	Etapas para Elaboração de Modelos	47
4.2	Sinais de saída e entrada sem tendências	49
4.3	Sinais de saída e entrada sem tendências da Cuba B	50
4.4	Sinais de saída e entrada sem tendências da Cuba C	50
5.1	Simulação dos Modelos da Cuba A.	58
5.2	Pólos e Zeros do Modelo Polinomial.	58
5.3	Sinais das Cubas Estudadas sem Médias e Tendências.	61
5.4	Simulação dos Modelos.	69
5.5	Zeros e Pólos dos Modelos Seleccionados.	69
C.1	Sinais de um Sistema	85

Lista de Abreviaturas e Siglas

CONSEPE	Conselho de Ensino, Pesquisa e Extensão
PFCs	Perfluorocarbonos
Bemf	Efeito Bateria na Cuba
ARX	Autoregressive Model with Exogenous Inputs
OE	Output Error
AG	Algoritmo Genético
FK	Filtro de Kalman
LS	Least Square
MQ	Mínimos Quadrados
MQP	Mínimos Quadrados Ponderado
IV	Instrumental Variable
SISO	Single-Input and Single-Output (Simples-Entrada e Simples-Saída)

Artigos publicados pelo autor:

- [1] Silva, Antonio José da. Fonseca Neto, João Viana da. Nagen, Nilton Freixo. Parametric ARX Modeling of the Electrolytic Smelter Pot. 11th International Conference on Computer Modeling and Simulation.
- [2] Nagen, Nilton Freixo. Silva, Antonio José da. Fonseca Neto, João Viana da. Characterization of Electrolytic Pot Signal by Autoregressive Model with Exogenous Input. 2009 Third Asia International Conference on Modelling & Simulation.
- [3] Silva, Antonio José da. Fonseca Neto, João Viana da. de Moraes João In-ácio Nunes. Braga, Carlos Augusto Pereira. Costa, Fernando. Identificação e Caracterização de Modelos ARX para Cubas Eletrolíticas tipo Prebaked via Sinais de Corrente e Tensão. VIII Semetro, João Pessoa, PB, Brazil, June 17–19, 2009.

Artigos submetidos pelo autor já aceitos para revisão:

- [4] Silva, Antonio José da. Fonseca Neto, João Viana da. Modelagem Paramétrica tipo Erro na Saída para Estudo e Análise do Comportamento de uma Cuba Eletrolítica tipo Prebaked. VI Seminário Internacional de Controle e Automação, Salvador - Bahia 14 a 16 de outubro de 2009.

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Justificativa	9
1.2	Proposta	11
1.3	Objetivo Geral	11
1.3.1	Objetivos Específicos	11
1.4	Metodologia	12
1.5	Estado da Arte	13
1.6	Estrutura da Dissertação	14
2	Modelagem e Identificação de Sistemas	16
2.1	Identificação de Sistemas	16
2.1.1	Caracterização do Processo de Identificação	20
2.1.2	Métodos de Identificação	20
2.2	Sistemas Lineares Invariantes no tempo	22
2.2.1	Conceitos e Definições	22
2.3	Ajuste dos Modelos Polinomiais	23
2.3.1	Funções Parametrizadas	23
2.3.2	Método dos Mínimos Quadrados	25
2.3.3	Equação à Diferença	26
2.3.4	Polinômios no Tempo	28
2.4	Conclusão	36
3	A Indústria do Alumínio e o Efeito Anódico	37
3.1	Processo Industrial do Alumínio	37
3.1.1	A Planta de Estudo	39
3.1.2	Insumos da Produção	39

3.1.3	Controle do Processo	40
3.2	Problema: O Efeito Anódico	42
3.2.1	Caracterização do Sinal por fases	42
3.3	Conclusão	45
4	Processo de Modelagem ARX e OE para Cubas Eletrolíticas tipo Prebaked	46
4.1	O Modelo	46
4.1.1	Pré processamento dos dados de entrada e saída	48
4.1.2	Estimação de Parâmetros e Seleção do Modelo	51
4.1.3	Validação do modelo	51
4.2	Conclusão	52
5	Experimentos Computacionais e Desempenho	53
5.1	Modelos ARX da Cuba Eletrolítica Prebaked	53
5.1.1	Modelagem da Cuba A	54
5.1.2	Modelagem das Cubas B e C	61
5.1.3	Modelos OE da Cuba Eletrolítica Prebaked	68
5.2	Conclusão	73
6	Conclusão	74
6.1	Trabalhos Futuros	75
A	Propriedade do Estimador MQ	76
A.1	Ortogonalidade	76
A.2	Polarização de Estimadores	77
B	Abordagens sobre o sinal	79
B.1	Descrição de sistemas: Modelos Discretos	80
B.2	Descrição de sistemas: Modelos Contínuos	80
B.3	Descrição de sistemas: Modelos Discretos	81
C	Sistemas Lineares Invariantes no Tempo	83
C.1	A Resposta ao Impulso	83
C.2	Amostragem	83
C.3	Caracterização de Distúrbios	85

C.3.1 Sinais	85
C.4 Função de Covariância	87
C.5 Representação de Modelos Lineares	88
C.5.1 Função de Transferência	89
C.5.2 Pólos e Zeros	90
C.5.3 Estabilidade	91
Referências Bibliográficas	92

Capítulo 1

Introdução

A idéia básica da Identificação de Sistemas é permitir a construção de modelos matemáticos de um sistema dinâmico baseado em medidas. Em identificação paramétrica, efetua-se ajustes de parâmetros para um dado modelo até que a saída coincida tão bem quanto possível com as saídas medidas, (Ljung, 1999) e (Sörheim e Borg, 1988).

Os modelos matemáticos constituem um eficiente mecanismo para re-sumir o conhecimento acerca de um processo ou sistema e o sucesso de modelos discretos paramétricos na aproximação de sistemas dinâmicos contínuos no tempo é bem conhecido, (Ljung, 2007).

Apresenta-se neste trabalho uma investigação utilizando a teoria de identificação de sistemas sob o ponto de vista da classificação caixa preta, (Luyben e Luyben, 1997). Esta classificação é utilizada para caracterizar os modelos paramétricos na Teoria de Identificação, segundo os princípios e leis que regem os sistemas do mundo real (Ljung, 1999).

1.1 Justificativa

A complexidade dos sistemas industriais torna a tarefa dos engenheiros e projetistas responsáveis pela identificação, controle e supervisão cada vez mais difícil, uma vez que as ferramentas matemáticas tradicionais são deficientes em modelar algumas características típicas destes sistemas, tais como não-linearidades,

atrasos variantes no tempo e perturbações não brancas, (Luyben e Luyben, 1997). No caso específico de modelagem de sistemas para fins de controle, esta complexidade causa problemas na escolha da melhor estrutura e o estimador mais eficiente para o modelo que se deseja representar, (Ljung, 2007), (Aguirre, 2007).

Modelagem Paramétrica de Cubas Eletrolíticas para Predição do Efeito Anódico faz parte do projeto de pesquisa e desenvolvimento "Filtro de Kalman em Tempo Real para Controle de Alumina no Banho Eletrolítico", aprovado pelo Conselho de Ensino, Pesquisa e Extensão (CONSEPE), resolução 503 de novembro de 2006 da Universidade Federal do Maranhão.

O desenvolvimento de um filtro digital do tipo Kalman Padrão e de um mecanismo de sintonia Inteligente para o ajuste da largura é a principal abordagem do Projeto "Filtro de Kalman em Tempo Real para o Controle de Alumina no Banho Eletrolítico". Este mecanismo de Sintonia Inteligente baseia-se em com-putação evolutiva e inferência Bayesiana, (Fonseca Neto et al., 2007), (Braga, 2008).

Durante o desenvolvimento do projeto Filtro de Kalman em Tempo Real constatou-se empiricamente dois pontos relevantes que influenciam no desempenho do filtro. O primeiro está relacionado com os níveis de ruído da medida e o outro está relacionado com a modelagem da cuba (Fonseca Neto et al. 2007) e (Braga, 2008). Estes dois tópicos conduziram a elaboração de um projeto para o desenvolvimento de modelos bayesianos da estrutura das matrizes de covariância para sintonia de filtros de Kalman e outro projeto para investigar a modelagem do comportamento dinâmico das cubas para fins de monitoração e controle dos seus estados.

A importância em pesquisar e desenvolver modelos de sistemas pode ser justificado tecnicamente em termos de aplicações para o monitoramento e controle. No caso do monitoramento, aplicações em dimensionamento de sistemas de alarme. No caso do controle, para filtragem e/ou medição indireta das variáveis de controle.

1.2 Proposta

A proposta é o desenvolvimento de um modelo ou uma família de modelos, via Teoria de Identificação de Sistemas, no domínio do tempo para predição do efeito anódico podendo ser utilizado nas estruturas do Filtro de Kalman. Utilizar os modelos gerados para a predição dos níveis de tensão da cuba eletrolítica em funcionamento.

Salientamos a importância do desenvolvimento de modelos matemáticos, sob o ponto de vista de filtragem estocástica do tipo Kalman. O modelo do sistema/planta é importante tanto para a predição quanto para correção do processo de estimação.

1.3 Objetivo Geral

Este trabalho consiste na identificação de parâmetros de modelos baseados em equações à diferença, ARX e OE para que diante destes resultados possamos obter a função de transferência discreta da fase normal da cuba e posteriormente com informações sobre o sistema uma aplicação na predição de efeito anódico no processo industrial do alumínio possa ser feita (Fonseca Neto et al. 2007) e (Fonseca Neto et al., 2008).

1.3.1 Objetivos Específicos

Pretende-se fazer a identificação paramétrica do sistema em estudo, estimando os parâmetros que melhor ajustam os modelos polinomiais ARX e OE que melhor descrevam o comportamento da cuba.

Realizar a análise no tempo dos modelos elaborados e destacar as suas principais características.

Determinar um modelo, uma família ou conjunto de modelos que melhor representem a cuba eletrolítica em atividade produtiva.

Contribuir para a detecção do efeito anódico no processo produtivo do alumínio, diminuindo assim seu impacto ao meio ambiente.

1.4 Metodologia

Inicialmente realiza-se um estudo sobre o teoria de Identificação de Sistemas, (ver Capítulo 2), abordando o tema em um contexto amplo no que se refere à teoria. Um estudo mais detalhado é elaborado para a identificação paramétrica, em especial são estudados os modelos polinomiais ARX e OE.

A pesquisa para o desenvolvimento de modelos dinâmicos para cubas eletrolíticas leva em consideração tópicos em Identificação de Sistemas, Controle de Processos e Teoria de Controle, (ver Capítulo 3). Estas referências estão asso-ciadas com o material bibliográfico e dados experimentais para o desenvolvimento dos modelos matemáticos nesta dissertação.

Parte-se então para a aplicação e o desenvolvimento dos métodos de identificação de sistemas no domínio do tempo a partir de sinais provenientes de campo. De posse de observações experimentais do comportamento dinâmico de cubas são identificados os seus estados para ocorrência de transitórios e para operação em regime permanente. O desenvolvimento dos modelos segue abordagem no domínio do tempo e da frequência, desta forma tem-se uma melhor avaliação das bandas de frequência em interesse.

A partir de testes de seleção e validação de modelos para avaliar sua qualidade, define-se o que melhor se adequa a um determinado tipo de cuba eletrolítica. Os modelos são avaliados no domínio do tempo e da frequência baseados com medições de campo.

A última etapa consiste na validação de modelos com sinais de corrente e tensão de cubas eletrolíticas tipo prebeaked e verificar o desempenho do modelos. Escolheu-se validar os modelos selecionados também com outros dados de cubas eletrolíticas e assim poder verificar as suas propriedades preditivas. Como pode-se verificar, esta abordagem mostra-se adequada para avaliar o desempenho dos modelos desenvolvido na pesquisa uma vez que quer-se determinar um modelo que possa ser generalizado a outras cubas.

1.5 Estado da Arte

Várias metodologias para a identificação de sistemas já foram discutidas como em, (Zeng, 2006), (Arruda e Favaro, 2003), (Aguirre, 2007), (Ljung, 1999) e (Ljung, 2007). Em (Arruda e Favaro, 2003) é proposta uma metodologia baseada nos algoritmos genéticos (AG) capaz de fornecer um modelo simplificado, linear e de ordem reduzida, para processos complexos obtendo como vantagem a capacidade de reproduzir melhor possível, o comportamento temporal destes processos e suas características frequenciais. A Identificação de sistemas não-lineares é muito utilizada para descrever e analisar características de sistemas reais e tem sido aplicadas a vários campos da ciência podendo também ser feita uma identificação linear, (Ljung, 1999), (Aguirre, 2007).

Um outro trabalho pode ser destacado é (Furtado et al., 2002) que descreve uma metodologia de identificação de sistemas para obtenção de modelos con-tínuos no domínio do tempo que possibilitam uma melhor compreensão e análise de sistemas em estudo em que primeiramente os modelos polinomiais NARMAX (Non-linear AutoRegressive Moving Average with eXogenous input) são identi-ficados, as funções de resposta em frequência generalizadas (GFRF) do sistema em estudo são obtidas do modelo discreto identificado, utilizando algoritmos recur-sivos. Em seguida o modelo contínuo é obtido através do mapeamento do domínio da frequência para o domínio do tempo.

Cabe aqui ressaltar que as técnicas convencionais de estimação, por ex-emplo: mínimos quadrados e máxima verossimilhança, costumam falhar quando, a fim de diminuir a complexidade do sistema a ser controlado, opta-se por um modelo de ordem reduzida em relação ao sistema real. Isto porque a maior parte destas técnicas é baseada no método do gradiente, e facilmente convergem para mínimos locais, levando a modelos errôneos que colocarão em risco toda a estru-tura de controle que for projetada a partir do modelo identificado (Kristinsson e Dumont, 1992).

Para um aprofundamento sobre modelos NARMAX, (Corrêa e Aguirre, 2004) apresentam uma breve revisão da literatura enfocando recentes desenvolvi-mentos na área de identificação caixa-cinza assim como diversos métodos. Discute-

se propriedades da representação NARMAX polinomial aplicando-se identificação caixa-cinza.

1.6 Estrutura da Dissertação

Este trabalho está organizado em 6 capítulos. O conteúdo abrange o processo produtivo do alumínio, Tópicos de Identificação de Sistemas, Métodos Computacionais, e a pesquisa sobre a modelagem da Cuba Eletrolítica. A dissertação aqui apresentada trata-se da descrição de um trabalho, uma pesquisa idealizada durante a disciplina Identificação de Sistemas. De forma resumida a metodologia que possibilita o desenvolvimento teórico-prático deste trabalho. E os demais capítulos estão organizados da seguinte forma:

No Capítulo 2 são tratados alguns conceitos e procedimentos necessários à identificação de sistemas, elementos teóricos necessários ao desenvolvimento desta dissertação como modelagem paramétrica tipo ARX, OE e o método dos Mínimos Quadrados (MQ). Estimadores constituem um elemento essencial neste trabalho, e neste capítulo os estimadores dos mínimos quadrados e variável instrumental são tratados pelo aspecto de sua estrutura e suas propriedades.

No Capítulo 3 o processo produtivo do alumínio é descrito em etapas e o problema do efeito anódico é caracterizado para fins de monitoração e controle.

No Capítulo 4 são descritos os procedimentos adotados na pesquisa, todos de acordo com as literaturas (Ljung e Glad, 1994), (Coelho e Coelho, 2004), (Ljung, 2007), (Aguirre, 2007) e (Ljung, 1999). Este capítulo descreve a investigação e seleção de modelos por técnicas de identificação. A coleta e amostragem são as etapas iniciais, em seguida é feito o pré-processamento dos dados e seleção da estrutura a ser identificada que melhor representa as necessidades de identificação, em seguida após obtermos um conjunto de modelos partimos para a seleção dos que melhor representam os sinais de tensão medidos. É estabelecido neste capítulo ainda os índices que quantificam a qualidade dos modelos.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados do estudo. Partindo de um conjunto de modelos selecionados são analisadas suas propriedades pela sua

resposta no tempo e em seguida os modelos são validados com outros dados de Cubas. Este capítulo apresenta as simulações realizadas após a estimação de parâmetros para os modelos ARX e OE para a cuba eletrolítica.

No Capítulo 6 encontra-se a conclusão, nela estão as contribuições deste trabalho no que se refere à identificação e elaboração de modelos paramétricos de cubas eletrolíticas tipo prebeaked. Os resultados consolidados e as perspectivas futuras de trabalho são descritas nas partes finais deste Capítulo.

No Anexo desta dissertação estão tópicos que auxiliam na compreensão das técnicas utilizadas neste trabalho, tópicos como as propriedades do estimador dos mínimos quadrados, abordagens sobre os sinais discretos, tópicos de estatística descritiva, sistemas lineares e invariantes no tempo e as simulações efetuadas ao longo desta pesquisa.

Capítulo 2

Modelagem e Identificação de Sistemas

Alguns conceitos básicos de identificação de sistemas serão abordados neste capítulo. Discute-se e apresenta-se uma visão restrita do universo da Teoria da Identificação de Sistemas sob o ponto de vista da classificação caixa preta e modelagem paramétrica. Métodos de Identificação e seus procedimentos são abordados neste Capítulo. A seleção de parâmetros é vista pelo foco dos mínimos quadrados que neste trabalho é relacionado diretamente com o processo de identificação e modelagem do sistema em estudo.

2.1 Identificação de Sistemas

A construção de modelos dinâmicos de sistemas baseando-se em observações do processo é chamada de identificação de sistemas. Essencialmente, trata-se de selecionar uma estrutura de modelo e ajustar parâmetros desta estrutura até que as saídas calculadas pelo modelo coincidam com as saídas medidas do processo, quando o sistema e o seu modelo estão alimentados com as mesmas condições. A qualidade do ajuste é testada em um conjunto de dados que não foram utilizados na regressão dos parâmetros.

Partindo do pressuposto de que não se pode controlar o que é desconhecido, a teoria de identificação de sistemas torna-se um instrumental necessário ao

controle do sistema em estudo. Na identificação de sistemas dinâmicos existem dois procedimentos básicos, a identificação analítica e a identificação computacional de sistemas. A Identificação Analítica envolve a análise da dinâmica do sistema físico e o desenvolvimento de um modelo matemático para o mesmo a partir da física do processo. Já a identificação computacional de sistemas, procedimento adotado neste trabalho, envolve dentre outros procedimentos, coleta de dados das características de entrada-saída do sistema e utilização destes para obtenção de um modelo matemático que se aproxima do comportamento observado (Ljung, 1999).

O processo de identificação está fundamentado na construção de modelos matemáticos para caracterizar um dado processo dinâmico. Na identificação caixa-preta, ver Figura 2.1, não existe nenhuma relação óbvia entre a estrutura e seus parâmetros com aspectos físicos do sistema a ser identificado (Ljung, 1999). Como desvantagens da identificação caixa-preta pode-se citar, em geral, o fato de a estrutura do modelo não possuir significado físico, a dificuldade para sua seleção e, em muitos casos, o número excessivo de parâmetros. Como vantagens, em geral, são enumeradas a relativa facilidade de obtenção e a possibilidade de se escolher estruturas mais adequadas para o projeto de sistemas de controle (Corrêa e Aguirre, 2004).

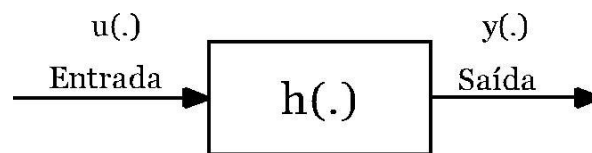


Figura 2.1: Representação do Modelo Caixa-Preta

Em controle quando se refere a identificação, apresenta-se a idéia de que é conhecida a entrada $u(.)$, a saída $y(.)$, e deve-se obter o sistema $h(.)$ de modo que $\hat{y}(.) \rightarrow y(.)$, sendo $y(.)$ a saída do sistema real e $\hat{y}(.)$ é a saída estimada. O processo de identificação está fundamentado na construção de modelos matemáticos para caracterizar um dado processo dinâmico. Segundo (Luyben e Luyben, 1997),

nenhum modelo matemático de um sistema físico é exato, daí a importância da modelagem para o processo, esta que é feita a partir de medições de entrada e saída do sistema em questão.

Em métodos de identificação caixa-preta, nenhuma informação sobre o sistema está disponível além dos dados ou, se disponível, não é usada no procedimento de obtenção do modelo. Neste caso, apenas dados de entrada e saída do sistema são usados durante a identificação.

A identificação de um sistema tem como objetivo a construção ou a seleção de modelos a partir de observações de N pares de dados de entrada e saída, isto é:

$$Z^N = \{Y, U\} \quad (2.1)$$

sendo $Y = y(k)$, $U = u(k)$ para $t = 1, \dots, N$, especificando os instantes de amostragem múltiplos de τ . A partir das medidas realizadas, obtém-se uma função

$$\hat{g}_N(k, Z^N) = \hat{y}(k) \quad (2.2)$$

que representa o sistema e a partir desta função estima-se a saída do processo. A função $\hat{g}_N$ deve ser procurada dentre um conjunto de funções descritas em termos de um número finito de parâmetros ϑ do conjunto de modelos, e este conjunto de modelos é denominado estrutura de modelos. Em seguida deve-se determinar a estrutura de modelo adequada ao problema a ser resolvido. Estabelecida a estrutura de modelo é necessário um critério para selecionar um conjunto de parâmetros, dentro desta estrutura, que mais aproxime a previsão da saída $\hat{y}(k)$ de seu valor real $y(k)$ o que corresponde à estimação dos parâmetros do modelo.

Usualmente seleciona-se $\vartheta = \vartheta_N$ tal que uma determinada norma $k \cdot k$ do erro

$$\sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2 \quad (2.3)$$

seja minimizada. A etapa de validação e aceitação do modelo conclui assim a etapa de identificação, nela quer-se saber o quanto o modelo é confiável (Ljung, 1999). A qualidade de um modelo está diretamente ligada à estimativa dos erros

de modelagem, a saber, erro de variância e erro de polarização, a partir de um novo do conjunto de dados, (Ljung, 2007).

A Figura 2.2 ilustra um esquema para identificação computacional de sistemas ou modelagem empírica, tomando um sistema dinâmico de tempo discreto, em que o erro entre a saída produzida pelo sistema dinâmico é empregado no ajuste dos parâmetros livres do modelo matemático.

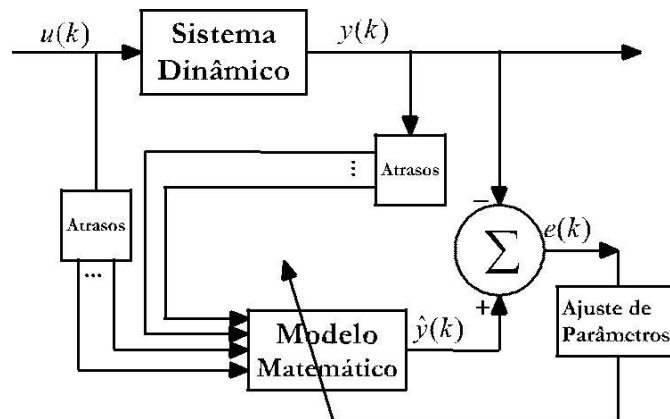


Figura 2.2: Processo de Modelagem e Identificação

Entende-se por modelagem e identificação a determinação do modelo matemático de um sistema representando os seus aspectos essenciais de forma adequada para uma utilização particular o diagnóstico, a supervisão, a otimização e o controle. Segundo (Ljung e Glad, 1994) e (Coelho e Coelho, 2004), os procedimentos podem ser classificados como análise experimental e análise física-matemática, esta última baseia-se nas leis da Física que caracterizam um sistema particular, já a análise experimental baseia-se nas medidas ou observações do sistema. Este trabalho caracteriza-se por uma análise experimental uma vez que a partir de dados coletados da tensão e corrente na planta, quer se identificar um modelo ou um conjunto de modelos ARX e OE para a cuba eletrolítica.

2.1.1 Caracterização do Processo de Identificação

Há vários aspectos importantes envolvidos na identificação de sistemas dinâmicos. Alguns procedimentos são importantes e necessários à identificação de um modo geral e em especial à identificação paramétrica. Segundo (Aguirre, 2007) e (Ljung, 1999), o processo de identificação de um modelo matemático é caracterizado pelas seguintes etapas: testes dinâmicos e coletas de dados, pré-processamento dos dados, escolha da representação matemática apropriada, de-terminação da estrutura do modelo, estimação de parâmetros e validação dos modelos.

Pode-se dizer então que a identificação paramétrica de um sistema é basicamente um problema de otimização que envolve algumas medidas para adequação de modelos matemáticos candidatos a representar um processo real.

A seleção de modelos matemáticos e o ajuste dos parâmetros são influenciados por diversos fatores, dentre eles podemos citar o conhecimento a priori do sistema (constante de tempo, período de amostragem, atraso de transporte); propriedades do modelo do sistema identificado; seleção da medida do erro a ser minimizado; presença de ruídos no processo.

2.1.2 Métodos de Identificação

O método do Quadrados Mínimos ou Mínimos Quadrados, (ver Seção 2.3), é uma técnica de busca local guiada pelo gradiente que necessita de um espaço de busca regular ou um índice de desempenho diferenciável. Para a implementação do método alguma informação inicial dos parâmetros do sistema é necessária a priori para convergência do método. Os parâmetros estimados podem ser tendenciosos se o ruído é correlacionado com as medidas, durante o processo pode ocorrer ainda dificuldade na identificação do atraso de transporte, podem apresentar problemas em sistemas com não-linearidades.

O problema de identificação fundamentalmente consiste na determinação de um modelo matemático que represente os aspectos essenciais do sistema, caracterizado pela manipulação dos sinais de entrada e saída relacionados através de uma função de transferência contínua ou discreta. Para os processos industri-

ais, o modelo pode ser obtido a partir do tratamento das medidas (procedimento estatístico, filtragem de dados) e coleta de dados a partir de uma realização ex-perimental. O modelo matemático final é uma forma do conhecimento da relação existente entre o sinal de entrada e a saída, caracterizada no processo físico pela função de transferência.

Procedimento para Identificação de Processos

Grande parte dos autores apresentam técnicas e procedimentos já con-sagradas em trabalhos científicos que possibilitam ao leitor aplicar com adequações tais técnicas em seus objetos de estudo. Mais informações podem ser encontradas em (Luyben e Luyben, 1997) (Aguirre, 2007) e (Coelho e Coelho, 2004). Vejamos algumas dessas técnicas:

Identificação pelo teste da *Resposta ao Degrau* - Processo submetido a uma mudança na entrada do tipo degrau com o armazenamento das medidas. O Teste da resposta ao degrau, por natureza, não permite a estimação de modelos de ordem elevada, já que o sinal degrau tem uma pobre composição em frequência.

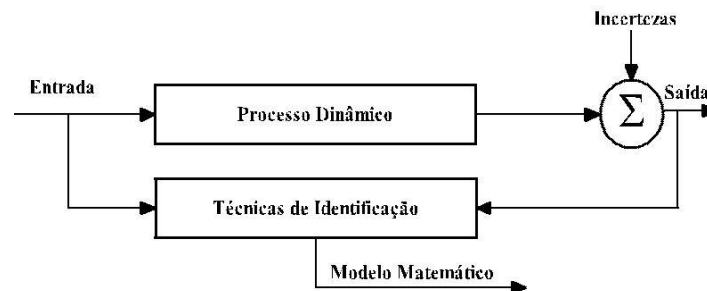


Figura 2.3: Aplicação das Técnicas de Identificação.

Identificação pelo teste da *Resposta em Frequência* - Processo submetido a uma entrada senoidal. Com as curvas de magnitude e fase é possível identificar as frequências de corte (influência dos zeros e pólos) e, conseqüentemente, a função de transferência estimada.

Identificação *off-line* - Com sinais de teste apropriados de entrada (ruído

branco, sequência binária pseudo-aleatória), excita-se o processo e armazena-se as medidas (entrada e saída) para aplicação e avaliação a **posteriori** dos algoritmos de estimação não-recursivos.

Identificação on-line - A aplicação em tempo real dos algoritmos de identificação é interessante para vários propósitos como rastreamento de parâmetros variantes no tempo, detecção, diagnóstico, filtragem, controle adaptativo e preditivo.

Para a validação é necessário ainda efetuar os protocolos como estimativa do ganho estático, constante de tempo, atraso de transporte, verificação da instrumentação da planta, tipo de sinal de entrada, malha aberta ou malha fechada (Coelho e Coelho, 2004) e (Ljung e Glad, 1994). E para a identificação é necessário conhecer algumas informações tais como o tipo de modelo do processo: linear ou não-linear, variante ou invariante no tempo, paramétrico ou não-paramétrico, contínuo ou discreto, monovariável ou multivariável, característica do ruído. É preciso definir a precisão requerida do modelo: baixa, média ou alta. É importante definir o método de estimação do modelo a ser utilizado, off-line ou on-line, malha aberta ou malha fechada, resposta ao degrau, resposta ao impulso, resposta em frequência, análise espectral de Fourier e técnicas de correlação.

2.2 Sistemas Lineares Invariantes no tempo

Os Sistemas Lineares Invariantes no tempo (SLI T) ou (LT I), do inglês **Linear Time Invariant**, são sem dúvida um das classes mas importantes de sistemas dinâmicos existentes na literatura. Representam idealizações de processos encontrados no mundo real (Ljung, 1999). Conceitos básicos são instrumentos para o desenvolvimento da teoria de identificação de sistemas dinâmicos.

2.2.1 Conceitos e Definições

Para sistemas invariantes no tempo a resposta para uma dada entrada não depende do tempo absoluto. Isso porque a forma de onda da resposta não depende do instante inicial, ou seja, o deslocamento no tempo não altera os valores da saída, mas os deslocam no tempo. A resposta para uma combinação linear

de entradas é igual a resposta para a combinação linear das saídas quando são aplicadas as entradas individuais. Um sistema é causal se a saída em um certo tempo depende da entrada até este tempo, ou seja, se dado um instante k , $y(k)$ dependa apenas das entradas e saídas até o instante k .

2.3 Ajuste dos Modelos Polinomiais

A estimação não é uma tarefa tão trivial, envolve a seleção de estimadores que contemplem as características e especificações do que se quer representar (Ljung, 1999). Neste trabalho dois estimadores são utilizados e para tanto faz-se necessário um estudo preliminar de suas propriedades.

2.3.1 Funções Parametrizadas

Considere uma função escalar $y_i = f(x_i)$, com $i = 1 \dots N$. No caso vetorial $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ depende de um vetor de n parâmetros, ϑ . Dizemos então que a função $f(x)$ é parametrizada por $\vartheta \in \mathbb{R}_n$ e pode ser representada da seguinte forma:

$$y = f(x, \vartheta) \quad (2.4)$$

que define um conjunto de equações para várias observações do escalar y e do vetor de variáveis independentes pela seguinte forma:

$$y_i = f(x_i, \vartheta) \quad (2.5)$$

com $i = 1 \dots N$, sendo y_i a i -ésima observação de y , e $x_i = [x_{1i} \quad x_{2i} \quad \dots \quad x_{ni}]^T$ são as i -ésimas observações dos n elementos do vetor x e $x_{ij} \in \mathbb{R}$. Sendo conhecidos os conjuntos $y_1, \dots, y_N$ e $x_1, \dots, x_N$ quer se determinar f e ϑ .

Cada elemento da família como descrito na Eq. (2.5) é uma restrição, ou seja, é um conjunto de N restrições a partir da Eq. (2.4). Assim a função f e o vetor ϑ não variam de uma restrição para outra e a Eq. (2.4), pode ser reescrita como:

$$y = x^T \vartheta \quad (2.6)$$

implicando que f é linear nos parâmetros, e se f não satisfizer as condições de ϑ então poderá ser estimada por um método não linear.

Tomando n restrições da Eq. (2.4), a fim de se obter n elementos de ϑ , temos $N = n$. Assim as n restrições da Eq. (2.4) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{matrix} y_2 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} = \mathbf{h} \quad \dots \quad \mathbf{i} \quad \begin{matrix} \vartheta_2 \\ \vartheta_1 \\ \vdots \\ \vartheta_n \end{matrix} \quad (2.7)$$

então

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \vartheta \quad (2.8)$$

sendo $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x_i \in \mathbb{R}^n$, um vetor coluna de n linhas. Na Eq. (2.8) y é a variável dependente de x_i , que por sua vez é a variável independente, ϑ é o vetor de parâmetros a determinar. Desde que $\mathbf{X}$ seja não singular, é possível determinar o vetor de parâmetros da seguinte forma:

$$\vartheta = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{y} \quad (2.9)$$

que é um sistema possível e determinado.

Se $N > n$ restrições da Eq. 2.4 forem tomadas, tem-se então um sistema de equações sobredeterminado, ou seja a Eq.(2.8) tem $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times n}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ e $\vartheta \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. E como $\mathbf{X}$ não é quadrada, logo não pode ser invertida. Para possibilitar a inversão pode-se multiplicar por $\mathbf{X}^T$ a fim de se obter a forma quadrada desejada e a Eq.(2.8) desenvolve-se da seguinte forma:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \vartheta \quad (2.10)$$

que é a equação normal. E por fim

$$\vartheta = [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (2.11)$$

onde $\mathbf{X}^T \mathbf{X} \neq 0$, é não singular, e a matriz $[\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T$ é a pseudo-inversa. Assim a Eq. (2.11) é a solução para determinar um vetor de parâmetros a partir de um conjunto de equações com mais restrições do que incógnitas.

2.3.2 Método dos Mínimos Quadrados

A Eq.(2.9) é a única que satisfaz simultaneamente as n restrições do sistema de equações. Para o início supõe-se que é conhecido o valor de $\hat{\theta}$ e que é cometido um erro e ao se tentar explicar o valor observado y a partir de x e de $\hat{\theta}$ então teremos a seguinte equação:

$$y = X^T \hat{\theta} + e \quad (2.12)$$

sendo que $e \in \mathbb{R}$.

Tomando $N > n$, a Eq. (2.12) pode ser representada da forma matricial como:

$$y = X\hat{\theta} + e \quad (2.13)$$

sendo $e \in \mathbb{R}^N$ o vetor de erros ao se tentar explicar y como $X\hat{\theta}$. E além disso $\hat{\theta}$ deve ser de forma que reduza o erro, ou seja queremos minimizar o erro, utilizamos

então o erro quadrático como função de custo para obtermos $y = X\hat{\theta}$. Assim o

valor estimado $\hat{\theta}$ deve minimizar a função objetivo que é

$$J_{MQ} = \sum_{i=1}^N e(i)^2 = e^T e = \|e\|^2 \quad (2.14)$$

Substituindo a Eq.(2.13) em (2.14) obtemos:

$$J_{MQ} = (y - X\hat{\theta})^T (y - X\hat{\theta}) \quad (2.15)$$

$$= y^T y - y^T X\hat{\theta} - \hat{\theta}^T X^T y + \hat{\theta}^T X^T X \hat{\theta} \quad (2.16)$$

Para minimizar essa função temos que encontrar as derivadas parciais de (2.14) por $\hat{\theta}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{MQ}}{\partial \hat{\theta}} &= -(y^T X)^T - X^T y + (X^T X \hat{\theta} + X^T X \hat{\theta}) \\ &= -X^T y - X^T y + 2X^T X \hat{\theta} \\ &= -2(X^T y) + 2(X^T X \hat{\theta}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

então é necessário que

$$\frac{\partial J_{MQ}}{\partial \hat{\theta}} = 0 \quad (2.18)$$

logo

$$-2(X^T y) + 2(X^T \hat{X}_{\hat{\theta}}) = 0 \quad (2.19)$$

como queremos encontrar $\hat{\theta}$, então é necessário dividir por 2 e em seguida pela forma quadrática $X^T X$, sendo assim da Eq.(2.19) resulta que:

$$\begin{aligned} -(X^T y) + (X^T \hat{X}_{\hat{\theta}}) &= 0 \\ (X^T \hat{X}_{\hat{\theta}}) &= 0 + (X^T y) \\ \frac{X^T \hat{X}_{\hat{\theta}}}{X^T X} &= \frac{X^T y}{X^T X} \\ \hat{\theta} &= \frac{X^T y}{X^T X} \\ \hat{\theta} &= [X^T X]^{-1} X^T y \end{aligned} \quad (2.20)$$

e para que $\hat{\theta}$ seja de mínimo, é necessário que

$$\frac{\partial^2 J_{MQ}}{\partial \hat{\theta}^2} = 2X^T X > 0 \quad (2.21)$$

o que é verdadeiro pois é definida positiva por construção conforme pode ser visto na Eq. (2.19). Logo:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{MQ} &= \arg \min_{\hat{\theta}} J_{MQ} \\ &= [X^T X]^{-1} X^T y \end{aligned} \quad (2.22)$$

que é a solução obtida pelo método dos mínimos quadrados que corresponde à solução descrita pela Eq. (2.11) que utiliza a pseudo-inversa.

Na subseção seguinte é feito um tratamento deste mesmo método para equações à diferença, em especial os modelos polinomiais ARX e OE. A notação foi adequada de acordo com as bibliografias (Ljung, 1999), (Ljung e Glad, 1994).

2.3.3 Equação à Diferença

Anteriormente foram discutidos alguns resultados sobre um modelo geral do tipo $f(x, \theta)$ com algumas restrições. Na maioria dos problemas de identificação

as restrições que irão gerar a equação matricial a ser resolvidas via MQ, serão obtidas a partir de equações à diferença, que são seqüências do tipo descrita em (2.1) a cada instante (k) , de forma que $u(k)$ e $y(k)$ são amostras dos sinais utilizados na identificação do sistema.

As equações à diferença são dados discretos no tempo e podem ser de-scritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t|\vartheta) = & -a_1y(k-1) - \dots - a_ny(k-n_a) + b_1u(k-1) \\ & + \dots + b_nb u(k-n_k-n_b+1) \end{aligned} \quad (2.23)$$

para o caso de um modelo auto regressivo com entrada exógena n_a , n_b , n_k , a_i e b_i são ajustados a partir das entradas e saídas observadas do processo, e definem a estrutura do modelo. O modelo ARX que iremos abordar neste texto permite calcular a saída $y(k)$, ignorando as perturbações, e conhecendo as entradas e saídas passadas, a saída y é uma combinação linear das entradas presente e passadas, e das saídas passadas.

O problema de identificação abordado é medir $y(k)$ e $u(k)$ para encontrar os coeficientes $(a_i$ e $b_i)$ do modelo, quantas saídas atrasadas são necessárias, o tempo morto do processo (intervalos de amostragem que decorrem antes que a saída responda a modificações na entrada) e quantas entradas atrasadas usar ao processo de estimação dos parâmetros (Ljung e Glad, 1994).

Uma equação do tipo (2.23) é um conjunto de observações geradas se-qüencialmente no tempo e ordenadas em relação a ele. Deste comportamento espera-se que observações sucessivas sejam dependentes e esta dependência seja de um período de tempo para outro, assim podendo ser explorada para desenvolver predições.

A ordem da observação é denotada pelo subscrito t e assim $y(k)$ denota a t -ésima observação de uma série temporal, $y(k-1)$ a precedente e a $y(k+1)$ a posterior como exemplificação.

O objetivo da análise de séries temporais é de descrever o processo na forma de um modelo observável capaz de capturar as propriedades dinâmicas do

processo representado, e, conseqüentemente ser usado para predições de comportamentos futuros, e controle.

2.3.4 Polinômios no Tempo

A estrutura ARX relaciona a saída atual $y(k)$ com um número finito de saídas passadas $y(k - k')$ e entradas $u(k - k')$. A saída no tempo k é calculada como uma combinação linear das saídas e das entradas, conseqüentemente, a saída no instante k depende da entrada do sinal em vários instantes de tempo.

Partindo do modelo polinomial linear mais geral das entradas e saídas, o modelo ARX utiliza o método dos mínimos quadrados para o ajuste de seus parâmetros.

$$A(q)y(k) = \sum_{i=1}^{n_u} \frac{B_i(q)}{F_i(q)} u_i(k - nk_i) + \frac{C(q)}{D(q)} e(k). \quad (2.24)$$

Na Eq. (2.24), n_a é o número de parâmetros do polinômio $A(q)$, n_b corresponde ao número de parâmetros do polinômio $B(q)$. Tendo na como o número de pólos, $n_b - 1$ o número de zeros e n_k é o número de atrasos da saída em relação à entrada. O operador de atraso q^{-1} representa $u(k)q^{-1} = u(k - T)$ de forma que $y(k)q^{-1} = y(k - 1)$, $e(k)$ é ruído branco. Os polinômios são definidos como:

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a} \quad (2.25)$$

$$B(q) = b_1q^{-1} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b+1} \quad (2.26)$$

$$C(q) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_c}q^{-n_c} \quad (2.27)$$

$$D(q) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d} \quad (2.28)$$

$$F(q) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f} \quad (2.29)$$

Tomando $C(q) = D(q) = E(q) = F(q) = 1$ e $A(q)$ e $B(q)$ polinômios arbitrários a Eq. 2.24 torna-se:

$$\begin{aligned} A(q)y(k) &= B(q)u(k - nk) + e(k) \\ y(k) &= \frac{B(q)}{A(q)} u(k - nk) + \frac{1}{A(q)} e(k), \end{aligned} \quad (2.30)$$

uma vez que o ruído $e(t)$ aparece diretamente na equação, o modelo ARX é classificado como pertencendo à classe de modelo de erro, ou seja o erro é inerente ao processo. Temos então a estrutura representada pela equação à diferença assim como na Eq. (2.23).

Tomando $C(q) = D(q) = E(q) = A(q) = 1$ e $F(q)$ e $B(q)$ polinômios arbitrários a Eq. 2.24 torna-se:

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)} u(k - nk) + e(k), \quad (2.31)$$

formando assim o modelo Output Error (OE). Pela forma como estão dispostos os polinômios, pode-se notar que este modelo atua diretamente na entrada para minimizar o erro na saída.

Caracterização do Processo Dinâmico

Considerando que x é o vetor que representa as x_i observações, e para o caso de identificação as observações são as entradas e saídas passadas, assim como é descrito na Eq. (2.36), então $x = \phi_T$ e logo a Eq. (2.6), passa a ser escrita como

$$y = \phi^T \theta \quad (2.32)$$

consequentemente a Eq. (2.9) passa a ser escrita como

$$\theta = \phi^{-1} y \quad (2.33)$$

Nessa analogia deve ser considerada que as equações (2.32) e (2.33) são obtidas diretamente pela substituição de x por ϕ_T , mas é necessário caracterizar o processo com a medida do erro e inerente ao processo de identificação. Dessa forma teremos:

$$y(k) = \phi^T(k) \theta + e(k) \quad (2.34)$$

sendo:

$$\theta = [a_1 \dots a_{na} \quad b_1 \dots b_{nb}]^T \quad (2.35)$$

e

$$\phi^T(k) = [-y(k-1) - y(k-na) \dots u(k-1)u(k-nb)] \quad (2.36)$$

$\phi^T(k)$ é o vetor das medidas, $\theta(k)$ é o vetor de parâmetros e $e(k)$ uma perturbação. Assim, a saída estimada é dada por

$$\hat{y}(k|\theta) = \phi^T(k)\theta. \quad (2.37)$$

Pelo método dos mínimos quadrados obtemos $\hat{\theta}$. Φ é a matriz de observação dos dados e y_T é o vetor de saída.

$\phi^T(t)$ É também chamado vetor de regressores, pois no processo ARX considerando os atrasos nk e o instante k , podemos obter

$$\phi(k-1) = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_{n\theta}]^T, \quad (2.38)$$

tomadas até o instante $(k-1)$ e $n\theta = \dim[\theta]$, para um caso dinâmico é comum representar a saída como

$$y(k) = \phi^T(k-1)\theta + e(k) \quad (2.39)$$

esse modelo também gera restrições que podem ser representadas por uma equação matricial da forma

$$y = \Phi\theta + e \quad (2.40)$$

sendo Φ a matriz de regressores. A equação matricial (2.40) pode ser interpretada como (2.13), sendo assim todo o processo de minimização do erro (e) da equação matricial (2.40), a ser discutido no desenvolvimento deste trabalho, pode ser visto da seguinte forma:

$$V_N(\theta, Z) = \sum_{k=1}^N e(k|k-1, \theta)^2 = e^T e = \theta^T K \theta \quad (2.41)$$

que veremos ser a mesma função de custo $\hat{J}_{MQ}(\theta)$ discutida mais à frente obtendo $J_{MQ}(\theta)$

assim o estimador dos mínimos quadrados da forma convencional (MQ) e da forma ponderada (MQP).

O Método dos Mínimos Quadrados

Dado um processo físico caracterizado por um entrada $u(k)$, uma saída $y(k)$, uma perturbação $e(k)$. O modelo para este sistema monovariável agora é descrito como:

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + e(k) \quad (2.42)$$

os valores de n_a e n_b correspondem às dimensões dos vetores de entrada e saída.

Da Eq. (2.42) temos que:

$$y(k) = -a_1y(k-1) - \dots - a_nay(k-na) + b_1u(k-1) + \dots + b_nbu(k-nb) + e(k). \quad (2.43)$$

Definindo assim

$$\phi^T(k) = \begin{matrix} \mathbf{h} & & \mathbf{i} \\ -y(k-1) & \dots & -y(k-na) & u(k-1) & \dots & u(k-nb) \end{matrix} \quad (2.44)$$

e

$$\theta = \begin{matrix} \mathbf{h} & & \mathbf{i}_T \\ a_1 & \dots & a_{na} & b_1 & \dots & b_{nb} \end{matrix} \quad (2.45)$$

onde $\phi(k) \in \mathbb{R}^p$ com $p = n_a + n_b$ o número de parâmetros a ser estimado, logo:

$$y(k) = \phi^T(k)\theta + e(k) \quad (2.46)$$

Admitindo que são realizadas N medidas suficientes para determinar os parâmetros a_i ; $i = 1, \dots, n_a$ e b_j ; $j = 1, \dots, n_b$, então temos a seguinte representação matricial:

$$\begin{matrix} y^{(2)} \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(N)} \end{matrix} = \begin{matrix} \phi^{T(2)} \\ \phi^{T(1)} \\ \vdots \\ \phi^{(N)} \end{matrix} \theta + \begin{matrix} e^{(2)} \\ e^{(1)} \\ \vdots \\ e^{(N)} \end{matrix} \quad (2.47)$$

ou da forma simplificada

$$\mathbf{y} = \Phi\theta + \mathbf{e} \quad (2.48)$$

equivalente a (2.40), com

$$\mathbf{y}^T(N) = \begin{bmatrix} \mathbf{h} & & \mathbf{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(N) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\Phi(N) \in \mathbb{R}^{N \times p} = \begin{bmatrix} \phi^T(1) \\ \vdots \\ \phi^T(N) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{e}^T(N) = \begin{bmatrix} \mathbf{h} & & \mathbf{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(1) & e(2) & \dots & e(N) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Seja $\hat{\theta}$ o valor estimado de θ e $\hat{\mathbf{y}}$ a saída estimada do sistema dada por:

$$\hat{\mathbf{y}} = \Phi \hat{\theta} \quad (2.52)$$

Sejam os erros entre os vetores de parâmetros desconhecidos e estimados

$$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta} \quad (2.53)$$

e o erro entre a saída do sistema e do modelo

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \quad (2.54)$$

logo

$$\tilde{\mathbf{y}} = \Phi \tilde{\theta} + \mathbf{e} \quad (2.55)$$

que constitui a equação do erro

O estimador é obtido minimizando-se:

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^N w(i) \tilde{\mathbf{y}}^T(i) \tilde{\mathbf{y}}(i)$$

sendo $w(i)$ a ponderação em cada componente do erro. custo $J(\theta)$ da Eq. (2.56) pode ser renomeada como

$J(\theta)$ JM QP forma:

Dessa forma a função de custo $J(\theta)$ é descrita da seguinte

$$J_{\text{MQP}}(\theta) = \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{y}} \quad (2.57)$$

onde $\mathbf{y} = [\tilde{y}(1) \ \tilde{y}(2) \ \dots \ \tilde{y}(N)]^T$ e $\mathbf{W} = \text{diag}(w(1) \ w(2) \ \dots \ w(N))$. Deseja-se:

$$\hat{\theta}_{\text{MQP}} = \arg \min_{\theta} J_{\text{MQP}}(\theta) \quad (2.58)$$

$$J_{\text{MQP}}(\theta) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{W} \Phi \hat{\theta} + \frac{1}{2} \hat{\theta}^T \Phi^T \mathbf{W} \Phi \hat{\theta} \quad (2.59)$$

sendo que a função $J_{\text{MQP}}(\theta)$ ainda pode ser escrita como:

$$J_{\text{MQP}}(\theta) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{W} \Phi \hat{\theta} + \frac{1}{2} \hat{\theta}^T \Phi^T \mathbf{W} \Phi \hat{\theta} \quad (2.60)$$

sabendo que $\hat{\theta}$ deve ser tal que

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = 0 \quad (2.61)$$

o que implica na equação (2.60) que

$$\frac{\partial J_{\text{MQP}}}{\partial \hat{\theta}} = -\mathbf{y}^T \mathbf{W} \Phi + \hat{\theta}^T \Phi^T \mathbf{W} \Phi = 0 \quad (2.62)$$

$$\Phi^T \mathbf{W} \Phi \hat{\theta} = \Phi^T \mathbf{W} \mathbf{y} \quad (2.63)$$

denominada equação normal da qual resulta o seguinte estimador:

$$\hat{\theta}_{\text{MQP}} = (\Phi^T \mathbf{W} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{W} \mathbf{y} \quad (2.64)$$

sendo a matriz $\Phi^T \mathbf{W} \Phi^{-1} \Phi^T \mathbf{W}$ a matriz pseudo-inversa. O estimador da Eq. (2.64) é denominado Estimador de Markov (Mínimos Quadrados Ponderado, Mínimos Quadrados Generalizado). Quando $\mathbf{W} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$ onde σ é escalar e $\mathbf{I}_N$ é uma matriz de identidade $N \times N$, e no processo tal condição quer dizer que os regressores estão associados ao mesmo valor numérico de erros da medida, logo teremos:

$$\hat{\theta}_{\text{MQ}} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\Phi^T \Phi}{N}^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \quad (2.65)$$

obtendo o estimador dos mínimos quadrados convencional que se apresenta da seguinte forma:

$$\hat{\theta}_{\text{MQ}} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \quad (2.66)$$

O estimador $\hat{\theta}_{\text{MQ}}$ é um ponto de máximo pois a matriz hessiana

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \hat{\theta}^2} = 2 \Phi^T \Phi > 0 \quad (2.67)$$

é definida positiva uma vez que $\mathbf{W} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$ é definida positiva. Logo $\hat{\theta}_{MQ}$ na equação (2.66) é uma solução ótima, e como é única, é uma solução ótima global.

Uma das propriedades do estimador $\hat{\theta} = \hat{\theta}(y)$ de θ , é que ele é dito não polarizado

se $\hat{\theta}$ possui média igual a θ qualquer que seja $\theta \in \mathbb{R}^m$

R, isto é $E(y|\hat{\theta})\{f(y)\} = \theta$.

Propriedade do Estimador dos Mínimos Quadrados

Agora faz-se necessário uma observação sobre as propriedades estatísticas deste estimador, conhecendo assim as condições que garantem a sua robustez. Uma das propriedades mais importantes do Estimador MQ é a ortogonalidade. Considere então as seguintes equações matriciais (2.52) e (2.48) respectivamente

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}} &= \Phi \hat{\theta} \\ \mathbf{y} &= \Phi \theta + \mathbf{e}\end{aligned}$$

destas equações assumindo que $\hat{\theta} = \hat{\theta}_{MQ}$, temos que $\mathbf{y}^T (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) = 0$, ou seja,

os vetores $\hat{\mathbf{e}}$ são ortogonais quando o vetor de parâmetros é estimado $\hat{\theta} = \hat{\theta}_{MQ}$ y usando-se o estimador MQ. Para um aprofundamento sobre esse tema veja Anexo A que trata com mais detalhes das propriedades desse estimador.

O algoritmo de estimação dos mínimos quadrados é assintoticamente não polarizado se a perturbação atuante no processo, $e(k)$, é uma seqüência de variáveis aleatórias do tipo branca. E para que se obtenha valores estimados não polarizados quando a perturbação não é branca, utiliza-se o método da variável instrumental (IV), correlacionando-a com a entrada e saída e descorrelacionando-a do ruído do sistema.

Substituindo a Eq. (2.48) em (2.66), obtemos:

$$\hat{\theta} = \Phi^T \Phi^{-1} \Phi^T [\Phi \hat{\theta} + \mathbf{e}] \quad (2.68)$$

$$\hat{\theta} = \hat{\theta} + \Phi^T \Phi^{-1} [\Phi^T \mathbf{e}] \quad (2.69)$$

O estimador $\hat{\theta}_{MQ}$ é consistente se converge para (2.69) quando o número de amostras aumenta, $N \rightarrow \infty$. Portanto é necessário calcular a consistência do estimador determinando a esperança matemática de $\hat{\theta}$, logo teremos:

$$E[\hat{\theta}] = \theta + E[\Phi^T \Phi^{-1} \Phi^T \mathbf{e}] \quad (2.70)$$

se $e(t)$ é uma perturbação do tipo ruído branco, então $E[\Phi^T e] = 0$, a estimação

como foi dito anteriormente, inviabilizando a convergência.

Método da Variável Instrumental

O problema acima em que $E[\Phi^T e] \neq 0$, pode ser resolvido com a técnica da variável instrumental, devendo ser selecionada uma matriz variável de instrumental z contendo elementos de um novo sinal $z(k)$ que seja relacionado com a sinal de entrada e saída do processo e descorrelacionado do ruído, isto é, $E[z^T e] = 0$ e $E[z^T \Phi] = \Psi$ seja uma matriz não singular.

Seja então um sistema modelado pela Eq. (2.48) e definindo z

$$z(N) = \begin{bmatrix} z^T(1) \\ z^T(2) \\ \vdots \\ z^T(N) \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

como a variável instrumental multiplicando a equação (2.48) pela transposta da variável instrumental teremos:

$$z^T y = z^T \Phi \vartheta + z^T e \quad (2.72)$$

e

$$\vartheta = (z^T \Phi)^{-1} z^T y - (z^T \Phi)^{-1} z^T e \quad (2.73)$$

definindo-se o estimador da variável instrumental como:

$$\hat{\vartheta}_{IV} = (z^T \Phi)^{-1} z^T y \quad (2.74)$$

e este, assim como o estimador em (2.66), é também um estimador não polarizado. Considerando a Eq. (2.48) com $\vartheta = \vartheta_0$ representando os parâmetros verdadeiros do sistema que devem ser estimados e multiplicando-a pela variável instrumental z^T temos:

$$z^T y = z^T \Phi \vartheta_0 + z^T e \quad (2.75)$$

$$\vartheta_0 = (z^T \Phi)^{-1} z^T y - (z^T \Phi)^{-1} z^T e \quad (2.76)$$

substituindo a Eq. (2.74) em (2.76), teremos então:

$$\hat{\theta}_{IV} = \theta_0 - z^T \Phi^{-1} z e \quad (2.77)$$

correspondendo à forma não recursiva do estimador variável instrumental. E

a condição para que $\hat{\theta}_{IV} \rightarrow \theta_0$, quando $N \rightarrow \infty$ é garantida uma vez que o sinal $z(k)$ não esteja relacionado com $e(k)$ que possui $E[e(k)] = 0$, e a matriz $z^T \Phi^{-1} z \neq 0$. Mais informações sobre a análise de convergência deste algoritmo pode ser encontrada em (Ljung, 1999).

2.4 Conclusão

Neste capítulo foi abordado os principais conceitos e procedimentos de Identificação de Sistemas relevantes para esta dissertação. Foi dado um enfoque todo especial à Identificação Paramétrica, visto que o foco deste trabalho é a Identificação Paramétrica de modelos que possam representar o funcionamento de uma cuba eletrolítica tipo prebaked. As várias fases de Identificação são abordadas com o propósito de direcionar o leitor para a metodologia aplicada nesta dissertação. Abordou-se a teoria necessária à elaboração de modelos polinomiais do tipo ARX e OE, descrevendo principalmente os procedimentos essenciais para determinar a forma algébrica do estimador dos Mínimos Quadrados e o estimador da Variável Instrumental.

Capítulo 3

A Indústria do Alumínio e o Efeito Anódico

Este Capítulo leva em consideração o objeto de estudo, o efeito anódico, e para tanto é feita uma descrição do processamento industrial do alumínio, cuja abordagem é de processo. A planta é caracterizada pelo tipo de ligação elétrica e pelos níveis de corrente e tensão. As fases do processamento são detalhadas bem como o processo químico durante a eletrólise e o controle do próprio processo produtivo. Dentre os diversos aspectos deste Capítulo, destacamos a caracterização das fases de funcionamento da cuba pelos níveis de tensão, estes que configuram elementos essenciais ao desenvolvimento deste trabalho.

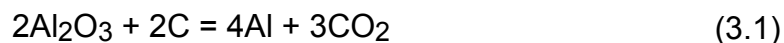
3.1 Processo Industrial do Alumínio

O alumínio é um metal conhecido pelo homem há vários séculos, e atualmente esta sendo muito utilizado pela indústria, devido as suas propriedades e características tais como: leveza, o que garante várias aplicações para construção de peças e equipamentos que exijam leveza e não comprometam a estrutura do equipamento, durabilidade a sua oxidação é muito mais lenta que a de outros metais, fazendo que sua utilização ocorra em casos de contatos com substâncias que podem ocasionar oxidação destes, condutibilidade e principalmente por ser totalmente reciclável despertando o interesse nas indústrias pela causa ambiental.

O alumínio é produzido a partir da bauxita, que é um material heterogêneo, composto principalmente de um ou mais hidróxidos de alumínio, e várias misturas de sílica, óxido de ferro, titânia, alumina silicato, e outras impurezas em quantidades menores. A maior parte da extração mundial de bauxita (aproximadamente 85%) é usada como matéria-prima para a fabricação de alumina, por lixívie cáustico químico, método conhecido como Processo de Bayer. Subseqüentemente, a maioria da alumina produzida neste processo de refinamento é, por sua vez, empregada como matéria-prima para a produção de alumínio metálico, pela redução eletrolítica da alumina em um banho de criolita natural ou sintética fundida $\text{N a}_3\text{AlF}_6$, método conhecido como Processo Hall-Heroult.

A bauxita deve apresentar no mínimo 30% de alumina aproveitável para que a produção de alumínio seja economicamente viável. O processo de obtenção de alumínio primário divide-se em três etapas: mineração, refinaria e redução.

A refinaria é o começo do processo que transforma a bauxita em alumina calcinada. O procedimento mais utilizado é o Bayer. Esta é primeira etapa até se chegar ao alumínio metálico. A redução é a parte final da cadeia produtiva do alumínio. Nesta, ocorre o processo conhecido como Hall-Hérout, por meio da eletrólise, para obtenção do alumínio. A equação geral que representa este processo é:



Nesta etapa, a alumina produzida na refinaria é dissolvida num banho eletrolítico fundido a 950°C dentro das cubas eletrolíticas onde é reduzida para alumínio, sendo retirado das cubas e transportado para ser resfriado em moldes refrigerados a água, no lingotamento. O processo de redução da alumina para alumínio metálico pode ser resumido nas seguintes etapas:

Primeira Etapa: A alumina é dissolvida em um banho de criolita ($\text{N a}_3\text{AlF}_6$) fundida e fluoreto de alumínio (AlF_3) em baixa tensão, e uma alta corrente contínua, decompondo-se em oxigênio;

Segunda Etapa: O oxigênio se combina com o anodo de carbono, desprendendo-se na forma de dióxido de carbono, o alumínio líquido se precipita no fundo da cuba eletrolítica e os gases que possuem fluoreto gasoso e particulado são recuperados por um sistema reator com alumina pura;

Terceira Etapa: O alumínio líquido, retirado periodicamente das cubas, essa ação é chamada de correr a cuba, é transferido em cadinhos até os chamados fornos de espera. Daí o metal segue para máquinas lingoteiras, onde é conformado e resfriado, para produção dos lingotes.

A cobertura da cuba possui um banho solidificado, que contribui para a vida do equipamento e manutenção da temperatura.

3.1.1 A Planta de Estudo

As cubas em estudo são oriundas de 3 linhas de produção, com 204, 250 e 256 cubas cada uma, que estão em uma ligação elétrica em série mas produzem alumínio de forma independente. A tensão de cada uma das cubas, ligadas em série, varia de 4 a 5 Volts, dos quais apenas 1,6 V são necessários para a eletrólise propriamente dita. Esse valor de tensão de 1,6 V se refere a tensão do efeito bateria ($Bemf$). A diferença de tensão é necessária para vencer resistências do circuito e gerar calor para manter o eletrólito em fusão. Basicamente, são necessárias cerca de quatro toneladas de bauxita para produzir duas toneladas de alumina e duas toneladas de alumina para produzir uma tonelada de alumínio através do processo de redução.

3.1.2 Insumos da Produção

Os principais insumos necessários para a redução da alumina são:

Alumina (Al_2O_3) - A alumina é matéria-prima básica para a produção industrial do alumínio. É obtida a partir do refino da bauxita pelo processo Bayer. As reservas mais expressivas de bauxita no Brasil, cerca de 95%, se encontram na região Norte, mais precisamente no Estado do Pará, notadamente na região do Rio Trombetas, noroeste do Estado.

Fluoreto de Alumínio (AlF_3) - A eletrólise da alumina é realizada em meio a um banho de sais fundidos, ou eletrólito, constituído basicamente de fluoretos de sódio e alumínio. No início do funcionamento, o constituinte principal do banho é a criolita, mas durante a operação das cubas, a composição química do eletrólito sofre variações que necessitam ser permanentemente ajustadas para manter as condições adequadas ao processo eletrolítico. Este ajuste é feito pela adição programada de fluoreto de alumínio. O fluoreto tem o aspecto de um pó esbranquiçado e é recebido em sacas.

Fluoreto de Cálcio (CaF_2) - Comporta-se como fundente, abaixando a temperatura de fusão do banho, ao diminuir a temperatura de fusão e manutenção das propriedades físico-químicas do banho.

Carbonato de Sódio (Na_2CO_3)- É adicionado nos primeiros sessenta dias para suprir o consumo do catodo. As adições posteriores são feitas para ajustes na composição do banho.

3.1.3 Controle do Processo

Controle de Ratio

A operação das cubas é realizada em função de um parâmetro denominado ratio. O ratio é a relação em peso de $\text{NaF} / \text{AlF}_3$ que contribui para o aumento da solubilidade da alumina e a eficiência de corrente determinada pela quantidade de corrente (A) necessária para uma mesma produção final. A adição de criolita ou fluoreto de alumínio é realizada para manter o valor de ratio desejado e substituir a perda de fluoreto da célula pelo refratário ou volatilização. Normalmente a perda de AlF_3 é superior à de NaF que justifica o controle ser realizado pela adição, em sua maior parte, de AlF_3 . O controle do ratio está ligado intimamente com a temperatura de fusão do banho, sua eficiência de corrente e resistividade do material. As respostas de alteração de ratio pela variação da tensão e adição de AlF_3 são lentas, cerca de 40 horas para alcançar o estado estacionário. Isto é causado pela interação com o material solidificado nas paredes das cubas e a mudança da temperatura de fusão do banho.

Eficiência de Corrente

A eficiência da eletrólise de alumínio é quantificada pela porcentagem da produtividade teórica (esperada), e a obtida é conhecida como eficiência de corrente. A razão para que a eficiência de corrente ser inferior a 100% é a ocorrência da reação de volta, onde parte do alumínio formado é reoxidado segundo a equação:



A diminuição da eficiência de corrente aparenta ser diretamente relacionada com o aumento da solubilidade do alumínio e o aumento de adições de NaF. A perda de alumínio causado pela reação inversa pode ser minimizado pela diminuição da temperatura de operação utilizando um eletrólito com excesso de AlF_3 .

Distância AC

A distância AC é medida entre o anodo e a superfície do material. Eis alguns pontos importantes neste estudo:

Tensão da cuba: A tensão da cuba é função da distância AC e a concentração de alumina dissolvida no banho.

Corrente da cuba: A grande intensidade de corrente gera um intenso campo magnético dentro da cuba, resultando em uma grande agitação do banho. Esta agitação causa a dispersão do alumínio no banho, aumentando a possibilidade da reversão da reação de redução.

Temperatura de banho: A alta temperatura do banho pode causar o derretimento parcial do banho solidificado localizado nas paredes das cubas desestabilizando o balanço térmico da cuba. Esta camada solidificada protege o revestimento do efeito corrosivo da criolita.

Resistência da cuba: A resistência da cuba é variável utilizada para a estimação da concentração de alumina no banho, ela é obtida subtraindo a tensão do efeito bateria (B_{emf}) da tensão medida e dividida pelo atual valor da corrente.

$$R = \frac{V - (B_{emf})}{I} \quad (3.3)$$

sendo R a resistência, $(Bemf)$ a força contra Eletromotriz e I a corrente.

Alimentação de alumina É um dos parâmetros mais importantes para o controle da redução é a concentração de alumina dissolvida no banho. Se esta concentração é muito baixa, pode ocorrer o efeito anódico, por outro lado, se esta é muito alta, a eficiência da célula diminui e a alumina não dissolvida é depositada no catodo como escória atuando como uma camada isolante elétrica aumentando o consumo de energia causando problemas térmicos na cuba. Um grande problema que existe para o controle da concentração de alumina é a inexistência de uma tecnologia de medição direta e contínua da concentração de alumina no banho. Para tal controle se faz uma relação entre a resistência da cuba e a concentração de alumina.

3.2 Problema: O Efeito Anódico

O efeito anódico é o principal problema que aborda este trabalho. Para este problema a tarefa de estimar parâmetros que modelam o comportamento da corrente e tensão da cuba em pleno funcionamento torna-se o ponto central desta pesquisa.

3.2.1 Caracterização do Sinal por fases

Os sinais de tensão medidos mostram o comportamento da cuba em plena atividade produtiva. A Tabela 3.1 é montada da observação dos sinais das cubas conforme padrões da indústria de processamento do alumínio.

Tabela 3.1: Classificação das Fases de uma Cuba Eletrolítica com Ocorrência do Efeito Anódico.

Padrão	Limite Inferior (v)	Limite Superior (v)	n ^o med.
Normal	4,1	4,5	252
Pré-Anódico	4,5	4,8	23
Anódico Leve	4,8	5,0	17
Anódico	8,0	> 8, 0	91

Os sinais estão separados de forma a facilitar a análise. A Figura 3.1 apresenta o comportamento da tensão (V) e corrente (kA) da cuba.

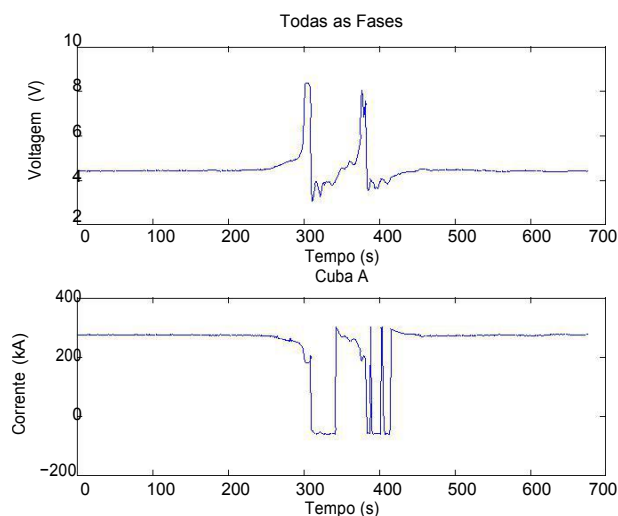


Figura 3.1: Tensão e Corrente de uma Cuba com Ocorrência de Efeito Anódico

Pode-se observar a evolução dos valores de tensão e corrente assim como a ocorrência do efeito anódico em torno de 280 s e 415 s. Os dados foram classificados tomando como indicador os valores de tensão medidos na cuba. Da Tabela 3.1, destacamos o nível de tensão do funcionamento normal e o nível de tensão de uma fase que antecede o efeito anódico, estas duas fases irão compor o principal eixo de discussão neste trabalho.

As cubas eletrolíticas dispostas em 3 linhas de produção, com 204, 250 e 256 unidades, que estão em uma ligação elétrica em série mas produzem alumínio de forma independente são os objetos de estudo em um pátio industrial. A tensão de cada uma das cubas, ligadas em série, varia de 4 a 5 Volts, dos quais apenas 1,6 V são necessários para a eletrólise propriamente dita. Esse valor de tensão de 1,6 V se refere a tensão do efeito bateria (E_{mf}), (Braga, 2008).

A diferença de tensão é necessária para vencer resistências do circuito e gerar calor para manter o eletrólito em fusão, (Banta, 2002), (Fonseca Neto et al. 2007), e (Braga, 2008). O efeito anódico é um evento não desejável no processo produtivo do alumínio. Ele pode ser causado por uma baixa concentração de alumina em seu banho eletrolítico ou por uma baixa temperatura da cuba,

fazendo que o banho fique mais resistivo, assim o efeito anódico faz com que haja um aumento rápido de tensão da cuba, alcançando valores até 10 vezes maiores que os valores normais.

A ocorrência do efeito anódico é atribuída a formação de um filme isolante, e com esse comportamento o banho não pode mais molhar a superfície anódica, até que a barreira de gás isolante seja quebrada. O efeito anódico causa um aumento extremo na tensão da cuba e conseqüentemente uma elevação na temperatura do banho, com temperaturas altíssimas, resultando em um distúrbio térmico, com a possibilidade de ocorrer o derretimento da camada isolante da cuba, e as conseqüências finais são a perda de produção em toda a linha de cubas, sua vida útil diminuída e a produção de gases PFCs. Além disso, a emissão de perfluorcarbono (PFCs), tetrafluorometano (CF_4) e hexafluoroetano (C_2F_6), que são prejudiciais ao meio ambiente, esses dois gases são gerados apenas artificialmente, colaborando para o efeito estufa, efeito responsável pelo o aquecimento da terra. O tetrafluorometano e o hexafluoroetano podem impactar o clima devido a um potencial de aquecimento global elevado (GWPS). A vida destes dois compostos, é estimada em 50.000 e 10.000 anos respectivamente. Cada quilograma de tetrafluorometano tem um equivalente de 6.500 quilogramas do dióxido de carbono (CO_2), e cada quilograma de hexafluoroetano é equivalente às emissões de 9.200 quilogramas do dióxido de carbono (ABAL, 2008).

Um alto consumo de energia é outra conseqüência do efeito anódico. Com aumento da resistência há um aumento na energia consumida e mais energia transformada em calor, com isso a temperatura do banho também aumenta, com essa temperatura elevada, há um desgaste maior da cuba podendo ocorrer o derretimento da camada sólida e isolante da cuba, afetando assim o balanço térmico da cuba e sua vida útil, (Banta, 2002), (Fonseca Neto et al. 2007), e (Braga, 2008). A partir dos dados classificados como normal a tarefa consiste em identificar o modelo que possa ser útil para a identificação da fase normal até a fase pré-anódica com o intuito de prever a fase classificada como anódica e evitar seus efeitos indesejáveis no processamento industrial do alumínio.

A possibilidade de se antecipar um padrão anódico da cuba antes que

ocorra o efeito é de grande valia tanto para o meio ambiente como para o processo propriamente dito, pois quando ocorre o efeito anódico ocorrem também uma série de problemas como: desestabilização da cuba fazendo que tenha perda na produtividade, diminuição da vida útil da cuba e para o meio-ambiente o dano maior é a emissão de gases PFC's (perfluorcarbonos), como o CF_4 e o C_2F_6 que contribuem para o aquecimento global, efeito hoje muito discutido mundialmente em congressos e encontros de países que firmam tratados para a diminuição da emissão dos gases nocivos ao ambiente.

3.3 Conclusão

Ao longo deste Capítulo pode-se perceber que o processamento industrial do alumínio é complexo em sua execução, envolve elementos elétricos e químicos. Viu-se que o efeito anódico é extremamente danoso à produção industrial e ao meio ambiente, o que já justificaria essa pesquisa. A caracterização das fases de funcionamento da cuba foi feita utilizando os níveis de tensão, e como consequência ocorreu a caracterização desse efeito por meio da tensão medida em pleno funcionamento. E diante do problema apresentado foi destacada a necessidade de predizer tal efeito durante o processo produtivo.

Capítulo 4

Processo de Modelagem ARX e OE para Cubas Eletrolíticas tipo Prebaked

Este Capítulo descreve o procedimento teórico necessário para a modelagem ARX e OE da cuba. São apresentadas as cubas utilizadas no processo de modelagem e identificação assim como os principais índices que ajudam a quantificar a qualidade do modelo.

4.1 O Modelo

Na aquisição das medidas do processo após a seleção do período de amostragem coleta-se um conjunto de dados visando a obtenção de um modelo discreto assim como é descrito na Eq. (2.1). A estimação dos parâmetros do modelo paramétricos consiste em aproximar os parâmetros desconhecidos dos polinômios do modelo tão bem que coincida com a saída medida. A partir de Z_N a validação do modelo é efetuada pela comparação do modelo obtido com as medidas em um conjunto de dados que não foram utilizados na estimação do modelo matemático, (Ljung, 1999) e (Ljung, 2007).

Utiliza-se a teoria da Identificação de Sistemas para encontrar um modelo dinâmico da cuba em uma estrutura ARX e OE, a estabilidade em malha fechada

é analisada por meio da localização pólos do modelo de função de transferência discreta no interior do círculo unitário. O desempenho do modelo é avaliado pela resposta ao impulso e ao degrau do sistema, ver Apêndice C, como também em termos de comparações entre os valores estimados e medidos de tensão na cuba. A estimação é feita com o auxílio de ferramentas computacionais para que se possa ter com mais exatidão e facilidade os resultados necessários, tendo em vista a complexidade dos mesmos dada a quantidade elevada de parâmetros a serem estimados. Para a construção do modelo o procedimento é descrito nas fases de identificação e modelagem que se seguem.

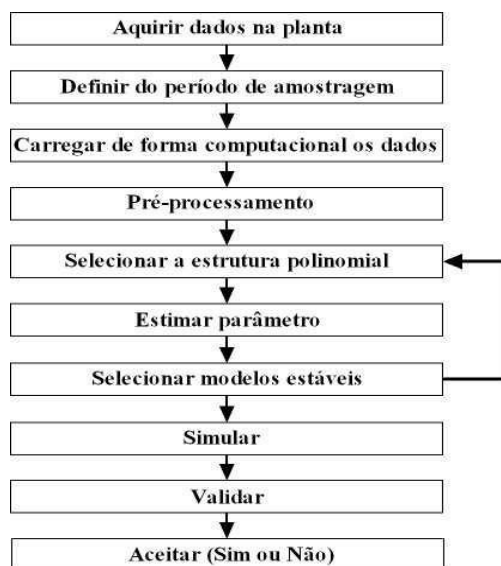


Figura 4.1: Etapas para Elaboração de Modelos

Os sinais estudados neste trabalho foram obtidos via computador de processo que monitora o processo produtivo das cubas eletrolíticas do tipo pre-baked. São referentes às variações de corrente e tensão das cubas tomadas a cada

200 ms, que para efeito de análise e simplificação foram tomados em intervalos de 5, ou seja, em intervalos de 1 segundo cada, num total de 677 pontos da Cuba A, 255 pontos da Cuba B e 135 pontos da Cuba C, esses pontos são referentes corrente e tensão coletados e classificados.

Inicialmente a estimação dos parâmetros de modelos polinomiais do tipo ARX e OE é feita com os dados de corrente e tensão classificados de acordo com a indústria como normais. E diante dos modelos já ajustados é feita a validação com os dados da fase pré-anódica e posteriormente com os dados de outras cubas.

De acordo com a Tabela 3.1, os sinais provenientes da Cuba B e da Cuba C apresentam comportamento caracterizado como normal e pré-anódico.

Estes comportamentos serão utilizados como meios de validar o desempenho dos modelos elaborados e selecionados. Inicialmente utilizaremos os sinais provenientes da cuba A uma vez que esta apresenta um número maior de amostras e apresenta a ocorrência do efeito anódico, em seguida a partir dos dados da fase normal, deverá ser encontrado alguns modelos que possam decrever ou, caracterizar o comportamento da cuba na fase pré-anódica, e diante dessa seleção verificaremos na cuba B e cuba C, o quão esses modelos conseguem simular os níveis de tensão das outras cubas que apresentam a fase normal e a fase pré-anódica.

4.1.1 Pré processamento dos dados de entrada e saída

No início do processo de Identificação é feito o carregamento dos dados de tensão y e corrente u da cuba que serão usados para estimar os parâmetros do modelo. Os dados apresentam alguns valores medidos que foram classificados em fases, e para este trabalho foram analisados os dados das fases classificadas como normal e pré-anódica, ver Tabela 3.1 e Figura 3.1 que contemplam todas as fases na Cuba A.

Quando os dados são obtidos de uma planta física eles são medidos por unidades físicas e os níveis nestas entradas e saídas podem não combinar de forma consistente e sua consistência será feita por uma correção de níveis de alguns parâmetros. Por isso antes de obtermos informações a partir dos sinais de tensão

e corrente, devemos verificar a ocorrência de tendências, *outliers* e *offsets* pois a estimação não é uma tarefa direta, e para tanto deve-se obter os sinais de tensão e corrente sem os níveis constantes e com média zero, (Ljung, 1999), (Ljung, 2007).

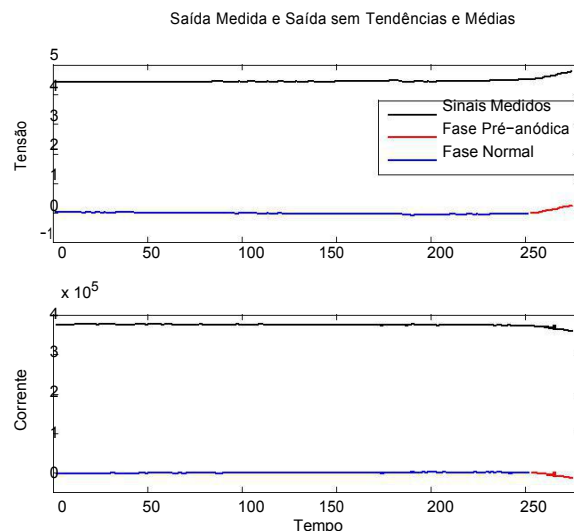


Figura 4.2: Sinais de saída e entrada sem tendências

Na Figura 4.2, destaca-se a fase normal que será utilizada inicialmente para estimação dos parâmetros que ajustarão os polinômios dos modelos ARX e OE apresentados no próximo capítulo. É destacado ainda a fase pré-anódica que posterior à estimação, propiciará a validação dos modelos com estabilidade garantida em malha fechada.

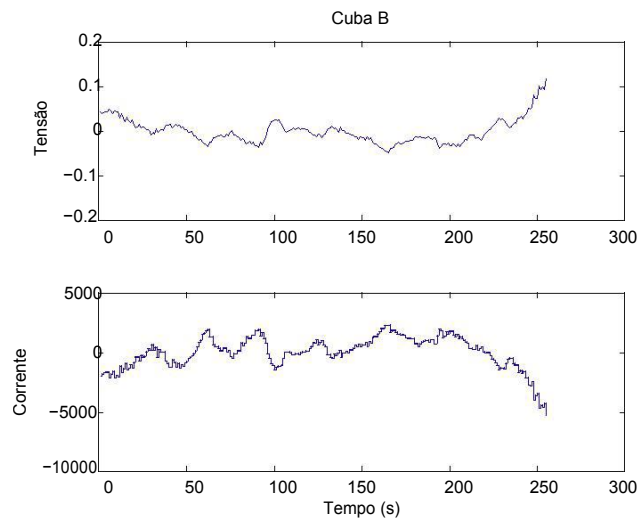


Figura 4.3: Sinais de saída e entrada sem tendências da Cuba B

Na Figuras 4.3 e 4.4 são observados os sinais das cubas que serão utiliza-dos para simular e validar modelos selecionados.

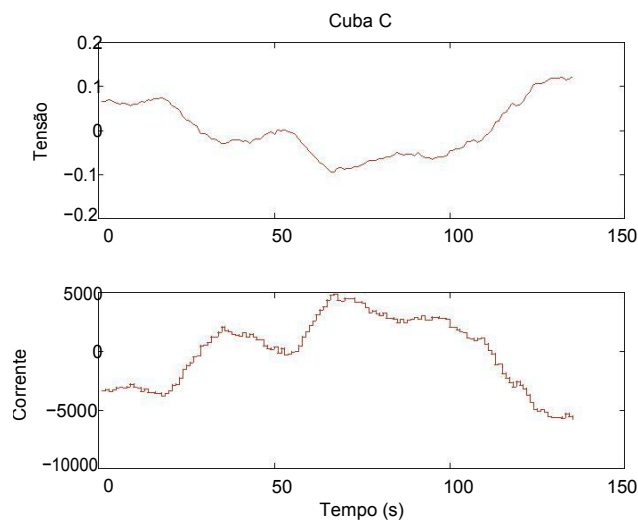


Figura 4.4: Sinais de saída e entrada sem tendências da Cuba C

No capítulo seguinte serão apresentados os modelos ARX e OE resultantes da

estimação de parâmetros que ajustam os polinômios de sua estrutura.

4.1.2 Estimação de Parâmetros e Seleção do Modelo

A estrutura ARX relaciona a saída atual $y(t)$ com um número finito de saídas passadas $y(t - k)$ e entradas $u(t - k)$. A saída no tempo t é calculada como uma combinação linear das saídas e das entradas, conseqüentemente, a saída no instante t depende da entrada do sinal em vários instantes de tempo.

4.1.3 Validação do modelo

Os modelos serão validados nos dados da fase pré-anódica, estes não foram utilizados no processo de estimação. Para quantificar o ajuste dos modelos gerados utiliza-se F , que é o índice percentual de ajuste baseado na razão da norma euclidiana de erro do processo, a saber a distância euclidiana entre a saída medida e a estimada pela saída média e a média dos dados.

$$F = 100 \times \sqrt{1 - \frac{\sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})^2}{\sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})^2}} \quad (4.1)$$

onde $\hat{y}$ é a saída estimada e $\bar{y}$ é a média da saída.

Outros critérios são utilizados como complemento para seleção. Se o modelo é validado nos mesmos dados fixos dos quais foi estimado, o ajuste sempre melhora como o aumento de parâmetro da estrutura (Ljung, 2007). É necessário então compensar a diminuição automática das funções de perda. Existem várias abordagens para compensar, provavelmente a técnica mais conhecida é o Akaike Information Criterion (AIC)

$$AIC = \log V + \frac{2d}{N} \quad (4.2)$$

e o Akaike's Final Prediction Error (FPE) dado por:

$$FPE = V \frac{1 + \frac{d}{N}}{1 - \frac{d}{N}} \quad (4.3)$$

ambos simulam a situação de validação transversal, onde o modelo é testado em outros dados fixos, (Ljung, 2007). V é a função de perda, é um ajuste quadrático

para a estrutura em questão,

$$\frac{1}{x} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t, \vartheta_N) [\varepsilon(t, \vartheta_N)]^T \quad (4.4)$$

$d = n_a + n_b$ é o número total de parâmetros estimados e N é o conjunto total dos dados e $\varepsilon(t, \vartheta_N) = y(t) - \hat{y}(t|\vartheta)$ é o erro de predição. A validação dos modelos foi feita baseado no ajuste entre a saída medida da fase pré-anódica e a saída estimada pelo modelo ARX. O ajuste é medido pelas Eq. 4.1, 4.2 e 4.3 , (Ljung, 2007).

4.2 Conclusão

Neste Capítulo foi discutido o processo de modelagem da cuba eletrolítica, as etapas do processo foram apresentadas, sendo destacadas a fase de carga-mento computacional dos sinais provenientes da cuba, o pré-processamento desses sinais, a estimação dos parâmetros, a validação dos modelos apresentando, e os principais índices que quantificam o ajuste requerido. Foram apresentadas ainda as Cubas A, B e C cujos dados serão utilizados para elaborar modelos paramétricos do tipo ARX e OE que representem de forma adequada o funcionamento da cuba.

Capítulo 5

Experimentos Computacionais e Desempenho

Neste Capítulo apresentaremos todo o experimento computacional realizado para a elaboração de modelos polinomiais ARX e OE de uma cuba eletrolítica do tipo prebaked. Inicialmente são elaborados e apresentados os modelos ARX que melhor representam o funcionamento da cuba A. Os modelos com os melhores ajustes à saída medida são validados em seguida com os dados das cubas B e C, medindo dessa forma seus ajustes aos reais níveis de tensão de outras cubas eletrolíticas.

5.1 Modelos ARX da Cuba Eletrolítica Prebaked

A simulação de modelos discretos da cuba eletrolítica prebaked corresponde à solução de equações a diferença, o procedimento é direto na equação (5.1) resolvendo-a.

$$\begin{aligned} \hat{y}(t|9) = & -a_1y(t-1) - \dots - a_ny(t-n_a) + b_1u(t-1) \\ & + \dots + b_nb u(t-n_k-n_b+1) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Os modelos ARX são importante neste trabalho devido a suas característica de preditividade, e por isso é importante selecionar os modelos de forma correta. Seguindo a metodologia apresenta-se agora os resultados obtidos na modelagem polinomial ARX para dados de três cubas eletrolíticas, aqui denominadas

de A, B e C.

5.1.1 Modelagem da Cuba A

Nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 são apresentados os modelos que foram selecionados e classificados pelo critério de aproximação entre o modelo estimado e as medidas não utilizadas na estimação, fase pré-anódica, conforme as Eq. 4.1, 4.2 e

4.3. Nas Tabelas citadas acima, $\hat{\theta}$ é o estimador dos Quadrados Mínimos (LS).

9

Variável Instrumental (IV).

Tabela 5.1: Modelos com Melhores Ajustes por Ordem Polinomial.

	na	nb	nk	Ajuste à fase Normal(%)	Validação (%)	Ajuste até a Fase Pré-anódica
LS	1	1	9	-3,406	28,35	1,748
LS	2	1	9	-26,59	32,73	-0,08314
LS	3	2	9	-46,89	41,82	1,222
LS	4	3	8	-44,35	40,82	0,6171
LS	5	5	9	-14,31	46,93	-7,72
LS	6	6	9	-26,38	54,72	-6,551
LS	7	7	9	-41,97	58,36	-10,20
LS	8	8	9	-15,66	63,67	-11,42
LS	9	8	8	45,03	59,67	27,50
LS	10	1	5	-32,93	33,25	-1,105
IV	1	1	8	52,08	21,96	30,27
IV	3	1	8	-43,44	20,47	-1,238
IV	4	1	1	56,57	43,75	63,75
IV	5	2	5	-34,95	7,182	-0,6217
IV	6	3	9	47,01	21,95	6,151
IV	8	7	7	-4,693	35,52	0,5371
IV	9	7	8	37,78	93,32	19,54
IV	10	5	8	-254,5	80,64	-93,49

Na Tabela 5.1 são apresentados os modelos com melhor ajuste por ordem polinomial de 1 a 10 e por estimador utilizado no processo, especificamente o estimador dos mínimos quadrados convencional e o estimador pelo acréscimo da variável instrumental. Durante o processo de estimação de parâmetros dos modelos não foi possível encontrar modelos estáveis com ordem 2 pelo método da variável instrumental.

Tabela 5.2: Modelos com Melhores Ajustes sem Atraso.

	na	nb	nk	Ajuste à fase normal(%)	Validação (%)	Ajuste até a pré-anódica
LS	1	1	0	74,19	59,28	76,21
LS	2	1	0	74,19	59,66	76,15
LS	3	1	0	73,75	55,97	73,69
LS	4	1	0	73,91	58,48	74,47
LS	5	1	0	74,14	62,00	75,56
LS	6	1	0	74,11	62,56	75,03
LS	7	7	0	66,01	65,77	59,20
LS	8	1	0	74,49	71,63	75,11
LS	9	1	0	74,70	75,46	75,32
LS	10	10	0	65,59	77,42	61,28
IV	1	1	0	74,51	60,61	76,91
IV	2	1	0	73,81	57,75	75,19
IV	3	1	0	73,38	51,26	71,40
IV	4	1	0	73,34	52,48	71,31
IV	5	1	0	73,76	57,90	73,40
IV	6	1	0	73,76	56,98	72,30
IV	7	1	0	74,30	60,99	73,54
IV	8	1	0	74,25	64,90	75,56
IV	9	1	0	75,48	70,55	75,15
IV	9	2	0	76,48	77,53	76,46
IV	10	4	0	75,36	79,71	74,75

Na Tabela 5.2 estão organizados os modelos com melhor ajuste à saída medida. O critério utilizado para agrupar esta tabela foi semelhante ao da Tabela 5.1. Esta tabela agrupa os modelos com atraso zero, ou seja não possuem dinâmica pois não utiliza as medidas anteriores para estimar a seguinte.

Tabela 5.3: Modelos Selecionados com os Pólos da Função de Transferência dentro do Círculo Unitário.

ρ	na	nb	nk	Validação (%)
IV	9	7	8	93,32
IV	9	6	9	86,87
IV	10	4	0	79,71
IV	9	2	0	77,53
LS	10	10	0	77,42
LS	10	1	0	77,15
LS	10	9	0	76,04
LS	10	7	0	75,68
IV	10	5	9	70,65
IV	9	1	0	70,55
IV	10	1	0	68,96
LS	8	8	9	63,67
LS	9	8	8	59,67
LS	8	7	9	58,41
LS	7	7	9	58,36
LS	7	7	8	55,77
IV	10	9	1	54,47

Na Tabela 5.3 estão organizados 17 modelos que apresentaram os melhores ajustes à saída medida. Os modelos selecionados para esta tabela estão entre modelos com dinâmica e sem dinâmica, modelos ARX convencional e pelo método da variável instrumental.

O objetivo deste trabalho é prever um ponto de operação da cuba com ocorrência do efeito anódico, e para ilustrar as propriedades preditivas dos modelos temos a Tabela 5.4. Os modelos foram simulados com 5, 10 e 20 passos à frente. Na Tabela 5.4, é apresentado o Fator de Função de Perda de cada modelo, o seu erro de predição final assim como também o fator de akaike. Tais índices ajudam na seleção da ordem e compreensão das propriedades preditivas dos modelos.

Tabela 5.4: Índices de Predição e Ordem.

s	na	nb	nk	V	FPE	AIC(%)
IV	9	7	8	4.73461e-005	5.37659e-005	-9.831
IV	9	6	9	6.1534e-005	6.93231e-005	-9.5769
IV	10	4	0	2.82183e-005	3.15381e-005	-10.364
IV	9	2	0	2.24925e-005	2.45457e-005	-10.615
LS	10	10	0	1.59671e-005	1.872e-005	-10.886
LS	10	1	0	1.78191e-005	1.94458e-005	-10.848
LS	10	9	0	1.60538e-005	1.8672e-005	-10.889
LS	10	7	0	1.63331e-005	1.86962e-005	-10.887
IV	10	5	9	8.35071e-005	9.40776e-005	-9.2715
IV	9	1	0	2.02149e-005	2.18855e-005	-10.73

Na Tabela 5.4, pode ser observado outros critérios utilizados na seleção dos modelos, e relacionando-a com a Tabela 5.5 pode-se observar a influência da função de perda e do Final Prediction Error e do Critério de Informação de Akaike na seleção da estrutura do modelo.

Tabela 5.5: Horizonte de Predição dos Modelos.

s	na	nb	nk	Validação (%)	$k + 5$	$k + 10$	$k + 20$
IV	9	7	8	93,32	86,35	73,72	73,72
IV	9	6	9	86,87	74,50	55,53	55,53
IV	10	4	0	79,71	68,84	64,91	65,12
IV	9	2	0	77,53	75,24	75,29	75,61
LS	10	10	0	77,42	74,63	68,92	65,97
LS	10	1	0	77,15	75,12	74,00	73,92
LS	10	9	0	76,04	74,05	67,69	64,88
LS	10	7	0	75,68	73,95	67,34	64,31
IV	10	5	9	70,65	52,68	30,94	30,94
IV	9	1	0	70,55	68,15	69,16	69,15

Os modelos iv969 e iv1059, apresentaram um índice da função de perda maior que os demais, e por isso houve uma dissiparidade entre o ajuste na fase de validação e em k passos à frente.

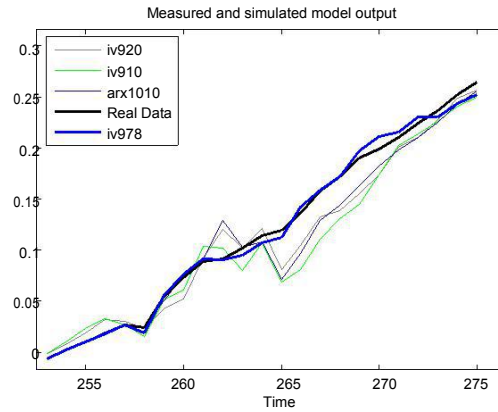


Figura 5.1: Simulação dos Modelos da Cuba A.

Na Figura 5.1, são apresentados os melhores modelos ajustados aos dados da validação, iv978, o modelo com melhor ajuste à fase de validação com 20 passos à frente, iv920, e modelos com pouca perda de generalidade.

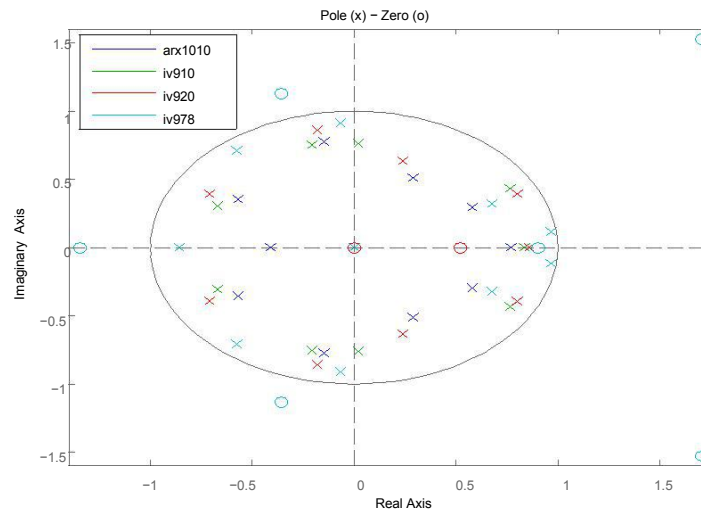


Figura 5.2: Pólos e Zeros do Modelo Polinomial.

Outro critério utilizado foi que necessariamente $|p_i| \leq 1$, para $i = 1, 2, \dots$ na, garantindo assim a estabilidade do modelo em malha fechada. A saber

os modelos selecionados possuem todos os pólos do modelo discreto no interior do círculo unitário. Os dez modelos selecionados apresentaram ainda multiplicidade de raízes complexas maior que 1. Abaixo apresenta-se a uma tabela com os dados da resposta transitória dos modelos.

Tabela 5.6: Resposta ao Degrau dos Modelos Selecionados.

Modelo	Pico de Amplitude	Overshoot(%)	Tempo de Subida	Tempo de Acomodação
iv978	1.91 at 28 s	91,4	4,8 s	167 s
iv969	1,79 at 25 s	78,60	4,38 s	903 s
iv1040	1.01 at 23 s	1.01	6,19 s	34,6 s
iv920	1.01 at 19 s	1.5	3,57 s	28 s
arx10100	≥ 1 at 300 s	0	59,6 s	124 s
arx1010	$\geq 0,999$ at 25 s	0	7,07 s	14,2
arx1090	$\geq 0,999$ at > 160 s	0	47 s	90,7 s
arx1070	≥ 1 at 200 s	0	48,8 s	93,3 s
iv1059	1,45 at 62 s	44,8	18,4 s	171 s
iv910	1,01 at 17 s	0,966	3,57 s	24,8 s

Observando a Tabela 5.6, pode-se concluir que o modelo iv978, o de melhor ajuste à saída medida, é sensível à variação de entrada e lento na acomodação apresenta um pico de amplitude elevado em relação aos demais. Já o modelo iv920 apresenta um pequeno pico de amplitude, é mais sensível a uma entrada que o modelos iv978 e sua acomodação é mais rápida.

Tabela 5.7: Resposta ao Impulso dos Modelos Selecionados.

Modelo	Pico Amplitude	Tempo de acomodação
iv978	0,218 at 16 s	150 s
iv969	0,267 at 15 s	$2,11 \cdot 10^3$
iv1040	0,345 at 0 s	28,3 s
iv920	0,37 at 0 s	29,3 s
arx10100	0,395 at 0 s	15,1 s
arx1010	0,323 at 0 s	12,1 s
arx1090	0,377 at 0 s	18,5 s
arx1070	0,379 at 0 s	21,6 s
iv1059	-0,213 at 9 s	232 s
iv910	0,357 at 0 s	20,9 s

Dentre os modelos selecionados com melhor ajuste à saída medida pode-

se destacar que o modelo iv978 após um entrada impulso é menos sensível com de o pico em 16 segundos, mas demora em torno de 150 segundos para retornar ao estado inicial. o Modelo iv969 retorna ao estado inicial mais lentamente que o modelo iv978, apresenta o pico maior e em menos tempo. Outros modelos retornam aos estado inicial mais rápido podendo ser destacado os modelos iv910, iv1040, e iv920.

Agora será feita um apresentação e análise da resposta em frequência dos modelos selecionados, que é a resposta em regime estacionário de um sistema submetido a um sinal de entrada senoidal. Varia-se a frequência do sinal de entrada ao longo de uma faixa de interesse com $u(t) = U \sin(\omega t)$ a entrada,

e $y(t) = Y \sin(\omega t + \phi)$ a saída do sistema, onde $Y = U |G(j\omega)|$, ângulo de

fase $\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im } G(j\omega)}{\text{Re } G(j\omega)}$, e $|G(j\omega)| = \frac{Y(\omega)}{U}$ representando a

relação entre o sinal de entrada e do sinal de saída. O diagrama de Bode é uma representação do módulo e do ângulo de fase de uma função complexa da frequência. Usualmente o módulo de é represento como $20 \log |G(j\omega)|$ dB. Na Tabela 5.8, são apresentados os resultados.

Tabela 5.8: Margem de Ganho e Fase dos Modelos Selecionados.

Modelo	ω	$20 \log G(j\omega) $	ω_{cg}
iv978	0	92.9464 dB	0
iv969	2,09	89.235 dB	2.0943
iv1040	0	92.664 dB	0
iv920	0	92.818 dB	0
arx10100	0	94.317 dB	0
arx1010	0	92.721 dB	0
arx1090	0	93.763 dB	0
arx1070	0	93.826 dB	0
iv1059	0	94.46 dB	0
iv910	0	93.033 dB	0

Via de regra os modelos selecionados apresentam uma margem de ganho entre 89 e 94 dB, em frequências muito baixas em torno de zero e margem de fase no infinito.

5.1.2 Modelagem das Cubas B e C

Neste trabalho inicialmente são elaborados os modelos ARX que melhor representam o funcionamento da cuba A, esta com 275 amostras entre a fase normal e a fase pré-anódica, conforme apresentado anteriormente. Os modelos de selecionados e apresentados anteriormente com os melhores ajustes à saída medida, agora são validados com os dados das cubas B e C, respectivamente com 255 e 135 amostras de corrente e tensão de seu pleno funcionamento, medindo dessa forma seus ajustes aos reais níveis de tensão de outras cubas eletrolíticas.

É feita a identificação de modelos das cubas B e C com parâmetros $n_a = \{1, 2\}$, $n_b = \{1, 2\}$ de forma que $n_a \geq n_b$ e n_k variando de 0 a 9, procurando assim uma estrutura polinomial de até grau 2, uma vez que o melhor ajuste para a cuba A foi um modelo polinomial discreto de ordem 9. A variação da quantidade de parâmetros do modelo polinomial é feita buscando de forma combinatória, os melhores ajustes estáveis em malha fechada por meio de índices definidos na pesquisa. Em seguida os modelos selecionados com zeros e pólos dentro do círculo unitário são validados com o restante dos dados não utilizados na estimação dos parâmetros, incluindo nessa etapa os sinais de todas as cubas em estudo.

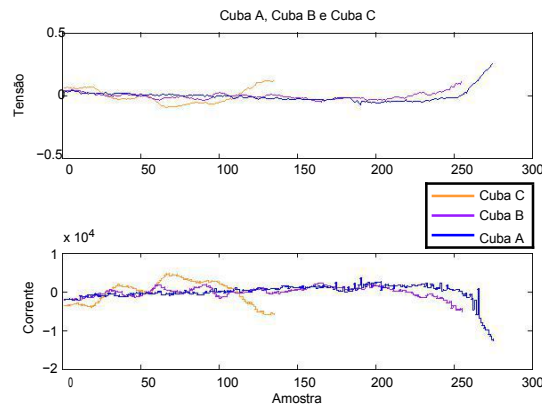


Figura 5.3: Sinais das Cubas Estudadas sem Médias e Tendências.

A Figura 5.3, apresenta os sinais de tensão e corrente sem médias e tendências da cubas A, B e C. Na mesma figura podem ser encontrados os dados

com ocorrência das fases normal até a fase pré-anódica conforme estabelecido na Tabela 3.1.

Inicialmente é feita a validação dos modelos da cuba A, todos estáveis em malha fechada, nas cubas B e C com 3 e 5 passos à frente conforme a Tabela 5.9. Na fase de validação é medido o ajuste dos modelos criados à saída real dos dados, e esse ajuste é descrito pelas Equações 4.1 e 4.2. Para analisar o horizonte de predição um índice é extremamente necessário, a saber a Eq. 4.3, mede o erro de predição final dos modelos que é dado em função da Eq. 4.4.

Tabela 5.9: Validação de Modelos da Cuba A com a Cuba B e Cuba C.

Modelo	Validação \ Predição			
Cuba A	Cuba B		Cuba C	
Predição→	k + 3	k + 5	k + 3	k + 5
iv969	60,69%	39,46%	79,84%	64,85%
arx778	60,01%	45,22%	70,34%	56,26%
arx879	59,34%	44,66%	68,55%	53,84%
arx779	59,19%	44,46%	68,33%	53,55%
arx889	58,99%	44,15%	67,94%	52,95%
arx988	58,17%	43,19%	66,79%	51,55%
iv978	57,89%	36,54%	78,78%	65,22%
iv1059	57,84%	43,18%	74,57%	60,08%

Na Tabela 5.9, pode-se observar que os modelos gerados pelos dados da cuba A apresentam um erro menor de ajuste à saída medida nos dados da cuba C, apresentando ainda ajustes em torno de 65% no que se refere a horizonte de predição a cinco passos.

Tabela 5.10: Validação de Modelos da Cuba A com a Cuba B e Cuba C com $n_k = 0$.

Modelo	Validação \ Predição			
Cuba A	Cuba B		Cuba C	
Predição→	k + 3	k + 5	k + 3	k + 5
iv920	80,40%	75,91%	89,37%	86,12%
arx1090	79,89%	75,65%	87,64%	84,08%
arx1070	79,83%	75,59%	87,51%	83,87%
arx10100	79,54%	75,34%	87,71%	84,29%
iv1040	79,42%	75,10%	89,21%	85,62%
iv910	79,29%	74,83%	87,81%	84,25%
iv1010	78,68%	74,35%	86,33%	82,48%
arx1010	77,84%	73,68%	86,44%	83,23%

Os modelos sem atraso não apresentam a dinâmica do processo uma vez que não utilizam as saídas e entradas passadas para gerar as saídas futuras. Na Tabela 5.10, pode ser notado um melhor ajuste dos modelos sem atraso da cuba A nos dados da cuba C, da mesma forma que pôde ser observado na Tabela 5.9. Nas Tabelas 5.9 e 5.10 pode-se observar o desempenho dos modelos selecionados da cuba A, a saber os modelos iv978, iv969, iv920 e arx1090, desempenho esse medido segundo sua capacidade de representar os dados de outras cubas e de predizer seus níveis de tensão.

Pode-se observar que os modelos iv920, iv910, iv1010 e iv1040 apresentam um bom ajuste às cubas, os modelos iv920, arx1090, iv1040, arx10100 e iv910 apresentaram bons ajustes quando o foco é a predição a 5 passos.

Para a modelagem da cubas B e C, diferentemente do que foi feito para a cuba A, preferiu-se buscar modelos de até no máximo 2 pólos e com no máximo 9 atrasos, que possam ser utilizados para predição do efeito anódico, uma vez que os modelos encontrados com melhor ajuste à saída medida na cuba A foram de ordem elevada, chegando a 10 pólos.

Tabela 5.11: Validação de Modelos da Cuba C e Predição.

Modelo	Validação \ Predição			
Cuba C	Cuba C			
Predição→	Validação	k + 3	k + 5	k + 20
arx115	81,74%	82,80%	73,28%	-170,90%
arx116	79,30%	83,16%	74,25%	-86,53%
arx217	77,71%	83,40%	74,94%	-48,58%
iv112	72,97%	73,63%	73,03%	72,97%
arx111	72,77%	79,21%	75,30%	72,73%
arx221	69,80%	77,88%	72,03%	69,75%
arx211	69,19%	78,56%	72,67%	69,10%
arx212	65,57%	75,60%	67,45%	65,52%
iv114	61,81%	61,82%	61,81%	61,81%

Na Tabela 5.11, são apresentados os modelos com estabilidade garantida e que obtiveram os melhores ajustes, podendo ser destacado os modelos iv112 e arx111 por sua pouca variabilidade desde o processo de validação até a predição dos níveis de tensão a 20 passos à frente.

Tabela 5.12: Validação de Modelos da Cuba C com $n_k = 0$ e Predição.

Modelo	Validação \ Predição			
Cuba C	Cuba C			
Predição→	Validação	k + 3	k + 5	k + 20
arx110	90,03%	90,26%	90,05%	90,03%
arx210	89,84%	90,09%	89,86%	89,83%
arx220	89,29%	92,82%	91,04%	88,78%
iv110	88,61%	88,63%	88,61%	88,61%
iv210	88,49%	88,56%	88,49%	88,49%

Os modelos apresentados na Tabela 5.12 apresentam resultados elevados chegando a 90% de ajuste à saída medida com um modelo de 1 pólo e 92% de ajuste no horizonte de predição a 3 passos, cujo modelo possui 2 pólos.

Nas Tabelas 5.13, 5.14, 5.17 e 5.18, é feita a validação dos modelos es-táveis das Cubas B e C. Os modelos encontrados e validados são de até no máximo 2 pólos e atrasos variando de 0 a 9. Para a validação dos modelos anteriormente selecionados, foram utilizados os dados de outras cubas, no caso para validação

de C foram utilizados os dados da cuba B e da cuba A, buscando saber o quão os modelos conseguem se representar os níveis de tensão dessa fase de validação. Nessas tabelas buscou-se também saber das propriedades preditivas de cada mo-delo, e no presente estudo utilizamos como fator a ser observado o ajuste, medido pela Eq. 4.1, para predição a três, cinco e vinte passos.

Tabela 5.13: Validação de Modelos da Cuba C com as Cubas B e A.

Modelo	Validação \ Predição				
Cuba C	Cuba B		Cuba A		
Predição→	Valida	k + 5	Valida	k + 3	k + 5
arx115	67,83%	44,03%	81,25%	76,88%	69,47%
arx116	63,33%	44,05%	78,79%	78,20%	70,84%
arx217	59,50%	43,17%	-147,8%	78,82%	70,72%
iv112	59,82%	59,85%	57,80%	58,69%	57,88%
arx111	60,01%	61,71%	59,16%	68,27%	62,90%
arx221	56,21%	57,86%	56,08%	67,05%	59,28%
arx211	56,34%	58,74%	55,60%	68,26%	60,55%
arx212	49,92%	51,75%	51,47%	64,44%	54,00%
iv114	45,48%	45,48%	45,95%	45,96%	45,95%

Na Tabela 5.13 podemos observar que para um horizonte de predição a 5 passos o modelo arx111 não apresenta perda de generalidade, o que pode ser observados quando comparado com os dados das cubas B e A. O modelo arx115 apresenta bom ajuste aos dados fixos das cubas B e A.

Tabela 5.14: Validação de Modelos da Cuba C com as Cubas B e A para $n_k = 0$.

Modelo	Validação \ Predição				
Cuba C	Cuba B		Cuba A		
Predição→	Valida	k + 5	Valida	k + 3	k + 5
arx110	79,78%	79,81%	75,18%	75,61%	75,23%
arx210	79,76%	79,78%	75,05%	75,49%	75,09%
arx220	80,40%	82,71%	73,02%	76,46%	76,13%
iv110	80,52%	80,52%	73,30%	73,32%	73,30%
iv210	80,47%	80,47%	73,04%	73,14%	73,04%

Na Tabela 5.14 pode ser destacado o modelo arx110 e iv110 que apesar de possuírem apenas um zero, conseguem caracterizar o funcionamento das cubas

em estudo.

Tabela 5.15: Validação de Modelos da Cuba B e Predição.

Modelo	Validação \ Predição			
Cuba B	Cuba B			
Predição→	Validação	k + 3	k + 5	k + 20
arx112	54,70%	61,29%	56,16%	54,62%
iv113	46,83%	54,46%	48,56%	46,83%
iv112	45,64%	60,98%	51,45%	45,44%
arx212	43,42%	60,23%	50,43%	43,28%
arx222	39,91%	56,79%	46,74%	39,90%
arx223	21,67%	60,08%	47,32%	24,12%

Na Tabela 5.15, pode-se observar que os modelos gerados pelos dados da cuba B não apresentam um desempenho tão acentuado quanto os modelos da Cuba C, mas para um horizonte de predição 3, os modelos conseguem ficar em torno de 61%, sendo destaque o modelo arx112 que apresenta-se um como o melhor modelo com 3 passos à frente e a 20 passos possui o ajuste próximo ao da fase de validação inicial.

Tabela 5.16: Validação de Modelos da Cuba C e Predição com $n_k = 0$.

Modelo	Validação \ Predição			
Cuba B	Cuba B			
Predição→	Validação	k + 3	k + 5	k + 20
iv210	80,85%	81,13%	80,88%	80,85%
iv110	80,51%	80,52%	80,51%	80,51%
arx220	78,50%	85,49%	82,02%	78,50%
arx210	77,13%	78,43%	77,36%	77,12%
arx110	76,77%	77,15%	76,80%	76,77%

Na Tabela 5.16 os destaques são os modelos com 1 e 2 pólos, estimados com o acréscimo da variável instrumental ao processo.

Tabela 5.17: Validação de Modelos da Cuba B com as Cubas C e A.

Modelo	Validação \ Predição				
Cuba B	Cuba C		Cuba A		
Predição→	Valida	k + 5	Valida	k + 3	k + 5
arx112	71,31%	73,40%	57,23%	66,05%	60,72%
iv113	64,45%	66,82%	49,13%	59,20%	52,76%
iv112	60,17%	69,02%	45,87%	67,57%	58,38%
arx212	57,09%	67,71%	42,33%	66,35%	56,83%
arx222	54,43%	64,70%	39,61%	63,44%	53,46%
arx223	30,10%	64,47%	19,95%	66,72%	55,60%

Na Tabela 5.17 observa-se que o modelo arx112 apresenta o melhor ajuste, tanto na cuba C quanto na cuba A.

Tabela 5.18: Validação de Modelos da Cuba B com as Cubas C e A para $n_k = 0$.

Modelo	Validação \ Predição				
Cuba B	Cuba C		Cuba A		
Predição→	Valida	k + 5	Valida	k + 3	k + 5
arx110	87,46%	87,47%	78,29%	78,39%	78,30%
arx210	87,70%	87,85%	77,97%	78,50%	78,08%
arx220	87,46%	91,00%	71,06%	76,25%	75,82%
iv110	92,89%	92,89%	75,92%	75,92%	75,92%
iv210	93,14%	93,15%	75,33%	75,59%	75,37%

Na Tabela 5.18 os modelos selecionados apresentam bons ajustes, destaque para o iv110 com 92% de ajuste à saída medida com predição de 5 passos.

Neste trabalho os modelos da cuba C, iv112 e arx111, e da cuba B o arx112 são analisados com sua resposta no tempo e na frequência. O modelo iv112 apresenta o índice de $4.76987 \cdot 10^{-5}$ para a função de perda e o $FPE = 5.16735 \cdot 10^{-5}$. Já o modelo arx111 apresenta a função de perda igual a $2.58614 \cdot 10^{-5}$ e o $FPE = 2.80165 \cdot 10^{-5}$. O modelo arx112 da cuba B apresenta $V = 3.15681 \cdot 10^{-5}$ e $FPE = 3.60778 \cdot 10^{-5}$. Quando analisada a resposta ao degrau para um ganho unitário, o modelo iv112 é mais sensível às variações de entrada e acomoda mais rápido em relação aos outros dois modelos destacados, os outros dois possuem tempo de acomodação em torno de 10 s e tempo de subida em torno de 5 s. Mas quando

analisada a resposta ao impulso o modelo iv112 apresenta grande variação perto de 2 s. mas acomoda mais rapidamente que os demais, algo próximo de 5 s. Os modelos apresentam uma margem de ganho em torno de 94 dB e margem de fase no infinito.

5.1.3 Modelos OE da Cuba Eletrolítica Prebaked

Após as etapas de identificação chega-se então a um grupo, ou família, de modelos que caracterizaram de forma adequada os níveis de tensão da cuba eletrolítica na fase pré-anódica. Para a simulação entende-se que os modelos mais adequados são os que obtiveram os melhores ajustes definidos pela Eq. 4.1 pos-suem estabilidade garantida em malha fechada, ou seja possuem os pólos dentro do círculo unitário. Os sinais de tensão obtidos na simulação correspondem à solução da equação à diferença encontrada originária de 2.31. Outros índices como 4.2 e 4.3 são utilizados para verificar as propriedades relacionadas à ordem dos modelos e sua generalidade.

A Tabela 5.19 apresenta os modelos com melhor ajuste à saída medida. Para a seleção de parâmetros utilizou-se um critério de combinação em que nb, que são os zeros mais 1, variaram de 1 a 10, nf, que são os pólos, variaram de 1 a 10, e nk, que é o número de atrasos da saída em relação à entrada, variaram de 0 a 9.

Tabela 5.19: Modelos Selecionados com os Pólos da Função de Transferência dentro do Círculo Unitário - Modelos OE.

nb	nf	nk	Validação	FPE ou Erro de Predição Final (EPF)	Função de Perda (V)
2	7	9	95,07	0,000156795	0,000145369
2	8	9	94,28	0,000157596	0,000144783
2	4	8	93,41	$9,94648 \cdot 10^{-5}$	$9,46713 \cdot 10^{-5}$
2	8	8	93,25	0,00015302	0,000140579
2	7	7	93,13	0,000147939	0,000137158
6	9	8	92,68	0,000127004	0,000112004
2	10	5	92,58	$8,69773 \cdot 10^{-5}$	$7,87589 \cdot 10^{-5}$
2	9	9	92,50	0,000161532	0,000147027
6	10	8	92,14	0,000126288	0,00011044
10	10	6	92,13	0,000118918	0,000100409

Durante o processo de estimação dos parâmetros a seleção dos modelos obedeceu ao critério de obtermos para sistemas reais preferencialmente polinômios, como em 2.24 e 2.31, estritamente próprios (Aguirre, 2007), com $nb \leq nf$.

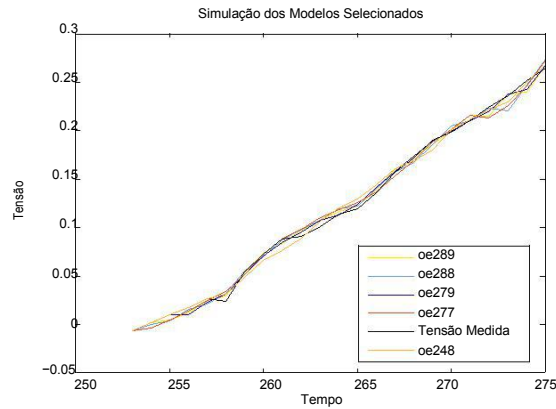


Figura 5.4: Simulação dos Modelos.

Na Figura 5.4 são apresentados os cinco modelos que obtiveram melhores ajustes à saída medida, nela pode-se observar o modelo oe289 (1 zero, 8 pólos e 9 atrasos) como o que melhor reproduz a saída medida. Dos cinco modelos selecionados podemos observar na Figura 5.5 a localização de seus pólos, todos dentro do círculo unitário.

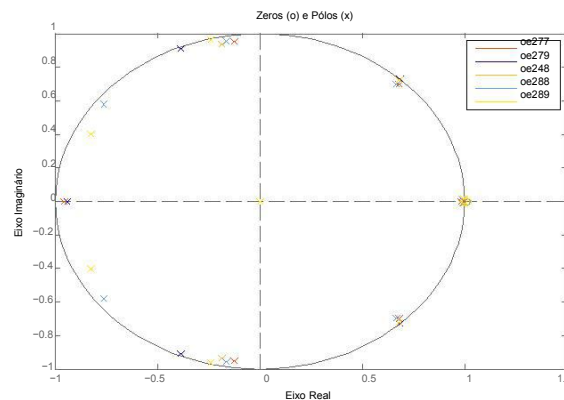


Figura 5.5: Zeros e Pólos dos Modelos Seleccionados.

Na Figura 5.5 pode-se observar ainda que os pólos e os zeros dos modelos polinomiais selecionados estão distantes da origem quase no limite da sua estabilidade.

Tabela 5.20: Modelos Selecionados com os Pólos da Função de Transferência dentro do Círculo Unitário - Modelos OE.

nb	nf	Nk	Cuba B	Cuba C
2	7	9	81,12%	46,66%
2	8	9	77,11%	46,88%
2	4	8	77,92%	47,43%
2	8	8	71,72%	46,02%
2	7	7	69,93%	45,35%
6	9	8	63,69%	28,93%
2	10	5	67,55%	53,06%
2	9	9	74,74%	46,32%
6	10	8	72,64%	34,54%
10	10	6	67,00%	38,58%

Na Tabela 5.20 temos a validação dos modelos da cuba A com dados das cubas B e C, nela pode-se observar que os modelos gerados pela cuba A conseguem representar o sinas da cuba B, o modelo oe278 apresenta-se como o de melhor ajuste à saída medida da cuba B.

As respostas no tempo são analisadas pelas respostas ao impulso e ao degrau conforme a Tabela 5.22 e Tabela 5.21 respectivamente. Os resultados para a análise são obtidos tomando como referência um ganho unitário da função de transferência, o que facilita a compreensão dos resultados.

Tabela 5.21: Resposta ao Degrau dos Modelos OE

Modelo	Tempo de Subida	Tempo de Acomodação	Pico de Amplitude
OE279	54,3 s	868 s	1,59 em 299 s
OE289	46,5 s	$1,03 \cdot 10^{-3}$ s	1,73 em 292 s
OE248	0,389 s	433 s	25,4 em 73 s
OE288	102 s	532 s	1,15 em 371 s
OE277	412 s	833 s	1 em $>1,2 \cdot 10^{-3}$ s
OE698	7,94 s	641 s	1,21 em 41 s
OE2105	14,9 s	$1,01 \cdot 10^{-3}$ s	-5,36 em 76 s
OE299	44,5 s	$1,03 \cdot 10^{-3}$ s	1,79 em 288 s
OE6108	8,75 s	6,11 s	1,28 em 41 s
OE10106	10,1 s	348 s	1,15 em 39 s

Os modelos oe698, oe2105, oe6108, oe10106 e principalmente o oe248 apresentam um tempo de subida mais acentuado que os demais, ou seja, respon-dem a transitórios com mais rapidez.

No que se refere à capacidade dos modelos de adaptar-se de um ponto de operação a outro, o modelo oe248 apresenta um pico de amplitude muito elevado, menos de um segundo, ou seja, o modelo gerado é muito sensível a transitórios, sendo necessário levar em conta esse dado para um futuro controle da planta. Há modelos como o oe277, oe288 e o oe10106 que possuem um baixo overshoot em um tempo mais elevado que os demais.

Para a resposta ao impulso os principais índices são representados conforme a Tabela 5.22. Essa resposta indica a capacidade dos modelos gerados de retornarem ao estado inicial após um perturbação no sistema em estudo.

Tabela 5.22: Resposta ao Impulso dos Modelos Selecionados

Modelo	Tempo de Acomodação	Pico de Amplitude
OE279	1,79 x103 s	-0,0763 em 9 s
OE289	668 s	-0,131 em 9 s
OE248	272 s	2,06 em 8 s
OE288	318 s	-0,0926 em 8 s
OE277	540 s	-0,0358 em 8 s
OE698	635 s	0,226 em 8 s
OE2105	$1,14 \cdot 10^{-3}$ s	-1,38 em 5 s
OE299	685 s	-0,0875 em 9 s
OE6108	618 s	0,23 em 8 s
OE10106	639 s	0,284 em 6 s

O dois modelos com melhores ajustes apresentaram um pico de amplitude abaixo de zero e em um mesmo tempo. Em geral os modelos apresentaram pico de amplitude não tanto elevados, a exceção é o modelo oe248 que na resposta ao degrau apresentou um pico de amplitude 2540% acima do ganho do modelo. Para a resposta ao impulso pode-se observar ainda que em geral o tempo de acomodação dos modelos é elevado, destaque para os modelos oe279 e oe2105.

As respostas em frequência são representadas na Tabelas 5.23 abaixo.

Tabela 5.23: Resposta em Frequência dos Modelos Selecionados

Modelo	Margem de Ganho (dB)	Margem de Fase (º)
OE279	84.339	∞
OE289	83.391	∞
OE248	91.072	∞
OE288	87.11	∞
OE277	89.061	∞
OE698	93.125	∞
OE2105	87.744	∞
OE299	82.954	∞
OE6108	93.236	∞
OE10106	93.039	∞

É interessante verificar que assim como em na modelagem ARX, os modelos gerados apresentam uma margem de ganho entre 83 e 94 dB e margem de fase no infinito mesmo tratando-se de modelos com estruturas diferentes.

5.2 Conclusão

Ao longo deste Capítulo pode-se observar o processo de modelagem ARX e OE da cuba eletrolítica. Viu-se que os modelos encontrados com melhores ajustes são de ordem elevadas, possuem muitos parâmetros, o que torna a análise e implementação dos modelos ainda mais difíceis no mundo real. Viu-se ainda que para os modelos ARX elaborados a partir da cuba A apresentam os melhores ajustes quando simulados com dados da cuba C. Já para modelos OE gerados a partir da cuba A, os melhores ajustes ocorreram com os dados da cuba B.

É possível elaborar modelos ARX de até dois pólos com resultados acima de 75% de ajuste à saída medida. Os modelos selecionados apresentaram índices de predição em torno de 75%. Os modelos sem atraso apresentam bons resultados mas não representam a dinâmica do processo. Viu-se ainda não é possível eleger um único modelo como representativo à cuba, visto que dentre os de melhor ajuste é preciso considerar as suas propriedades preditivas, resposta no tempo ao impulso e ao degrau, velocidade de convergência dentre outras características. Podemos concluir que a escolha do melhor modelo dependerá de muito fatores, cabendo ao projetista verificar quais propriedade deseja ressaltar em seu projeto.

Capítulo 6

Conclusão

A estimação de modelos para a cuba eletrolítica assim como para outros sistemas reais não é uma tarefa simples. Os polinômios dos modelos ARX com melhor ajuste na fase de validação apresentaram ordem elevada e grande quantidade de parâmetros. Na validação da cuba A percebeu-se que o estimador da variável instrumental originou os modelos com melhor ajuste. O modelo iv978 apresentou o melhor ajuste à saída medida, mas para predição de 20 passos à frente houve uma perda considerável em razão de seu erro de predição final e sua função de perda. Já os modelos iv920, iv1040 e iv910, obtiveram índices de em torno de 75% de ajuste à saída medida e pouca perda de generalidade na predição, e responderam de forma satisfatória ao degrau unitário e ao impulso. As margens de ganho para os modelos selecionados neste trabalho em geral são baixas chegando a zero. Em função das análises os modelos citados constituem uma família de modelos aceitáveis no processo de identificação de modelos ARX para a cuba eletrolítica. Ao término desta investigação alguns pontos chamaram atenção para o direcionamento de trabalho futuros, mediante experimentações observou-se que quando a variação dos dados é menor que a variação da fase normal, há uma quantidade maior de modelos com estabilidade garantida e ajustes melhores à fase de validação.

Após as simulações com modelos polinomiais pode-se perceber que em geral os modelos ARX elaborados da cuba A conseguem descrever o comportamento dinâmico de outras cubas, os modelos são o iv978, iv969 e iv920. A busca por modelos com até 2 pólos e no máximo 9 atrasos foi satisfatória uma vez que

os modelos elaborados obtiveram ajustes em torno de 76% e com boas características de predição, vários dos modelos apresentados possuem bons ajustes à saída medida, no entanto escolhemos os modelos iv112, arx111 e o arx112, por possuírem menor ordem possível, o que mostra que modelos de até 2 pólos podem caracterizar bem o funcionamento da planta em estudo.

Ao longo do desenvolvimento deste texto expressou-se a importância de determinar um modelo que representa a fase pré-anódica de funcionamento da cuba eletrolítica a partir da fase normal. Essa tarefa faz-se necessária para analisar o comportamento da planta em estudo em um estágio que antecede o efeito anódico. Os modelos OE encontrados apresentam índices elevados de ajuste à saída medida, os dez melhores apresentam índices entre 92% e 95%, permitindo a conclusão de que pode-se utilizar os modelos se o mais importante for a minimização do erro entre a saída medida e a saída estimada. Durante as análises da resposta ao impulso e ao degrau pode-se observar que os modelos respondem de forma diferente, no tempo, podendo ficar a critério a seleção dos modelos a serem utilizados mediante a necessidade de controle. Em geral a resposta ao impulso pode mostrar que os modelos gerados retornam ao estado inicial respondendo em regime permanente de forma mais lenta. Como os modelos possuem índices muito próximos de ajuste à saída medida, ordem elevada e respostas ao tempo diferentes e à frequência com mesmo ângulo de fase, conclui-se então que podemos utilizar vários dos modelos selecionados para estudo e análise de acordo com as circunstâncias da planta e de controle. E mediante às dificuldades de simulação e escolha de modelos propomos o desenvolvimento de um algoritmo que seja inteligente para simular e ajudar a selecionar os modelos estáveis e com melhor ajuste.

6.1 Trabalhos Futuros

- Estudo estatístico para seleção das amostras utilizadas;
- Verificar o desempenho dos modelos na implementação de um filtro de Kalman;
- Desenvolver Algoritmos baseados em Inteligência Computacional para apoiar a seleção dos modelos elaborados.

Apêndice A

Propriedade do Estimador MQ

Aqui apresentamos as propriedades do estimador dos mínimos quadrados. Este estimador foi utilizado ao longo do trabalho para encontrar os parâmetros que ajustam as estruturas ARX e OE.

A.1 Ortogonalidade

Dois vetores $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais se $x^T y = 0$, para o caso estocástico a condição de ortogonalidade é que $E[x^T y] = 0$. Se x , y e z forem vetores com $\dim(x) = \dim(y) = \dim(z)$ e $z = x + y$, então teremos:

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= z^T z \\ &= (x + y)^T (x + y) \\ &= x^T x + x^T y + y^T x + y^T y \end{aligned}$$

como x e y são ortogonais, então $x^T y = y^T x$, logo

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= x^T x + y^T y \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$

(A.1)

ou seja x não tem projeção sobre y e nem y sobre x . Para o estimador dos Mínimos Quadrados obtemos:

$$\begin{aligned}
 y^T e(\hat{\theta}_{MQ}) &= \hat{\theta}_{MQ}^T \Phi^T (y - \Phi \hat{\theta}_{MQ}) \\
 &= \{ \Phi^T \Phi - 1 \Phi^T y \}^T \Phi^T (y - \Phi [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T y) \\
 &= y^T \Phi^T \Phi - \Phi^T \Phi - 1 \Phi^T y - \Phi [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T y \\
 &= y^T \Phi^T \Phi - \Phi^T \Phi - 1 \Phi^T y - y^T \Phi [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T \Phi [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T y \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

A.2 Polarização de Estimadores

Seja θ o vetor de parâmetros e $\hat{\theta}$ o valor estimado. A polarização ou tendência é definida como

$$b = E[\hat{\theta}] - \theta \quad (A.2)$$

ou seja, é o desvio entre o valor esperado de uma determinada variável aleatória e uma variável determinística, ainda que esta não seja conhecida.

Considere um sinal $y(k)$ descrito pela Eq. (2.39), aplicando essa equação nos dados em estudo obtem-se um conjunto de restrições que podem ser expressos na forma $y = \Phi \theta + e$. Se o estimador MQ for usado para estimar o vetor de parâmetros o vetor de resíduos será

$$\begin{aligned}
 \xi_{MQ} &= y - \hat{y}_{MQ} \\
 &= y - \Phi \hat{\theta}_{MQ} \\
 &= \Phi \theta + e - \Phi \hat{\theta}_{MQ} \\
 &= \Phi (\theta - \hat{\theta}_{MQ}) + e
 \end{aligned}$$

sabe-se que os resíduos resultantes do estimador MQ são ortogonais às colunas da matriz Φ , portanto

$$\begin{aligned}
 \Phi^T \xi_{MQ} &= 0 \\
 &= \Phi^T (\Phi (\theta - \hat{\theta}_{MQ}) + e) \\
 &= \Phi^T \Phi (\theta - \hat{\theta}_{MQ}) + \Phi^T e
 \end{aligned}$$

obtendo

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{e} &= \Phi^T (\hat{\beta} - \beta) \\ E[\Phi^T \mathbf{e}] &= E[\Phi^T (\hat{\beta} - \beta)] \\ &= E[\Phi^T \hat{\beta}] - E[\Phi^T \beta] \\ &= E[\Phi^T (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y}] - E[\Phi^T \beta] \\ &= E[\Phi^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \mathbf{y}] - E[\Phi^T \beta] \\ &= E[\mathbf{y}] - E[\Phi^T \beta] \end{aligned}$$

considerando $\Phi^T \Phi$ uma matriz determinística. Da definição (A.2) obtemos:

$$\hat{\beta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \quad (\text{A.3})$$

que corresponde à polarização do estimador MQ, e esta para ser nula é necessário que não haja correlação entre o vetor de erro e nenhum dos regressores e ter média nula ($E[\Phi^T \mathbf{e}] = 0$).

A covariância de $\hat{\beta}$, $\text{cov}[\hat{\beta}] = \sigma_e^2 (\Phi^T \Phi)^{-1}$, fornece a medida direta da variabilidade covariância dos parâmetros estimados, estabelecida pelo tamanho dos elementos da matriz de covariância.

Apêndice B

Abordagens sobre o sinal

Aqui apresentamos os principais pontos sobre representação de sinais discretos e contínuos.

O sinal analisado pode ser contínuo no tempo ou discreto. Contínuo no tempo é um modelo matemático que descreve a relação entre sinais de tempo contínuo (equação diferencial). Na prática os sinais de interesse são freqüentemente obtidos na forma discreta, resultante de medidas de tempo discreto (equação à diferenças).

Um sistema linear pode ser descrito pela resposta ao impulso $g(t)$. Em que:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k u(t - k) \quad (B.1)$$

Para um sistema multivariado a resposta ao impulso (g_k) será uma matriz $m \times p$ e que p é o número de saídas e m é o número de entradas. De $i - j$ elementos descreve-se o comportamento da i -ésima saída depois de um impulso na j -ésima entrada. Seja a entrada $u(t)$ impulso unitário, quando $t = 0$ tende para $t > 0$, a saída $y(t)$ gera $g(t)$. A resposta ao impulso é estimada por análise de correlação para se obter as noções de tempo e a resposta ao degrau.

B.1 Descrição de sistemas: Modelos Discretos

O sinal analisado pode ser contínuo no tempo ou discreto. Contínuo no tempo é um modelo matemático que descreve a relação entre sinais de tempo con-tínuo (equação diferencial). Na prática os sinais de interesse são freqüentemente obtidos na forma discreta, resultante de medidas de tempo discreto (equação à diferenças).

A função de transferência discreta é a relação entre a transformada-z da saída, $Y(z)$, e a transformada-z da entrada, $U(z)$. A relação $H(z) = B(z)/A(z)$ é uma razão de dois polinômios em z , os polinômios são $B(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^j$ e $A(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$, sendo $n \geq m$, $a_n = 1$, n é a ordem do sistema. Os elementos b_j , a_i , n são desconhecidos e devem ser determinados através de uma modelagem matemática do sistema pela identificação. Um modelo com parâmetros ajustáveis deve então ser sintonizado de forma que sua saída aproxime-se do comportamento da cuba. O modelo é estimado pelo método dos mínimos quadrados.

B.2 Descrição de sistemas: Modelos Contínuos

Aqui a representação de sistemas pode ser realizada pela função de transferência, resposta impulsiva e equações de estados. A função de transferência contínua é a relação entre a transformada de Laplace da saída, $Y(s)$, pela transformada de Laplace da entrada, $U(s)$ descrito da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \quad (B.2)$$

A relação $G(s)$ é uma razão de dois polinômios em s assim estruturada:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (B.3)$$

onde

$$B(s) = \sum_{j=0}^m b_j s^j ; A(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i \quad (B.4)$$

sendo $a_n = 1$ e $n \geq m$.

Num sistema linear invariante no tempo, os sinais de entrada e saída são relacionados pela integral de convolução:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (\text{B.5})$$

onde $g(t)$ é a resposta impulsiva do sistema.

A resposta impulsiva está relacionada com a função de transferência por

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] \quad (\text{B.6})$$

onde $\mathcal{L}^{-1}$ é a transformada inversa de Laplace e t é o tempo contínuo.

A função de transferência está relacionada com a representação de estado no caso monovariável pela relação

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (\text{B.7})$$

onde $A_{n \times n}$ é a matriz do sistema, $b_{n \times 1}$ é o vetor de entrada e $c_{1 \times n}$ é o vetor de saída. E as equações de estado são:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

onde $x(t)_{n \times 1}$ é o vetor de estados, $u(t)$ é o sinal de entrada e $y(t)$ a saída do sistema.

B.3 Descrição de sistemas: Modelos Discretos

A função de transferência discreta é a relação entre a transformada- z da saída, $Y(z)$, e a transformada- z da entrada $U(z)$ da seguinte forma:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (\text{B.9})$$

A relação $G(z)$ é uma razão de dois polinômios em z , com

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (\text{B.10})$$

onde

$$B(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^j ; A(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i \quad (B.11)$$

sendo $n \geq m$, $a_n = 1$, n é a ordem do sistema. Os elementos b_j , a_i , n são desconhecidos e devem ser determinados através de uma modelagem matemática do sistema pela identificação.

A resposta impulsiva está relacionada com a função de transferência assim

$$g(k) = Z^{-1}[H(z)] \quad (B.12)$$

onde Z^{-1} é a transformada-z inversa e k é o tempo discreto.

As amostras da resposta impulsiva, $g(k)$, estão relacionadas com as amostras da resposta ao degrau, $s(k)$. Assim temos:

$$g(k) = \frac{1}{T_s} [s(k) - s(k-1)] ; s(k) = \sum_{i=0}^k g(i) \quad (B.13)$$

A função de transferência está relacionada com a representação de estado-discreta, no caso monovariável pela relação

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B \quad (B.14)$$

onde $A_{n \times n}$ é a matriz do sistema, $B_{n \times 1}$ é o vetor de entrada e $C_{1 \times n}$ é o vetor de saída. E as equações de estado são:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (B.15)$$

onde $x(k)_{n \times 1}$ é o vetor de estados, $u(k)$ é a seqüência de entrada e $y(k)$ a saída do sistema (medidas especificadas a cada período de amostragem).

Apêndice C

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

C.1 A Resposta ao Impulso

Seja um sistema linear causal e invariante no tempo e seu modelo com sinal de entrada escalar $u(t)$ e saída escalar $y(t)$,

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau. \quad (C.1)$$

Conhecendo $\{g(\tau)\}_{\tau=0}^{\infty}$, e $u(s)$, $s \leq t$ pode-se obter o cálculo de $y(s)$, $s \leq t$ $\forall$ entrada $u(s)$. Assim a resposta ao impulso apresenta-se como uma caracterização completa do sistema.

C.2 Amostragem

A amostragem proporciona observações de entradas e saídas em tempo discreto. Se for bem definida, então caracteriza todo o processo.

Considere $y(t)$ observadas em instante de amostragem $t_k = kT$, $k = 1, 2, \dots$.

Substituindo na Equação (C.1)

$$y(kT) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(kT-\tau)d\tau, \quad (C.2)$$

sendo T o intervalo de amostragem. Frequentemente em aplicações de controle computacional, o sinal de entrada $u(t)$ é mantido constante entre intervalos de amostragem. Sendo que

$$u(t) = u_k, kT < t < (k+1)T \quad (C.3)$$

e de maneira mais prática podemos substituir (C.3) em (C.2), então teremos:

$$y(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) u(kT - \tau) d\tau \quad (C.4)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{lT}^{(l+1)T} g(\tau) u(kT - \tau) d\tau \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^T g(\tau) u_{k-l} d\tau \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_T(l) u_{k-l} \end{aligned} \quad (C.5)$$

a equação (C.5) exprime que a saída estará nos instantes de amostragem, sendo que:

$$g_T(l) = \int_{(l-1)T}^{lT} g(\tau) d\tau \quad (C.6)$$

Para variação de l tem-se a seqüência $\{g_T(l)\}_{l=-\infty}^{\infty}$ que corresponde à resposta do sistema ao impulso.

De (C.3) a (C.6) a escolha e tamanho de T são essenciais para a discussão. Fazendo manipulações com a equação (C.5), considerando que T assume o valor de uma unidade de tempo e que t é utilizado para os instantes de amostragem, então:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) u(t - k), t = 0, 1, 2, \dots \quad (C.7)$$

De forma geral em (C.5) a expressão fornece a saída nos intervalos de amostragem. Não existe aproximação para calcular a resposta para a entrada e se a entrada é definida pela expressão (C.3), então é suficiente conhecer a seqüência,

$$\{g_T(l) u_{k-l}\}_{l=-\infty}^{\infty}.$$

Considerando a seqüência s até t ,

$$y_s^t = (y(s), y(s+1), \dots, y(t)), \quad (C.8)$$

que de forma simplificada fica:

$$y_1^t = y^t. \quad (C.9)$$

C.3 Caracterização de Distúrbios

C.3.1 Sinais

Os sinais que serão referidos neste trabalho são os de entrada u , saída y e perturbações v . Um modelo dinâmico de um sistema contém constantes invari-antes no tempo, e variáveis ou sinais. Os sinais são entradas quando os mesmos, externos ao sistema, influenciam o comportamento mas que não são afetadas pelo sistema em questão. Podem ainda ser a respostas do sistema à entrada. E um sinal de entrada sobre o qual não é possível atuar, isto é, escolher ou modificar o seu valor, é dito uma perturbação.

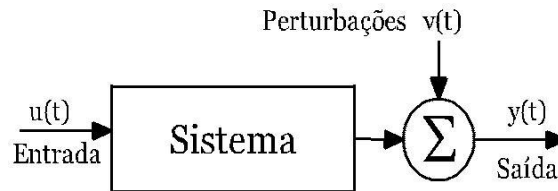


Figura C.1: Sinais de um Sistema

De acordo com a Eq. (C.7) a saída é calculada exatamente uma vez conhecida a entrada. existem sempre sinais além de nosso controle que também afetam o sistema. Dentro de nossa estrutura linear nós assumimos que tais sinais podem ser alocados em um termo aditivo $v(t)$ na saída, e a Eq. (C.7) se torna:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t-k) + v(t) \quad (C.10)$$

Existem muitas origens e causas para tal perturbação. Pode-se listar o ruído da medida, nele os sensores que medem os sinais são sujeito a barulho, vento e movimentos. As entradas ingovernáveis também são outra forma de ruído, onde o sistema é sujeito a sinais com características de entradas, mas não são controlados pelo usuário.

A maior característica de uma perturbação é que seus valores não são conhecidos a priori. As informações sobre perturbações passadas são importantes para fazer suposições qualificadas sobre valores futuros. E deste modo é natural empregar um estrutura probabilística para descrever perturbações futuras. A caracterização do problema na instância de fdp pode ser feita fixando um tempo t e fazer afirmações sobre o distúrbio nos instantes

$$t + k, \quad k \geq 1.$$

A caracterização completa pode ser feita descrevendo a função de densidade de probabilidade conjunta,

$$\{v(t + k), \quad k \geq 1\} \text{ dado } \{v(s), \quad s \leq t\}, \quad (\text{C.11})$$

isto iria, porém, na maioria dos casos ser muito trabalhoso, ocorreriam dificuldades em caracterizar a fdp da sequência $v(t+k)$. Devemos ao invés usar uma abordagem mais simples. A alternativa é representando $v(t)$ da seguinte forma:

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(t - k), \quad t = 0, 1, \dots \quad (\text{C.12})$$

sendo $\{e(t)\}$ uma sequência de variáveis aleatórias identicamente distribuídas com certa função de densidade de probabilidade. Essa descrição não realiza uma caracterização geral e completa de todos os possíveis distúrbios aleatórios. Versatilidade para aplicações práticas como predição e Afirmações probabilísticas sobre futuros distúrbios sem perdas de generalidade constitue as vantagens dessa abordagem. Por razões de normalização, nós devemos normalmente assumir que $h(0) = 1$, isso para que variância de $e(t)$ possa ser ajustada.

Especificando diferentes funções de densidade de probabilidade para $e(t)$ obteremos diferentes características do distúrbio. Assim se considerarmos a fdp do ruído,

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{com probabilidade } 1 - \mu \\ r & \text{com probabilidade } \mu \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

em (C.13), r é uma variável aleatória normalmente distribuída;

$$r \in N(0, \gamma)$$

se μ é um número pequeno, então é uma seqüência de distúrbios com características e perfil determinístico que ocorrem em instantes aleatórios.

A Função de Densidade de Probabilidade Normal,

$$e(t) = N(0, \lambda), \quad (\text{C.14})$$

tem um padrão adequado para descrever medições do ruído e ações frequentes e irregulares de distúrbios isso devido às suas propriedades Estatísticas. Frequentemente é especificado as propriedades de 2ª ordem da seqüência $\{e(t)\}$. Note que (C.16) representa um seqüência de variáveis independentes, com média nula, variância conhecida.

C.4 Função de Covariância

Seja a descrição do sinal de um ruído dada pela equação (C.12),

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(t-k), \quad t = 0, 1, \dots$$

assumindo a sua média como,

$$E v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) E e(t-k) = 0 \quad (\text{C.15})$$

e covariância,

$$\begin{aligned} E v(t) v(t-\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h(k) h(s) E e(t-k) e(t-\tau-s) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h(k) h(s) \delta(t-\tau-s) \lambda \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} h(k) h(k-\tau) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

aqui $h(r) = 0$ se $r < 0$. Nota-se que a covariância é independente de t é chamada de Covariância do Processo v , sendo representada por:

$$R_v(\tau) = E v(t) v(t - \tau) \quad (C.17)$$

A covariância a media $E v(t)$ e R_v possuem propriedades de 2^a ordem de v . Unicamente definidas pela sequência $\{h(k)\}$, Variância λ de e . E (C.17) e $E v(t)$ são processos estacionários pois não dependem de t .

C.5 Representação de Modelos Lineares

Há diversas maneira representar um modelos lineares, e uma delas é a função de transferência, definida como a transformada da resposta ao impulso do sistema para condições iniciais nulas. Se a resposta ao impulso for contínua, a transformada a ser usada é a de Laplace, representada por $G(s)$.

$$G(s) = L\{g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t) e^{st} dt \quad (C.18)$$

a sua inversa é definida como

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(s) e^{st} ds \quad (C.19)$$

sendo $s = \sigma + j\omega$. Se a resposta ao impulso for discreta, a transformada a ser usada é a Z , representada por $G(z)$.

$$G(z) = Z\{g(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) z^{-k} \quad (C.20)$$

a sua inversa é definida como

$$g(k) = Z^{-1}\{G(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint G(z) z^{k-1} dz \quad (C.21)$$

A resposta em frequência é obtida aplicando a Transformada de Fourier à resposta ao impulso contínua, obtendo $G(j\omega)$.

$$G(j\omega) = F\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (C.22)$$

a sua inversa é definida como

$$g(t) = F^{-1}\{G(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (C.23)$$

sendo $\sqrt{-1} = j$. Semelhantemente pode-se obter para o caso discreto $G(z)$, o equivalente em frequência $G(j\omega)$ substituindo z por $j\omega$.

C.5.1 Função de Transferência

Será introduzida uma notação para equações como (C.10) e (C.12) que são utilizadas freqüentemente. Inicialmente, considere que a sequência de entradas pode ser representada através dos operadores de deslocamento, o operador avanço (forward)

$$u(t+1) = qu(t) \quad (C.24)$$

e o operador de atraso (backward)

$$u(t-1) = q^{-1}u(t) \quad (C.25)$$

Introduzindo o operador deslocamento em atraso na equação (C.7) obtemos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t-k), \quad t=0,1,\dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} g(k) q^{-k} u(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} g(k) q^{-k} u(t) \quad \# \\ &= G(q)u(t) \end{aligned} \quad (C.26)$$

Aqui é introduzida a notação:

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) q^{-k} \quad \# \quad (C.27)$$

$G(q)$ é chamado de operador ou Função de Transferência do sistema linear. E a equação (C.26), $y(t) = G(q)u(t)$, descreve a relação entre as sequências u_t e

$y(t)$. Assim q é o argumento de G em lugar de q^{-1} (que talvez seria mais natural devido ao lado correto) a fim de estar em acordo formal com as expressões das transformadas z e Fourier. No sentido exato o termo função de transferência devia ser reservada para a transformada- z de $\{g(k)\}_{k=0}^{\infty}$ que é

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} \quad (C.28)$$

mas nós devemos às vezes não observar este ponto.

Semelhantemente com

$$H(q) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)q^{-k} \quad (C.29)$$

pode-se então escrever sinal $v(t)$ como

$$v(t) = H(q)e(t) \quad (C.30)$$

A descrição básica para um Sistema Linear com ruído aditivo poderá ser então

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \quad (C.31)$$

com $\{e(t)\}$ uma seqüência de variáveis aleatórias com média zero e variância λ conhecida.

C.5.2 Pólos e Zeros

A função $G(z)$ representada pela equação (C.28),

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)z^{-k} \quad (C.32)$$

é uma função complexa da variável z . Os valores de β_i / $G(\beta_i) = 0$ são chamados de zeros da função de transferência do sistema. Os valores de α_i / $G(\alpha_i) \rightarrow \infty$, são chamados de pólos. Se a função $G(z)$ é uma função racional de z os pólos serão os zeros do denominador.

C.5.3 Estabilidade

A função de Transferência $G(q)$ é estável se

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g(k)| < \infty \quad (C.33)$$

A definição (C.33) coincide com a definição teórica de Bounded-Input Bounded-Output (BIBO) estabilidade. Se uma entrada $\{u(t)\}$ de $G(q)$ é limitada $|u(t)| \leq C$. Então, A saída correspondente $z(t) = G(q)u(t)$ também será limitada, $|z(t)| \leq C'$. Note também que a expressão (C.33) assegura que a expansão de Laurent

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^{-k}$$

converge para $\forall |z| \geq 1$. As médias da função de transferência $G(z)$ é analítica fora do círculo unitário, então não possuem nenhum pólo naquela área.

Considerando uma família de filtros $G_{\alpha}(q)$ e $\alpha \in A$

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{\alpha}(k)q^{-k}, \quad \alpha \in A \quad (C.34)$$

A família é uniformemente estável se

$$|g_{\alpha}(k)| \leq g(k), \quad \forall \alpha \in A, \quad \sum_{k=1}^{\infty} g(k) < \infty \quad (C.35)$$

A função de transferência $G(q)$ é estritamente estável se

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|g(k)| < \infty \quad (C.36)$$

Note que para uma função de transferência que é racional em q , estabilidade implica em estabilidade estrita.

O filtro $H(q)$ é mônico se $h_0 = 1$ ou a matriz é unitária. Dessa forma temos

$$H(q) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)q^{-k}, \quad h_0 = 1 \quad (C.37)$$

Referências Bibliográficas

Aguirre, Luís Antonio (2007). Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-lineares aplicadas à Identificação de Sistemas. Editora UFMG, Belo Horizonte - MG.

Associação Brasileira do Alumínio - ABAL (). Home page. visited on 12/4/2008.

Braga, Carlos Augusto Pereira (2008). Sintonia do Filtro de Kalman para Medição Indireta das Variáveis de Estado no Banho Eletrolítico. Dissertação de mestrado - UFMA.

Coelho, Antonio Augusto Rodrigues e Leandro dos Santos Coelho (2004). Identificação de Sistemas Dinâmico Lineares. Editora da UFSC. Florianópolis.

Corrêa, Marcelo V. e Luis Antonio Aguirre (2004). Identificação não-linear caixa-cinza: uma revisão e novos resultados. SBA Controle e Automação pp. v.15, n. 2, pp. 109–126.

João Viana da Fonseca Neto, Carlos Augusto Pereira Braga, Nilton F. Nagen Jorge Amate Farid Fábio Nogueira da Silva (November 26-28, 2007). Bandwidth adjustmant of digital kalman filter for indirect measurement of eletrolytic bath state variables. 2nd International Conference on Sensing Technology 2007 pp. Palmerston North, New Zeland.

João Viana da Fonseca Neto, Carlos Augusto Pereira Braga, Nilton Freixo Nagen Jorge Farid Amate Fábio Nogueira da Silva. (2008). Kalman filter for indirect measurement of electrolytic bath state variables: Tuning design and practical aspects. Sensors & Transducers pp. v.90, pp.139–149.

- Kristinsson, K. e G. A. Dumont (1992). System Identification and Control using Genetic Algorithms. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics** 22(5), 1033–1046.
- Larry Banta, Philip Biedler, Congxia Dai Ric Love Chuck Tommey Jan Berkow. (2002). Decomposition of aluminum cell voltage signals. **The Mineral, Metals & Materials Society. Wolfgang Schneider.**
- Ljung, Lenart (1999). **System Identification: Theory for the User.** 2nd ed.. Pren-tice - Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Ljung, Lenart (2007). **System Identification Toolbox 7 User's Guide.** The Math-Works, Inc.
- Ljung, Lenart e Torkel Glad (1994). **Modeling of Dynamic Systems.** 1 ed.. Prentice Hall.
- Lucia Valeria Ramos de Arruda, Flavio Neves Junior. e Sílvia Favaro (2003). Identificação genética de modelos por pólos e zeros baseada no compromisso entre os erros de polarização e variância. **Revista Controle & Automação** pp. v.14, n.2, pp. 94–102.
- Luyben, William L. e Michael L. Luyben (1997). **Essentials of Process Control.** Chemical Engineering, McGrawHill international Editions.
- Sörheim, Einar Arne e Peter Borg (1988). Dynamic model and estimator for online supervision of the alumina reduction cell.
- Zeng Shuiping, Li Jinhong. (2006). Diagnosis system of anode faults for alumina reduction cell. **IEEE Computer Society.**

