

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Teoria de Dirac modificada no Modelo Padrão
Estendido não-mínimo**

João Alfíeres Andrade de Simões dos Reis

ORIENTADOR: MARCO SCHRECK

COORIENTADOR: MANOEL MESSIAS FERREIRA JR.

SÃO LUÍS, FEVEREIRO DE 2017

Teoria de Dirac modificada no Modelo Padrão Estendido não-mínimo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal do Maranhão, como
parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Marco Schreck

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão

Coorientador: Manoel Messias Ferreira Jr.

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão

SÃO LUÍS, FEVEREIRO DE 2017

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Andrade de Simões dos Reis, João Alfíeres.

Teoria de Dirac modificada no Modelo Padrão Estendido não-mínimo / João Alfíeres Andrade de Simões dos Reis. - 2017.

220 p.

Coorientador(a): Manoel Messias Ferreira Jr.

Orientador(a): Marco Schreck.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017.

1. Equação de Dirac. 2. Espinores e relações de dispersão. 3. Modelo-Padrão Estendido. 4. Teoria de Dirac modificada. 5. Violação da simetria de Lorentz. I. Ferreira Jr., Manoel Messias. II. Schreck, Marco. III. Título.

JOÃO ALFÍERES ANDRADE DE SIMÕES DOS REIS

Teoria de Dirac modificada no Modelo Padrão Estendido não-mínimo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal do Maranhão, como
parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

Marco Schreck (*Orientador*)

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Manoel Messias Ferreira Jr. (*Coorientador*)

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Doutor em Física - Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Aos meus pais, pois sem a ajuda deles nada disso seria possível.

Agradecimentos

A Deus, pela saúde e por proporcionar a mim, e a minha família, bons momentos;

Aos meus pais, que mesmo distantes, continuam me apoiando incondicionalmente. Serei eternamente grato por todo o incentivo, pela grande paciência, amizade e dedicação que sempre tiveram por mim e pelas minhas irmãs;

Às minhas irmãs, Emanuela e Hiasmyn, pela paciência, compreensão e grande incentivo durante todos esses anos;

Ao meu orientador, Prof. Marco Schreck, pela grande amizade construída, por todo o apoio e por me ajudar a dar um grande passo na minha carreira científica. Agradeço também pela paciência e pelas notáveis contribuições à minha dissertação e a minha apresentação. *Vielen Dank!!*

Ao meu coorientador, Prof. Manoel Messias, por todo o suporte, pela amizade e por acreditar em meu potencial. Graças a sua confiança foi possível desenvolver um grande trabalho. Agradeço também pelas grandes sugestões no manuscrito;

Ao Prof. Rodolfo Casana, por contribuir imensamente na minha formação, seja pelas boas discussões ou pelas ótimas disciplinas lecionadas, as quais tive o privilégio de cursar (e consegui sobreviver!!). Também sou grato por ter aceitado participar da minha qualificação e da minha defesa;

Ao Prof. Marcos Sampaio (UFMG) por aceitar compor a banca examinadora da minha dissertação. Agradeço também pelas boas sugestões ao manuscrito e pelas perguntas feitas durante a defesa.

À minha linda namorada, Letícia Lisboa, pelo grande apoio, boas discussões e por estar presente em mais uma grande etapa da minha vida. Que venham os nossos próximos desafios!!

Ao Prof. Antônio Pinto Neto, pela grande amizade, pelos ensinamentos e por continuar sendo um grande amigo;

Ao meu grande amigo, Marcos Lima Dias, pela grande amizade, pelas longas discussões sobre os mais variados temas, pelos ensinamentos e por estar presente em mais uma conquista;

A todos os professores que fazem parte do GFTPC, pois contribuíram de maneira significativa para a minha formação através das boas disciplinas ministradas.

Tive a honra de aprender muito com os professores Edilberto, Benito e Adalto. Fica aqui os meus sinceros agradecimentos;

A todos os amigos que conquistei durante a minha jornada na UFMA, em especial, Vinícius (Vini), Daniel (Dandan), João Luís (Tenório/Negão), Santiago (Santi), Welligton, Kayman, Zaqueu (Sândalos), Leonilson, Leandro, Ulisses (gordinho), Guillermo (gringo), Luiz Fernando, Fred Jorge, Elvis Johel, ...

À todos os alunos do grupo GFTPC;

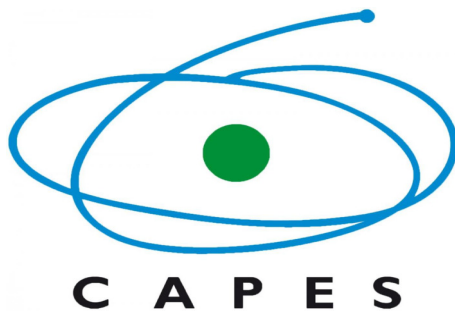
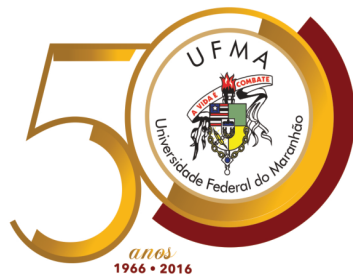
À minha família que sempre me incentivou durante toda esta longa jornada;

À todos os meus primos, em especial, Monique, Raiane, Fellipe e Danillo por todo o incentivo;

À todos do PPG - Física UFMA, em especial a Lucy e Angra por darem grande assistência na coordenação;

À Capes pelo suporte financeiro;

Por fim, à todos aqueles que contribuíram de alguma maneira para a minha formação e que, porventura, tenha esquecido.



“Viver é sempre dizer aos outros que eles são importantes. Que nós os amamos. Porque um dia eles se vão, e ficamos com a nítida impressão de que nós não os amamos o suficiente.”

Chico Xavier

Resumo

Nos últimos anos, houve um aumento significativo no interesse em teorias que violam a simetria de Lorentz. Estudos têm sido realizados na tentativa de incluir termos que violam a simetria de Lorentz no Modelo Padrão (MP). Esta tentativa culminou no surgimento do chamado Modelo Padrão Estendido (MPE). Este modelo contempla todas as possíveis modificações que são consistentes com as propriedades já bem estabelecidas, tais como renormalizabilidade e a estrutura de *gauge* do MP. Mais recentemente, uma versão não-mínima do MPE foi desenvolvida para os setores dos fótons, neutrinos e para os férmions. Esta versão não-mínima caracteriza-se pela presença de altas derivadas. Uma das novas propriedades nesta versão não-mínima é a perda da renormalizabilidade.

Neste trabalho, estudamos os principais aspectos da teoria de Dirac modificada no MPE não-mínimo. Nós nos concentramos em dois tipos de operadores a saber, operadores pseudovetoriais e tensoriais. Estes dois operadores exibem uma propriedade incomum, eles quebram a degenerescência de spin. Esta nova propriedade manifesta-se, por exemplo, na presença de duas relações de dispersão diferentes, uma para cada projeção do spin. Para resolver a equação de Dirac modificada por esses operadores, introduzimos um novo método que foi sugerido por Kostelecký e Mewes em um trabalho recente. Este método permite bloco-diagonalizar a equação de Dirac modificada e, assim, nos fornece uma nova maneira de obter os espinores. Os objetivos do presente trabalho são os seguintes. Primeiro, iremos rever alguns conceitos essenciais para o entendimento do MPE. Segundo, apresentaremos a extensão do setor fermiônico mínimo para o não-mínimo. Terceiro, descreveremos o método que bloco-diagonaliza a equação de Dirac modificada e calcularemos as equações de campo. Por fim, calcularemos as relações de dispersão exatas e as soluções espinoriais para cada configuração não-mínima dos operadores citados.

Palavras chave: Violação da simetria de Lorentz, Modelo-Padrão Estendido, Teoria de Dirac modificada, Equação de Dirac, Espinores e relações de dispersão.

Abstract

For the recent years, there has been a growing interest in Lorentz-violating theories. Studies have been carried out addressing the inclusion of Lorentz-violating terms into the Standard Model (SM). This has led to the development of the Standard Model Extension (SME), which is a framework containing modifications that are power-counting renormalizable and consistent with the gauge structure of the SM. More recently, a nonminimal version of the SME was developed for the photon, neutrino, and fermion sector additionally including higher-derivative terms. One of the new properties of this nonminimal version is the lost of renormalizability.

In this work, we study the main aspects of a modified Dirac theory in the non-minimal Standard-Model Extension. We focus on two types of operators namely, pseudovector and two-tensor operators. These two operators display an unusual property; they break the degeneracy of spin. This new property becomes manifest in providing two different dispersion relations, one for each spin projection. To solve the Dirac equation modified by those operators, we introduce a new method that was suggested by Kostelecký and Mewes in a recent research paper. This method allows to block-diagonalizing the modified Dirac equation and, thus, permits us to obtain the spinors. The objectives of the current work are as follows. First, we will review the main concepts for understanding the SME. Second, we will introduce how to extend the minimal fermion sector to the nonminimal one. Third, we will describe the method that block-diagonalizes the modified Dirac equation and we will compute the field equations. And, finally, we will get the exact dispersion relations and the spinor solutions for operators of arbitrary mass dimension.

Keywords: Lorentz violation, Standard-Model Extension, Modified Dirac theory, Dirac equation, Spinors and dispersion relations.

Sumário

1	Introdução	1
2	Simetrias: Uma introdução	7
2.1	Simetrias discretas: C, P e T	8
2.1.1	Conjugação de carga (C)	9
2.1.2	Paridade (P) e Reversão temporal (T)	11
2.2	Grupos de Lie: uma introdução	15
2.2.1	Conceitos básicos	15
2.2.2	Exemplos de grupos de Lie	18
2.2.3	Grupo de Lorentz	20
3	O Modelo Padrão Estendido (MPE)	27
3.1	Os setores do MPE	30
3.2	O setor de férmions no MPE-mínimo	38
4	Equação de Dirac modificada: Um estudo preliminar	43
4.1	O setor não-mínimo dos férmions	43
4.2	Equações de campo	50
4.3	Relação de dispersão exata	52
4.3.1	Propriedades gerais da equação de dispersão	54
4.4	Espinores e bloco-diagonalização da equação de Dirac	56
5	Teoria de Dirac modificada por operadores de spin não-degenerado	63
5.1	Propriedades gerais	63
5.1.1	Energias das partículas e antipartículas	64

5.1.2	Obtenção e generalização dos espinores	65
5.2	Configuração “isotrópica” generalizada	68
5.3	Soluções para algumas configurações do operador pseudovetorial $\hat{\mathcal{A}}^\mu$	72
5.3.1	Operador $\hat{\mathcal{A}}^i$ com $i = \{1, 2\}$	73
5.3.2	Operador $\hat{\mathcal{A}}^3$	80
5.4	Soluções para algumas configurações do operador tensorial $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$	82
5.4.1	Operador $\hat{\mathcal{T}}^{0i}$ com $i = \{1, 2\}$	83
5.4.2	Operador $\hat{\mathcal{T}}^{03}$	88
5.4.3	Operador $\hat{\mathcal{T}}^{i3}$ com $i = \{1, 2\}$	90
5.4.4	Operador $\hat{\mathcal{T}}^{12}$	94
5.5	Soluções para o operador $\hat{\mathcal{P}}$	97
5.6	Consistência das soluções espinoriais	100
5.7	Derivadas temporais adicionais	106
5.7.1	Setor fermiônico mínimo	106
5.7.2	Setor fermiônico não-mínimo	108
6	Conclusões e Perspectivas	111
A	Cálculo da relação de dispersão	115
B	Espinores exatos para algumas configurações especiais	125
B.1	Coeficiente b isotrópico	125
B.2	Coeficiente g isotrópico	127
C	Forma bloco-diagonal da equação de Dirac e suas soluções	129
C.1	Obtenção da equação de Dirac transformada e suas soluções.	129
C.2	Verificação das soluções espinoriais (C.19 – C.28).	136
C.3	Conexão entre os espinores nos formalismos quiral e <i>Standard</i>	138
D	Soluções exatas da equação de Dirac modificada por operadores de spin degenerado	143
D.1	Soluções espinoriais	143
E	Propagadores	147
E.1	Propagador para os operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$	148

E.2	Propagador para o operador $\hat{\mathcal{A}}^\mu$	149
E.3	Propagador para o operador $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$	150
E.4	Propagador para o operador $\hat{\mathcal{P}}$	151
E.5	Observações finais	152
F	Matrizes espinoriais	153
F.1	Algumas configurações do operador $\hat{\mathcal{A}}^\mu$	153
F.1.1	Matrizes espinoriais para o operador $\hat{\mathcal{A}}^0 = -b^{(3)0}$	153
F.1.2	Matrizes espinoriais para o operador $\hat{\mathcal{A}}^3 = -b^{(3)3}$	154
F.2	Matrizes espinoriais para o operador $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$	155
F.3	Matrizes espinoriais do operador não-mínimo $\hat{\mathcal{P}}$	156
F.4	Matrizes espinoriais dos operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}$ mínimos	158
G	Trabalhos Publicados	161

Lista de Figuras

2.1	Representação pictórica de um <i>manifold</i> $\mathbb{M}$ qualquer e seu espaço tangente, $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$, na vizinhança da identidade $I \in \mathbb{M}$. Os grupos de Lie “moram” no <i>manifold</i> , já a álgebra “mora” no espaço tangente. Próximo a identidade é possível, através da expansão 2.19, escrever os elementos do grupo em termos dos geradores.	17
3.1	Representação pictórica das flutuações que ocorrem na estrutura do espaço-tempo na escala de Planck. Figura disponível em [63]	27
3.2	Representação pictórica de partículas se propagando no espaço-tempo. As partículas ao se propagarem “sentem” a presença das flutuações do espaço-tempo. Como as flutuações são aleatórias, as partículas exibirão propriedades diferentes ao se propagarem em direções diferentes. Figura disponível em [64]	28
3.3	Diferença entre os <i>Background field</i> em um espaço-tempo plano e um espaço-tempo curvo.	30
3.4	Diagrama das partículas elementares. A diferença fundamental entre estes dois diagramas reside no fato das partículas elementares no MPE apresentarem algumas propriedades diferentes, tais como relações de dispersão modificadas (designamos isso com um $\hat{}$ sobre as partículas).	33
4.1	Na figura acima, “part” designa partículas e “ $\overline{\text{part}}$ ” antipartículas. Vemos claramente que, após a matriz transformação U atuar sobre o operador de Dirac, a equação torna-se bloco-diagonal, ou seja, as informações que caracterizam as partículas estão desacopladas das antipartículas.	58

Lista de Tabelas

2.1	Simetrias e suas correspondentes leis de conservação.	8
2.2	Transfomação dos covariantes bilineares sob a ação da transfomação de conjugação de carga $\mathcal{C}$	13
2.3	Transfomação dos covariantes bilineares sob a ação da transfomação de paridade $\mathcal{P}$	13
2.4	Transfomação dos covariantes bilineares sob a ação da transfomação de reversão temporal $\mathcal{T}$	14
2.5	Transfomação dos covariantes bilineares sob a ação da transfomação de conjugação de carga $\mathcal{CPT}$	14
2.6	Matrizes de Pauli.	19
2.7	Matrizes de Gell-Mann. Na primeira matriz o índice i subentende $i = 1, 2, 3$	19
2.8	Setores do grupo $O(3, 1)$	24
2.9	A tabela acima nos mostra como as transformações de paridade P e reversão temporal T conecta todos os setores disjuntos do grupo $O(3, 1)$ a partir do subgrupo de Lorentz $SO(3, 1)$	25
2.10	Transfomação dos covariantes bilineares sob a ação da transfomação de Lorentz	25
3.1	Dimensão de massa dos <i>background fields</i>	40
3.2	Cassificação dos coeficientes mínimos sob a ação da transformação CPT	40
4.1	Classificação dos 10 operadores contidos em (4.3) sob transformações CPT e transformações de Lorentz [22].	50

5.1	Valores dos coeficientes $\xi_s^{(\beta)}$ e $\zeta_s^{(\beta)}$ para a configuração isotrópica e anisotrópica $\hat{\mathcal{A}}^3$	105
5.2	Valores dos coeficientes $\xi_s^{(\beta)}$ e $\zeta_s^{(\beta)}$ para a configurações anisotrópica $\hat{\mathcal{T}}^{03}$ e $\hat{\mathcal{T}}^{12}$	105
6.1	Resumo dos resultados obtidos para as relações de dispersão e espinores modificados.	113

Capítulo 1

Introdução

O advento da Mecânica Quântica (MQ) e da Teoria da Relatividade Restrita (TRR) no século XX elevou a Física a um novo patamar. Fenômenos outrora desconhecidos e não compreendidos a luz das teorias vigentes passaram a ser então entendidos. Efeitos como a radiação de corpo negro, efeito foto-elétrico, interpretação consistente dos resultados obtidos por Michelson-Morley em 1887, entre outros, ganharam uma interpretação consistente. Os esforços empregados para se entender cada vez mais essas teorias culminaram no desenvolvimento das modernas Teorias Quântico-Relativísticas (TQR). As TQR's são úteis na descrição de fenômenos que envolvem partículas em altas energias, por exemplo.

Uma das TQR's de maior sucesso foi desenvolvida por Dirac em 1928 e foi reportada pela primeira vez no artigo [1]. A equação de Dirac, como ficou conhecida, foi desenvolvida com o propósito de sanar vários problemas. Primeiro, observou-se que o número de estados estacionários em átomos hidrogenoides eram duas vezes maior que aqueles previstos por modelos teóricos quando tratavam elétrons como objetos pontuais sem nenhum número quântico interno. O primeiro modelo teórico que concordava com os resultados experimentais foi proposto por Pauli. Pauli introduziu o conceito de spin na equação de Schrödinger para explicar os resultados experimentais da época. No entanto, a noção de spin introduzida para explicar tais resultados não surgiu de maneira natural, mas sim introduzida à mão. Portanto, uma das motivações de Dirac para desenvolver uma nova teoria foi tentar descrever essa nova propriedade de maneira mais natural. Segundo, algu-

mas inconsistências com a proposta de unificação entre MQ e TRR, desenvolvida inicialmente por Klein e Gordon, motivaram Dirac a buscar uma nova maneira de abordar esse problema. A seguir, mencionamos alguns problemas da teoria elaborada por Klein e Gordon: falta de explicações plausíveis, à época, para as energias negativa obtidas e a obtenção de probabilidades negativas, foram alguns dos problemas. O problema das probabilidades negativas, uma explicação satisfatória para as energias negativa, a descrição natural para o spin das partículas e muitas outras inconsistências foram resolvidas com sucesso pelo modelo de Dirac. Com o surgimento das Teorias Quânticas de Campos (TQC) a equação de Dirac ganhou uma nova interpretação: a equação que descreve partículas fermiônicas de spin $\frac{1}{2}$. Já a teoria de Klein e Gordon descreve apenas partículas sem spin.

As TQC's permitiram um entendimento mais profundo das chamadas interações fundamentais, que classificam-se como: eletromagnética, nuclear forte, nuclear fraca e gravitacional. Com exceção da gravitação, as modernas TQC's permitiram uma descrição quântica para essas interações. As teorias mais bem sucedidas em explicar os fenômenos que advêm das interações fundamentais são: Eletrodinâmica Quântica (QED), Cromodinâmica Quântica (QCD) e Teoria Eletrofraca. Todas estas teorias juntas formam um grande arcabouço teórico conhecido como Modelo Padrão (MP). O MP é um grande modelo teórico que descreve tanto as interações eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca, quanto as partículas fundamentais que compõem toda a matéria. A simetria de *gauge*, cujo grupo contínuo é representado por $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$, é um ingrediente muito importante do MP. Outro componente de vital importância no MP é o mecanismo de Higgs, responsável por quebrar espontaneamente a simetria de *gauge*. Uma das principais consequências desse mecanismo manifesta-se na presença de bosons de *gauge* massivos. Esse mecanismo também é responsável por dar massa as partículas elementares. Apesar de ser um grande modelo, o MP deixa várias questões em aberto, como por exemplo, não fornece uma descrição quântica consistente para a interação gravitacional.

O palco onde todos os eventos supracitados ocorrem é conhecido como espaço-tempo. A estrutura do espaço-tempo e suas simetrias são os pilares que sustentam teorias como a TRR, Relatividade Geral (TRG) e a própria Física das partículas elementares. Portanto, o estudo das simetrias dessa estrutura e suas possíveis

violações nos oferecem a oportunidade de explorar aspectos fundamentais da natureza. Sabemos que a simetria de Lorentz é a simetria fundamental que descreve o espaço-tempo. O estudo da violação dessa simetria tem sido objeto de intenso estudo nas últimas décadas, graças a constatação de que teorias de caráter mais fundamentais poderiam induzir a quebra espontânea da simetria de Lorentz. Como exemplos, a violação da simetria de Lorentz pode ocorrer em alguns modelos de teorias de cordas [2–6], em teorias de *loop quantum gravity* [7, 8], em teorias de campos em espaços-tempos não comutativos [9, 10], em modelos que descrevem a estrutura do espaço-tempo em pequenas escalas [11–13], em TQC's em espaços-tempos com topologias não triviais [14, 15] e, por fim, em teorias de gravidade de Hořava-Lifshitz [16].

O grande número de modelos que sugerem a quebra espontânea da simetria de Lorentz, alinhado ao fato de não existir um modelo preferencial entre eles, acaba inviabilizando a extração de informações precisas. Assim, não é tarefa fácil sondar se efeitos advindos de um determinado modelo poderá ser gerado por outro e vice-versa. Portanto, fez-se necessário a criação de um modelo efetivo que pudesse contemplar todos os efeitos que advém da violação espontânea da simetria de Lorentz sem a necessidade de conhecer precisamente qual teoria de gravitação quântica é correta. O modelo em questão deve incluir em seu arcabouço todos os possíveis termos que violam a simetria de Lorentz. Esses termos devem ser consistentes com a invariância de coordenadas e com a estrutura de *gauge* já bem estabelecida do MP. O modelo efetivo que inclui todos os possíveis efeitos da violação da simetria de Lorentz de maneira consistente em todos os setores do MP e na TRG é conhecido como Modelo Padrão Estendido (MPE) [17–19]. Os termos que violam a simetria de Lorentz podem ser decompostos em operadores que são interpretados como campos de fundo (*background fields*) e permeiam o vácuo. Já que a própria estrutura do vácuo é modificada, novos efeitos podem surgir, tais como, novos modos de propagação, efeitos tipo birrefringência entre outros.

Os operadores que violam a simetria de Lorentz são classificados de acordo com sua dimensão de massa. O número finito de operadores com dimensão de massa 3 e 4 compõem o chamado MPE mínimo [18]. O restante dos operadores com dimensão de massa $d > 4$ estão contidos no MPE não-mínimo [20–24]. O MPE não-mínimo é uma generalização natural da versão mínima do MPE que torna-se

relevante em escalas de energias maiores. Uma outra razão para se considerar uma versão não-mínima do MPE deve-se ao fato de algumas teorias que preveem a violação da simetria de Lorentz serem mapeadas apenas neste setor. Um dos exemplos conhecidos na literatura são as teorias de campos em espaços-tempos não comutativos. Nesta teoria, o tensor que descreve a não comutatividade do espaço-tempo possui dimensão de massa negativa e, portanto, é mapeado apenas no MPE não-mínimo [25, 26]. Assim, no cenário atual em que o MP é interpretado como uma teoria efetiva (a baixas energias) de um modelo mais fundamental (Teoria de Gravitação Quântica), então podemos conceber o MPE mínimo e o MPE não-mínimo como correções naturais ao MP. Essa concepção nos permite fazer a seguinte identificação: Gravitação Quântica = MP + MPE mínimo + MPE não-mínimo + $\dots$. Em vista disso, um modelo efetivo para descrever a Gravitação Quântica em diferentes escalas de energias requer a introdução de termos que descrevam novos efeitos. Logo, podemos idealizá-lo como uma série (onde os novos termos são entendidos como correções relevantes em escalas de energia maiores que a do MP) onde vamos aglomerando mais informações e, assim, temos o conhecimento mais preciso da teoria fundamental.

A primeira dessas correções, o MPE-mínimo, tem sido amplamente estudado e cada vez mais os coeficiente que induzem a violação estão sendo limitados. Algumas propriedades a *tree-level* foram investigadas em uma larga série de artigos [27–36] e correções radiativas em [37–49]. O setor mínimo dos férmions foi estudado em [50]. Nesse trabalho, propriedades como estabilidade, microcausalidades e não-localidade foram amplamente investigadas. Em [51] foram investigados os limites não-relativísticos da equação de Dirac modificada pelos coeficientes a e b e suas consequências.

No que diz respeito ao setor não-mínimo, operadores vetoriais e pseudovetoriais de dimensão de massa 5 foram estudados em [52, 53]. Nesses dois trabalhos, os autores impõem restrições aos valores dos *background fields*. Os operadores não-mínimo $\hat{a}$, $\hat{c}$, $\hat{f}$ e $\hat{m}$ de dimensão de massa 5 foram estudados em [54]. Esse último artigo destaca-se por investigar a unitariedade para toda a classe de operadores conhecidos por serem degenerados com respeito ao spin. Esse trabalho fornece de maneira detalhada os propagadores para cada uma das configurações. Investigações detalhadas para a classe de operadores não-mínimos que quebram

a degenerescência de spin (operadores $\hat{b}$, $\hat{d}$, $\hat{H}$, e $\hat{g}$ com dimensão de massa arbitrária) ainda não foram reportados à literatura. Portanto, caracterizá-los são tarefas em aberto. Assim, nosso objetivo principal neste trabalho é investigar estes operadores.

Esta dissertação está organizada como segue. No capítulo 2 descrevemos de maneira sucinta os conceitos e consequências da presença de simetrias em sistemas físicos. Apresentamos as simetrias discretas C, P, T e CPT e suas consequências na teoria de Dirac; demos ênfase especial em como os covariantes bilineares se transformam sob a ação dessas simetrias. Abordamos também os principais conceitos envolvendo os grupos de Lie. Esses grupos desempenham um papel importante na Física de partículas e na teoria de Campos. Apresentamos sucintamente os grupos $U(1)$, $SU(2)$ e $SU(3)$ como exemplos de grupos de Lie, visto que desempenham papel de grande relevância no MP. Por ser um grupo de Lie e ser de grande relevância na Física e neste trabalho, o grupo de Lorentz também foi estudado sistematicamente.

No capítulo 3 descrevemos como está organizado o MPE [17, 18], bem como as suas principais propriedades. Mostramos como a violação explícita da simetria de Lorentz é implementada dentro dos vários setores desse modelo. Nesse capítulo damos ênfase ao setor dos férmions, já que esse é o setor que estamos interessados em avaliar. Mostramos como o setor fermiônico do MPE-mínimo está organizado e discutimos os principais resultados da literatura.

No capítulo 4 estudamos detalhadamente como estender os coeficientes renormalizáveis, apresentados no capítulo 3, para operadores de dimensão arbitrária que estão contidos no MPE-não-mínimo. Esse setor congrega todos os operadores não-renormalizáveis e possui um número infinito deles.

Após a generalização do setor fermiônico, fizemos um estudo sistemático da densidade Lagrangeana apresentada naquela seção. A partir da densidade Lagrangeana generalizada obtivemos as equações de campo, a equação de dispersão exata, além de sondar algumas propriedades relevantes da relação de dispersão em primeira ordem. Descrevemos ainda uma nova abordagem útil para resolver a equação de Dirac modificada pelos operadores não-mínimo. Essa metodologia possibilita generalizar as soluções espinoriais, bem como contornar alguns problemas que surgem na obtenção dessas soluções devido a presença de operadores pseudo-

vetoriais e tensoriais. Esse capítulo é, em grande parte, uma revisão da literatura e, portanto, baseia-se fortemente no artigo [22]; por esse motivo, tentamos detalhar o máximo possível todas as propriedades relevantes.

Iniciamos o capítulo 5 expondo as propriedades gerais das relações de dispersão que descrevem as partículas e antipartículas. Descrevemos também o procedimento a ser utilizado na obtenção dos espinores, dos anti-espinores e suas generalizações. A normalização adotada ao longo do capítulo também foi discutida. Prosseguimos fazendo uso da metodologia apresentada no capítulo 4 para obter a forma bloco diagonal e as soluções da equação de Dirac para todas as configurações dos operadores $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ e $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$. Começamos o estudo dessas soluções espinoriais com a configuração “isotrópica” e, logo em seguida, avaliamos as configurações anisotrópicas dos operadores $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ e $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ separadamente. Por fim, analisamos a consistência das soluções e algumas consequências na dinâmica e nas relações de dispersão devido a presença de derivadas temporais extras.

As principais conclusões desta dissertação são apresentadas no capítulo 6. No apêndice A apresentamos alguns passos necessários na obtenção da equação de dispersão exata obtida no capítulo 4. No apêndice B calculamos as soluções exatas da equação de Dirac modificada para algumas configurações do setor mínimo do MPE via procedimento usual. O apêndice C destina-se a aplicação da metodologia apresentada no capítulo 4 ao caso mais simples, a saber: equação de Dirac livre. Neste apêndice calculamos explicitamente a forma bloco diagonal da equação de Dirac livre, obtemos as relações de dispersão, as soluções espinoriais e, por fim, mostramos a conexão entre as representações quirais e *standard*. Já o apêndice D nos mostra como a transformação U modificada pelos operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$ atua sobre a equação de Dirac modificada pelos operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$. Para esse caso, obtemos a forma bloco-diagonal da equação de Dirac modificada, as relações de dispersão e as soluções espinoriais. Resaltamos que todas essas soluções são exatas e podem ser generalizadas para qualquer configuração, seja ela mínima ou não-mínima. No apêndice E obtivemos os propagadores para todas as configurações do operador $\hat{\mathcal{Q}}$. Por fim, porém não menos importante, obtivemos alguns resultados para as matrizes espinoriais no apêndice F. A menos que seja dito o contrário, unidades naturais serão usadas ao longo do texto, ou seja, faremos $\hbar = c = 1$.

Capítulo 2

Simetrias: Uma introdução

Sabemos que as simetrias são entes onipresentes na natureza. A percepção do papel crucial desempenhado pelas simetrias é muito antiga. Os gregos, por exemplo, aparentemente acreditavam que as simetrias da natureza deveriam estar relacionadas com os movimentos dos objetos: estrelas devem se mover em círculos por que estas são as trajetórias mais simétricas. Com o passar do tempo e o desenvolvimento do método científico os conceitos e implicações das simetrias foram se tornando mais precisos. Newton, por exemplo, reconheceu que as simetrias fundamentais não são reveladas no movimento individual de objetos, mas sim no conjunto de todos os possíveis movimentos - simetrias são manifestas nas equações de movimento e não em uma particular solução destas. A própria mecânica newtoniana possui um conjunto de simetrias que a deixa invariante. Estas simetrias são conhecidas atualmente como transformações de Galileu. As simetrias de Galileu são: tempo absoluto e transformações entre referenciais inerciais. Pensou-se por muitos anos que esta simetria fosse exata. Porém, com o advento das equações de Maxwell verificou-se que este conjunto de simetrias não funcionavam. As equações de Maxwell por serem leis físicas consistentes deveriam ser invariantes por tais transformações. Com o advento da TRR verificou-se que o conjunto de simetrias mais fundamental, e que deixava as equações de Maxwell invariantes, era a simetria de Lorentz. Como foi discutido no capítulo [1](#), as simetrias também desempenham um papel de extrema relevância na Física das partículas elementares.

O estudo das simetrias de um sistema físico nos permite inferir previamente

algumas propriedades relevantes mesmo sem conhecer completamente a sua dinâmica. A teoria que fundamenta de maneira consistente as consequências da presença de uma determinada simetria foi desenvolvida apenas em 1917. Naquele ano, a matemática Emmy Noether publicou seu famoso teorema responsável por relacionar simetrias e quantidades conservadas, ou seja

Teorema de Noether: Simetria $\longleftrightarrow$ Lei de conservação.

O teorema de Nöther nos permite antever quais quantidades são conservadas após a evolução do sistema sob a ação de uma determinada lei de simetria. Na tabela 2.1 vemos quais as consequências de algumas simetrias sob a luz do teorema de Nöther.

Simetria	Lei de conservação	
Translações temporais	$\leftrightarrow$	Conservação da energia
Translações espaciais	$\leftrightarrow$	Conservação do momento
rotações	$\leftrightarrow$	Conservação do momento angular
Transformações de <i>gauge</i>	$\leftrightarrow$	Conservação da carga
		$\mapsto$ Simetrias do espaço-tempo
		$\mapsto$ Simetria interna

Tabela 2.1: Simetrias e suas correspondentes leis de conservação.

Neste capítulo trataremos de maneira sucinta dois tipos de simetrias: discretas e contínuas. No que diz respeito as simetrias discretas, estudaremos as simetrias de conjugação de carga C, paridade P, e reversão temporal T. Estas simetrias, bem como a sua composição CPT estão presentes tanto no MP quanto no MPE. Finalizamos estudando as simetrias contínuas. A compreensão das simetrias contínuas passa, necessariamente, pelo estudo dos chamados grupos de Lie. Faremos um apanhado geral sobre a teoria dos grupos contínuos e, como exemplo, estudaremos alguns grupos de Lie, focando principalmente no grupo de Lorentz. Há uma imensa literatura que trata das simetrias discretas e contínuas. Este capítulo baseia-se nas literaturas [55–62]. Estes livros nos permitem ter uma clara noção dos conceitos envolvendo simetrias e suas implicações na Física.

2.1 Simetrias discretas: C, P e T

Os grupos de simetria discreta são aqueles que não podem ser reproduzidos a partir de uma sucessão de operações infinitesimais. Os grupos discretos de-

semprenham um papel importante desde a matéria condensada à própria Teoria de Campos. Há três transformações discretas que surgem naturalmente dentro de qualquer sistema quântico-relativístico. Duas delas – Paridade (P) e reversão temporal (T) – estão relacionadas (i.e. *automorfismo*¹) com o grupo de Lorentz em si. A terceira transformação discreta – conjugação de carga (C) – consiste em estabelecer uma correspondência entre a carga das partículas e antipartículas. Existe uma imensa quantidade de grupos discretos, citamos alguns exemplos a seguir:

- Grupos pontuais (simetria dos cristais);
- Os números inteiros, $\mathbb{Z}$, formam um subgrupo discreto dos reais $\mathbb{R}$;
- Conjugação de carga (C);
- Paridade (P);
- Reversão temporal (T).

As simetrias discretas de interesse neste trabalho, assim como, na maioria dos desenvolvimentos em TQC, são C, P e T. A seguir, trataremos essas simetrias no contexto da teoria de Dirac.

2.1.1 Conjugação de carga (C)

A conjugação de carga é a operação que troca a carga da partícula pela carga da sua correspondente antipartícula. A operação de conjugação de carga C possui uma representação unitária, aqui denotada por $\mathcal{C} = U(C)$, no espaço de Hilbert e possui uma forma diferente para cada teoria. Estamos interessados em obter a representação da transformação de conjugação de carga na teoria de Dirac. Como $\mathcal{C}$ muda $e \mapsto -e$ (e representa a carga elementar), então avaliaremos a equação de Dirac acoplada minimamente com o campo eletromagnético A_μ , já que nessa

¹*Automorfismo*: Em matemática um *automorfismo* é um tipo de isomorfismo (mapeamento) de um objeto matemático em si próprio. O *automorfismo* constitui, de alguma forma, a simetria do objeto que, quando aplicada sobre si mesmo, preserva toda a sua estrutura. O conjunto de todos os *automorfismos* de um objeto forma um grupo, chamado grupo de *automorfismo*.

situação temos a presença da carga elétrica. A equação de Dirac acoplada minimamente com o campo eletromagnético é:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - eA_\mu \gamma^\mu - m_\psi) \psi = 0. \quad (2.1)$$

Se existe um espinor conjugado, ψ^c , que representa a antipartícula do elétron, por exemplo, então ψ^c deve satisfazer a seguinte equação:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + eA_\mu \gamma^\mu - m_\psi) \psi^c = 0, \quad (2.2)$$

onde a conjugação de carga $\mathcal{C}$ enxerga apenas a natureza da carga elétrica e a transforma ($e \mapsto -e$). Com essas equações em mente podemos encontrar a forma da representação $\mathcal{C}$ para a teoria em questão.

Calculando o conjugado hermitiano da equação (2.1), temos:

$$\psi^\dagger \left(-i\gamma^{\mu\dagger} \overleftarrow{\partial}_\mu - eA_\mu \gamma^{\mu\dagger} - m_\psi \right) = 0. \quad (2.3)$$

Multiplicando a equação acima por γ^0 pela direita e usando a relação de hermiticidade $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$, obtemos:

$$\psi^\dagger \left(-i\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \overleftarrow{\partial}_\mu - eA_\mu \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 - m_\psi \right) \gamma^0 = 0, \quad (2.4a)$$

$$\bar{\psi} \left(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - eA_\mu \gamma^\mu - m_\psi \right) = 0. \quad (2.4b)$$

Transpondo a equação acima, temos:

$$(-i\gamma^{\mu T} \partial_\mu - eA_\mu \gamma^{\mu T} - m_\psi) \bar{\psi}^T = 0. \quad (2.5)$$

Multiplicando por $\mathcal{C}$ pela esquerda, chegamos ao seguinte resultado

$$\mathcal{C} (-i\gamma^{\mu T} \partial_\mu - eA_\mu \gamma^{\mu T} - m_\psi) \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^T = 0, \quad (2.6a)$$

$$(-i\mathcal{C} \gamma^{\mu T} \mathcal{C}^{-1} \partial_\mu - eA_\mu \mathcal{C} \gamma^{\mu T} \mathcal{C}^{-1} - m_\psi) \mathcal{C} \bar{\psi}^T = 0, \quad (2.6b)$$

ou seja, para que a equação acima seja equivalente a equação (2.2), devemos impor

que

$$\mathcal{C}\gamma^{\mu T}\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^{\mu}. \quad (2.7)$$

Portanto, temos

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + eA_{\mu}\gamma^{\mu} - m_{\psi})\psi^c = 0, \quad (2.8)$$

onde identificamos o espinor conjugado por

$$\psi^c = \mathcal{C}\bar{\psi}^T. \quad (2.9)$$

Ao se impor a condição (2.7), chegamos ao seguinte resultado para a representação de $\mathcal{C} = U_{Dirac}(C)$

$$\mathcal{C} = U_{Dirac}(C) = \pm i\gamma^2\gamma^0, \quad (2.10)$$

onde $+i\gamma^2\gamma^0$ é a transformação $\mathcal{C}$ na representação de Pauli-Dirac e $-i\gamma^2\gamma^0$ na representação quirial. Esta representação é de grande utilidade na classificação dos covariantes bilineares que será abordada nos capítulos seguintes.

2.1.2 Paridade (P) e Reversão temporal (T)

Como veremos na subseção 2.2.3, a existência dos operadores paridade e reversão temporal está relacionada com a conectividade do grupo de Lorentz (subgrupo do grupo $O(3,1)$). Mostraremos que nem todas as transformações permitidas na relatividade especial podem ser construídas a partir da identidade. Duas transformações que se destacam neste grupo são: P e T. A transformação de paridade P caracteriza-se por transformar as componentes espaciais da seguinte forma: $x^i \mapsto -x^i$. Ao atuar em um 4-vetor x^{μ} a transformação P modifica-o da seguinte forma: $x^{\mu} = (t, x^i) \mapsto (t, -x^i) = x_{\mu}$. Já a reversão temporal T caracteriza-se por transformar a componente temporal da seguinte forma: $t \mapsto -t$. Ao atuar em um 4-vetor x^{μ} a transformação T modifica-o da seguinte forma: $x^{\mu} = (t, x^i) \mapsto (-t, x^i) = -x_{\mu}$. Os operadores P e T responsáveis por fazer estas transformações são mostrados a seguir:

$$x^{\mu} \mapsto P^{\mu}_{\nu}x^{\nu} \quad \text{e} \quad x^{\mu} \mapsto T^{\mu}_{\nu}x^{\nu}, \quad (2.11)$$

onde

$$P^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.12a)$$

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.12b)$$

Se os operadores P e T são simetrias de uma determinada teoria, então a representação destes operadores, denotadas por $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$, respectivamente, no espaço de Hilbert da teoria subjacente devem ser escolhidos de maneira consistente. Uma representação unitária do operador $\mathcal{P}$ é sempre possível; já a representação $\mathcal{T}$ não é compatível com a unitariedade, mas sim com a anti-unitariedade (isto é, ele muda o sinal da unidade imaginária i). A razão para a representação $\mathcal{T}$ ser anti-unitária deve-se ao fato do Hamiltoniano $\mathcal{H}$ se transformar de modo a preservar a positividade do seu espectro; esta condição é satisfeita se $\mathcal{P}\mathcal{H}\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{H}$ e $\mathcal{T}\mathcal{H}\mathcal{T}^\dagger = \mathcal{H}$. Por outro lado, o operador evolução temporal, $e^{-i\mathcal{H}t}$, deve se transformar da seguinte forma: $\mathcal{P}e^{-i\mathcal{H}t}\mathcal{P}^\dagger = e^{-i\mathcal{H}t}$ e $\mathcal{T}e^{-i\mathcal{H}t}\mathcal{T}^\dagger = e^{i\mathcal{H}t}$. Portanto, para satisfazer todas estas condições simultaneamente, $\mathcal{P}$ deve ser unitário e $\mathcal{T}$ deve ser anti-unitário. No contexto da teoria de Dirac a representação dos operadores P e T satisfazem as propriedades descritas acima. Para determinar a representação dos operadores $\mathcal{P} = U_{Dirac}(P)$ e $\mathcal{T} = U_{Dirac}(T)$ no contexto da teoria de Dirac, devemos impor que o operador de Dirac mantenha-se invariante perante estas transformações, ou seja,

$$\mathcal{P}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_\psi)\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P}\psi = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m_\psi)\psi(t, -\mathbf{x}) = 0, \quad (2.13a)$$

$$\mathcal{T}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_\psi)\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T}\psi = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m_\psi)\psi(-t, \mathbf{x}) = 0. \quad (2.13b)$$

Ao se impor essas condições, chegamos ao seguinte resultado para as representações de $\mathcal{P} = U_{Dirac}(\mathcal{P})$ e $\mathcal{T} = U_{Dirac}(\mathcal{T})$

$$\mathcal{P} = U_{Dirac}(\mathcal{P}) = \gamma^0, \quad (2.14a)$$

$$\mathcal{T} = U_{Dirac}(\mathcal{T}) = i\gamma^1\gamma^3K, \quad (2.14b)$$

onde K é um operador que, ao atuar sobre um objeto, nos fornece o seu complexo conjugado, ou seja:

$$\mathcal{T}\psi = i\gamma^1\gamma^3K\psi = i\gamma^1\gamma^3\psi^*. \quad (2.15)$$

Nas tabelas 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5 mostramos como os 16 covariantes bilineares se transformam sob a ação dos operadores $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ e $\mathcal{CPT}$, respectivamente.

Nome		Forma Bilinear	# ^a	% ^b	Paridade $\mathcal{C}$
Escalar	S	$\bar{\psi}\psi$	1	$\bar{\psi}\psi$	+
Pseudoescalar	P	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	+
Vetor	V	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4	$-\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	-
Pseudovetor	A	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	+
Tensor	T	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	+

a # significa número de componentes independentes

b % Após transformação de conjugação de carga

c $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. O i que aparece na componente pseudoescalar é necessária para torná-lo hermitiano.

Tabela 2.2: Transformação dos covariantes bilineares sob a ação da transformação de conjugação de carga $\mathcal{C}$.

Nome		Forma Bilinear	# ^a	% ^b	Paridade $\mathcal{P}$
Escalar	S	$\bar{\psi}\psi$	1	$\bar{\psi}\psi$	+
Pseudoescalar	P	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1	$-i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	-
Vetor	V	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	-
Pseudovetor	A	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	$-\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	+
Tensor	T	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	+

b % Após transformação de paridade

Tabela 2.3: Transformação dos covariantes bilineares sob a ação da transformação de paridade $\mathcal{P}$.

Nome		Forma Bilinear	# ^a	% ^b	Paridade $\mathcal{T}$
Escalar	S	$\bar{\psi}\psi$	1	$\bar{\psi}\psi$	+
Pseudoescalar	P	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1	$-i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	-
Vetor	V	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4	$-\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	-
Pseudovetor	A	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	$-\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	-
Tensor	T	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	+

b % Após transformação de reversão temporal

Tabela 2.4: Transformação dos covariantes bilineares sob a ação da transformação de reversão temporal $\mathcal{T}$.

Nome		Forma Bilinear	# ^a	% ^b	Paridade $\mathcal{CPT}$
Escalar	S	$\bar{\psi}\psi$	1	$\bar{\psi}\psi$	+
Pseudoescalar	P	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	+
Vetor	V	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4	$-\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	-
Pseudovetor	A	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	$-\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	-
Tensor	T	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	+

b % Após a transformação $\mathcal{CPT}$

Tabela 2.5: Transformação dos covariantes bilineares sob a ação da transformação de conjugação de carga $\mathcal{CPT}$.

Observando atentamente ao comportamento dos covariantes bilineares acima é possível constatar as seguintes regras gerais:

- Um bilinear fermiônico com n índices pares será *par* sob a transformação $\mathcal{CPT}$;
- Um bilinear fermiônico com n índices ímpares será *ímpar* sob a transformação $\mathcal{CPT}$;
- O mesmo aplica-se as derivadas ∂_μ .

Esta regra geral será de grande utilidade na hora de classificar os operadores que modificam a equação de Dirac no contexto de altas derivadas. Iremos chamá-las de “regras $\mathcal{CPT}$ ” e as invocaremos por esse nome mais a frente.

2.2 Grupos de Lie: uma introdução

Grupos de Lie e suas respectivas álgebras são usadas para descrever simetrias globais e de *gauge* em mecânica clássica, quântica e em teorias de Campo de modo geral. Um exemplo usual é a descrição de rotações em sistemas quânticos. Na Física de partículas os grupos de Lie são úteis não só na descrição das simetrias do espaço-tempo, tais como translações, rotações e transformações de Lorentz, mas também nas chamadas simetrias internas tais como a simetria de isospin. Devido a imensa importância da teoria dos grupos de Lie, descreveremos a seguir as principais definições e propriedades que caracterizam esses grupos.

2.2.1 Conceitos básicos

Um grupo H é um conjunto de elementos $h_1, h_2, \dots$ no qual uma operação de multiplicação está definida e deve obedecer as seguintes propriedades:

1. Uma lei de multiplicação associativa, sob a qual $h_1 h_2 = h_3$ para todo $h_{1,2} \in H$ com $h_3 \in H$ (esta condição é conhecida como clausura) e $(h_1 h_2) h_3 = h_1 (h_2 h_3)$ (esta condição é conhecida como associatividade)
2. Um elemento identidade $I \in H$ deve existir (e deve ser único) e satisfaz a seguinte propriedade: $Ih = hI = h$ para todo $h \in H$.
3. E, finalmente, um único elemento inverso $h^{-1} \in H$ para cada $h \in H$ existe, de modo que $h^{-1}h = hh^{-1} = I$.

As propriedades acima, quando satisfeitas em sua inteireza, definem um grupo. Uma classe especial de grupos é definida quando a operação de multiplicação que o define possui caráter comutativo, ou seja, $h_1 h_2 = h_2 h_1 \forall h_{1,2} \in H$; tal grupo é chamado de *abeliano*. Quando esta propriedade não é satisfeita temos um grupo *não-abeliano* ($h_1 h_2 \neq h_2 h_1 \forall h_{1,2} \in H$). Um subconjunto dos elementos de H que formam em si um grupo sob a mesma lei de multiplicação é chamado subgrupo de H .

Um grupo de Lie H é um grupo contínuo no qual a operação de multiplicação envolve funções diferenciáveis nos parâmetros que rotulam os elementos do grupo.

Os grupos de Lie podem ser classificados em duas classes: grupo de Lie compacto e não-compacto. O grupo de Lie compacto caracteriza-se por seus parâmetros serem finitos e definirem um *manifold* compacto. Já o grupo de Lie não-compacto possui propriedades opostas às definidas para os grupos compactos. Um grupo de Lie e sua operação de multiplicação pode ser definida, pelo menos nas vizinhanças da identidade (trata-se de transformações infinitesimais), em termos de sua *álgebra de Lie* associada, a qual consiste de N geradores (operadores) T^i , $i = 1, 2, \dots, N$, e suas relações de comutação

$$[T^i, T^j] = iC_{ijk}T^k, \quad (2.16)$$

onde a soma sob o índice k está subentendida e o coeficiente C_{ijk} , chamado de constante de estrutura do grupo H , é antissimétrico nos índices ijk . Sem perda de generalidade, podemos escolher os geradores T^i hermitianos e, como consequência, a constante de estrutura será real. Se $\forall C_{ijk} = 0$, então o grupo H será abeliano; caso contrário será não abeliano. Um elemento do grupo compacto H pode ser representado em termos dos seus geradores através de um operador unitário U_H , cuja estrutura é mostrada a seguir:

$$U_H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \exp\left(-i \sum_{j=1}^N \alpha^j T^j\right) \equiv e^{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{T}} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{T})^k}{k!}, \quad (2.17)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ são os N parâmetros reais e contínuos que identificam de maneira unívoca os elementos de H e T^j são os N geradores hermitianos no qual o grupo foi expandido. Em particular, o elemento identidade é obtido fazendo o conjunto de parâmetros $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\} = 0$, ou seja, $U_H(0) = e^0 = I$ e a inversa

$$U_H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^{-1} = U_H(-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_N) = e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{T}} = U_H^\dagger(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N). \quad (2.18)$$

Para valores infinitesimais dos parâmetros $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ ($|\boldsymbol{\alpha}| \ll 1$), é suficiente reter apenas os termos lineares, ou seja:

$$U_H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \simeq I - i\alpha_j T^j + O(\alpha_i \alpha_j). \quad (2.19)$$

Portanto, os geradores da álgebra de Lie descrevem os elementos do grupo na vizinhança da identidade. A figura 2.1 a seguir mostra de maneira pictórica o espaço tangente, $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$, na vizinhança do elemento identidade do *manifold* $\mathbb{M}$, onde encontra-se os elementos $U_H \in \mathbb{M}$ representados pela expansão 2.19.

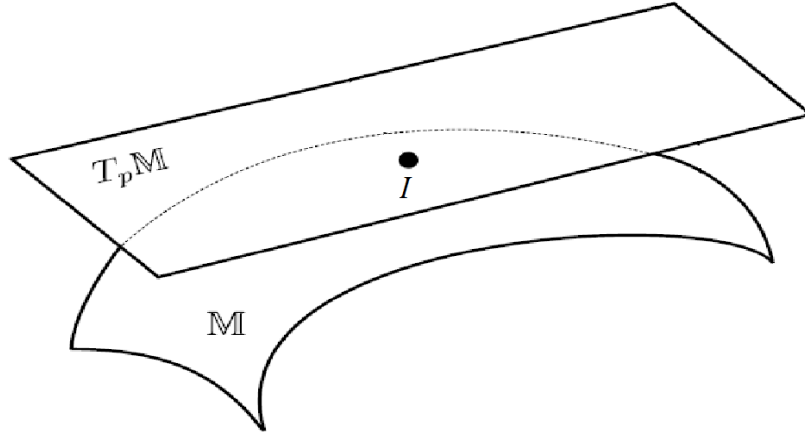


Figura 2.1: Representação pictórica de um *manifold* $\mathbb{M}$ qualquer e seu espaço tangente, $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$, na vizinhança da identidade $I \in \mathbb{M}$. Os grupos de Lie “moram” no *manifold*, já a álgebra “mora” no espaço tangente. Próximo a identidade é possível, através da expansão 2.19, escrever os elementos do grupo em termos dos geradores.

Até o presente momento consideramos os geradores T^j como objetos abstratos. Para poder trabalhar de maneira operacional com estes objetos, precisamos dá-los uma *representação*. Consideremos, inicialmente, um conjunto de matrizes L^i , $i = 1, 2, \dots, N$, de dimensão $n \times n$. Se este conjunto de matrizes satisfaz a mesma álgebra dos geradores, isto é,

$$[L^i, L^j] = iC_{ijk}L^k, \quad (2.20)$$

então as matrizes L^i formam o que chamamos de “uma representação da álgebra”². Enquanto T^i é um objeto abstrato, L^i é uma matriz específica. O mesmo

²Existem várias representações para os grupos e as álgebras de Lie. Foge, no entanto, do escopo deste capítulo tratar todas as formas de se representar um grupo. Na subseção 2.2.2

ocorre com a matriz de dimensão $n \times n$, $e^{-i\alpha \cdot T}$, que forma uma representação $U_H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ para os elementos do grupo H .

2.2.2 Exemplos de grupos de Lie

O grupo de Lie mais simples é o grupo abeliano $H = U(1)$, com apenas um gerador, isto é,

$$U_H(\alpha) = e^{-i\alpha T}, \quad (2.21)$$

cuja operação de multiplicação é mostrada a seguir

$$U_H(\alpha) U_H(\beta) = e^{-i(\alpha+\beta)T}. \quad (2.22)$$

Este grupo abeliano possui apenas uma representação unidimensional ($n = 1$) com $T = 1$ e os elementos do grupo são designados por $U_H(\alpha) \mapsto e^{-i\alpha}$. O grupo $U(1)$ é definido apenas quando fazemos $T = 1$ (dêmos uma representação ao grupo unidimensional $U_H(\alpha) = e^{-i\alpha T}$ quando fizemos $T = 1$) e representa o grupo de matrizes unitárias de dimensão 1×1 .

O grupo de Lie muito importante na mecânica quântica, por exemplo, é o grupo compacto não-abeliano $H = SU(2)$. O grupo $SU(2)$ possui $N = 3$ geradores e a constante de estrutura é $C_{ijk} = \epsilon_{ijk}$. O grupo $SU(2)$ ³ é um subgrupo do grupo $U(2)$ representado por matrizes de dimensão 2×2 que são unitárias e possuem determinante igual a 1. Através das propriedades descritas anteriormente, podemos definir a chamada representação fundamental. A representação fundamental escolhida para os geradores são: $L^i = \frac{\tau^i}{2}$, onde $\tau^i \equiv \sigma^i$ são as matrizes de Pauli que estão listadas na tabela 2.6. A relação de comutação é mostrada a seguir

$$\left[\frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\tau^k}{2}. \quad (2.23)$$

As matrizes de Pauli são hermitianas, portanto, os elementos do grupo na repre-

destacaremos algumas representações de interesse na Física de partículas, por exemplo.

³ SU = Special unitary

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tabela 2.6: Matrizes de Pauli.

sentação fundamental escolhida

$$U(\boldsymbol{\alpha}) \equiv e^{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathbb{I}_2 - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2.24)$$

são matrizes 2×2 . O grupo $SU(2)$ é útil não só na mecânica quântica, mas também na descrição aproximada da invariância de isospin na interação forte e na simetria de *gauge* da teoria eletrofraca.

O grupo $SU(3)$ desempenha dois papéis relevantes no MP. Primeiro, é o grupo de gauge associado a interação forte (QCD). Segundo, atua como simetria global aproximada da simetria de “sabor” das interações fortes (*the eight-fold way*). A representação fundamental⁴ do grupo $SU(3)$ pode ser definida através de suas propriedades, ou seja, são matrizes 3×3 unitárias com determinante igual a 1. O grupo $SU(3)$ possui $N = 8$ geradores⁵ que são representados por $L^i = \frac{\lambda^i}{2}$, onde λ^i , $i = 1, \dots, 8$ são as matrizes de Gell-Mann e estão listadas na tabela 2.7. A

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} \tau^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tabela 2.7: Matrizes de Gell-Mann. Na primeira matriz o índice i subentende $i = 1, 2, 3$.

⁴A outra possível representação para os grupos $SU(N)$ é a chamada representação adjunta. Esta representação consiste em representar os geradores via constante de estrutura C_{ijk} , ou seja,

$$L_{jk}^{(i)} = C_{ijk}.$$

Através desta definição vemos claramente que o grupo $U(1)$ não possui representação adjunta, tendo em vista que $C_{ijk} = 0$.

⁵De modo geral, o grupo $SU(N)$ possui $N^2 - 1$ geradores.

relação de comutação é mostrada a seguir

$$\left[\frac{\lambda^i}{2}, \frac{\lambda^j}{2} \right] = i f_{ijk} \frac{\lambda^k}{2}, \quad (2.25)$$

onde f_{ijk} são as constantes de estrutura do grupo $SU(3)$.

2.2.3 Grupo de Lorentz

De acordo com a TRR, as leis da Física são invariantes por uma mudança de coordenadas, isto é,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + \xi^\mu, \quad (2.26)$$

onde os parâmetros Λ e ξ são reais. Esta transformação de coordenadas deve manter a distância entre dois pontos invariante, ou seja,

$$(x - y)_\mu (x - y)^\mu = \eta_{\mu\nu} (x - y)^\mu (x - y)^\nu, \quad (2.27)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo de Minkowski. A condição acima não impõe nenhum vínculo ao parâmetro ξ uma vez que suas componentes se cancelam devido a diferença entre os pontos x e y . Porém, para o parâmetro Λ obtemos que

$$x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\mu_\nu x_\alpha x^\nu, \quad (2.28)$$

é válido para todo x^μ . A lei de transformação caracterizada pela equação (2.26) e que satisfaz a equação (2.28) é conhecida como transformação de Poincaré. Estas transformações formam um grupo chamado grupo de Poincaré. O subgrupo em que Λ é escolhido como a matriz identidade e o parâmetro ξ é arbitrário é chamado de grupo de translação. O subgrupo do grupo de Poincaré que estamos interessados é o grupo de Lorentz; tal subgrupo é obtido fazendo-se $\xi = 0$.

Vemos a partir da equação (2.28) que Λ^μ_ν deve satisfazer a seguinte condição para que possa ser considerado uma transformação de Lorentz

$$\eta_{\mu\nu} x^\nu x^\mu = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu x^\nu x^\mu, \quad \forall x^\mu. \quad (2.29)$$

Já que a expressão acima é válida para qualquer x^μ , temos que

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \eta_{\alpha\beta} \Lambda_\nu^\beta, \quad (2.30)$$

ou usando a notação matricial

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda. \quad (2.31)$$

O grupo de matrizes Λ que satisfazem a equação (2.31) é designado por $O(3,1)$ e forma um grupo. Sendo assim, todo o desenvolvimento mostrado na subseção 2.2.1 pode ser usado para caracterizá-lo.

O grupo $O(3,1)$ é muito geral e, como veremos a seguir, nem todos os elementos de $O(3,1)$ podem ser construídos a partir da identidade. Portanto, a possibilidade de poder expressar seus elementos próximo a identidade (como mostrado na equação (2.19)) é perdida. Os elementos de $O(3,1)$ que nos possibilitam usar todo o ferramental desenvolvido na subseção 2.2.1 formam um subgrupo chamado $SO(3,1)$. O nosso interesse reside nesse subgrupo. Uma transformação de Lorentz Λ_ν^μ que é infinitesimalmente próxima a unidade pode ser escrita como

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega^\mu{}_\nu, \quad (2.32)$$

onde $\omega^\mu{}_\nu$ é uma matriz com coeficientes infinitesimais. A condição que a matrix $\omega^\mu{}_\nu$ deve satisfazer para que Λ_ν^μ seja uma transformação de Lorentz válida pode ser obtido inserindo a equação (2.32) na equação (2.31), ou seja,

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= (\delta_\mu^\alpha + \omega^\alpha{}_\mu) \eta_{\alpha\beta} (\delta_\nu^\beta + \omega^\beta{}_\nu), \\ &= \delta_\mu^\alpha \eta_{\alpha\beta} \delta_\nu^\beta + \omega^\alpha{}_\mu \eta_{\alpha\beta} \delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\alpha \eta_{\alpha\beta} \omega^\beta{}_\nu + \omega^\alpha{}_\mu \eta_{\alpha\beta} \omega^\beta{}_\nu, \\ &= \eta_{\mu\nu} + \omega^\alpha{}_\mu \eta_{\alpha\nu} + \eta_{\mu\beta} \omega^\beta{}_\nu + \eta_{\alpha\beta} \omega^\alpha{}_\mu \omega^\beta{}_\nu, \\ &= \eta_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu} + \eta_{\alpha\beta} \omega_\mu^\alpha \omega_\nu^\beta. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Retendo apenas termos lineares em $\omega^\mu{}_\nu$, obtemos:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu},$$

$$0 = \omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

Portanto, vemos que a matriz $\omega_{\mu\nu}$ deve ser antissimétrica. O espaço das matrizes 4×4 reais e antissimétricas possui dimensão 6, portanto, o grupo de Lorentz possui dimensão 6. A dimensão do grupo pode ser entendida (e definida) como o número máximo de parâmetros livres necessários para definir univocamente um elemento do grupo, que no caso em questão é uma matriz 4×4 antissimétrica. No caso acima, apenas 6 são suficientes para descrever qualquer matriz antissimétrica.

A relação entre $\omega^\mu{}_\nu$ e $\omega_{\mu\nu}$ é obtida com o auxílio da métrica, ou seja, $\omega^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\nu}$. Considerando a métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$ ⁶, vemos que apenas as componentes tipo tempo-espaço mudarão de sinal; as componentes tipo espaço-espaço não se modificarão. Assim, a matriz antissimétrica $\omega^\mu{}_\nu$ mais geral possível é

$$\omega^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & 0 & -r_3 & r_2 \\ b_2 & r_3 & 0 & -r_1 \\ b_3 & -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

A matriz $\omega^\mu{}_\nu$ é simétrica nos índices tipo tempo-espaço e antissimétrica nos índices tipo espaço-espaço. Os parâmetros b_1, b_2 e b_3 são responsáveis por produzir *boosts* infinitesimais nas direções 1, 2, 3, respectivamente; já os parâmetros r_1, r_2, r_3 são responsáveis por produzir rotações em torno dos eixos 1, 2, 3. Um elemento geral do grupo $SO(3, 1)$ pode ser escrito como uma exponencial para um $\omega^\mu{}_\nu$ finito

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (\exp \omega)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \frac{1}{2}\omega^\mu{}_\alpha\omega^\alpha{}_\nu + \frac{1}{6}\omega^\mu{}_\alpha\omega^\alpha{}_\beta\omega^\beta{}_\nu + \dots \quad (2.36)$$

Quando apenas os r_i são não-nulos, esta transformação nos fornece uma rotação de um ângulo $|\vec{r}|$ em torno do eixo $\hat{r}$. Quando apenas os b_i são não-nulos, esta transformação nos fornece um *boost* de velocidade $\tanh\left|\vec{b}\right|$ ao longo do eixo $\hat{b}$. Quando ambos $\vec{r}$ e $\vec{b}$ são não-nulos a transformação de Lorentz não pode ser descrita somente por uma rotação tão pouco por uma translação. Note que, enquanto uma rotação $|\vec{r}| = 2\pi$ nos fornece a identidade, nenhum valor não-nulo de um *boost* $|\vec{b}|$

⁶Usaremos esta assinatura para a métrica apenas neste capítulo. Nos capítulos subsequentes usaremos a métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$.

nos retornará a identidade. Como consequência, o grupo $SO(3, 1)$ é um grupo de Lie não-compacto.

O grupo $SO(3, 1)$, como já mencionado, é um subgrupo do grupo $O(3, 1)$. Porém, o grupo $O(3, 1)$ possui quatro partes desconexas e uma destas partes é o subgrupo $SO(3, 1)$. Para observarmos estas quatro partes, calculemos o determinante da equação (2.31):

$$\begin{aligned}\det \eta &= \det (\Lambda^T \eta \Lambda), \\ &= \det \Lambda^T \det \eta \det \Lambda, \\ &= \det \eta \times (\det \Lambda)^2.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Já que a métrica η é não-singular, podemos dividir a equação acima por $\det \eta$ para obter o seguinte resultado

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \rightarrow \det \Lambda = \pm 1.\tag{2.38}$$

O determinante deve variar continuamente ao longo de um caminho conectando essas duas regiões de $O(3, 1)$, porém, não é possível ir continuamente de 1 a -1 . Portanto, nenhum elemento de $O(3, 1)$ cujo $\det \Lambda = -1$ pode fazer parte do subgrupo conectado $SO(3, 1)$. Um elemento de $O(3, 1)$ cujo $\det \Lambda = 1$ é chamado *próprio*, e os elementos cujo $\det \Lambda = -1$ é chamado *impróprio*. Além da propriedade exposta acima, se expandirmos a equação (2.31) para $\mu = 0$ e $\nu = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}\eta_{00} &= \Lambda_0^\alpha \eta_{\alpha\beta} \Lambda_0^\beta, \\ -1 &= \Lambda_0^0 \eta_{00} \Lambda_0^0 + \sum_{k=1}^3 \Lambda_0^k \eta_{kk} \Lambda_0^k, \\ -1 &= -\Lambda_0^0 \Lambda_0^0 + \sum_{k=1}^3 \Lambda_0^k \Lambda_0^k,\end{aligned}$$

Setores do Grupo $O(3,1)$	
$L_+^\uparrow$	: $\det \mathbf{\Lambda} = +1$ e $\Lambda_0^0 \geq +1 \quad \mapsto SO(3,1)$
$L_+^\downarrow$	: $\det \mathbf{\Lambda} = +1$ e $\Lambda_0^0 \leq -1$
$L_-^\uparrow$	: $\det \mathbf{\Lambda} = -1$ e $\Lambda_0^0 \geq +1$
$L_-^\downarrow$	: $\det \mathbf{\Lambda} = -1$ e $\Lambda_0^0 \leq -1$

Tabela 2.8: Setores do grupo $O(3,1)$.

$$(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \sum_{k=1}^3 (\Lambda_0^k)^2 \geq 1. \quad (2.39)$$

Assim o quadrado da componente tipo tempo-tempo para qualquer matriz $\mathbf{\Lambda}$ deve ser pelo menos igual a 1 e, portanto, $\Lambda_0^0 \leq 1$ ou $\Lambda_0^0 \geq 1$. Novamente, não podemos ir continuamente da região ≥ 1 à ≤ -1 ; sendo assim, nenhum elemento de $SO(3,1)$ pode ter $\Lambda_0^0 < 0$. Um elemento de $O(3,1)$ que tem $\Lambda_0^0 \geq 1$ é chamado de *ortócrono* e um elemento com $\Lambda_0^0 \leq 1$ é chamado de *não-ortócrono*. A tabela 2.8 sintetiza as quatro partes desconexas do grupo $O(3,1)$. A tabela 2.8 introduz uma notação para cada um dos setores e sumariza as suas características.

O exemplo canônico de um elemento impróprio e ortócrono do grupo $O(3,1)$ é a transformação de paridade ($P^\mu{}_\nu$) mostrada na equação (2.12a) que satisfaz a equação (2.31), porém, tem determinante -1 . O exemplo canônico de um elemento impróprio e não-ortócrono é a inversão temporal ($T^\mu{}_\nu$) mostrada na equação (2.12b) que também satisfaz a equação (2.31), porém, tem $T^0_0 = -1$. Qualquer setor de $O(3,1)$ pode ser acessado a partir de um elemento de $SO(3,1)$; para isso, basta multiplicar um elemento de $SO(3,1)$ pela identidade I (setor próprio e ortócrono), ou multiplicar pelo operador paridade P (setor impróprio e ortócrono), ou pelo operador reversão temporal T (setor impróprio e não-ortócrono) ou ainda pela composição PT (setor próprio e não-ortócrono). A tabela 2.9 mostra como obter todos os setores disjuntos do grupo $O(3,1)$ a partir do subgrupo $SO(3,1)$.

Finalizamos mostrando um resultado bastante útil que diz respeito ao comportamento dos covariantes bilineares sob a ação da transformação de Lorentz. Na tabela 2.10 nós mostramos a classificação dos acoplamentos usuais entre o espinor

$L_+^\uparrow \longleftarrow I \longrightarrow L_+^\uparrow$	$\longleftarrow P \longrightarrow L_-^\uparrow = PL_+^\uparrow$	Ortócrono
$\uparrow$ T $\downarrow$	$\uparrow$ T $\downarrow$	
$L_+^\downarrow = TL_+^\uparrow \longleftarrow P \longrightarrow L_-^\downarrow = PTL_+^\uparrow$		Não-ortócrono
Própria	Imprópria	

Tabela 2.9: A tabela acima nos mostra como as transformações de paridade P e reversão temporal T conecta todos os setores disjuntos do grupo $O(3,1)$ a partir do subgrupo de Lorentz $SO(3,1)$

ψ e os covariantes bilineares⁷.

Forma Bilinear	# ^a	% ^b	
$\bar{\psi}\psi$	1	$\bar{\psi}\psi$	$\mapsto$ Escalar
$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1	$\text{idet}(\Lambda)\bar{\psi}\gamma^5\psi$	$\mapsto$ Pseudoescalar
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$\mapsto$ Vetor
$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	$\text{det}(\Lambda)\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	$\mapsto$ Pseudovetor
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	$\mapsto$ Tensor

a # significa número de componentes independentes

b % Após transformação de Lorentz

$\text{det}(\Lambda)$ aparece nos bilineares γ^5 , pois estes dependem da natureza das transformações de Lorentz. Isto é, se são próprias ou impróprias.

Tabela 2.10: Transformação dos covariantes bilineares sob a ação da transformação de Lorentz

Toda a revisão feita aqui será de grande utilidade no entendimento dos próximos capítulos.

⁷Como não discutimos aqui a representação do grupo de Lorentz, não será possível demonstrar estes resultados. Há uma vasta literatura que trata das representações do grupo em questão e que demonstram tais resultados. As referencias citadas no inicio deste capítulo podem ser consultadas para um melhor entendimento das representações dos grupos de Lie.

Capítulo 3

O Modelo Padrão Estendido (MPE)

Sabe-se que a simetria de Lorentz está intimamente ligada à estrutura do espaço-tempo. Assim, qualquer mudança nessa estrutura pode induzir a perda daquela simetria. Em pequenas escalas, o espaço-tempo sofre inúmeras flutuações [11–13], portanto, é esperado que a simetria de Lorentz seja quebrada. A figura 3.1 representa, de maneira pictórica, o que ocorre com a estrutura do espaço-tempo na escala de Planck. Uma consequência direta dessas flutuações manifesta-se quando partículas propagam-se pelo espaço-tempo. Ao propagarem-se, as partículas “colidem” com essas flutuações que por sua vez modificam suas propriedades. Como as flutuações são aleatórias, as propriedades das partículas passam a depender da direção em que se propagam. A figura 3.2 ilustra partículas propagando-se através das flutuações do espaço-tempo.

O MPE, como já mencionado, surgiu então da necessidade de estender o MP das partículas elementares levando em consideração possíveis violações da simetria de

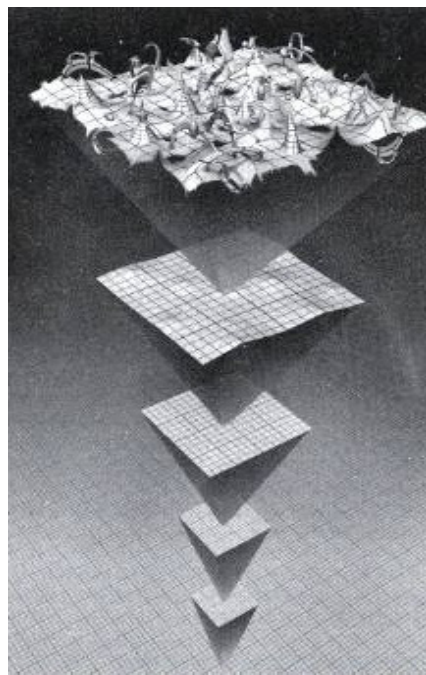


Figura 3.1: Representação pictórica das flutuações que ocorrem na estrutura do espaço-tempo na escala de Planck. Figura disponível em [63]

Lorentz. Acredita-se que o MP, assim como o MPE, é o limite em baixas energias de uma teoria mais fundamental na qual uma descrição quântica para a gravitação seria factível. A escala natural desta teoria fundamental é a escala de Planck. Tal escala caracteriza-se pela massa de Planck M_p , cuja magnitude é $\sim 10^{19}$ GeV. Para se ter uma idéia de quão distantes estamos deste valor, a escala eletrofraca do MP é 17 ordens de grandeza menor que a escala em questão. Portanto, é esperado que efeitos advindos da escala de Planck sejam suprimidos pelo fator M_p .

O MPE foi desenvolvido por V.A. Kostelecký e D. Colladay e foi mencionado pela primeira vez nos artigos [17, 18]. Neste modelo, Kostelecký e Colladay consideraram que a violação espontânea da simetria de Lorentz, que ocorrerá na escala de Planck, deveria manifestar-se através de campos de fundo fixos (*background fields*) no limite de baixas energias. Os *background fields* são introduzidos à mão no MPE não-gravitacional. Esses *background fields* acoplam-se aos campos físicos através de termos invariantes de coordenadas, de tal maneira que a invariância de Lorentz é quebrada explicitamente. A quebra explícita difere-se da quebra espontânea, pois os termos que produzem aquela quebra não de-

pendem de um mecanismo para ocorrer — os termos que induzem a quebra explícita são introduzidos à mão e, em geral, são independentes das coordenadas do espaço-tempo. No caso em questão, os *background fields* são escolhidos de modo a independem das coordenadas do espaço-tempo. Por outro lado, a quebra espontânea é caracterizada por ser uma espécie de transição de fase, assim, é necessário um mecanismo para que tal transição ocorra. O subproduto da quebra espontânea

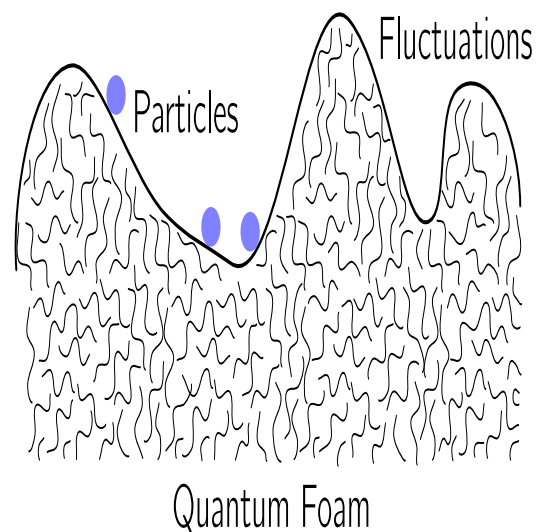
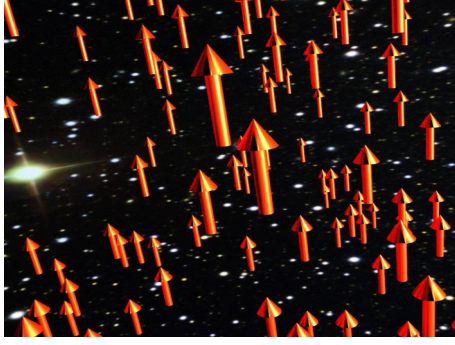


Figura 3.2: Representação pictórica de partículas se propagando no espaço-tempo. As partículas ao se propagarem “sentem” a presença das flutuações do espaço-tempo. Como as flutuações são aleatórias, as partículas exibirão propriedades diferentes ao se propagarem em direções diferentes. Figura disponível em [64]

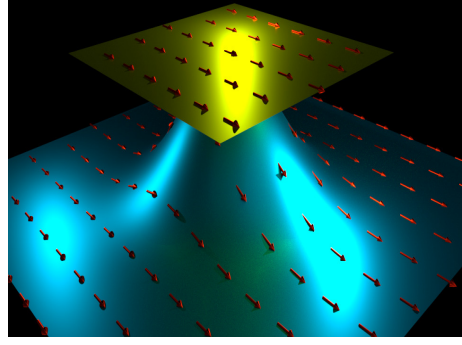
pode depender das coordenadas do espaço-tempo. Por exemplo, no MP o campo de Higgs é o responsável pelo mecanismo de quebra espontânea. Para o setor não-gravitacional, implementar a violação de Lorentz via quebra explícita é conveniente e nos conduz a uma descrição consistente. A quebra explícita no MPE tem como consequência a quebra da invariância de Lorentz apenas no referencial das partículas¹. Devemos ressaltar que o modo como os *background fields* se acoplam aos campos físicos devem respeitar a simetria de *gauge* $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ do MP, visto que esta estrutura está em consonância com os vastos experimentos já executados. Além da simetria de Lorentz, violações da simetria CPT também são levadas em consideração, uma vez que há uma relação estreita entre estas duas simetrias. No contexto de teorias de campos, Greenberg [65] mostrou que violações da simetria CPT implicam necessariamente na violação da simetria de Lorentz, sendo que a recíproca não se verifica. Por fim, vale mencionar que estamos nos restringindo ao espaço-tempo de Minkowski, isto é, a um espaço-tempo plano. Em espaços-tempos curvos a simetria de Lorentz deixa de ser violada globalmente e passa a ser violada localmente. Neste último caso, os *background fields* passam a depender das coordenadas do espaço-tempo, ou seja, em cada referencial há uma direção privilegiada. Essa mudança na estrutura do espaço-tempo torna todo o desenvolvimento aqui mostrado muito mais difícil. Uma das dificuldades encontradas reside no fato da quebra explícita da simetria de Lorentz ser inconsistente com o caráter local adquirido pelos *background fields*. Assim, a quebra da simetria de Lorentz deve acontecer de forma espontânea para que se possa evitar qualquer inconsistência [66–69]. Em vista disso, evitaremos quaisquer complicações dessa natureza. Na figura 3.3 mostramos, de maneira ilustrativa, como os *background field* se comportam em um espaço-tempo plano, figura 3.3a, e em um espaço-tempo curvo, figura 3.3b. Vemos claramente na figura 3.3a que os *background field* apon-

¹Em geral, há dois tipos de transformação de Lorentz que podem ser aplicadas a um sistema: transformações de observador (ou *Observer Lorentz transformation*) e transformações de partículas (ou *Particle Lorentz transformation*). A densidade Lagrangeana deve ser invariante perante uma transformação de coordenadas (*Observer Lorentz transformation*), ou seja, nossos resultados não podem depender da escolha dos eixos coordenados. Porém, as transformações no referencial das partículas e campos (*Particle Lorentz transformation*) podem ser violadas. A razão para a quebra dessa invariância reside no fato de não termos acesso aos *backgrounds*, ou seja, eles estão fixos e não podemos transformá-los. Portanto, há uma clara distinção entre estes dois tipos de transformações de Lorentz. No caso em que não há termos que violam a simetria de Lorentz, ambas as transformações tornam-se equivalentes.

tam para uma mesma direção e preenchem o espaço de maneira homogênea. Já na figura 3.3b, por outro lado, observamos que os *background field* apontam em direções diferentes em cada ponto do espaço-tempo e não preenchem necessariamente o espaço de maneira homogênea.



(a) *Background field* no espaço de Minkowski



(b) *Background field* em um *manifold* curvo

Figura 3.3: Diferença entre os *Background field* em um espaço-tempo plano e um espaço-tempo curvo.

Estudar a maneira como a violação das simetrias CPT e de Lorentz foram introduzidas por Kostelecký e Colladay através do MPE é o objetivo deste capítulo. Mostraremos como os setores leptônico, de quarks, de Yukawa, de Higgs e de *gauge* se modificam. Daremos ênfase ao setor fermiônico, focando no setor mínimo do MPE, já que é neste setor que reside o nosso interesse. A extensão do setor fermiônico mínimo para o não-mínimo será apresentado apenas no próximo capítulo.

3.1 Os setores do MPE

Começamos apresentando a densidade Lagrangeana do MPE, que é composta pelos seguintes termos

$$\mathcal{L}_{\text{MPE}} = \mathcal{L}_{\text{MP}} + \mathcal{L}_{\text{GR}} + \delta\mathcal{L}_{\text{LV}}, \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{L}_{\text{MP}}$ é a densidade Lagrangeana que descreve o MP mínimo, cuja simetria é $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$, $\mathcal{L}_{\text{GR}}$ é a densidade Lagrangeana da interação gravi-

tacional padrão e $\delta\mathcal{L}_{LV}$ (*Lorentz Violation* - LV) abrange todas as contribuições advindas da violação de CPT e de Lorentz. Cada uma das densidades Lagrangeanas presente na equação (3.1) pode ser escrita de maneira a explicitar todos os setores que os compõem. Iniciaremos decompondo a densidade Lagrangeana $\mathcal{L}_{MP}$, a saber

$$\mathcal{L}^{MP} = \mathcal{L}_{Lepton}^{MP} + \mathcal{L}_{Quark}^{MP} + \mathcal{L}_{Yukawa}^{MP} + \mathcal{L}_{Higgs}^{MP} + \mathcal{L}_{Gauge}^{MP}, \quad (3.2)$$

onde $\mathcal{L}_{Lepton}^{MP}$ descreve o setor dos léptons, $\mathcal{L}_{Quark}^{MP}$ descreve o setor dos quarks, $\mathcal{L}_{Yukawa}^{MP}$ descreve o setor de Yukawa, $\mathcal{L}_{Higgs}^{MP}$ descreve o setor de Higgs e $\mathcal{L}_{Gauge}^{MP}$ descreve o setor de *gauge*.

As contribuições advindas da Lagrangeana $\delta\mathcal{L}_{LV}$ podem ser estruturadas explicitando a natureza CPT de cada setor, ou seja, se os coeficientes que violam a simetria de Lorentz também violam ou não CPT. A seguir, organizamos cada setor e suas respectivas classificações,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{LV} = & \mathcal{L}_{Lepton}^{CPT-par} + \mathcal{L}_{Lepton}^{CPT-impar} + \mathcal{L}_{Quark}^{CPT-par} + \mathcal{L}_{Quark}^{CPT-impar} + \mathcal{L}_{Yukawa}^{CPT-par} \\ & + \mathcal{L}_{Higgs}^{CPT-par} + \mathcal{L}_{Higgs}^{CPT-impar} + \mathcal{L}_{Gauge}^{CPT-par} + \mathcal{L}_{Gauge}^{CPT-impar}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Observa-se que os setores dos léptons, dos quarks, de Higgs e de *gauge* possuem ambas contribuições CPT, ao passo que o setor de Yukawa possui apenas contribuições CPT – par. Todas as contribuições mostradas na equação (3.3) são construídas de modo a quebrar explicitamente as simetrias CPT e de Lorentz. A quebra explícita, como já mencionado, manifesta-se através dos *background fields* e, como devemos preservar a simetria $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$, estes campos não se acoplam aos campos físicos de qualquer forma. Precisamos conhecer a forma explícita de cada uma das densidades Lagrangeanas que compõem a equação (3.3). Porém, antes de prosseguir, introduziremos algumas notações e conceitos úteis para que possamos entender as estruturas Lagrangeanas que serão mostradas. Os léptons, por exemplo, podem ser organizados da seguinte forma:

$$L_A = \begin{pmatrix} \nu_A \\ l_A \end{pmatrix}_L, \quad R_A = (l_A)_R, \quad (3.4)$$

onde L_A descreve os léptons de quiralidade *left* que se transformam como singletos

sob a ação do grupo $SU_c(3)$, como dubletos sob a ação do grupo $SU_L(2)$ e possuem *weak hypercharge* Y igual a $-\frac{1}{2}$. Já R_A representa os léptons de quiralidade *right* que se transformam como singletos sob a ação dos grupos $SU_c(3)$ e $SU_L(2)$ e possuem *weak hypercharge* $Y = +\frac{1}{2}$. De maneira análoga, os quarks são organizados da seguinte forma:

$$Q_A = \begin{pmatrix} u_A \\ d_A \end{pmatrix}_L, \quad U_A = (u_A)_R, \quad D_A = (d_A)_R. \quad (3.5)$$

De maneira similar, Q_A descreve os quarks de quiralidade *left*, que se transformam como tripletos sob a ação do grupo $SU_c(3)$, como dubletos sob a ação do grupo $SU_L(2)$ e possuem *weak hypercharge* $Y = +\frac{1}{6}$. Já os quarks U_A e D_A possuem quiralidade *right* e se transformam como tripletos sob a ação do grupo $SU_c(3)$, como singletos sob a ação do grupo $SU_L(2)$, sendo dotados de *weak hypercharge* $Y = +\frac{2}{6}$ e $Y = -\frac{1}{3}$, respectivamente.

As quiralidades *left* e *right* são obtidas através da seguinte operação de projeção

$$\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi, \quad \psi_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \quad (3.6)$$

onde ψ é um espinor qualquer e podemos identificar o termo $\frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)$ como o operador projeção $P_{L,R}$, responsável por nos fornecer as contribuições *left* e *right* do espinor ψ , respectivamente. O índice “ A ” que aparece nos léptons e nos quarks assumem os valores 1, 2 e 3 e serve para rotular as gerações (ou os sabores) dos quarks e dos léptons que estamos interessados em descrever. As gerações são designadas a seguir: $l_A \equiv (e, \mu, \tau)$, $\nu_A \equiv (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$, $u_A \equiv (u, c, t)$ e $d_A \equiv (d, s, b)$. Vale ressaltar que no MPE apenas as propriedades das gerações das partículas se modificam, ou seja, nenhuma nova partícula é introduzida no MPE. Na figura 3.4 mostramos o diagrama das partículas elementares no MP e no MPE. Vemos claramente que a maneira como todas as partículas estão organizadas é a mesma, porém, as propriedades que elas irão manifestar serão diferentes.

A simetria de *gauge* do MP, como já mencionado, é $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$. Os bosons de *gauge*, associados aos geradores da álgebra do grupo em questão, são

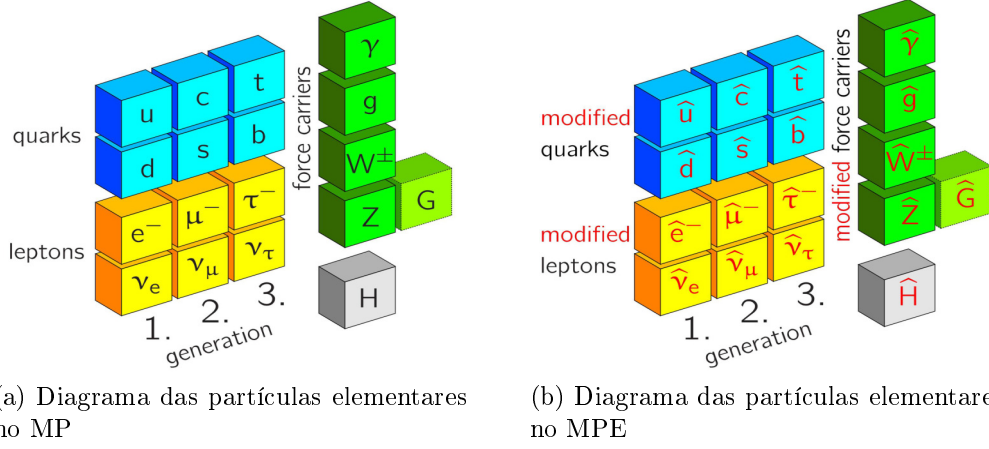


Figura 3.4: Diagrama das partículas elementares. A diferença fundamental entre estes dois diagramas reside no fato das partículas elementares no MPE apresentarem algumas propriedades diferentes, tais como relações de dispersão modificadas (designamos isso com um $\hat{}$ sobre as partículas).

mostrados a seguir:

$$\begin{array}{ccccc}
 SU_c(3) & \times & SU_L(2) & \times & U_Y(1) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 8 \ G_\mu^\alpha & & 3 \ W_\mu^a & & B_\mu \\
 \alpha = 1, \dots, 8 & & a = 1, \dots, 3 & &
 \end{array}$$

As oito partículas de spin 1, G_μ^α , associadas ao grupo de simetria $SU_c(3)$ são chamados de *gluons*, o subscrito “c” designa “cor,” sendo conhecidos por mediar a força forte. As três partículas de spin 1, W_μ^a , estão associadas ao grupo de simetria $SU_L(2)$, enquanto a partícula, também de spin 1, B_μ está associada ao grupo de simetria $U_Y(1)$. O subscrito “L” que aparece em $SU_L(2)$ significa que apenas os férmions de quiralidade *left* carregam este número quântico, enquanto que o subscrito “Y” em $U_Y(1)$ destina-se a distinguir o grupo de simetria associado ao número quântico designado por *weak hypercharge* do grupo de simetria associado a carga elétrica Q . O grupo associado à carga elétrica Q é designado por $U_{em}(1)$ e surge como grupo residual após a quebra espontânea da simetria $SU_L(2) \times U_Y(1)$. As quatro partículas de spin 1 que surgem após a quebra espontânea da simetria

$SU_L(2) \times U_Y(1)$ são as responsáveis por mediar as interações fracas, bosons $W^\pm$ e Z^0 , e as interações eletromagnéticas, fótons (A_μ). Os *field strengths*, relativos a cada um dos campos de *gauge* acima, são mostrados a seguir:

$$G_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu G_\nu^\alpha - \partial_\nu G_\mu^\alpha + g_3 f_{\beta\gamma}^\alpha G_\mu^\beta G_\nu^\gamma, \quad (3.7a)$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (3.7b)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (3.7c)$$

onde g_2 e g_3 são as constantes de acoplamento dos campo de *gauge*, $f_{\beta\gamma}^\alpha$ e ϵ_{abc} são as constantes de estrutura dos grupos de simetria $SU_c(3)$ e $SU_L(2)$, respectivamente (vide subseção 2.2.2). Por fim, porém não menos importante, denotamos o dubleto de Higgs no gauge unitário, da seguinte forma:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ r_\phi \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

O campo de Higgs após sofrer uma transformação de conjugação de carga será denotado por ϕ^c .

Com as notações e os conceitos apresentados anteriormente, podemos escrever explicitamente as densidades Lagrangeanas que descrevem cada um dos setores do MP, a saber:

$$\mathcal{L}_{\text{Lepton}}^{\text{MP}} = \frac{i}{2} \bar{L}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu L_A + \frac{i}{2} \bar{R}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu R_A, \quad (3.9a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Quark}}^{\text{MP}} = \frac{i}{2} \bar{Q}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu Q_A + \frac{i}{2} \bar{U}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu U_A + \frac{i}{2} \bar{D}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu D_A, \quad (3.9b)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{MP}} = -(G_L)_{AB} \bar{L}_A \phi R_B - (G_U)_{AB} \bar{Q}_A \phi^c U_B - (G_D)_{AB} \bar{Q}_A \phi D_B + \text{H.c.}, \quad (3.9c)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}}^{\text{MP}} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{3!} (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (3.9d)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}}^{\text{MP}} = -\frac{1}{2} \text{tr} (G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \text{tr} (W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \quad (3.9e)$$

onde as derivadas covariantes $\overleftrightarrow{D}_\mu$ possuem as seguintes formas:

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2}g_2 W_\mu^a \tau_a + ig_1 Y_{\text{Lepton-L}} B_\mu \leftrightarrow \text{Léptons de quiralidade } left, \quad (3.10a)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 Y_{\text{Lepton-R}} B_\mu \leftrightarrow \text{Léptons de quiralidade } right, \quad (3.10b)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2}g_2 W_\mu^a \tau_a + \frac{i}{2}g_3 G_\mu^\alpha \lambda_\alpha + ig_1 Y_{\text{Quark-L}} B_\mu \leftrightarrow \text{Quarks de quiralidade } left, \quad (3.10c)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2}g_3 G_\mu^\alpha \lambda_\alpha + ig_1 Y_{\text{Quark-R}} B_\mu \leftrightarrow \text{Quarks de quiralidade } right, \quad (3.10d)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2}g_2 W_\mu^a \tau_a + ig_1 B_\mu \leftrightarrow \text{Campo escalar}. \quad (3.10e)$$

Os coeficientes $Y_{\text{Lepton-L,R}}$ e $Y_{\text{Quark-L,R}}$ designam as *weak hypercharge* para cada um dos campos em que a derivada covariante irá atuar. Os termos τ_a e λ_α são os geradores dos grupos de simetria $SU_L(2)$ e $SU_c(3)$, respectivamente, e podem ser vistos de maneira detalhada na subseção 2.2.2.

Uma vez apresentados os setores do MP em sua estrutura, passamos a apresentar os termos de LV em cada um dos setores. Os termos, contidos em $\delta\mathcal{L}_{LV}$, que modificam os léptons e os quarks são descritos a seguir:

$$\mathcal{L}_{\text{Lepton}}^{\text{CPT-par}} = \frac{i}{2} (c_L)_{\mu\nu AB} \bar{L}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu L_B + \frac{i}{2} (c_R)_{\mu\nu AB} \bar{R}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu R_B, \quad (3.11a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Lepton}}^{\text{CPT-impar}} = - (a_L)_{\mu AB} \bar{L}_A \gamma^\mu L_B - (a_L)_{\mu AB} \bar{R}_A \gamma^\mu R_B, \quad (3.11b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Quark}}^{\text{CPT-par}} = & \frac{i}{2} (c_Q)_{\mu\nu AB} \bar{Q}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu Q_B + \frac{i}{2} (c_U)_{\mu\nu AB} \bar{U}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu U_B \\ & + \frac{i}{2} (c_D)_{\mu\nu AB} \bar{D}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu D_B, \end{aligned} \quad (3.11c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Quark}}^{\text{CPT-impar}} = & \frac{i}{2} (a_Q)_{\mu AB} \bar{Q}_A \gamma^\mu Q_B + \frac{i}{2} (a_U)_{\mu AB} \bar{U}_A \gamma^\mu U_B \\ & + \frac{i}{2} (a_D)_{\mu AB} \bar{D}_A \gamma^\mu D_B, \end{aligned} \quad (3.11d)$$

onde os coeficientes $c_{\mu\nu}$ e a_μ devem ser hermitianos. Os coeficientes a_μ têm dimensão de massa 1, enquanto que os coeficientes $c_{\mu\nu}$ são adimensionais, contendo tanto uma parte simétrica quanto uma parte antissimétrica. Resaltamos ainda que os coeficientes $c_{\mu\nu}$ e a_μ , tanto no setor dos léptons quanto no setor dos quarks, podem acoplar partículas de sabores distintos; isso só ocorre quando $A \neq B$.

O acoplamento entre os férmions e o campo de Higgs é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{CPT-par}} = & -\frac{1}{2} (H_L)_{\mu\nu AB} \bar{L}_A \phi \sigma^{\mu\nu} R_B - \frac{1}{2} (H_U)_{\mu\nu AB} \bar{Q}_A \phi^c \sigma^{\mu\nu} U_B \\ & - \frac{1}{2} (H_D)_{\mu\nu AB} \bar{Q}_A \phi \sigma^{\mu\nu} D_B + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde os coeficientes $H_{\mu\nu}$ são adimensionais e antissimétricos. É possível perceber que a estrutura de *gauge* é respeitada, assim como no caso dos acoplamentos de Yukawa (3.9c), porém, estruturas não triviais das matrizes γ aparecem, neste caso, a estrutura não trivial é $\sigma^{\mu\nu}$.

As possíveis contribuições para o setor de Higgs que respeitam a simetria de *gauge* $SU_L(2) \times U_Y(1)$ são divididas em duas parcelas, a saber:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs}}^{\text{CPT-par}} = & \frac{1}{2} (k_{\phi\phi})^{\mu\nu} (D_\mu \phi)^\dagger D_\nu \phi + \text{H.c} - \frac{1}{2} (k_{\phi B})^{\mu\nu} \phi^\dagger \phi B_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2} (k_{\phi W})^{\mu\nu} \phi^\dagger W_{\mu\nu} \phi, \end{aligned} \quad (3.13a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}}^{\text{CPT-impar}} = i (k_\phi)^\mu \phi^\dagger D_\mu \phi + \text{H.c.} \quad (3.13b)$$

Na equação (3.13a), o coeficiente $k_{\phi\phi}$ é adimensional e pode ter uma parte simétrica real e uma parte antissimétrica imaginária. Já os coeficientes $k_{\phi B}$ e $k_{\phi W}$ são adimensionais, reais e antisimétricos. A constante k_ϕ presente na equação (3.13b) possui dimensão de massa 1 e pode ser um número complexo arbitrário.

Por fim, o setor de *gauge* $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ modificado pelos termos de violação de Lorentz são:

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}}^{\text{CPT-par}} = -\frac{1}{2} (k_G)_{\kappa\lambda\mu\nu} \text{tr} (G^{\kappa\lambda} G^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (k_W)_{\kappa\lambda\mu\nu} \text{tr} (W^{\kappa\lambda} W^{\mu\nu})$$

$$-\frac{1}{4}(k_B)_{\kappa\lambda\mu\nu}B^{\kappa\lambda}B^{\mu\nu}, \quad (3.14a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Gauge}}^{\text{CPT-impar}} &= \frac{1}{2}(k_3)_\kappa \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \text{tr} \left(G_\lambda G_{\mu\nu} + \frac{2}{3}ig_3 G_\lambda G_\mu G_\nu \right) \\ &+ \frac{1}{2}(k_2)_\kappa \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \text{tr} \left(W_\lambda W_{\mu\nu} + \frac{2}{3}ig_2 W_\lambda W_\mu W_\nu \right) \\ &+ \frac{1}{4}(k_1)_\kappa \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} B_\lambda B_{\mu\nu} + (k_0)_\kappa B^\kappa. \end{aligned} \quad (3.14b)$$

Os coeficientes $k_{G,W,B}$ são adimensionais e reais, além de possuírem as simetrias do tensor de Riemann e o duplo-traço nulo. A simetria do tensor de Riemann é requerida, pois como os *field strengths* são antissimétricos nos seus índices, então, $(k_{G,W,B})_{\kappa\lambda\mu\nu}$ deve ser antissimétrico nos pares de índices (κ, λ) e (μ, ν) . Como a troca dos pares $(\kappa, \lambda) \leftrightarrow (\mu, \nu)$ não pode alterar a estrutura da Lagrangeana, uma vez que o coeficiente de violação está acoplado ao bilinear do mesmo *field strengths*, então $(k_{G,W,B})_{\kappa\lambda\mu\nu}$ deve ser simétrico perante a troca $(\kappa, \lambda) \leftrightarrow (\mu, \nu)$. Estas semetrias coincidem com as simetrias do tensor de Riemann. Para entender por que requer duplo-traço nulo, vamos investigar o que ocorre com o termo $-\frac{1}{2}(k_B)_{\kappa\lambda\mu\nu}B^{\kappa\lambda}B^{\mu\nu}$, por exemplo. Decompondo o tensor $(k_B)_{\kappa\lambda\mu\nu}$, temos

$$-\frac{1}{4}(k_B)_{\kappa\lambda\mu\nu}B^{\kappa\lambda}B^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(k_B)_{\kappa\lambda\mu\nu}B^{\kappa\lambda}B^{\mu\nu} \Big|_{\lambda=\nu}^{\kappa=\mu} - \frac{1}{4}(k_B)_{\kappa\lambda\mu\nu}B^{\kappa\lambda}B^{\mu\nu} \Big|_{\lambda \neq \nu}^{\kappa \neq \mu}. \quad (3.15)$$

Se escolhermos a seguinte configuração para as componentes $(k_B)_{\kappa\lambda}^{\kappa\lambda}$,

$$(k_B)_{0101} = (k_B)_{0202} = (k_B)_{0303} = -(k_B)_{1212} = -(k_B)_{1313} = -(k_B)_{2323} \equiv (k_B)_{tr}, \quad (3.16)$$

podemos remover o duplo-traço do tensor $(k_B)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ da seguinte forma:

$$(k_{B,traceless})_{\kappa\lambda\mu\nu} = (k_B)_{\kappa\lambda\mu\nu} - \frac{(k_B)_{tr}}{16}\eta_{\kappa\mu}\eta_{\lambda\nu}, \quad (k_{B,traceless})_{\kappa\lambda\kappa\lambda} = 0. \quad (3.17)$$

Para esta escolha, a densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_B)_{\kappa\lambda\mu\nu}B^{\kappa\lambda}B^{\mu\nu},$$

assume a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\left((k_{B,traceless})_{\kappa\lambda\mu\nu} + \frac{(k_B)_{tr}}{16}\eta_{\kappa\mu}\eta_{\lambda\nu}\right)B^{\kappa\lambda}B^{\mu\nu}, \quad (3.18a)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{(k_B)_{tr}}{16}\right)B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_{B,traceless})_{\kappa\lambda\mu\nu}B^{\kappa\lambda}B^{\mu\nu}. \quad (3.18b)$$

Consequentemente, os termos que advêm do duplo-traço não geram contribuições relevantes (*fake LV terms*), uma vez que podem ser absorvidos a partir de uma redefinição nos campos $B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}$. Em vista disso, eliminamos-os requerendo que os tensores $k_{G,W,B}$ tenham duplo-traço nulo. Os coeficientes $k_{1,2,3}$ são reais e possuem dimensão de massa 1, enquanto que k_0 possui dimensão de massa 3.

Como nosso interesse reside no setor de férmions, faremos um estudo mais detalhado deste setor na próxima seção. Daremos ênfase à equação de Dirac livre para um único férmion, modificada por operadores que violam a simetria de Lorentz. Tais operadores são gerais, ou seja, possuem termos que estão presentes no MPE mínimo, bem como contribuições que advêm do MPE não-mínimo. Apresentaremos inicialmente o setor fermiônico mínimo, uma vez que as suas propriedades já foram extensamente estudadas na literatura. Iremos postergar a apresentação do setor não-mínimo do MPE para o capítulo 4, tendo em vista que lá é o cenário mais adequado para generalizações, pois obtemos todos os resultados de maneira generalizada.

3.2 O setor de férmions no MPE-mínimo

O setor fermiônico mínimo foi apresentado pela primeira vez no trabalho [17], nos quais D. Colladay e A. Kostelecký estudaram o comportamento da equação de Dirac sob influência de dois tipos de *backgrounds*: vetorial, a^μ , e pseudovetorial, b^μ . A partir deste estudo, pode-se introduzir acoplamentos das mais diversas naturezas, violando CPT ou não [18]. Os *backgrounds* são introduzidos na densidade Lagrangeana da teoria de Dirac através de uma quebra explícita da simetria de Lorentz, como já mencionado no início deste capítulo. Descreveremos, apenas por simplicidade, toda a teoria para um único férmion. O setor fermiônico no

MPE-mínimo é descrito pela seguinte densidade Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{\text{MPE-mínimo}} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - \bar{\psi} M \psi, \quad (3.19)$$

onde ψ é o espinor de Dirac e $\bar{\psi}$ seu conjugado. As equações de campo podem ser obtidas a partir da equação de Euler-Lagrange, ou seja,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0. \quad (3.20)$$

Substituindo (3.19) em (3.20), obtemos o seguinte resultado

$$(\Gamma^\mu i \partial_\mu - M) \psi = 0. \quad (3.21)$$

Os operadores Γ^μ e M podem ser decompostos de modo a manifestar suas propriedades sob transformações de Lorentz e CPT. Para que isso seja possível, precisamos reescrevê-los em termos dos covariantes bilineares. Assim, as interações possíveis que podem compor a densidade Lagrangeana (3.19) são:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + c^{\mu\nu} \gamma_\nu + d^{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\nu + e^\mu + i f^\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\mu\nu\kappa} \sigma_{\nu\kappa}, \quad (3.22a)$$

$$M = m_\psi + a^\nu \gamma_\nu + b^\nu \gamma_5 \gamma_\nu + \frac{1}{2} H^{\nu\kappa} \sigma_{\nu\kappa}, \quad (3.22b)$$

onde m_ψ é a massa do férmion e os coeficientes de violação $\{c^{\mu\nu}, d^{\mu\nu}, e^\mu, f^\mu, g^{\mu\nu\kappa}, a^\nu, b^\nu, H^{\nu\kappa}\}$ fazem o papel dos *background fields*. De acordo com a densidade Lagrangeana (3.19), os termos Γ^μ e M possuem as seguintes dimensões de massa

$$[\Gamma^\mu] = [\text{massa}]^0, \quad [M] = [\text{massa}]^1 \quad (3.23)$$

A tabela 3.1 mostra a classificação dos *background fields* no que tange as suas dimensões de massa.

Com as definições (3.22a) e (3.22b) acima, a equação de Dirac modificada (3.21)

$[c^{\mu\nu}] = [\text{massa}]^0$	$[a^\nu] = [\text{massa}]^1$
$[d^{\mu\nu}] = [\text{massa}]^0$	$[b^\nu] = [\text{massa}]^1$
$[H^{\nu\kappa}] = [\text{massa}]^1$	$[e^\mu] = [\text{massa}]^0$
$[g^{\mu\nu\kappa}] = [\text{massa}]^0$	$[f^\mu] = [\text{massa}]^0$

Tabela 3.1: Dimensão de massa dos *background fields*.

torna-se:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu i\partial_\mu \psi + c^{\nu\mu} \gamma_\nu i\partial_\mu \psi + d^{\nu\mu} \gamma_5 \gamma_\nu i\partial_\mu \psi + e^\mu i\partial_\mu \psi + i f^\mu \gamma_5 i\partial_\mu \psi + \frac{1}{2} g^{\nu\kappa\mu} \sigma_{\nu\kappa} i\partial_\mu \psi \\ - m_\psi \psi + a^\nu \gamma_\nu \psi + b^\nu \gamma_5 \gamma_\nu \psi + \frac{1}{2} H^{\nu\kappa} \sigma_{\nu\kappa} \psi = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sob transformações CPT, os coeficientes acima podem ser classificados facilmente invocando as “regras CPT” dispostas no capítulo 2 e os resultados apresentados na tabela 2.5. Usando-as, obtemos os resultados mostrados na tabela 3.2.

Coeficientes e seus respectivos bilineares sob ação da transformação CPT	Classificação CPT
$(\mathcal{CPT}) c^{\nu\mu} \gamma_\nu i\partial_\mu (\mathcal{CPT})^{-1}, \quad (\mathcal{CPT}) \gamma_\nu i\partial_\mu (\mathcal{CPT})^{-1} = \gamma_\nu i\partial_\mu$	$(\mathcal{CPT}) c^{\nu\mu} (\mathcal{CPT})^{-1} \mapsto \text{CPT-par}$
$(\mathcal{CPT}) d^{\nu\mu} \gamma_5 \gamma_\nu i\partial_\mu (\mathcal{CPT})^{-1}, \quad (\mathcal{CPT}) \gamma_5 \gamma_\nu i\partial_\mu (\mathcal{CPT})^{-1} = \gamma_5 \gamma_\nu i\partial_\mu$	$(\mathcal{CPT}) d^{\nu\mu} (\mathcal{CPT})^{-1} \mapsto \text{CPT-par}$
$(\mathcal{CPT}) e^\mu i\partial_\mu (\mathcal{CPT})^{-1}, \quad (\mathcal{CPT}) i\partial_\mu (\mathcal{CPT})^{-1} = -i\partial_\mu$	$(\mathcal{CPT}) e^\mu (\mathcal{CPT})^{-1} \mapsto \text{CPT-ímpar}$
$(\mathcal{CPT}) f^\mu \gamma_5 i\partial_\mu (\mathcal{CPT})^{-1}, \quad (\mathcal{CPT}) \gamma_5 i\partial_\mu (\mathcal{CPT})^{-1} = -\gamma_5 i\partial_\mu$	$(\mathcal{CPT}) f^\mu (\mathcal{CPT})^{-1} \mapsto \text{CPT-ímpar}$
$(\mathcal{CPT}) g^{\nu\kappa\mu} \sigma_{\nu\kappa} i\partial_\mu (\mathcal{CPT})^{-1}, \quad (\mathcal{CPT}) \sigma_{\nu\kappa} i\partial_\mu (\mathcal{CPT})^{-1} = -\sigma_{\nu\kappa} i\partial_\mu$	$(\mathcal{CPT}) g^{\nu\kappa\mu} (\mathcal{CPT})^{-1} \mapsto \text{CPT-ímpar}$
$(\mathcal{CPT}) a^\nu \gamma_\nu (\mathcal{CPT})^{-1}, \quad (\mathcal{CPT}) \gamma_\nu (\mathcal{CPT})^{-1} = -\gamma_\nu$	$(\mathcal{CPT}) a^\nu (\mathcal{CPT})^{-1} \mapsto \text{CPT-ímpar}$
$(\mathcal{CPT}) b^\nu \gamma_5 \gamma_\nu (\mathcal{CPT})^{-1}, \quad (\mathcal{CPT}) \gamma_5 \gamma_\nu (\mathcal{CPT})^{-1} = -\gamma_5 \gamma_\nu$	$(\mathcal{CPT}) b^\nu (\mathcal{CPT})^{-1} \mapsto \text{CPT-ímpar}$
$(\mathcal{CPT}) H^{\nu\kappa} \sigma_{\nu\kappa} (\mathcal{CPT})^{-1}, \quad (\mathcal{CPT}) \sigma_{\nu\kappa} (\mathcal{CPT})^{-1} = \sigma_{\nu\kappa}$	$(\mathcal{CPT}) H^{\nu\kappa} (\mathcal{CPT})^{-1} \mapsto \text{CPT-par}$

Tabela 3.2: Classificação dos coeficientes mínimos sob a ação da transformação CPT.

Como os coeficientes $\{c^{\mu\nu}, d^{\mu\nu}, e^\mu, f^\mu, g^{\mu\nu\kappa}, a^\nu, b^\nu, H^{\nu\kappa}\}$ são campos de fundo fixos, então suas classificações sob a transformação CPT depende exclusivamente

de como o seu bilinear se transforma sob CPT . Assim, se o bilinear correspondente for CPT-ímpar, então o campo de fundo deve ser CPT-ímpar.

O setor mínimo dos férmions foi extensamente estudado nos últimos anos. Existem inúmeros artigos que reportam os efeitos advindos das modificações apresentadas acima. Por exemplo, a estabilidade e causalidade são conceitos estreitamente relacionados com a simetria de Lorentz. No trabalho desenvolvido em [50], os autores investigaram como a estabilidade e a causalidade se comportam em teorias que violam CPT e Lorentz. O artigo aborda, por exemplo, sob quais circunstâncias o setor fermiônico mínimo do MPE preserva a estabilidade e a causalidade.

Além destes conceitos fundamentais, extensas aplicações no setor fermiônico mínimo foram feitas de modo a tentar restringir os valores dos *backgrounds*. Na ref. [51] os autores investigaram a influência da violação de CPT e de Lorentz na teoria de Dirac. Neste trabalho, a equação de Dirac foi modificada por acoplamentos do tipo a^ν e b^ν . Constatou-se que, no limite não-relativístico, o acoplamento vetorial, a^ν , não afeta os níveis de energia do átomo de hidrogênio nem gera efeitos significativos. A não detecção de efeitos advindos deste tipo de acoplamento é esperado, uma vez que este *background* pode ser absorvido por uma redefinição de campos do tipo $\psi \mapsto \psi e^{ix_\mu a^\mu}$. O acoplamento pseudovetorial, b^ν , por outro lado, mostrou-se promissor, já que contribuições para o espectro de energia foi detectado. Estes resultados são úteis quando estamos interessados em restringir os valores destes coeficientes.

Muitos outros trabalhos destacam-se no intuito de restringir os valores possíveis dos *background fields* graças aos valores experimentais bem estabelecidos. Sinais de violação de CPT e de Lorentz na escala de Planck podem se manifestar, por exemplo, no espectro do hidrogênio e anti-hidrogênio. Assim, transições entre os estados $1S - 2S$ e transições hiperfinas podem ajudar a restringir os valores dos *background field*. O estudo sistemático e as implicações destas transições foi estudada em [71]. Experiências comparando os momentos magnéticos anômalos do elétron e do pósitron são bastante precisas atualmente. Devido a essa precisão, é possível restringir o valor dos *background fields*. Os autores da ref. [72] conseguiram impor valores bem restritivos aos *background fields*. A grande precisão nos experimentos envolvendo muons também são sensíveis a escala de Planck. Graças aos vastos dados existentes sobre a estrutura hiperfina do estado fundamental do

muôn e seu momento magnético anômalo, os autores da ref. [73] obtiveram bons limites para os *background fields*. Experiências usando amostras macroscópicas de matéria spin-polarizada oferecem excepcional sensibilidade à violação de CPT e Lorentz no setor de elétrons, graças a essa sensibilidade estudos dessa natureza foram reportados em [74].

Em virtude desta vasta lista de referências, o setor fermiônico mínimo mostrou-se de grande interesse. Porém, devido ao MPE-mínimo ser uma teoria efetiva, presuppõe-se que este setor é válido apenas em um intervalo de energia. Portanto, se tentarmos usa-lo fora deste intervalo, os resultados não conseguirão descrever com precisão a fenomenologia observada. Uma maneira de sondar novos efeitos advindos da escala de Planck, em intervalos de energias maiores, só é possível se introduzirmos operadores não-renormalizáveis. É somente em escalas de energias acima do MPE-mínimo que esses operadores tornam-se relevantes. A fim de poder sondar efeitos que advêm de escalas de energias cada vez maiores, estudaremos, no próximo capítulo, a maneira natural para se generalizar o setor de férmions mínimo para o setor não-mínimo.

Capítulo 4

Equação de Dirac modificada: Um estudo preliminar

Finalizamos o capítulo 3 apresentado as principais propriedades do setor fermiônico mínimo do MPE. Em posse de todo esse arcabouço, estamos preparados para apresentar uma generalização deste setor. O setor dos férmions generalizado é conhecido como setor fermiônico não-mínimo. Esta generalização é conhecida por contemplar todos os termos não-renormalizáveis e, por isso, mostra-se relevante em escalas de energias mais altas. Após apresentar a versão não-mínima do setor fermiônico, calcularemos as equações de campo referente a densidade Lagrangeana generalizada e, em seguida, calcularemos a relação de dispersão exata. Para finalizar, mostraremos uma nova abordagem para resolver a equação de Dirac. Essa nova metodologia será de grande utilidade na hora de calcular e generalizar as soluções espinoriais, bem como os limites não relativísticos para os operadores contidos em $\hat{\mathcal{Q}}$.

4.1 O setor não-mínimo dos férmions

Consideraremos agora a ação efetiva que descreve o campo de Dirac para um único férmion na presença de operadores que violam a simetria de Lorentz e que possuem dimensão de massa arbitrária. A teoria efetiva que descreve o comportamento dos férmions na presença de tais operadores pode ser obtida através da

prescrição detalhada na seção 3.2 com uma única ressalva: os coeficientes tornam-se operadores. Portanto, a maneira como eles se acoplarão aos campos físicos é ligeiramente diferente e será mostrada mais adiante. Manteremos nossa atenção apenas a termos quadráticos nos campos, a fim de obter uma teoria linear. Assim, para um único férmion ψ com massa m_ψ a ação $\mathcal{S}$ é dada por

$$S = \int \mathcal{L} \, d^4x, \quad (4.1)$$

onde $\mathcal{L}$ possui a seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \left(\gamma^\mu i \partial_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}} \right) \psi + \text{H.c.} \quad (4.2)$$

Aqui ψ é o espinor de Dirac e $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ o seu conjugado. Os dois primeiros termos correspondem aos termos usuais presentes na teoria de Dirac. Ademais, γ^μ são as matrizes gamma padrão que obedecem à álgebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \mathbb{I}_4$, em que $\eta_{\mu\nu}$ é métrica de Minkowski cuja assinatura é $(+, -, -, -)$. A matriz identidade foi representada por $\mathbb{I}_4$. O operador $\hat{\mathcal{Q}}$ apresentado na equação (4.2) contém todas as contribuições advindas da violação da simetria de Lorentz. Os termos presentes em $\hat{\mathcal{Q}}$ podem ser tratados como contribuições perturbativas quando necessário, uma vez que estamos interessados em avaliar pequenos desvios da situação usual. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\hat{\mathcal{Q}}$ obedece à condição de hermiticidade, ou seja, $\hat{\mathcal{Q}} = \gamma^0 \hat{\mathcal{Q}}^\dagger \gamma^0$. No que concerne a sua estrutura, estamos interessados em descrever o setor não-mínimo do MPE, portanto, o operador $\hat{\mathcal{Q}}$ pode ser visto como uma série na qual seus coeficientes estão acoplados às derivadas, $i\partial_\mu$, no espaço das coordenadas, ou acoplados aos momentos, $p_\mu = i\partial_\mu$, no espaço dos momentos.

Os efeitos da violação da simetria de Lorentz podem surgir através do operador $\hat{\mathcal{Q}}$ de duas maneiras: espontaneamente ou explicitamente. A quebra de simetria espontânea ocorre quando os campos tensoriais adquirem um valor esperado não nulo no vácuo [70] através de algum mecanismo. Este valor esperado faz o papel dos campos tensoriais de fundo presentes no operador $\hat{\mathcal{Q}}$. Por outro lado, a violação da simetria de Lorentz explícita envolve campos tensoriais de fundo que são introduzidos à mão na estrutura Lagrangeana. Em ambos os casos, o operador

$\hat{\mathcal{Q}}$ pode depender das coordenadas do espaço-tempo. Porém, a fim de preservar a conservação do tensor energia-momento, iremos requerer que o operador $\hat{\mathcal{Q}}$ não dependa das coordenadas do espaço-tempo, ou seja, a ação (4.1) é invariante sob uma translação no espaço-tempo.

Após todas as considerações acima, estamos aptos a definir uma forma geral para o operador $\hat{\mathcal{Q}}$. Inicialmente, iremos decompô-lo em termos dos 16 covariantes bilineares, que são representados por $\{\mathbb{I}_4, \gamma_\mu, \gamma_5, \gamma_5 \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}\}$. Isso nos permitirá caracterizar melhor os coeficientes, bem como o seu conteúdo de spin. Prosseguindo como mencionado, obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{Q}} &= \sum_I \hat{\mathcal{Q}}^I \gamma_I, \\ &= \hat{\mathcal{S}} + i\hat{\mathcal{P}}\gamma_5 + \hat{\mathcal{V}}^\mu \gamma_\mu + \hat{\mathcal{A}}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Os 16 operadores $\hat{\mathcal{Q}}^I = \{\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{V}}^\mu, \hat{\mathcal{A}}^\mu, \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\}$ são funções das derivadas $i\partial_\mu$ e possuem dimensão de massa 1. A matriz $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ é a matrix quirial e $\sigma_{\mu\nu}$ é o comutador entre duas matrizes gamma, a saber: $\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. No espaço dos momentos, cada operador $\hat{\mathcal{Q}}^I$ pode ser visto como uma série,

$$\hat{\mathcal{Q}}^I = \sum_{d=3}^{\infty} \hat{\mathcal{Q}}^{I(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \ldots p_{\alpha_{d-3}}. \quad (4.4)$$

No espaço das coordenadas, o operador acima assume a seguinte forma

$$\hat{\mathcal{Q}}^I = \sum_{d=3}^{\infty} \hat{\mathcal{Q}}^{I(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}} (i\partial_{\alpha_1})(i\partial_{\alpha_2}) \ldots (i\partial_{\alpha_{d-3}}). \quad (4.5)$$

Todos os coeficientes $\hat{\mathcal{Q}}^{I(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$ são independentes das coordenadas do espaço-tempo, têm dimensão de massa $(4-d)$, são reais pelo critério de hermiticidade previamente estabelecido e possuem $(d-3)$ derivadas adicionais em sua estrutura – o que caracteriza operadores de altas ordens.

Tendo em vista que devemos recuperar o MPE-mínimo apresentado na seção 3.2, é conveniente decompor o operador $\hat{\mathcal{Q}}$ de uma maneira mais sugestiva de modo a facilitar esta identificação. Iniciaremos reescrevendo o operador de Dirac

modificado da seguinte forma:

$$\gamma^\mu p_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}} = \hat{\Gamma}^\mu p_\mu - \hat{M}, \quad (4.6)$$

onde $\hat{\Gamma}^\mu$ e $\hat{M}$ são operadores de dimensão de massa zero e um, respectivamente. Reescrevendo os operadores $\hat{\Gamma}^\mu$, $\hat{M}$ e explicitando a natureza dos seus constituintes no que diz respeito à forma como se acoplam aos campos físicos, obtemos

$$\hat{\Gamma}^\mu = \gamma^\mu + \hat{c}^{\nu\mu} \gamma_\nu + \hat{d}^{\nu\mu} \gamma_5 \gamma_\nu + \hat{e}^\mu + i \hat{f}^\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} \hat{g}^{\kappa\lambda\mu} \sigma_{\kappa\lambda}, \quad (4.7a)$$

$$\hat{M} = m_\psi + \hat{m} + i \hat{m}_5 \gamma_5 + \hat{a}^\mu \gamma_\mu + \hat{b}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{H}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}. \quad (4.7b)$$

Para poder classificar o conjunto de operadores $\{\hat{c}^{\mu\nu}, \hat{d}^{\mu\nu}, \hat{e}^\mu, \hat{f}^\mu, \hat{g}^{\kappa\lambda\mu}, \hat{m}, \hat{m}_5, \hat{a}^\mu, \hat{b}^\mu, \hat{H}^{\mu\nu}\}$ de acordo com as “regras CPT” definidas na seção 2.1, precisamos conhecer a estrutura “interna” destes operadores. A seguir, escrevemos a forma explícita destes operadores no espaço dos momentos contraídos com seus respectivos covariantes bilineares

$$\hat{c}^{\nu\mu} \gamma_\nu p_\mu = \left(\sum_{d \geq 4, \text{ par}} c^{(d)\nu\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-4}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-4}} \right) \gamma_\nu p_\mu, \quad (4.8a)$$

$$\hat{d}^{\nu\mu} \gamma_5 \gamma_\nu p_\mu = \left(\sum_{d \geq 4, \text{ par}} d^{(d)\nu\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-4}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-4}} \right) \gamma_5 \gamma_\nu p_\mu, \quad (4.8b)$$

$$\hat{e}^\mu p_\mu = \left(\sum_{d \geq 4, \text{ par}} e^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-4}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-4}} \right) p_\mu, \quad (4.8c)$$

$$\hat{f}^\mu \gamma_5 p_\mu = \left(\sum_{d \geq 4, \text{ par}} f^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-4}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-4}} \right) \gamma_5 p_\mu, \quad (4.8d)$$

$$\hat{g}^{\kappa\lambda\mu} \sigma_{\kappa\lambda} p_\mu = \left(\sum_{d \geq 4, \text{ par}} g^{(d)\kappa\lambda\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-4}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-4}} \right) \sigma_{\kappa\lambda} p_\mu, \quad (4.8e)$$

$$\hat{m} = \sum_{d \geq 5, \text{ ímpar}} m^{(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (4.8f)$$

$$\hat{m}_5 \gamma_5 = \left(\sum_{d \geq 5, \text{ ímpar}} m_5^{(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-3}} \right) \gamma_5, \quad (4.8g)$$

$$\hat{a}^\mu \gamma_\mu = \left(\sum_{d \geq 3, \text{ ímpar}} a^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-3}} \right) \gamma_\mu, \quad (4.8h)$$

$$\hat{b}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu = \left(\sum_{d \geq 3, \text{ ímpar}} b^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-3}} \right) \gamma_5 \gamma_\mu \quad (4.8i)$$

$$\hat{H}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = \left(\sum_{d \geq 3, \text{ ímpar}} H^{(d)\mu\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-3}} \right) \sigma_{\mu\nu}, \quad (4.8j)$$

onde “ $d \geq 4$, par”, por exemplo, indica que a soma inicia-se em 4 e par indica que a soma só contém os termos de dimensão d par. Os operadores não-mínimos mostrados nas equações (4.8a–4.8j) são construídos de modo a preservar o mesmo comportamento sob transformações CPT dos seus correspondentes mínimos. Isso é requerido para que a correspondência MPE – mínimo $\longleftrightarrow$ MPE – não – mínimo realmente se estabeleça. Por exemplo, o coeficiente $c^{\mu\nu}$ é CPT-par, portanto, sua versão não-mínima, $\hat{c}^{\mu\nu}$, deve transforma-se da mesma forma. Para poder descobrir como os operadores $\{\hat{c}^{\mu\nu}, \hat{d}^{\mu\nu}, \hat{e}^\mu, \hat{f}^\mu, \hat{g}^{\kappa\lambda\mu}, \hat{m}, \hat{m}_5, \hat{a}^\mu, \hat{b}^\mu, \hat{H}^{\mu\nu}\}$ se classificam sob CPT, precisamos invocar agora as “regras CPT” já estabelecidas. Avaliaremos os coeficientes $\hat{c}^{\mu\nu}$ e $\hat{b}^\mu$ para exemplificar a aplicação das “regras CPT”. Iniciamos avaliando $\hat{c}^{\mu\nu}$, a saber:

$$\begin{aligned} (\mathcal{CPT}) \hat{c}^{\nu\mu} \gamma_\nu p_\mu (\mathcal{CPT})^{-1} &= (\mathcal{CPT}) \left(\sum_{d \geq 4, \text{ par}} c^{(d)\nu\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-4}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-4}} \right) \\ &\quad \times \gamma_\nu p_\mu (\mathcal{CPT})^{-1}, \end{aligned} \quad (4.9a)$$

$$(\mathcal{CPT}) \hat{c}^{\nu\mu} \gamma_\nu p_\mu (\mathcal{CPT})^{-1} = (\mathcal{CPT}) \left(\sum_{d \geq 4, \text{ par}} c^{(d)\nu\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-4}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-4}} \right) (\mathcal{CPT})^{-1}$$

$$\times (\mathcal{CPT}) \gamma_\nu (\mathcal{CPT})^{-1} (\mathcal{CPT}) p_\mu (\mathcal{CPT})^{-1}. \quad (4.9b)$$

Os termos entre parênteses contêm um número par de momentos p_α , portanto, ele não contribui com nenhum sinal negativo. Por outro lado, $(\mathcal{CPT}) \gamma_\nu (\mathcal{CPT})^{-1} = -\gamma_\nu$ e $(\mathcal{CPT}) p_\mu (\mathcal{CPT})^{-1} = -p_\mu$, portanto:

$$(\mathcal{CPT}) \hat{c}^{\nu\mu} \gamma_\nu p_\mu (\mathcal{CPT})^{-1} = \hat{c}^{\nu\mu} \gamma_\nu p_\mu, \quad (4.10)$$

levando à conclusão de que esse termo é CPT-par. Avaliemos agora o operador $\hat{b}^\mu$, a saber,

$$\begin{aligned} (\mathcal{CPT}) \hat{b}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu (\mathcal{CPT})^{-1} &= (\mathcal{CPT}) \left(\sum_{d \geq 3, \text{ ímpar}} b^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-3}} \right) \\ &\times \gamma_5 \gamma_\mu (\mathcal{CPT})^{-1}, \end{aligned} \quad (4.11a)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{CPT}) \hat{b}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu (\mathcal{CPT})^{-1} &= (\mathcal{CPT}) \left(\sum_{d \geq 3, \text{ ímpar}} b^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-3}} \right) (\mathcal{CPT})^{-1} \\ &\times (\mathcal{CPT}) \gamma_5 \gamma_\mu (\mathcal{CPT})^{-1}, \end{aligned} \quad (4.11b)$$

o termo entre parêntese contém um número par de momentos, portanto, ele não contribui com nenhum sinal negativo. Neste caso, $(\mathcal{CPT}) \gamma_5 \gamma_\mu (\mathcal{CPT})^{-1} = -\gamma_5 \gamma_\mu$, portanto,

$$(\mathcal{CPT}) \hat{b}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu (\mathcal{CPT})^{-1} = -\hat{b}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu, \quad (4.12)$$

esse termo é CPT-ímpar. Prosseguindo dessa maneira, é possível classificar todos os operadores. De maneira geral, os operadores não-mínimos se classificam da seguinte forma: os operadores $\hat{c}^{\mu\nu}$ e $\hat{d}^{\mu\nu}$ são CPT – par e adimensionais, enquanto $\hat{e}^\mu$, $\hat{f}^\mu$ e $\hat{g}^{\kappa\lambda\mu}$ são CPT-ímpar e também são adimensionais. Os operadores $\hat{m}$, $\hat{m}_5$ e $\hat{H}^{\mu\nu}$ são CPT – par e possuem dimensão de massa 1, ao passo que $\hat{a}^\mu$ e $\hat{b}^\mu$ são CPT-ímpar e possuem dimensão de massa 1. É interessante notar que os operadores $\hat{m}$ e $\hat{m}_5$ possuem apenas altas derivadas em sua estrutura, portanto, são não renormalizáveis e não possuem análogos no MPE-mínimo. Uma olhada rápida na seção 3.2 e constatamos que, com exceção dos dois últimos operadores

mencionados, todos os outros coeficientes possuem seus análogos no MPE-mínimo. O coeficiente $\hat{m}_5$ pode ser absorvido nos campos físicos por meio de uma transformação quirial [22]. No entanto, ele está presente na equação (4.7b) apenas por completeza.

Na equação (4.6) o operador $\hat{\Gamma}^\mu$ está contraído com o momento p_μ . Tendo em vista que o operador $\hat{\Gamma}^\mu$ é dado por (4.7a), então os operadores $\hat{c}^{\nu\mu}$, $\hat{d}^{\nu\mu}$, $\hat{e}^\mu$, $\hat{f}^\mu$ e $\hat{g}^{\kappa\lambda\mu}$ também estão. Isso nos permite introduzir uma nova notação para os operadores acima citados, a saber:

$$\begin{aligned}\hat{c}^\nu &\equiv \hat{c}^{\nu\mu}p_\mu, & \hat{d}^\nu &\equiv \hat{d}^{\nu\mu}p_\mu, & \hat{e} &\equiv \hat{e}^\mu p_\mu \\ \hat{f} &\equiv \hat{f}^\mu p_\mu, & \hat{g}^{\kappa\lambda} &\equiv \hat{g}^{\kappa\lambda\mu}p_\mu.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Com a introdução desta notação, fica claro o mapeamento entre os coeficientes presentes em (4.7a) e (4.7b) e aqueles no operador $\hat{\mathcal{Q}}$. Este mapeamento é mostrado a seguir,

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^\mu p_\mu - \hat{M} &= \gamma^\mu p_\mu - m_\psi + (\hat{c}^\mu - \hat{a}^\mu) \gamma_\mu + (\hat{d}^\mu - \hat{b}^\mu) \gamma_5 \gamma_\mu \\ &+ (\hat{e} - \hat{m}) + i (\hat{f} - \hat{m}_5) \gamma_5 + \frac{1}{2} (\hat{g}^{\mu\nu} - \hat{H}^{\mu\nu}) \sigma_{\mu\nu},\end{aligned}\tag{4.14}$$

comparando a equação acima com o operador de Dirac modificado em função dos operadores que compõem $\hat{\mathcal{Q}}$, equação (4.3), ou seja,

$$\hat{\Gamma}^\mu p_\mu - \hat{M} = \gamma^\mu p_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{S}} + i\hat{\mathcal{P}}\gamma_5 + \hat{\mathcal{V}}^\mu \gamma_\mu + \hat{\mathcal{A}}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu},\tag{4.15}$$

somos levados às seguintes identificações,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{S}} &= \hat{e} - \hat{m}, & \hat{\mathcal{P}} &= \hat{f} - \hat{m}_5, & \hat{\mathcal{V}}^\mu &= \hat{c}^\mu - \hat{a}^\mu, \\ \hat{\mathcal{A}}^\mu &= \hat{d}^\mu - \hat{b}^\mu, & \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} &= \hat{g}^{\mu\nu} - \hat{H}^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

A identificação acima é apenas uma mera conveniência, que será explorada de maneira mais detalhada no capítulo 5. A classificação para os 10 operadores sob transformações CPT, bem como sob transformações de Lorentz, são mostradas de maneira geral na tabela 4.1.

Operador	Tipo	d	CPT	Coeficiente
$\hat{m}$	Escalar	Ímpar ≥ 5	Par	$m^{(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{m}_5$	Pseudoescalar	Ímpar ≥ 5	Par	$m_5^{(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{a}^\mu$	Vetor	Ímpar ≥ 3	Ímpar	$a^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{b}^\mu$	Pseudovetor	Ímpar ≥ 3	Ímpar	$b^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{c}^\mu$	Vetor	Par ≥ 4	Par	$c^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{d}^\mu$	Pseudovetor	Par ≥ 4	Par	$d^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{e}$	Escalar	Par ≥ 4	Ímpar	$e^{(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{f}$	Pseudoescalar	Par ≥ 4	Ímpar	$f^{(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{g}^{\mu\nu}$	Tensor	Par ≥ 4	Ímpar	$g^{(d)\mu\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{H}^{\mu\nu}$	Tensor	Ímpar ≥ 3	Par	$H^{(d)\mu\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$

Tabela 4.1: Classificação dos 10 operadores contidos em (4.3) sob transformações CPT e transformações de Lorentz [22].

Os operadores representados por $\hat{d}^\mu$, $\hat{b}^\mu$, $\hat{H}^{\mu\nu}$ e $\hat{g}^{\mu\nu}$ são conhecidos por quebrarem a degenerescência de spin, ou seja, as propriedades das partículas passam a depender da direção da projeção do spin ao longo da direção do eixo de quantização. Assim, em geral, haverá uma relação de dispersão para cada espinor. A explicação para a classificação destes operadores como tal será apresentada de maneira mais clara na subseção 4.3.1. Esses coeficientes serão estudados de maneira mais detalhada no capítulo 5, pois são neles que residem o nosso interesse.

4.2 Equações de campo

As equações de campo são de grande interesse, já que é através delas que obtemos informações a respeito da dinâmica dos campos. A densidade Lagrangeana que nos permitirá obter as equações para o campo de Dirac modificado é mostrado a seguir¹,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(\frac{1}{2} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}} \right) \psi. \quad (4.17)$$

¹Abaixo mostramos alguns passos necessários para a obtenção da equação 4.17.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \left(\gamma^\mu i \partial_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}} \right) \psi + H.c.,$$

Para obtermos as equações de movimento a partir da equação (4.17), precisamos fazer uso das equações de Euler-Lagrange. Porém, ao observar a estrutura do operador $\hat{\mathcal{Q}}$, equação (4.4), vemos que será necessário fazer uso das equações de Euler-Lagrange generalizadas. Tal generalização é dada em [75] e é reproduzida aqui, a saber:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) + \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \psi)} \right) - \\ & \dots + (-1)^n \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \psi)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

O operador $\hat{\mathcal{Q}}$, no espaço das coordenadas pode ser obtido através da seguinte transformação: $p_\mu \mapsto i\partial_\mu$. Por intermédio deste mapeamento, obtemos

$$\hat{\mathcal{Q}}^I = \sum_{d=3}^{\infty} \hat{\mathcal{Q}}^{I(d)\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{d-3}} i\partial_{\alpha_1} i\partial_{\alpha_2} \dots i\partial_{\alpha_{d-3}}.$$

Fazendo uso da equação generalizada (4.18) juntamente com a forma explícita do operador $\hat{\mathcal{Q}}$ acima, fica evidente que a equação de Dirac modificada será:

$$\left(\gamma^\mu i\partial_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}} \right) \psi = 0. \quad (4.19)$$

Através da equação (4.19) ² poderemos calcular a relação de dispersão, os espinores e, a partir desses resultados, poderemos fornecer informações acerca da dinâmica dos campos em questão. Na próxima seção forneceremos a relação de dispersão

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \left(\gamma^\mu i\partial_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}} \right) \psi + \frac{1}{2} \psi^\dagger \left(-\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 i\overleftarrow{\partial}_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}}^\dagger \right) \gamma^0 \psi,$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \left(\gamma^\mu i\partial_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}} \right) \psi + \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma^0 \left(-\gamma^\mu i\overleftarrow{\partial}_\mu - m_\psi + \gamma^0 \hat{\mathcal{Q}}^\dagger \gamma^0 \right) \psi,$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(\gamma^\mu \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}} \right) \psi,$$

onde nos valem da hermiticidade do operador $\hat{\mathcal{Q}}$ e da notação $A \overleftrightarrow{\partial}_\mu B = A \partial_\mu B - (\partial_\mu A) B$.

Por meio do método da indução, podemos mostrar que cada um dos termos presentes na equação de Euler-Lagrange generalizada 4.18 quando aplicado ao operador $\hat{\mathcal{Q}}$ tem como resultado líquido gerar um dos termos da série 4.4, cuja dimensão é controlada pelo número de derivadas

associada á equação de Dirac modificada (4.19), assim como suas propriedades.

4.3 Relação de dispersão exata

Como vimos na seção anterior, a densidade Lagrangeana (4.17) nos fornece a equação de Dirac modificada (4.19). Reescrevendo esta última equação no espaço dos momentos, obtemos:

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}}\right) \psi = 0, \quad (4.20)$$

onde a expansão do operador $\hat{\mathcal{Q}}$ no espaço dos momentos é dada pela equação (4.4). Sabemos que a relação de dispersão exata para soluções tipo onda plana no vácuo pode ser obtida impondo que o determinante do operador de Dirac modificado se anule, ou seja,

$$\det \left(\gamma^\mu p_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}}\right) = 0. \quad (4.21)$$

A condição acima reflete o fato de que não estamos interessados em soluções triviais para os espinores. Além disso, determina como serão os modos de propagação dos pacotes de onda dos espinores na presença dos operadores de dimensão arbitrária que violam a simetria de Lorentz. Para determinar a forma explícita da relação de dispersão, seguiremos a metodologia apresentada em [22].

Antes de calcular explicitamente o determinante apresentado na equação (4.21), reescreveremos o operador de Dirac modificado. Para tanto, iremos proceder ado-

presentes na equação generalizada 4.18. A seguir, mostramos alguns resultados

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \psi)} \bar{\psi} \hat{\mathcal{Q}} \psi \right) &= \partial_\mu \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \psi)} \bar{\psi} \gamma_I \hat{\mathcal{Q}}^{I(4)\alpha_1} i \partial_{\alpha_1} \psi \right) = \gamma_I \hat{\mathcal{Q}}^{I(4)\mu} i \partial_\mu \bar{\psi}, \\ \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \psi)} \bar{\psi} \hat{\mathcal{Q}} \psi \right) &= \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \psi)} \bar{\psi} \gamma_I \hat{\mathcal{Q}}^{I(5)\alpha_1 \alpha_2} i \partial_{\alpha_1} i \partial_{\alpha_2} \psi \right) = \gamma_I \hat{\mathcal{Q}}^{I(5)\mu\nu} i \partial_\mu i \partial_\nu \bar{\psi}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

onde γ_I representa os 16 covariantes bilineares.

Portanto, ao juntar todas as parcelas iremos reconstituir o operador $\hat{\mathcal{Q}}$.

tando a representação quiral³ das matrizes gamma e reescreveremos o operador de Dirac em blocos. Procedendo desta maneira, obtemos

$$\gamma_\mu p^\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix},$$

em que $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ são blocos de dimensão 2×2 .

É conveniente introduzir a notação $\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i)$, onde σ^0 é a matriz identidade em duas dimensões e σ^i representa as três matrizes de Pauli usuais. A matriz adjunta é $\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i)$ e satisfaz a seguinte identidade:

$$\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = \eta_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \bar{\sigma}^\kappa \sigma^\lambda. \quad (4.22)$$

Fazendo uso da notação introduzida, a decomposição em blocos pode ser expressa como⁴

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu & \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \\ \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu & \hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

onde fizemos uso das seguintes definições:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{S}}_\pm &= -m_\psi + \hat{S} \pm i\hat{\mathcal{P}}, \quad \hat{\mathcal{V}}_\pm^\mu = p^\mu + \hat{\mathcal{V}}^\mu \pm \hat{\mathcal{A}}^\mu, \\ \hat{\mathcal{T}}_\pm^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \pm i\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

em que $\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda}$ é o dual do operador $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$.

³As matrizes gamma na representação quiral são mostradas a seguir:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e $\mathbb{I}_2$ é a matriz identidade em duas dimensões.

⁴A dedução completa desta seção encontra-se no apêndice [A](#)

O valor do determinante (4.21) pode ser então obtido a partir da equação (4.23) usando a seguinte identidade:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix} = \det(\mathbb{A}\mathbb{D}) + \det(\mathbb{B}\mathbb{C}) - \text{tr}(\bar{\mathbb{B}}\mathbb{A}\bar{\mathbb{C}}\mathbb{D}), \quad (4.25)$$

onde $\bar{\mathbb{B}} = \text{adj}(\mathbb{B})$ e $\bar{\mathbb{C}} = \text{adj}(\mathbb{C})$ são as matrizes adjuntas correspondentes. As quantidades que aparecem na identidade acima podem ser calculadas fazendo uso da identidade (4.22) e das seguintes relações:

$$\text{tr}(\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \bar{\sigma}_\kappa \sigma_\lambda) = 2\eta_{\mu\nu\kappa\lambda}, \quad (4.26a)$$

$$\text{tr}(\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \bar{\sigma}_\kappa \sigma_\lambda \bar{\sigma}_\rho \sigma_\sigma) = 2\eta_{\mu\nu\kappa}{}^\tau \eta_{\tau\lambda\rho\sigma}, \quad (4.26b)$$

$$\eta_{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa} = 4\hat{\mathcal{T}}_{-\mu\lambda}, \quad \eta_{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_+^{\kappa\lambda} = -4\hat{\mathcal{T}}_{+\mu\nu}, \quad (4.26c)$$

onde

$$\eta_{\mu\nu\kappa\lambda} = \eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda} - \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa} - i\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}. \quad (4.27)$$

Efetuada todos os passos necessários, obtemos a seguinte equação de dispersão:

$$\left(\hat{\mathcal{S}}_-^2 - \hat{\mathcal{T}}_-^2\right) \left(\hat{\mathcal{S}}_+^2 - \hat{\mathcal{T}}_+^2\right) + \hat{\mathcal{V}}_-^2 \hat{\mathcal{V}}_+^2 - 2\hat{\mathcal{V}}_- \cdot \left(\hat{\mathcal{S}}_- + 2i\hat{\mathcal{T}}_-\right) \cdot \left(\hat{\mathcal{S}}_+ - 2i\hat{\mathcal{T}}_+\right) \cdot \hat{\mathcal{V}}_+ = 0, \quad (4.28)$$

onde $\hat{\mathcal{T}}_\pm^2 = \hat{\mathcal{T}}_\pm^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}_{\pm\mu\nu}$.

A equação (4.28) nos fornece uma expressão compacta para a relação de dispersão em que os coeficientes de violação possuem dimensão de massa arbitrária. A equação de dispersão (4.28) nos permitirá obter as soluções para os casos particulares do operador $\hat{\mathcal{Q}}$ que estamos interessados. Mais adiante, voltaremos a esta equação.

4.3.1 Propriedades gerais da equação de dispersão

Iremos analisar algumas propriedades da equação de dispersão (4.28). Inicialmente, destacamos que a natureza quartica da equação de dispersão é aparente,

uma vez que estamos tratando de operadores que possuem dimensão de massa arbitrária. Assim, é esperado que para algumas configurações dos operadores $\{\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{V}}^\mu, \hat{\mathcal{A}}^\mu, \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\}$ possam surgir mais de quatro relações de dispersão, como exemplo ilustrativo, vide seção 5.7.

Como o operador $\hat{\mathcal{Q}}$ pode ser tratado de maneira perturbativa, conforme argumentado na seção 4.1, podemos obter as relações de dispersão em primeira ordem nos operadores $\{\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{V}}^\mu, \hat{\mathcal{A}}^\mu, \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\}$ a partir da equação (4.28). Obter as relações de dispersão em primeira ordem nos permitirá sondar muitas informações e propriedades acerca de como o conjunto de operadores que compõem $\hat{\mathcal{Q}}$ modificam as relações de dispersão.

Em primeira ordem, a equação de dispersão (4.28) pode ser reescrita da seguinte forma

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m_\psi^2 \approx 2 \left(m_\psi \hat{\mathcal{S}} - p \cdot \hat{\mathcal{V}} \pm \mathcal{Y} \right), \quad (4.29)$$

onde $\mathcal{Y}$ é obtido a partir da seguinte expressão

$$\mathcal{Y}^2 = \left(p \cdot \hat{\mathcal{A}} \right)^2 - m_\psi^2 \hat{\mathcal{A}}^2 - 2m_\psi p \cdot \tilde{\mathcal{T}} \cdot \hat{\mathcal{A}} + p \cdot \tilde{\mathcal{T}} \cdot p. \quad (4.30)$$

Resolvendo a equação (4.29) para $p_0 \equiv E$, obtemos as seguintes relações de dispersão

$$E \approx E_0 - \frac{m_\psi \hat{\mathcal{S}} - p \cdot \hat{\mathcal{V}}}{E_0} \pm \frac{\mathcal{Y}}{E_0}, \quad (4.31)$$

onde $E_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_\psi^2}$. Deve-se notar que devido ao resultado acima ser válido apenas em primeira ordem, tivemos que fazer uso da seguinte aproximação: $p^\mu \approx (E_0, \mathbf{p})$. Portanto, todos os 4-momentos que aparecem no lado direito da equação (4.31) devem ser substituídos pela aproximação citada, inclusive aqueles que aparecem na estrutura dos operadores $\{\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{V}}^\mu, \hat{\mathcal{A}}^\mu, \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\}$. O uso desta aproximação retém apenas as quatro relações de dispersão modificadas, evitando assim o aparecimento das chamadas relações de dispersão “espúrias”, conforme explicado na seção 5.7. Pode-se observar que, na ausência dos operadores que violam a simetria de Lorentz, recuperamos as soluções usuais da equação de Dirac livre. Uma notória modificação nas relações de dispersão consiste na quebra da degenerescência de spin causada pela presença dos operadores pseudovetorial e

tensorial. Podemos perceber que o papel dos operadores escalar e vetorial residem em deslocar os níveis de energia, porém, a degenerescência de spin é preservada. A degenerescência entre partículas e antipartículas é quebrada quando qualquer um dos operadores que modificam a equação de Dirac contêm em suas estruturas coeficientes que violam a simetria CPT. Por fim, vemos a partir da equação (4.31) que o operador $\hat{\mathcal{P}}$ não contribui em primeira ordem.

4.4 Espinores e bloco-diagonalização da equação de Dirac

Estamos agora interessados na obtenção dos espinores. A equação de Dirac no espaço dos momentos (4.20) mostra-se como um sistema linear e homogêneo de equações, cujas soluções são os espinores de Dirac. É sabido que para tais soluções serem não triviais é necessário que o determinante do operador modificado de Dirac seja nulo (4.21). Este resultado já foi obtido na seção anterior. A equação (4.28) quando resolvida para a componente p^0 nos fornece os níveis de energia permitidos. É interessante ressaltar que o operador de Dirac é uma matriz 4×4 que fornecerá uma equação polinomial de grau maior ou igual 4 em p^0 . O grau do polinômio em p^0 pode ser maior que quatro, pois não devemos esquecer que os operadores $\{\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{V}}^\mu, \hat{\mathcal{A}}^\mu, \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\}$, os quais estão presentes na equação (4.28), são funções de p_α . A solução (4.28) contém tanto valores positivos quanto negativos para a energia. As energias positivas $E_>$ são comumente interpretadas como as energias que descrevem as partículas livres, isto é $p_0 = E_>(\mathbf{p})$ neste caso. As energias negativas $E_<$, por outro lado, indicam a presença de antipartículas e precisam ser reinterpretadas de acordo com o procedimento de Feynman-Stückelberg para que tenham sentido físico. O procedimento de Feynman-Stückelberg consiste em considerar tais antipartículas como partículas propagando-se para trás no tempo. Portanto, para obtermos as energias com o sentido físico correto, precisamos inverter o sinal das componentes do 4-momento. Assim, para as de energia negativa, a reinterpretação acima mencionada nos fornece: $p_0 = -E_<(-\mathbf{p})$ [50]. Substituindo os valores permitidos de p_0 na equação de Dirac modificada, obteremos as quatro soluções não-triviais para os espinores. Deve-se notar que, para as energias $E_<$,

devemos aplicar a reinterpretação de Feynman-Stückelberg na equação de Dirac como um todo e não apenas nas energias.

A utilidade do procedimento mencionado previamente na obtenção dos espinores reside no fato de que, ao final, obteremos as soluções exatas. No entanto, como visto na seção anterior, as dificuldades em resolver estes sistemas lineares aumentam drasticamente na medida em que o número de coeficientes que são levados em consideração no operador $\hat{Q}$ aumenta. A razão é que, mesmo considerando termos até segunda ordem nos coeficientes de violação, muitas combinações entre os coeficientes são possíveis, o que torna o processo de obtenção das soluções exatas um grande problema. Com o propósito de ilustrar este procedimento, consideraremos no apêndice B algumas configurações isotrópicas do operador $\hat{Q}$. Neste apêndice calculamos as soluções exatas para os espinores e mostramos a relação de dispersão exata.

Devido à complexidade envolvida no tratamento das soluções é necessário desenvolver um procedimento que nos possibilite encontrar as soluções espinoriais desejadas. Já foi mencionado na seção 4.1 que o operador $\hat{Q}$ pode ser tratado de maneira perturbativa. Portanto, para estudos fenomenológicos, é suficiente reter apenas as contribuições dos coeficientes até primeira ordem nas energias, espinores e etc. O procedimento escolhido para se obter os espinores em primeira ordem foi desenvolvido em [22] e será detalhado aqui.

O objetivo dessa nova metodologia reside em encontrar uma transformação $U = U(\mathbf{p})$ tal que a equação de Dirac assuma uma forma bloco-diagonal. A equação de Dirac possui a seguinte forma:

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - m_\psi + \hat{Q}\right)\psi = 0. \quad (4.32)$$

Multiplicando a equação acima pela matriz não-singular γ_0 pela esquerda, temos:

$$\gamma_0 \left(\gamma^\mu p_\mu - m_\psi + \hat{Q}\right)\psi = 0. \quad (4.33)$$

A matriz γ_0 é introduzida para transformar o primeiro termo, $\gamma^0 p_0$, em sua forma bloco-diagonal, uma vez que $(\gamma_0)^2 = \mathbb{I}_4$. Com isso, precisamos apenas nos preocupar em bloco-diagonalizar os termos que darão origem ao Hamiltoniano H , ou

seja, $\gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}})$. Aplicando agora a matriz $U = U(\mathbf{p})$, obtemos

$$U\gamma_0 (\gamma^\mu p_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}}) U^\dagger U\psi = (E - H) U\psi = 0, \quad (4.34)$$

onde $E \equiv p_0$ e H é o Hamiltoniano relativístico. H é uma matriz 4×4 bloco-diagonal ou “par” com os blocos 2×2 fora da diagonal (contribuições “ímpares”) nulos. Esta metodologia permite desacoplar os estados positivos dos negativos, ou seja, os blocos-diagonais principais nos fornecem os Hamiltonianos relativísticos que descrevem as partículas e as antipartículas separadamente. A figura 4.1 representa esquematicamente o que ocorre com o operador de Dirac quando aplicamos a transformação U . Usaremos as matrizes gamma na representação quirál, pois nesta representação as matrizes γ^μ possuem a forma em blocos desejada para que o procedimento aqui desenvolvido funcione. Como estamos tratando os termos de violação de Lorentz de maneira perturbativa, é conveniente introduzir a seguinte notação:

$$H = H_0 + \delta H, \quad (4.35)$$

onde $H_0 = U\gamma_0 (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - m_\psi) U^\dagger$ é a Hamiltoniana usual de Dirac e δH contém todas as contribuições perturbativas devido aos termos de violação de Lorentz.

Consideraremos inicialmente a equação de Dirac usual ($\hat{\mathcal{Q}} = 0$), ou seja, $H =$

$$\begin{array}{c} \text{part} \quad \overline{\text{part}} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & \bullet & \bullet \\ * & * & \bullet & \bullet \\ \hline \circ & \circ & \diamond & \diamond \\ \circ & \circ & \diamond & \diamond \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{part} \\ \hline \text{part} \end{array} \end{array} \xrightarrow{U} \begin{array}{c} \text{part} \quad \overline{\text{part}} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} \tilde{*} & \tilde{*} & 0 & \\ \tilde{*} & \tilde{*} & 0 & \\ \hline 0 & & \tilde{\diamond} & \tilde{\diamond} \\ & & \tilde{\diamond} & \tilde{\diamond} \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{part} \\ \hline \text{part} \end{array} \end{array}$$

Figura 4.1: Na figura acima, “part” designa partículas e “ $\overline{\text{part}}$ ” antipartículas. Vemos claramente que, após a matriz transformação U atuar sobre o operador de Dirac, a equação torna-se bloco-diagonal, ou seja, as informações que caracterizam as partículas estão desacopladas das antipartículas.

H_0 como exemplo ilustrativo. Uma transformação apropriada para converter a equação de interesse na forma bloco diagonal é o produto de duas transformações que comutam, $U = VW = WV$, e possuem a seguinte forma:

$$V = \frac{\mathbb{I}_4 + \gamma_0 \gamma_5}{\sqrt{2}}, \quad (4.36a)$$

$$W(\mathbf{p}) = \frac{E_0 + m_\psi + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{2E_0(E_0 + m_\psi)}}, \quad (4.36b)$$

onde $E_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_\psi^2} > 0$. Aplicando a transformação acima na equação (4.34), fazendo $\hat{\mathcal{Q}} = 0$, obtemos a seguinte forma bloco-diagonal⁵:

$$H_0 = -\gamma_5 E_0 = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & -E_0 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

O bloco 2×2 superior descreve as energias positivas das partículas, enquanto que o bloco inferior, após a reinterpretação usual, descreve as energias das antipartículas.

No caso geral que estamos interessados em descrever as modificações advindas da violação de Lorentz ($\hat{\mathcal{Q}} \neq 0$), podemos modificar as transformações (4.36a) e (4.36b) de modo a torná-las úteis ao caso mais geral. Caso o operador $\hat{\mathcal{Q}}$ contenha em sua estrutura apenas os operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$, então as transformações apresentadas são suficientes para tornar a Hamiltoniana modificada bloco-diagonal desde que façamos as seguintes modificações: $m_\psi \rightarrow m_\psi - \hat{\mathcal{S}}$ e $p_\mu \rightarrow p_\mu + \hat{\mathcal{V}}^\mu$. Com estas modificações, as transformações (4.36a) e (4.36b) tornam-se

$$\mathbb{V} = \frac{\mathbb{I}_4 + \gamma_0 \gamma_5}{\sqrt{2}}, \quad (4.38a)$$

$$\mathbb{W}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0 + m_\psi - \hat{\mathcal{S}} + (\mathbf{p} + \hat{\mathcal{V}}) \cdot \boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{2(\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0)(\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0 + m_\psi - \hat{\mathcal{S}})}}, \quad (4.38b)$$

⁵O cálculo detalhado da obtenção desta forma bloco diagonal, bem como as soluções espinoriais serão abordadas no apêndice C.

⁶Consideraremos as soluções espinoriais para estes dois casos no apêndice D para exemplificar a prescrição $m_\psi \rightarrow m_\psi - \hat{\mathcal{S}}$ e $p_\mu \rightarrow p_\mu + \hat{\mathcal{V}}^\mu$.

onde $\hat{\mathcal{V}}_0$ e $\hat{\mathcal{V}}$ são as partes temporal e espacial do operador $\hat{\mathcal{V}}^\mu$, respectivamente, e $\mathbb{E}_u$ designa a relação de dispersão exata para esta configuração. Vale a pena ressaltar que as transformações (4.36a), (4.36b), (4.38a) e (4.38b) nos fornecem a forma bloco-diagonal exata, o que, por sua vez, nos possibilitará obter as soluções espinoriais exatas para estas configurações.

Em contraste ao que foi apresentado acima, quando o operador $\hat{\mathcal{Q}}$ contém em sua estrutura os coeficientes $\hat{\mathcal{P}}$, $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ e $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$, nenhuma modificação nas transformações apresentadas previamente nos fornecerá a estrutura bloco-diagonal exata desejada. No entanto, ainda podemos modificá-las a fim de obter alguns resultados interessantes. Um primeiro passo na tentativa de tornar o operador $U\gamma_0\hat{\mathcal{Q}}U^\dagger$ bloco-diagonal consiste em tratá-lo de maneira perturbativa e, dessa maneira, encontrar as novas transformações. Em ordem zero, a transformação U é dada pelo produto VW , assim, a equação (4.34) torna-se:

$$\begin{aligned} & \left(U\gamma_0\gamma^\mu p_\mu U^\dagger - U\gamma_0 m_\psi U^\dagger + U\gamma_0 \hat{\mathcal{Q}} U^\dagger \right) U\psi = 0, \\ & \left(U\gamma_0\gamma^0 p_0 U^\dagger - U\gamma_0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m_\psi) U^\dagger + U\gamma_0 \hat{\mathcal{Q}} U^\dagger \right) U\psi = 0, \\ & \left(E + \gamma_5 E_0 + VW\gamma_0 \hat{\mathcal{Q}} W^\dagger V^\dagger \right) U\psi = 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde fizemos uso da equação (4.37). Como já mencionado, o último termo não é bloco-diagonal, ou seja, contém tanto as partes pares quanto as ímpares. É sabido que a parte par de uma matriz M genérica pode ser extraída aplicando-se a matriz par γ_5 da seguinte forma: $M_{\text{par}} = \frac{1}{2}(M + \gamma_5 M \gamma_5)$. Portanto, para remover as partes ímpares e reter as contribuições pares em primeira ordem, basta modificar a transformação U por uma pequena transformação adicional, a saber:

$$U = \left(1 + \frac{1}{4E_0} [\gamma_5, VW\gamma_0 \hat{\mathcal{Q}} W^\dagger V^\dagger] \right) VW, \quad (4.40)$$

onde $[\bullet, \bullet]$ indica o comutador usual entre duas matrizes.

Usando essa nova transformação, a equação (4.34) torna-se:

$$U\gamma_0 \left(\gamma^\mu p_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}} \right) U^\dagger = E + \gamma_5 E_0 + \left(VW\gamma_0 \hat{\mathcal{Q}} W^\dagger V^\dagger \right)_{\text{par}}. \quad (4.41)$$

A partir da equação acima, podemos identificar o Hamiltoniano bloco-diagonal que representa as modificações em primeira ordem nos coeficientes de violação de Lorentz, ou seja,

$$\delta H = - \left(VW\gamma_0 \hat{\mathcal{Q}} W^\dagger V^\dagger \right)_{\text{par}}. \quad (4.42)$$

Substituindo a forma do operador $\hat{\mathcal{Q}}$ dada pela equação (4.3) e fazendo alguns cálculos, obtemos a seguinte forma explícita para δH :

$$\begin{aligned} \delta H = \frac{1}{E_0} & \left[m_\psi \hat{\mathcal{S}} \gamma_5 - E_0 \hat{\mathcal{V}}^0 - \hat{\mathcal{V}}^j p^j \gamma_5 + \hat{\mathcal{A}}^0 p^j \gamma^j \gamma_0 + m_\psi \hat{\mathcal{A}}^j \gamma^j \gamma_0 \gamma_5 + \frac{\hat{\mathcal{A}}^j p^j p^k \gamma^k \gamma_0 \gamma_5}{(E_0 + m_\psi)} \right. \\ & \left. + i p^j \hat{\mathcal{T}}^{0k} \gamma^j \gamma^k + i \hat{\mathcal{T}}^{0j} p^j - E_0 \tilde{\mathcal{T}}^{0j} \gamma^j \gamma_0 + \frac{\tilde{\mathcal{T}}^{0j} p^j p^k \gamma^k \gamma_0}{(E_0 + m_\psi)} \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

A expressão acima nos fornece as contribuições em primeira ordem para o Hamiltoniano (4.35). Iremos usar a equação (4.43) para encontrar a forma explícita do Hamiltoniano para cada uma das configurações de interesse no próximo capítulo. Com os Hamiltonianos em mãos, iremos calcular as soluções espinoriais para as diversas configurações do operador $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ e $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$.

Capítulo 5

Teoria de Dirac modificada por operadores de spin não-degenerado

No capítulo anterior, descrevemos uma metodologia generalizada que usaremos, a partir de agora, para obter as soluções espinoriais para as diversas configurações dos operadores $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ e $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$. Porém, antes de aplicar tal metodologia, iremos detalhar algumas propriedades gerais que dizem respeito às energias e espinores das partículas e antipartículas. A obtenção dos espinores e suas possíveis generalizações para operadores de dimensão arbitrária são apresentados. A normalização que será utilizada ao longo deste capítulo também é discutida. Por fim, obteremos as soluções espinoriais desejadas.

5.1 Propriedades gerais

Os operadores $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ e $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$, como já mencionado exhaustivamente no capítulo 4, diferem-se dos demais operadores, pois, em geral, haverá duas relações de dispersão distintas. Essa nova propriedade tem como principal consequência a quebra da degenerescência de spin. Sabemos também que as soluções para as antipartículas estão conectadas às soluções das partículas através de uma transformação de conjugação de carga [50]. O conhecimento detalhado dessa conexão nos permitirá obter essas soluções de uma maneira mais simples. Descreveremos a seguir como tal conexão ocorre, como podemos generalizar as soluções espinoriais para

quaisquer dimensão de massa e algumas propriedades da relação de dispersão.

5.1.1 Energias das partículas e antipartículas

Sabemos que no caso padrão e nos casos em que a equação de Dirac é modificada por operadores que não quebram a degenerescência de spin, ou seja, quando a equação de Dirac é modificada pelos operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$, a energia das partículas e antipartículas é degenerada. Porém, os casos que iremos avaliar ocorre a quebra dessa degenerescência. Portanto, é esperado que haja duas energias distintas para as partículas, bem como para as antipartícula. Os coeficientes que violam a simetria de Lorentz e induzem tal assimetria são: $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ e $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$. Denotaremos as energias positivas não degeneradas por $E_{>}^{(\pm)}$ e as identificaremos como as energias que caracterizam as partículas, ou seja, $E_{>}^{(\pm)} \equiv E_u^{(\pm)}$. Já as duas energias negativas, que denotaremos por $E_{<}^{(\pm)}$, após as devidas considerações, poderão ser identificadas como as energias que caracterizam as antipartículas, ou seja, $E_v^{(\pm)}$.

Sabemos que as soluções que caracterizam as antipartículas estão conectadas às soluções que caracterizam as partículas através de uma transformação de conjugação de carga C. Portanto, conhecendo o comportamento dos coeficientes que controlam a violação da simetria de Lorentz quando submetidos a uma transformação de conjugação de carga, saberemos como será a correspondência entre as energias. Sob uma transformação de conjugação de carga, os coeficientes mostrados na decomposição (4.16) comportam-se como: $\{c^{\mu\nu\cdots}, d^{\mu\nu\cdots}, e^{\mu\cdots}, f^{\mu\cdots}, g^{\kappa\lambda\mu\cdots}, m, m_5, a^{\mu\cdots}, b^{\mu\cdots}, H^{\mu\nu\cdots}\} \xrightarrow{C} \{c^{\mu\nu\cdots}, -d^{\mu\nu\cdots}, -e^{\mu\cdots}, -f^{\mu\cdots}, g^{\kappa\lambda\mu\cdots}, m, m_5, -a^{\mu\cdots}, \hat{b}^\mu, -H^{\mu\nu\cdots}\}$ [50]. O resultado mostrado anteriormente é bem geral, porém, os coeficientes que realmente interessam são $\hat{d}^{\mu\nu}$, $\hat{b}^\mu$, $\hat{g}^{\kappa\lambda\mu}$ e $\hat{H}^{\mu\nu}$. A conexão entre as energias para estes coeficientes, dada por [50], é mostrada a seguir:

$$E_{<}^{(\pm)} = -E_{>}^{(\mp)}(-\mathbf{p}, -d^{\mu\nu\cdots}, -H^{\mu\nu\cdots}). \quad (5.1)$$

Como já discutido na seção 4.4, as soluções para as antipartículas não possuem sentido físico a menos que façamos uso da reinterpretação de Feynman-Stückelberg. Fazendo uso deste procedimento na equação (5.1), temos

$$-E_{>}^{(\mp)}(-\mathbf{p}, -d^{\mu\nu\cdots}, -H^{\mu\nu\cdots}) \mapsto E_{>}^{(\mp)}(\mathbf{p}, -d^{\mu\nu\cdots}, -H^{\mu\nu\cdots}) \equiv E_v^{(\mp)}, \quad (5.2)$$

onde invertemos os sinais das componentes espaciais do momento, bem como o sinal da energia, que corresponde a p^0 e fizemos uso da notação da ref. [50] para as antipartículas. Como os coeficientes $\hat{d}^{\mu\nu}$ e $\hat{H}^{\mu\nu}$ violam C, as energias das antipartículas estão relacionadas às energias das partículas através da seguinte equação:

$$E_u^{(\pm)}(\mathbf{p}, d^{\mu\nu\cdots}, H^{\mu\nu\cdots}) = E_u^{(\mp)}(\mathbf{p}, -d^{\mu\nu\cdots}, -H^{\mu\nu\cdots}) = E_v^{(\mp)}(\mathbf{p}). \quad (5.3)$$

Tais correspondências entre as energias serão de grande utilidade nas próximas seções.

5.1.2 Obtenção e generalização dos espinores

Na literatura, o procedimento mais comum para obter os espinores consiste em efetuar a decomposição da equação de Dirac em duas partes: o bloco superior, que diz respeito às partículas, e o bloco inferior, que refere-se às antipartículas. A partir dessa decomposição, podemos encontrar os espinores, bem como o limite não relativístico da equação de Dirac de uma maneira relativamente simples. Porém, constatamos que este método usual funciona apenas quando a equação de Dirac é modificada pelos operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$. A metodologia descrita na seção 4.4 permite, por outro lado, encontrar as soluções espinoriais para os operadores que quebram a degenerescência de spin. Isso só é possível, graças ao fato da forma bloco-diagonal não misturar as informações entre partículas e antipartículas, ou seja, estas informações estão desacopladas.

Além da vantagem mencionada anteriormente, esta metodologia nos permitirá generalizar as soluções espinoriais para quaisquer operadores $\{\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{V}}^\mu, \hat{\mathcal{A}}^\mu, \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\}$ em qualquer dimensão conhecendo apenas as soluções espinoriais para as versões mínimas destes operadores. A generalização consiste basicamente dos seguintes passos: calcula-se, por exemplo, os espinores para a equação de Dirac modificada pelo operador $\mathcal{A}^{(3)3}$, versão mínima do operador $\hat{\mathcal{A}}^3$, e efetua-se a seguinte prescrição

$$\mathcal{A}^{(3)3} \mapsto \hat{\mathcal{A}}^3 \equiv \sum_d \mathcal{A}^{(d)3\alpha_1\cdots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_{d-3}}. \quad (5.4)$$

Essa prescrição mapeia o MPE mínimo ao MPE não-mínimo. Não é difícil compre-

ender por que tal mapeamento funciona, basta observar que o índice que controla a natureza do spin (índice $\mu = 3$ no caso acima) permanece fixo e os índices $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-3}$ podem ser entendidos como “índices internos” que não alteram a configuração do operador $\hat{Q}$. Na equação a seguir, mostramos o papel desempenhado pelo índice que controla a natureza do spin e na sequência mostramos o papel desempenhado pelos “índices internos” na generalização do operador. Para a configuração $\hat{Q} = \hat{\mathcal{V}}^\mu \gamma_\mu$, temos:

$$\hat{Q} \equiv \hat{\mathcal{V}}^\mu \gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \hat{\mathcal{V}}^0 - \hat{\mathcal{V}}^3 & i\hat{\mathcal{V}}^2 - \hat{\mathcal{V}}^1 \\ 0 & 0 & -\hat{\mathcal{V}}^1 - i\hat{\mathcal{V}}^2 & \hat{\mathcal{V}}^0 + \hat{\mathcal{V}}^3 \\ \hat{\mathcal{V}}^0 + \hat{\mathcal{V}}^3 & \hat{\mathcal{V}}^1 - i\hat{\mathcal{V}}^2 & 0 & 0 \\ \hat{\mathcal{V}}^1 + i\hat{\mathcal{V}}^2 & \hat{\mathcal{V}}^0 - \hat{\mathcal{V}}^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Usando o mapeamento

$$\mathcal{V}_{\text{mínimo}}^\mu \mapsto \hat{\mathcal{V}}_{\text{Não-mínimo}}^\mu \equiv \sum_d \mathcal{V}^{(d)\mu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (5.6)$$

obtemos a generalização desejada. Assim, fica claro que a prescrição acima mencionada realmente conecta o setor fermiônico mínimo ao setor fermiônico não-mínimo e que os “índices internos” não alteram a configuração do operador $\hat{Q}$.

As soluções generalizadas só são possíveis, porque são válidas apenas em primeira ordem. Não podemos esquecer que estamos substituindo os p^0 adicionais que aparecem nos coeficientes de violação de Lorentz pela relação de dispersão padrão E_0 . Porém, os coeficientes $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$ são uma exceção, já que, como foi discutido na seção 4.4, podemos obter as soluções exatas para estas configurações. Tendo em mãos os espinores exatos, aplicamos o mapeamento descrito acima, com algumas ressalvas, para obter as soluções exatas em qualquer dimensão de massa d , vide apêndice D.

É relevante mencionar aqui a relação entre as soluções espinoriais das partículas e antipartículas. Denotaremos os dois espinores que descrevem as partículas e que satisfazem a equação de Dirac modificada por $u^{(\alpha)}$, enquanto que os dois espinores que descrevem as antipartículas são rotulados por $v^{(\alpha)}$, onde $\alpha = 1, 2$. Os espinores $u^{(\alpha)}$ e $v^{(\alpha)}$ estão conectados um ao outro através da transformação de conjugação

de carga (C). Ao aplicar o operador C na equação de Dirac, obtemos o seguinte anti-espinor¹

$$\psi^c = i\gamma^2\psi^*. \quad (5.9)$$

Já sabemos como os coeficientes que violam a simetria de Lorentz se comportam quando submetidos a uma transformação de conjugação de carga, vide subseção 5.1.1. Conforme equação (21) da referência [50] as soluções para as antipartículas assumem a seguinte forma:

$$v^{(1,2)}(\mathbf{p}, d^{\mu\nu\cdots}, H^{\mu\nu}) = u^{(2,1)c}(\mathbf{p}, -d^{\mu\nu\cdots}, -H^{\mu\nu\cdots}), \quad (5.10)$$

onde usamos a notação apresentada em (5.9).

Como os coeficientes b , d , H e g quebram a degenerescência das energias, então as duas soluções espinoriais para as partículas e as duas soluções para as antipartículas satisfazem automaticamente a condição de ortogonalidade entre si. Além da ortogonalidade, os espinores devem ser normalizados, portanto, escolheremos a seguinte condição de normalização:

$$u^{(\alpha)\dagger}u^{(\alpha)} = 2E_u^{(\alpha)}, \quad (5.11)$$

$$v^{(\alpha)\dagger}v^{(\alpha)} = 2E_v^{(\alpha)}, \quad (5.12)$$

onde o índice α não indica soma e assume os valores $\alpha = 1, 2$.

1

Seja u um espinor arbitrário

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Estamos interessados em saber como a transformação de conjugação de carga $C=i\gamma^2$ modifica o espinor u . Aplicando C a equação (5.7), temos

$$v = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} u_4 \\ -u_3 \\ -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}^*. \quad (5.8)$$

A transformação C não só inverte a ordem das componentes do espinor u , como introduz um sinal negativo nas componentes dois e três.

Após todas as considerações feitas, estamos prontos para obter as soluções da equação de Dirac modificada. Nas seções a seguir calcularemos as soluções espinoriais para algumas configurações particulares dos operadores $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ e $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$.

5.2 Configuração “isotrópica” generalizada

Após toda a discussão previa, estamos prontos para obter a equação de Dirac modificada, a relação de dispersão e os espinores para as configurações que seguem. Iremos iniciar com o caso mais simples, ou seja, com a configuração isotrópica. Soluções isotrópicas caracterizam-se por não depender de uma direção privilegiada. Tal independência manifesta-se nas soluções quando estas dependem exclusivamente do $|\mathbf{p}|$. As possíveis configurações dos operadores $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ e $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ que possibilitam obter soluções isotrópicas são mostradas a seguir:

$$\hat{b} = \sum_{d \text{ ímpar}} b^{(d)0\alpha_1\ldots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (5.13a)$$

$$\hat{d}^\mu = \hat{d} \times \text{diag} \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)^{\mu\alpha_1} p_{\alpha_1}, \quad \hat{d} \equiv \sum_{d \text{ par}} d^{(d)00\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (5.13b)$$

$$\hat{\mathcal{T}}^{ij} = \hat{g}^{ij} = \hat{g} \times \varepsilon^{ijk} p_k, \quad \hat{g} \equiv \sum_{d \text{ par}} g^{(d)123\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-3}}. \quad (5.13c)$$

Podemos perceber que as configurações (5.13a – 5.13c) são bem gerais e contemplam tanto as soluções isotrópicas quanto as anisotrópicas. Como estamos interessados nas soluções isotrópicas, devemos nos ater aos coeficientes que reproduzem o MPE mínimo, já que, neste caso, as configurações (5.13a – 5.13c) têm o comportamento desejado. Os coeficientes que compõem o MPE mínimo são: $\hat{b} = b^{(3)0}$, $\hat{d} = d^{(4)00}$ e $\hat{g} = g^{(4)123}$. A equação de Dirac modificada para estas configurações é mostrada a seguir

$$\left(\gamma_\mu p^\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{A}}^0 \gamma_5 \gamma_0 + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{ij} \sigma_{ij} \right) \Psi = 0, \quad (5.14)$$

onde

$$\hat{\mathcal{A}}^0 = \hat{d}^0 - \hat{b}. \quad (5.15)$$

Antes de prosseguirmos no cálculo dos espinores, precisamos obter a forma bloco diagonal da equação (5.14). Fazendo uso do procedimento apresentado na seção 4.4, em particular a equação (4.43), a equação de Dirac modificada torna-se:

$$E\psi' + \gamma_5 E_0 \psi' + \frac{1}{E_0} \left[\hat{\mathcal{A}}^0 p^j \gamma^j \gamma_0 - \frac{E_0}{2} \epsilon^{0jik} \hat{g}^{ij} \gamma^j \gamma_0 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon^{0jik} \hat{g}^{ij} p^j p^l \gamma^l \gamma_0}{(E_0 + m_\psi)} \right] \psi' = 0, \quad (5.16)$$

onde $\psi' = U\psi$ e U é a matriz transformação usada para bloco diagonalizar a equação de Dirac modificada (5.14). Tendo em mãos a equação bloco diagonal acima, podemos obter a relação de dispersão e os espinores em primeira ordem sem muitas dificuldades, já que a equação (5.16) é uma equação de autovalor simples de se resolver.

A relação de dispersão em primeira ordem para a configuração mínima é obtida resolvendo a equação de autovalor (5.16). O resultado a seguir nos mostra as energias que descrevem as partículas

$$\mathring{E}_u^{(\pm)} = E_0 \left[1 \pm \frac{|\mathbf{p}|}{E_0^2} \left(\frac{4}{3} E_0 \hat{d} - \hat{b} + m_\psi \hat{g} \right) \right]. \quad (5.17)$$

A equação acima nos mostra claramente que a configuração escolhida é isotrópica, já que depende exclusivamente do modulo do momento ($|\mathbf{p}|$). As soluções para as antipartículas podem ser obtidas através do formalismo descrito na subseção 5.1.1, ou seja

$$\mathring{E}_v^{(\pm)} = \mathring{E}_u^{(\mp)}(\mathbf{p}, -d^{\mu\nu\dots}). \quad (5.18)$$

As soluções espinoriais da equação (5.16) são

$$\mathring{\Psi}^{(1)} = \mathring{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} -|\mathbf{p}| + p_3 \\ p_1 + ip_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathring{\Psi}^{(2)} = \mathring{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| + p_3 \\ p_1 + ip_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.19a)$$

$$\mathring{\Psi}^{(3)} = \mathring{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -|\mathbf{p}| + p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}, \quad \mathring{\Psi}^{(4)} = \mathring{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\mathbf{p}| + p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}, \quad (5.19b)$$

onde $\mathring{\mathcal{N}}$ é um fator de normalização a ser calculado *a posteriori* conforme critério estabelecido na subseção 5.1.2. Podemos constatar através das equações (5.17) e (5.19a – 5.19b) que $|\mathbf{p}|$ pode ser usado como um parâmetro que conecta as duas soluções distintas, uma vez que a troca $|\mathbf{p}| \rightarrow -|\mathbf{p}|$ leva, por exemplo, $\mathring{E}_u^{(+)} \rightarrow \mathring{E}_u^{(-)}$. O mesmo procedimento é válido para as soluções espinoriais (5.19a – 5.19b) e será explorado mais adiante.

As soluções (5.19a – 5.19b), como já sabemos, correspondem aos espinores da equação de Dirac modificada na forma bloco diagonal. Porém, como pode ser visto, estas soluções não contêm nenhuma informação acerca dos coeficientes que violam a simetria de Lorentz, portanto, não são as soluções mais gerais possíveis. A presença de tais coeficientes é de vital importância para compreender como eles modificam as soluções da equação de Dirac. Por esse motivo, precisamos transformar os espinores (5.19a – 5.19b) de modo a obter as soluções desejadas. Para obter tais soluções, precisamos aplicar a transformação inversa $U^\dagger \left(\hat{\mathcal{A}}^0, \hat{\mathcal{T}}^{ij} \right)$ nos espinores encontrados. A matriz transformação $U \left(\hat{\mathcal{A}}^0, \hat{\mathcal{T}}^{ij} \right)$ escrita de forma explícita para o presente caso é dada por

$$U = VW - \frac{\hat{\mathcal{A}}^0}{4E_0} [\gamma_5, VW\gamma_5 W^\dagger V^\dagger] VW + \frac{\hat{g}^{ij}}{4E_0} [\gamma_5, VW\gamma_0 \sigma_{ij} W^\dagger V^\dagger] VW. \quad (5.20)$$

Obtendo a matriz adjunta do operador $U \left(\hat{\mathcal{A}}^0, \hat{\mathcal{T}}^{ij} \right)$ e aplicando-a às soluções (5.19a), obtemos os espinores para as partículas, a saber:

$$\mathring{u}^{(1,2)}|_{E_u^{(\pm)}} = \mathring{N}_u^{(1,2)} \mathring{\mathcal{Z}} \left(\hat{\mathcal{A}}^0 - \hat{g} \frac{|\mathbf{p}|^2}{m_\psi} \right), \quad (5.21)$$

onde fizemos uso das seguintes definições

$$\mathring{Z}(X) = \begin{pmatrix} \mathring{\phi}_{\mp} \\ \mathring{\chi}_{\pm} \end{pmatrix} - \frac{m_{\psi}}{2E_0^2} \begin{pmatrix} \mathring{\chi}_{\pm} \\ -\mathring{\phi}_{\mp} \end{pmatrix} X, \quad (5.22a)$$

$$\mathring{\phi}_{\pm} = (E_0 + m_{\psi} \pm |\mathbf{p}|) \begin{pmatrix} p_3 \mp |\mathbf{p}| \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}, \quad (5.22b)$$

$$\mathring{\chi}_{\pm} = (E_0 + m_{\psi} \pm |\mathbf{p}|) \begin{pmatrix} p_3 \pm |\mathbf{p}| \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}. \quad (5.22c)$$

As soluções para as antipartículas podem ser obtidas aplicando-se a matriz $U^\dagger \left(\hat{\mathcal{A}}^0, \hat{\mathcal{T}}^{ij} \right)$ nas soluções (5.19b). Devemos fazer uso da reinterpretação de Feynman-Stückelberg, como já mencionado na seção 4.4, para que tais soluções adquiram sentido físico. Uma maneira mais rápida para se obter os espinores que descrevem as antipartículas, consiste em lembra que estas soluções estão conectadas às soluções das partículas via uma transformação de conjugação de carga C , conforme subseção 5.1.2. Fazendo uso da equação (5.10) temos o seguinte resultado para as antipartículas

$$\mathring{v}^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}}^\circ = \mathring{N}_v^{(1,2)} \begin{pmatrix} \mathring{u}_4^{(2,1)} \\ -\mathring{u}_3^{(2,1)} \\ -\mathring{u}_2^{(2,1)} \\ \mathring{u}_1^{(2,1)} \end{pmatrix}^* (-d^{\mu\nu}), \quad (5.23)$$

onde $\mathring{u}_i^{(2,1)}$ representa as componentes do espinor $\mathring{u}^{(\alpha)}$, o asterisco significa complexo conjugado e o parênteses após a matriz coluna indica que estamos substituindo as antigas variáveis em todas as componentes do espinor por aquelas presente no parênteses. No caso acima, $d^{\mu\nu\cdots} \rightarrow -d^{\mu\nu\cdots}$.

As constantes de normalização que aparecem nas equações (5.21 – 5.23) possuem a seguinte forma:

$$\mathring{N}_u^{(1,2)} = \frac{1}{4\sqrt{|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| \pm p_3)(E_0 + m_{\psi})}} \left[2 \pm \frac{|\mathbf{p}|}{E_0^2} \left(\frac{4}{3} E_0 \hat{d} - \hat{b} + m_{\psi} \hat{g} \right) \right], \quad (5.24a)$$

$$\mathring{N}_v^{(1,2)} = \mathring{N}_u^{(2,1)} (-d^{\mu\nu\cdots}). \quad (5.24b)$$

O critério para obter a constante de normalização foi aquele descrito na subseção 5.1.2.

Pudemos observar que as soluções da relação de dispersão e os espinores dependem apenas do módulo do momento $|\mathbf{p}|$ como esperado. Apesar de ter escolhido a configuração mínima para que obtivéssemos uma configuração isotrópica, as soluções espinoriais acima podem ser generalizadas para as configurações não-mínima conforme prescrição detalhada na subseção 5.1.2.

5.3 Soluções para algumas configurações do operador pseudovetorial $\hat{\mathcal{A}}^\mu$

Após a obtenção das soluções para a configuração isotrópica, iremos agora avaliar algumas configurações anisotrópicas para o operador pseudovetorial $\hat{\mathcal{A}}^\mu$. A equação de Dirac para este caso é dada por

$$\left(\gamma_\mu p^\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{A}}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu \right) \psi = 0, \quad (5.25)$$

cuja equação de dispersão, conforme equação (4.28), é dada por

$$\left(p + \hat{\mathcal{A}} \right)^2 \left(p - \hat{\mathcal{A}} \right)^2 - 2m_\psi^2 \left(p^2 - \hat{\mathcal{A}}^2 \right) + m_\psi^4 = 0, \quad (5.26)$$

onde p é o 4-*vetor* momento e $\hat{\mathcal{A}}$ é o operador pseudovetorial de dimensão de massa arbitrária. Ao resolver a equação (5.26) para a componente p^0 , obtemos as energias exatas para a presente configuração. Como estamos trabalhando com operadores em dimensão arbitrária, algumas situações incomuns ocorrem quando p^0 adicionais aparecem na estrutura do operador $\hat{\mathcal{A}}$. Como exemplo, podem aparecer mais de quatro soluções para a relação de dispersão, além da modificação da evolução temporal da equação de Dirac usual. Voltaremos a este problema na seção 5.7.

5.3.1 Operador $\hat{\mathcal{A}}^i$ com $i = \{1, 2\}$

O primeiro caso anisotrópico que consideraremos reside na modificação da equação de Dirac pelo operador $\hat{\mathcal{A}}^i$ cujas configurações apontam nas direções dos eixos x e y . Estes dois casos serão examinados separadamente e, a *posteriori*, será mostrado que existe uma conexão entre as soluções destas duas configurações, visto que a estrutura $\gamma_5\gamma_i$ para $i = \{1, 2\}$ são bem semelhantes².

A equação de Dirac modificada para ambas configurações possui a seguinte forma

$$\left(\gamma_\mu p^\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{A}}^i \gamma_5 \gamma_i\right) \Psi = 0, \quad (5.27)$$

onde o índice i não deve ser interpretado como uma soma, mas sim como assumindo os valores para cada um dos casos separadamente. Antes de obter as soluções espinoriais, precisamos conhecer as energias em primeira ordem. Para isso, precisamos resolver a equação (5.26) substituindo os p^0 adicionais que aparecem na estrutura do operador $\hat{\mathcal{A}}^i$ pela relação de dispersão usual $E_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_\psi^2}$ e reter apenas termos lineares em $\hat{\mathcal{A}}^i$. Procedendo desta maneira, obtemos as seguintes soluções

$$E_u^{(\pm)} |^{\hat{\mathcal{A}}^i} = E_0 \left(1 \pm \frac{\Omega_i}{E_0^2} \hat{\mathcal{A}}^i\right), \quad \Omega_i = \sqrt{p_i^2 + m_\psi^2}, \quad (5.28)$$

onde o subscrito u em $E_u^{(\pm)}$ significa que estas energias caracterizam às partículas. As soluções para as antipartículas podem ser obtidas através do formalismo

2

Como vemos a seguir, a estrutura $\gamma_5\gamma_i$ para $i = \{1, 2\}$ são bem semelhantes

$$\begin{aligned} \gamma_5\gamma_1 &= \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_5\gamma_2 &= \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, com as devidas modificações é possível conectar as soluções para as configurações $\hat{\mathcal{A}}^1$ e $\hat{\mathcal{A}}^2$. Apenas por curiosidade, a matriz $\gamma_5\gamma_3$ possui a seguinte forma:

$$\gamma_5\gamma_3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix},$$

que, claramente, possui uma estrutura completamente diferente.

descrito na subseção 5.1.1, ou seja,

$$E_v^{(\pm)}|^{\hat{\mathcal{A}}^i} = E_u^{(\mp)}|^{\hat{\mathcal{A}}^i}(\mathbf{p}, -d^{\mu\nu\cdots}). \quad (5.29)$$

Como já mencionado na subseção 5.1.2, a metodologia usual nos impossibilita de obter as soluções espinoriais. Portanto, precisamos aplicar o procedimento apresentado na seção 4.4 e bloco-diagonalizar a equação de Dirac modificada (5.27). Podemos obtê-la diretamente a partir da equação (4.43), como segue

$$E\psi' + \gamma_5 E_0 \psi' + \frac{1}{E_0} \left[m_\psi \hat{\mathcal{A}}^j \gamma^j \gamma_0 \gamma_5 + \frac{\hat{\mathcal{A}}^j p^j p^k \gamma^k \gamma_0 \gamma_5}{(E_0 + m_\psi)} \right] \psi' = 0, \quad (5.30)$$

onde $\psi' = U\psi$. As soluções espinoriais da equação (5.30) são obtidas de maneira simples, uma vez que a equação de autovalor em questão é uma matriz bloco-diagonal. As soluções para as configurações $\hat{\mathcal{A}}^1$ e $\hat{\mathcal{A}}^2$ são, respectivamente

$$\check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^1}^{(1)} = \check{N} \begin{pmatrix} \Lambda \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^1}^{(2)} = \check{N} \begin{pmatrix} \Lambda (-\Omega_1) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.31a)$$

$$\check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^1}^{(3)} = \check{N} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Lambda \end{pmatrix}, \quad \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^1}^{(4)} = \check{N} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Lambda (-\Omega_1) \end{pmatrix}, \quad (5.31b)$$

$$\check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^2}^{(1)} = \check{N}' \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^2}^{(2)} = \check{N}' \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda} (-\Omega_2) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.32a)$$

$$\check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^2}^{(3)} = \check{N}' \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\Lambda} \end{pmatrix}, \quad \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^2}^{(4)} = \check{N}' \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\Lambda} (-\Omega_2) \end{pmatrix}, \quad (5.32b)$$

onde $\check{N}$ e $\check{N}'$ são constantes de normalização a determinar de acordo com os critérios estabelecidos na subseção 5.1.1. Nas equações acima, fizemos uso das seguintes definições:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} (E_0 + m_\psi) \Omega_1 + p_1 p_3 \\ m_\psi (E_0 + m_\psi) + p_1 (p_1 + i p_2) \end{pmatrix}, \quad (5.33a)$$

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} -i(E_0 + m_\psi)\Omega_2 - ip_2p_3 \\ m_\psi(E_0 + m_\psi) - ip_2(p_1 + ip_2) \end{pmatrix}. \quad (5.33b)$$

Vemos que as definições dos parâmetros Λ e $\tilde{\Lambda}$ acima podem ser conectadas uma a outra a partir da seguinte transformação:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} -i\Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} (p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow -p_1, \Omega_1 \rightarrow \Omega_2). \quad (5.34)$$

A conexão mencionada no início desta subseção manifesta-se através da transformação acima e será explorada mais adiante.

Do mesmo modo que fizemos na seção 5.2, precisamos aplicar a transformação inversa $U^\dagger(\hat{\mathcal{A}}^i)$ nos espinores (5.31a – 5.31b) e (5.32a – 5.32b) de modo que as soluções carreguem em sua estrutura as informações acerca dos coeficientes que modificam a equação (5.27), ou seja, precisamos obter as soluções mais gerais. A matriz $U(\hat{\mathcal{A}}^i)$ para a configuração em questão pode ser obtida a partir da equação (4.40) substituindo $\hat{\mathcal{Q}} = \hat{\mathcal{A}}^i \gamma_5 \gamma_i$, ou seja,

$$U(\hat{\mathcal{A}}^i) = VW + \frac{\hat{\mathcal{A}}^i}{4E_0} [\gamma_5, VW \gamma_0 \gamma_5 \gamma_i W^\dagger V^\dagger] VW. \quad (5.35)$$

Precisamos agora aplicar o conjugado Hermitiano da matriz U ($U^\dagger$) nas soluções (5.31a – 5.32b). Iniciaremos obtendo as soluções para o coeficiente $\hat{\mathcal{A}}^1$ aplicando a transformação $U^\dagger(\hat{\mathcal{A}}^1)$ nas soluções que caracterizam as partículas, ou seja, nas equações (5.31a). Procedendo como mencionado, temos

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)} }^{\hat{\mathcal{A}}^1} = U^\dagger(\hat{\mathcal{A}}^1) \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^1}^{(1)}, \quad (5.36a)$$

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)} }^{\hat{\mathcal{A}}^1} = \check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^1(1)} \check{Z}^{\hat{\mathcal{A}}^1}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{A}}^1, \Omega_1), \quad (5.36b)$$

e a segunda solução é dada por

$$u^{(2)}|_{E_u^{(-)} }^{\hat{\mathcal{A}}^1} = U^\dagger(\hat{\mathcal{A}}^1) \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^1}^{(2)}, \quad (5.37a)$$

$$u^{(2)}|_{E_u^{(-)}}^{\hat{\mathcal{A}}^1} = \check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^1(2)} \check{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{A}}^1}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{A}}^1, -\Omega_1). \quad (5.37b)$$

Fizemos uso das seguintes definições

$$\check{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{A}}^1}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{A}}^1, \Omega_1) = \begin{pmatrix} \check{\phi}_+ \\ \check{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{1}{2E_0^2} \begin{pmatrix} \delta\check{\phi}_+ \\ \delta\check{\phi}_- \end{pmatrix} \hat{\mathcal{A}}^1, \quad (5.38a)$$

$$\check{\phi}_\pm = \begin{pmatrix} \check{A}_\pm \\ \check{B}_\pm \end{pmatrix}, \quad \delta\check{\phi}_\pm = \begin{pmatrix} -\check{C}_\pm \\ \check{D}_\pm \end{pmatrix}, \quad (5.38b)$$

onde

$$\check{A}_\pm = m_\psi (\Omega_1 \mp ip_2) + (\Omega_1 \pm p_1) (E_0 \mp p_3), \quad (5.39a)$$

$$\check{B}_\pm = (p_1 + ip_2) (p_1 \pm \Omega_1) + m_\psi (m_\psi + E_0 \pm p_3), \quad (5.39b)$$

$$\check{C}_\pm = m_\psi p_3 (m_\psi + E_0 \pm p_3) + (p_1 p_3 \pm iE_0 p_2) (p_1 \pm \Omega_1) + m_\psi p_2 (i\Omega_1 \pm p_2), \quad (5.39c)$$

$$\check{D}_\pm = (p_1 \pm \Omega_1) [ip_2 (p_1 + ip_2) - (p_3 \mp E_0) p_3] + m_\psi [ip_2 (E_0 + m_\psi) + p_3 \Omega_1]. \quad (5.39d)$$

Observando as soluções (5.31a), percebemos que a única diferença entre os espinores está no sinal do parâmetro Ω_1 . Como a matriz $U^\dagger(\hat{\mathcal{A}}^1)$ é a mesma para ambos os espinores, percebemos que estas soluções estão conectadas da seguinte maneira:

$$u^{(2)}|_{E_u^{(-)}}^{\hat{\mathcal{A}}^1}(\Omega_1) = u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^1}(-\Omega_1). \quad (5.40)$$

O mesmo comportamento ocorre com a relação de dispersão (5.28), ou seja,

$$E_u^{(-)}|_{\hat{\mathcal{A}}^1}(\Omega_1) = E_u^{(+)}|_{\hat{\mathcal{A}}^1}(-\Omega_1). \quad (5.41)$$

Portanto, o parâmetro Ω_1 desempenha um papel importante, uma vez que ele conecta as duas soluções distintas que descrevem as partículas. As constantes de normalização que aparecem nas equações (5.36b) e (5.37b), segundo critério

apresentado na subseção 5.1.2, possuem a seguinte forma:

$$\check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^1(1)} = \frac{1}{4\sqrt{(E_0 + m_\psi)\Omega_1^2 - p_1 p_3 \Omega_1}} \left(2 + \frac{\Omega_1}{E_0^2} \hat{\mathcal{A}}^1 \right), \quad (5.42a)$$

$$\check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^1(2)} = \check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^1(1)} (-\Omega_1). \quad (5.42b)$$

As soluções espinoriais que descrevem as antipartículas são dadas por

$$v^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}} = u^{(2,1)c}(-d^{\mu\nu\cdots}),$$

ou seja,

$$v^{(1,2)} = \begin{pmatrix} u_4^{(2,1)} \\ -u_3^{(2,1)} \\ -u_2^{(2,1)} \\ u_1^{(2,1)} \end{pmatrix}^* (-d^{\mu\nu\cdots}), \quad (5.43)$$

A constante de normalização para este caso é dada por

$$\check{N}_v^{\hat{\mathcal{A}}^1(1,2)} = \check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^1(2,1)} (-d^{\mu\nu\cdots}).$$

Iremos agora tratar o caso em que $\hat{\mathcal{Q}} = \hat{\mathcal{A}}^2 \gamma_5 \gamma_2$. De maneira inteiramente análoga ao caso anterior, devemos agora aplicar a transformação $U^\dagger(\hat{\mathcal{A}}^2)$ aos espinores (5.32a). Procedendo desta maneira, obtemos como primeira solução o seguinte espinor

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}} = U^\dagger(\hat{\mathcal{A}}^2) \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^2}^{(1)}, \quad (5.44a)$$

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}} = \check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^2(1)} \check{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{A}}^2}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{A}}^2, \Omega_2), \quad (5.44b)$$

e a segunda solução é dada por

$$u^{(2)}|_{E_u^{(-)}} = U^\dagger(\hat{\mathcal{A}}^2) \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^2}^{(2)}, \quad (5.45a)$$

$$u^{(2)}|_{E_u^{(-)}} = \check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^2(2)} \check{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{A}}^2}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{A}}^2, -\Omega_2), \quad (5.45b)$$

A seguir, mostramos as definições usadas

$$\check{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{A}}^2}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{A}}^2, \Omega_2) = \begin{pmatrix} \check{\phi}_+ \\ \check{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{1}{2E_0^2} \begin{pmatrix} \delta\check{\phi}_+ \\ \delta\check{\phi}_- \end{pmatrix} \hat{\mathcal{A}}^2, \quad (5.46a)$$

$$\check{\phi}_\pm = \begin{pmatrix} \check{A}_\pm \\ \check{B}_\pm \end{pmatrix}, \quad \delta\check{\phi}_\pm = \begin{pmatrix} -\check{C}_\pm \\ \check{D}_\pm \end{pmatrix}, \quad (5.46b)$$

onde

$$\check{A}_\pm = m_\psi (\Omega_2 \pm ip_1) + (\Omega_2 \pm p_2) (E_0 \mp p_3), \quad (5.47a)$$

$$\check{B}_\pm = -i(p_1 + ip_2)(p_2 \pm \Omega_2) + m_\psi(m_\psi + E_0 \pm p_3), \quad (5.47b)$$

$$\check{C}_\pm = m_\psi p_3(m_\psi + E_0 \pm p_3) + (p_2 p_3 \pm iE_0 p_2)(p_2 \pm \Omega_2) + m_\psi p_2(i\Omega_2 \mp p_1), \quad (5.47c)$$

$$\check{D}_\pm = (p_2 \pm \Omega_2)[-p_1(p_1 + ip_2) - (p_3 \mp E_0)p_3] + m_\psi[-ip_1(E_0 + m_\psi) + p_3\Omega_2]. \quad (5.47d)$$

Observando as soluções (5.32a), percebemos novamente que a única diferença entre os espinores está no sinal do parâmetro Ω_2 . Como a matriz $U^\dagger(\hat{\mathcal{A}}^2)$ é a mesma para ambos os espinores, percebemos que estas soluções estão conectadas do mesmo modo que no caso anterior, ou seja,

$$u^{(2)}|_{E_u^{(-)}}^{\hat{\mathcal{A}}^2}(\Omega_2) = u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^2}(-\Omega_2). \quad (5.48)$$

O mesmo comportamento ocorre com a relação de dispersão (5.28)

$$E_u^{(-)}|_{\hat{\mathcal{A}}^2}(\Omega_2) = E_u^{(+)}|_{\hat{\mathcal{A}}^2}(-\Omega_2). \quad (5.49)$$

Portanto, o parâmetro Ω_2 também se torna uma quantidade importante, uma vez que ele conecta as duas soluções. As constantes de normalização que aparecem

nas equações (5.44b) e (5.45b) possuem a seguinte forma

$$\check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^2(1)} = \frac{1}{4\sqrt{(E_0 + m_\psi)\Omega_2^2 - p_1 p_3 \Omega_2}} \left(2 + \frac{\Omega_2}{E_0^2} \hat{\mathcal{A}}^2 \right), \quad (5.50a)$$

$$\check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^2(2)} = \check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^2(1)} (-\Omega_2). \quad (5.50b)$$

De maneira análoga ao coeficiente $\hat{\mathcal{A}}^1$, as soluções espinoriais que descrevem as antipartículas são:

$$v^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}} = u^{(2,1)c} (-d^{\mu\nu\dots}), \quad (5.51)$$

cujas constantes de normalização é

$$\check{N}_v^{\hat{\mathcal{A}}^2(1,2)} = \check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^2(2,1)} (-d_{\mu\nu\dots}).$$

Como pôde ser percebido desde a equação (5.34) e ao longo dos resultados expostos acima, os espinores destas duas configurações podem ser mapeados um no outro através da seguinte transformação:

$$u^{(1)}|_{E^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^2} = \check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^1(1)} \begin{pmatrix} -i\check{\mathcal{Z}}_1^{\hat{\mathcal{A}}^1} \\ \check{\mathcal{Z}}_2^{\hat{\mathcal{A}}^1} \\ -i\check{\mathcal{Z}}_3^{\hat{\mathcal{A}}^1} \\ \check{\mathcal{Z}}_4^{\hat{\mathcal{A}}^1} \end{pmatrix} \left(p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow -p_1, \hat{\mathcal{A}}^1 \rightarrow \hat{\mathcal{A}}^2, \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \right), \quad (5.52a)$$

$$u^{(2)}|_{E^{(-)}}^{\hat{\mathcal{A}}^2} = \check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^1(1)} \begin{pmatrix} -i\check{\mathcal{Z}}_1^{\hat{\mathcal{A}}^1} \\ \check{\mathcal{Z}}_2^{\hat{\mathcal{A}}^1} \\ -i\check{\mathcal{Z}}_3^{\hat{\mathcal{A}}^1} \\ \check{\mathcal{Z}}_4^{\hat{\mathcal{A}}^1} \end{pmatrix} \left(p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow -p_1, \hat{\mathcal{A}}^1 \rightarrow \hat{\mathcal{A}}^2, \Omega_1 \rightarrow -\Omega_2 \right), \quad (5.52b)$$

onde $\check{\mathcal{Z}}_i^{\hat{\mathcal{A}}^1}$ são as componentes da expressão $\check{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{A}}^1}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{A}}^1, \Omega_1)$.

5.3.2 Operador $\hat{\mathcal{A}}^3$

Analisaremos agora a configuração anisotrópica em que o único coeficiente não nulo é $\hat{\mathcal{A}}^3$. A equação de Dirac modificada para este caso é dada por:

$$\left(\gamma_\mu p^\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{A}}^3 \gamma_5 \gamma_3 \right) \Psi = 0. \quad (5.53)$$

A relação de dispersão em primeira ordem e as soluções espinoriais são obtida de maneira equivalente a subseção 5.3.1. O resultado para a relação de dispersão é mostrado a seguir

$$E_u^{(\pm)} |^{\hat{\mathcal{A}}^3} = E_0 \left(1 \pm \frac{\Omega_3}{E_0^2} \hat{\mathcal{A}}^3 \right), \quad \Omega_3 = \sqrt{p_3^2 + m_\psi^2}. \quad (5.54)$$

Para obter as soluções espinoriais da equação (5.53), precisamos obter a forma bloco-diagonal da equação de Dirac modificada (5.53). Portanto, partindo da equação (4.43), temos

$$E\psi' + \gamma_5 E_0 \psi' + \frac{\hat{\mathcal{A}}^3}{E_0} \left[m_\psi \gamma^3 \gamma_0 \gamma_5 + \frac{p^3 p^k \gamma^k \gamma_0 \gamma_5}{(E_0 + m_\psi)} \right] \psi' = 0, \quad (5.55)$$

onde $\psi' = U\psi$. A partir da forma bloco-diagonal acima obtemos como soluções os seguintes espinores

$$\check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^3}^{(1)} = \check{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \Lambda \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^3}^{(2)} = \check{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \Lambda (-\Omega_3) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.56a)$$

$$\check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^3}^{(3)} = \check{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Lambda \end{pmatrix}, \quad \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^3}^{(4)} = \check{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Lambda (-\Omega_3) \end{pmatrix}, \quad (5.56b)$$

onde usamos as seguintes definições

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} (E_0 + m_\psi)(m_\psi + \Omega_3) + p_3^2 \\ (p_1 + ip_2)p_3 \end{pmatrix}. \quad (5.57)$$

As soluções (5.56a – 5.56b) não são as mais gerais possíveis. Portanto, em aplicações fenomenológicas, fica difícil saber quais modificações o coeficiente $\hat{\mathcal{A}}^3$

introduz. Como já discutido na subseção 5.3.1, precisamos aplicar a transformação $U^\dagger \left(\hat{\mathcal{A}}^3 \right)$ nos espinores obtidos a partir da equação (5.55). A transformação $U \left(\hat{\mathcal{A}}^3 \right)$ para o caso anisotrópico em questão é dado por:

$$U = VW + \frac{\hat{\mathcal{A}}^3}{4E_0} [\gamma_5, VW \gamma_0 \gamma_5 \gamma_3 W^\dagger V^\dagger] VW. \quad (5.58)$$

Obtendo o operador adjunto da matriz $U \left(\hat{\mathcal{A}}^3 \right)$ e aplicando aos espinores (5.56a), obtemos como primeira solução

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^3} = U^\dagger \left(\hat{\mathcal{A}}^3 \right) \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^3}^{(1)}, \quad (5.59a)$$

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^3} = \bar{N}_u^{(1)} \check{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{A}}^3} \left(\hat{\mathcal{A}}^3, \Omega_3 \right), \quad (5.59b)$$

e a segunda solução é dada por

$$u^{(2)}|_{E_u^{(-)}}^{\hat{\mathcal{A}}^3} = U^\dagger \left(\hat{\mathcal{A}}^3 \right) \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}^3}^{(2)}, \quad (5.60a)$$

$$u^{(2)}|_{E_u^{(-)}}^{\hat{\mathcal{A}}^3} = \bar{N}_u^{(2)} \check{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{A}}^3} \left(\hat{\mathcal{A}}^3, -\Omega_3 \right), \quad (5.60b)$$

onde fizemos uso das seguintes definições

$$\check{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{A}}^3} \left(\hat{\mathcal{A}}^3 \right) = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_+ \\ \bar{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{p_1 + ip_2}{2E_0^2} \begin{pmatrix} \delta \bar{\phi}_+ \\ \delta \bar{\phi}_- \end{pmatrix} \hat{\mathcal{A}}^3, \quad (5.61a)$$

$$\bar{\phi}_\pm = \begin{pmatrix} \bar{A}_\pm \\ \mp \bar{B}_\mp \end{pmatrix}, \quad \delta \bar{\phi}_\pm = \pm \varepsilon \cdot \bar{\phi}_\pm^*, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.61b)$$

$$\bar{A}_\pm = p_3 (p_3 \pm \Omega_3) + m_\psi (m_\psi - \Omega_3) + E_0 (m_\psi \mp p_3 - \Omega_3), \quad (5.62a)$$

$$\bar{B}_\pm = (p_1 + ip_2) (m_\psi \pm p_3 - \Omega_3). \quad (5.62b)$$

As constantes de normalização $\bar{N}_u^{(1)}$ e $\bar{N}_u^{(2)}$ possuem os seguintes valores

$$\bar{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^3(1)} = \frac{1}{4\sqrt{S_3(E_0 - \Omega_3)(\Omega_3 - m_\psi)}} \left(2 + \frac{\Omega_3}{E_0^2} \hat{\mathcal{A}}^3 \right), \quad (5.63a)$$

$$\bar{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^3(2)} = \bar{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^3(1)} (-\Omega_3). \quad (5.63b)$$

Assim como nos casos anteriores, o parâmetro Ω_3 nos permite conectar as duas soluções espinoriais.

As soluções para as antipartículas seguem o mesmo formalismo apresentado na subseção 5.1.2, ou seja,

$$v^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}} = u^{(2,1)c}(-d^{\mu\nu\cdots}), \quad (5.64)$$

cujas constantes de normalização e energias são, respectivamente,

$$\check{N}_v^{\hat{\mathcal{A}}^3(1,2)} = \check{N}_u^{\hat{\mathcal{A}}^3(2,1)}(-d^{\mu\nu\cdots}), \quad (5.65a)$$

$$E_v^{(\pm)}(\mathbf{p}) = E_u^{(\mp)}(\mathbf{p}, -d^{\mu\nu\cdots}). \quad (5.65b)$$

Pudemos observar que as soluções espinoriais para os casos anisotrópicos do operador $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ são mais complicadas que a configuração isotrópica apresentada na seção 5.2. O aparecimento de um parâmetro como o Ω_i caracteriza as soluções anisotrópicas, uma vez que este parâmetro introduz uma direção privilegiada nas soluções. Tal direção privilegiada manifesta-se através da presença da componente do momento p_i . Vimos também que o parâmetro Ω_i torna-se relevante, não só pela anisotropia, mas também pela conexão que estabelece entre as duas soluções distintas que se dá pela transformação $\Omega_i \rightarrow -\Omega_i$.

5.4 Soluções para algumas configurações do operador tensorial $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$

O cenário que exploraremos agora consiste da modificação da equação de Dirac pelo operador tensorial $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$. Sabemos que o operador $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ contempla os coefici-

entes $\hat{g}^{\mu\nu}$ e $\hat{H}^{\mu\nu}$, conforme a decomposição fornecida pela equação (4.16). Devido a sua estrutura, a obtenção dos espinores torna-se mais complicada e a forma dos espinores é esperada ser mais robusta. Por esse motivo, calcularemos os espinores para algumas configurações de modo a tentar simplificar um pouco os resultados.

Antes de apresentar as soluções espinoriais, mostramos a seguir a equação de Dirac modificada pelo coeficiente $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$

$$\left(\gamma_\mu p^\mu - m_\psi + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right) \psi = 0, \quad (5.66)$$

cujas equação de dispersão exata é dada por

$$\left(p^2 - m_\psi^2 - \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu} \right)^2 - 4 \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}_{\nu\kappa} p^\kappa p_\mu - 2 m_\psi^2 \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu} = 0. \quad (5.67)$$

Novamente, p é o 4-*vetor* momento, $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ é o operador tensorial de *rank* 2 e $\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \hat{\mathcal{T}}_{\alpha\beta}$ é o correspondente dual do operador $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$. Vale mencionar que todos os operadores possuem dimensão arbitrária e, como já discutido na seção 5.3, tanto a relação de dispersão quanto a equação de Dirac modificada podem englobar em sua estrutura p^0 adicionais. Trataremos deste detalhe na seção 5.7. A seguir, calcularemos os espinores para algumas configurações anisotrópicas do operador $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$.

5.4.1 Operador $\hat{\mathcal{T}}^{0i}$ com $i = \{1, 2\}$

A primeira configuração anisotrópica que estamos interessados em resolver possui a seguinte forma

$$\left(\gamma_\mu p^\mu - m_\psi + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{0i} \sigma_{0i} \right) \psi = 0, \quad (5.68)$$

onde $\sigma_{0i} = \frac{i}{2} [\gamma_0, \gamma_i]$ e o índice i não deve ser entendido como uma soma de Einstein, mas como assumindo os valores 1 e 2 separadamente. Do mesmo modo como apresentado na subseção 5.3.1, os espinores para esta configuração guardam entre si uma conexão³; exploraremos esta conexão ao longo desta subseção.

Inicialmente, como nos casos anteriores, precisamos obter a forma bloco-diagonal

3

da equação de Dirac modificada (5.68). Podemos obtê-la diretamente a partir da equação (4.43), a saber:

$$E\psi' + \gamma_5 E_0 \psi' + \frac{i\hat{\mathcal{T}}^{0i}}{E_0} (p^j \gamma^j \gamma^i + p^i) \psi' = 0, \quad (5.69)$$

onde $\psi' = U\psi$. A contribuição da relação de dispersão em primeira ordem pode ser obtida resolvendo-se a equação de autovalores acima, cujo resultado é mostrado a seguir:

$$E_u^{(\pm)} |^{\hat{\mathcal{T}}^{0i}} = E_0 \left(1 \pm \frac{\Theta_i}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{0i} \right), \quad \Theta_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 + p_i^2}. \quad (5.70)$$

Este resultado refere-se às energias das partículas. As energias das antipartículas são obtidas conforme subseção 5.1.1, ou seja,

$$E_v^{(\pm)} |^{\hat{\mathcal{T}}^{0i}} = E_u^{(\mp)} |^{\hat{\mathcal{T}}^{0i}} (\mathbf{p}, -H^{\mu\nu\cdots}).$$

As soluções espinoriais para cada configuração $\hat{\mathcal{T}}^{0i}$ ($i = \{1, 2\}$) são, respectivamente,

$$\hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{01}}^{(1)} = \hat{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{\Omega} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{01}}^{(2)} = \hat{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{\Omega}(-\Theta_1) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.71a)$$

$$\hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{01}}^{(3)} = \hat{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Omega} \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{01}}^{(4)} = \hat{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Omega}(-\Theta_1) \end{pmatrix}, \quad (5.71b)$$

Como podemos ver a seguir, a estrutura entre os coeficientes $\hat{\mathcal{T}}^{01}$ e $\hat{\mathcal{T}}^{02}$ são bem semelhantes

$$\sigma_{01} = \frac{i}{2} [\gamma_0, \gamma_2] = i \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{02} = \frac{i}{2} [\gamma_0, \gamma_2] = -i \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}.$$

A título de curiosidade, o operador bilinear que acompanha o operador $\hat{\mathcal{T}}^{03}$ possui a seguinte forma

$$\sigma_{03} = \frac{i}{2} [\gamma_0, \gamma_3] = i \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Vemos que a estrutura é completamente diferente o que impossibilita a conexão entre eles.

$$\hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{02}}^{(1)} = \hat{\mathcal{N}}' \begin{pmatrix} \tilde{\Omega} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{02}}^{(2)} = \hat{\mathcal{N}}' \begin{pmatrix} \tilde{\Omega} (-\Theta_2) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.72a)$$

$$\hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{02}}^{(3)} = \hat{\mathcal{N}}' \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\Omega} \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{02}}^{(4)} = \hat{\mathcal{N}}' \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\Omega} (-\Theta_2) \end{pmatrix}, \quad (5.72b)$$

onde fizemos uso das seguintes definições:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} ip_2 + i\Theta_1 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} -p_1 + \Theta_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Podemos constatar através das soluções acima que os espinores para cada uma das configurações estão conectados um ao outro através da seguinte transformação:

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} i\Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} (p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow -p_1, \Theta_1 \rightarrow \Theta_2). \quad (5.73)$$

Essa conexão nos permitirá simplificar os nossos resultados, uma vez que a transformação acima também será válida para as configurações mais gerais que mostraremos a seguir.

Precisamos agora aplicar a transformação $U^\dagger \left(\hat{\mathcal{T}}^{0i} \right)$ nos espinores (5.71a – 5.72b) de modo a obter as soluções mais gerais. Substituindo $\hat{\mathcal{Q}} = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{0i} \sigma_{0i}$ na equação (4.40), obtemos de maneira direta a matriz transformação que bloco-diagonaliza a equação (5.68), a saber:

$$U = VW + \frac{\hat{\mathcal{T}}^{0i}}{4E_0} [\gamma_5, VW \gamma_0 \sigma_{0i} W^\dagger V^\dagger] VW. \quad (5.74)$$

Iniciaremos calculando as soluções gerais para o operador $\hat{\mathcal{T}}^{01}$. Assim, aplicando a transformação $U^\dagger \left(\hat{\mathcal{T}}^{01} \right)$ nas soluções (5.71a) temos, respectivamente, os seguintes resultados:

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{01}} = U^\dagger \left(\hat{\mathcal{T}}^{01} \right) \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{01}}^{(1)}, \quad (5.75a)$$

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}} = \hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{01}(1)} \hat{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{T}}^{01}} \hat{U}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{01}, \Theta_1), \quad (5.75b)$$

$$u^{(2)}|_{E_u^{(-)}} = U^\dagger(\hat{\mathcal{T}}^{01}) \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{01}}^{(1)}, \quad (5.76a)$$

$$u^{(2)}|_{E_u^{(-)}} = \hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{01}(2)} \hat{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{T}}^{01}}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{01}, -\Theta_1). \quad (5.76b)$$

Nas equações acima, fizemos uso das seguintes definições:

$$\hat{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{T}}^{01}}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{01}, S_1) = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_+ \\ \hat{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{1}{2E_0^2} \begin{pmatrix} \delta\hat{\phi}_+ \\ \delta\hat{\phi}_- \end{pmatrix} \hat{\mathcal{T}}^{01}, \quad (5.77a)$$

$$\hat{\phi}_\pm = \begin{pmatrix} \hat{A}_\mp \\ \hat{B}_\pm \end{pmatrix}, \quad \delta\hat{\phi}_\pm = p_3 \begin{pmatrix} \pm\hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} + i(p_2 - \Theta_1) \begin{pmatrix} \hat{B} \\ \pm\hat{A} \end{pmatrix}, \quad (5.77b)$$

onde

$$\hat{A}_\pm = i(E_0 + m_\psi)(p_2 - \Theta_1) \pm p_3(p_1 - i\Theta_1), \quad (5.78a)$$

$$\hat{B}_\pm = (E_0 + m_\psi)p_3 \mp i(p_1 + ip_2)(p_2 - \Theta_1) \pm p_3^2, \quad (5.78b)$$

$$\hat{A} = 2im_\psi^2 + p_1(ip_1 + \Theta_1) + im_\psi(E_0 - m_\psi), \quad (5.78c)$$

$$\hat{B} = iE_0p_1 - m_\psi\Theta_1. \quad (5.78d)$$

As constantes de normalização que aparecem nas equações (5.75b) e (5.76b) possuem os seguintes valores

$$\hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{01}(1)} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\Theta_1 + p_2}{p_3^2 \Theta_1 (E_0 + m_\psi)}} \left(2 + \frac{\Theta_1}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{01} \right), \quad (5.79a)$$

$$\hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{01}(2)} = \hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{01}(1)}(-\Theta_1). \quad (5.79b)$$

Explorando agora a conexão descrita anteriormente entre as soluções espinori-

ais, encontramos as seguintes soluções para o coeficiente $\hat{\mathcal{T}}^{02}$, a saber:

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}} = \hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{01}(1)} \begin{pmatrix} -i\hat{\mathcal{Z}}_1^{\hat{\mathcal{T}}^{01}} \\ \hat{\mathcal{Z}}_2^{\hat{\mathcal{T}}^{01}} \\ -i\hat{\mathcal{Z}}_3^{\hat{\mathcal{T}}^{01}} \\ \hat{\mathcal{Z}}_4^{\hat{\mathcal{T}}^{01}} \end{pmatrix} \left(p_1 = p_2, p_2 = -p_1, p_3, \hat{\mathcal{T}}^{02}, \Theta_2 \right), \quad (5.80a)$$

$$u^{(2)}|_{E_u^{(-)}} = \hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{01}(1)} \begin{pmatrix} -i\hat{\mathcal{Z}}_1^{\hat{\mathcal{T}}^{01}} \\ \hat{\mathcal{Z}}_2^{\hat{\mathcal{T}}^{01}} \\ -i\hat{\mathcal{Z}}_3^{\hat{\mathcal{T}}^{01}} \\ \hat{\mathcal{Z}}_4^{\hat{\mathcal{T}}^{01}} \end{pmatrix} \left(p_1 = p_2, p_2 = -p_1, p_3, \hat{\mathcal{T}}^{02}, -\Theta_2 \right), \quad (5.80b)$$

onde $\hat{\mathcal{Z}}_i^{\hat{\mathcal{T}}^{01}}$ são as componentes da matriz $\hat{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{T}}^{01}}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{01}, \Theta_1)$ e as definições entre parênteses devem ser aplicadas tanto às componentes $\hat{\mathcal{Z}}_i^{\hat{\mathcal{T}}^{01}}$ quanto às constantes de normalização $\hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{01}(1)}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{02}(1)} &\equiv \hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{01}(1)} \left(p_1 = p_2, p_2 = -p_1, p_3, \hat{\mathcal{T}}^{02}, \Theta_2 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\Theta_2 - p_1}{p_3^2 \Theta_2 (E_0 + m_\psi)}} \left(2 + \frac{\Theta_2}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{02} \right), \end{aligned} \quad (5.81a)$$

$$\begin{aligned} \hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{02}(2)} &\equiv \hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{01}(1)} \left(p_1 = p_2, p_2 = -p_1, p_3, \hat{\mathcal{T}}^{02}, -\Theta_2 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\Theta_2 + p_1}{p_3^2 \Theta_2 (E_0 + m_\psi)}} \left(2 - \frac{\Theta_2}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{02} \right). \end{aligned} \quad (5.81b)$$

Precisamos calcular agora como são as soluções para as antipartículas. As soluções para as antipartículas seguem o mesmo formalismo apresentado na subseção 5.1.2, ou seja,

$$v^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}} = u^{(2,1)c}(-H^{\mu\nu\dots}), \quad (5.82)$$

cujas constantes de normalização são:

$$\check{N}_v^{\hat{\mathcal{T}}^{0i}(1,2)} = \check{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{0i}(2,1)}(-H^{\mu\nu\dots}). \quad (5.83)$$

5.4.2 Operador $\hat{\mathcal{T}}^{03}$

Outra configuração de interesse do operador $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ é mostrada a seguir

$$\left(\gamma_\mu p^\mu - m_\psi + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{03} \sigma_{03} \right) \psi = 0. \quad (5.84)$$

A equação de Dirac modificada mostrada acima pode ser posta na sua forma bloco-diagonal fazendo uso da equação (4.43), como segue:

$$E\psi' + \gamma_5 E_0 \psi' + \frac{i\hat{\mathcal{T}}^{03}}{E_0} (p^j \gamma^j \gamma^3 + p^3) \psi' = 0, \quad (5.85)$$

onde $\psi' = U\psi$. Os autovetores da equação acima são mostrados a seguir

$$\hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{03}}^{(1)} = \hat{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} i\Theta_3 \\ p_1 + ip_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{03}}^{(2)} = \hat{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} -i\Theta_3 \\ p_1 + ip_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.86a)$$

$$\hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{03}}^{(3)} = \hat{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\Theta_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{03}}^{(4)} = \hat{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i\Theta_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}, \quad (5.86b)$$

e os autovalores correspondentes às soluções (5.86a) são:

$$E_u^{(\pm)} | \hat{\mathcal{T}}^{03} = E_0 \left(1 \pm \frac{\Theta_3}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{03} \right), \quad \Theta_3 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + p_3^2}. \quad (5.87)$$

Vemos que as relações de dispersão acima contêm apenas contribuições até primeira ordem nos termos de violação de Lorentz. Isso é esperado, já que a equação bloco-diagonal (5.85) leva em consideração apenas contribuições em primeira ordem. Podemos observar através das equações (5.86a – 5.86b) que o parâmetro Θ_3 pode ser usado para conectar as duas soluções distintas, ou seja, $\hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{03}}^{(1)} \xrightarrow{\Theta_3 \rightarrow -\Theta_3} \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{03}}^{(2)}$. Como nos casos já tratados, o parâmetro Θ_3 torna-se de grande relevância na caracterização das soluções.

As soluções (5.86a – 5.86b) não são as mais gerais possíveis, já que não contemplam informações acerca do coeficiente que modifica a equação de Dirac. Portanto, como nos casos já tratados, precisamos aplicar a transformação $U^\dagger \left(\hat{\mathcal{T}}^{03} \right)$ nos espinores obtidos a partir da equação (5.85). A matriz transformação que bloco-diagonaliza a equação de Dirac modificada (5.84) é dada por:

$$U \left(\hat{\mathcal{T}}^{03} \right) = VW + \frac{\hat{\mathcal{T}}^{03}}{4E_0} [\gamma_5, VW \gamma_0 \sigma_{03} W^\dagger V^\dagger] VW. \quad (5.88)$$

Obtendo a matriz adjunta da matriz $U \left(\hat{\mathcal{T}}^{03} \right)$ acima e aplicando aos espinores (5.86a), obtemos as seguintes soluções

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{03}} = U^\dagger \left(\hat{\mathcal{T}}^{03} \right) \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{03}}^{(1)}, \quad (5.89a)$$

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{03}} = \hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(1)} \hat{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{T}}^{03}} \left(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{03}, \Theta_3 \right), \quad (5.89b)$$

e

$$u^{(2)}|_{E_u^{(-)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{03}} = U^\dagger \left(\hat{\mathcal{T}}^{03} \right) \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{03}}^{(2)}, \quad (5.90a)$$

$$u^{(2)}|_{E_u^{(-)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{03}} = \hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(1)} \hat{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{T}}^{03}} \left(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{03}, -\Theta_3 \right), \quad (5.90b)$$

onde fizemos uso das seguintes definições

$$\hat{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{T}}^{03}} \left(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{03}, \Theta_3 \right) = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_+ \\ \tilde{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{1}{2E_0^2} \begin{pmatrix} \delta \tilde{\phi}_+ \\ \delta \tilde{\phi}_- \end{pmatrix} \hat{\mathcal{T}}^{03}, \quad (5.91a)$$

$$\tilde{\phi}_\pm = \begin{pmatrix} i(p_1 - ip_2) \tilde{A}_\mp \\ \Theta_3 \tilde{A}_\pm \end{pmatrix}, \quad \delta \tilde{\phi}_\pm = \begin{pmatrix} i(p_1 - ip_2) \tilde{B}_\pm \\ \Theta_3 \tilde{B}_\mp \end{pmatrix}, \quad (5.91b)$$

$$\tilde{A}_\pm = E_0 + m_\psi \pm p_3 \mp i\Theta_3, \quad (5.92a)$$

$$\tilde{B}_\pm = ip_3 (E_0 \mp p_3) - (m_\psi \pm p_3) \Theta_3 \mp im_\psi (E_0 + m_\psi). \quad (5.92b)$$

As constantes de normalização que aparecem nas equações (5.89b) e (5.90b), segundo critério apresentado na subseção 5.1.2, possuem a seguinte forma:

$$\hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(1)} = \frac{1}{4|\Theta_3|\sqrt{E_0 + m_\psi}} \left(2 + \frac{\Theta_3}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{03} \right), \quad (5.93a)$$

$$\hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(2)} = \hat{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(1)} (-\Theta_3). \quad (5.93b)$$

As soluções espinoriais para as antipartículas são

$$v^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}} = u^{(2,1)c}(-H^{\mu\nu\dots}). \quad (5.94)$$

Da mesma maneira como apresentada nas subseções anteriores, as constantes de normalização e as energias das antipartículas possuem, respectivamente, a seguinte forma

$$\check{N}_v^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(1,2)} = \check{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(2,1)}(-H^{\mu\nu\dots}), \quad (5.95)$$

$$E_v^{(\pm)}(\mathbf{p}) = E_u^{(\mp)}(\mathbf{p}, -H^{\mu\nu\dots}). \quad (5.96)$$

5.4.3 Operador $\hat{\mathcal{T}}^{i3}$ com $i = \{1, 2\}$

A primeira configuração puramente espacial do operador $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ é caracterizada pelo operador $\hat{\mathcal{T}}^{i3}$, onde $i = \{1, 2\}$, e modifica a equação de Dirac da seguinte forma:

$$\left(\gamma_\mu p^\mu - m_\psi + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{i3} \sigma_{i3} \right) \psi = 0. \quad (5.97)$$

A forma bloco-diagonal da equação acima pode ser obtida diretamente através da equação (4.43), a saber:

$$E\psi' + \gamma_5 E_0 \psi' + \frac{\epsilon^{0ji3} \hat{\mathcal{T}}^{i3}}{2E_0} \left[-E_0 \gamma^j \gamma_0 + \frac{p^j p^k \gamma^k \gamma_0}{(E_0 + m_\psi)} \right] \psi' = 0, \quad (5.98)$$

onde $\psi' = U\psi$. Os autovalores positivos que advêm da equação (5.98) para ambas as configurações são

$$E_u^{(\pm)}|_{\hat{\mathcal{T}}^{i3}} = E_0 \left(1 \pm \frac{\Upsilon_{i3}}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{i3} \right), \quad \Upsilon_{i3} = \sqrt{p_i^2 + p_3^2 + m_\psi^2}. \quad (5.99)$$

Já os autovalores negativos após reinterpretação assumem a seguinte forma:

$$E_v^{(\pm)}(\mathbf{p}) = E_u^{(\mp)}|^{\hat{\tau}^{i3}}(\mathbf{p}, -H^{\mu\nu\cdots}). \quad (5.100)$$

Os autovetores da equação (5.98) para ambos os valores de i são, respectivamente,

$$\bar{\Psi}_{\hat{\tau}^{13}}^{(1)} = \bar{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \Delta \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_{\hat{\tau}^{13}}^{(2)} = \bar{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \Delta (-\Upsilon_{13}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.101a)$$

$$\bar{\Psi}_{\hat{\tau}^{13}}^{(3)} = \bar{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta (-\Upsilon_{13}) \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_{\hat{\tau}^{13}}^{(4)} = \bar{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta \end{pmatrix}, \quad (5.101b)$$

$$\bar{\Psi}_{\hat{\tau}^{23}}^{(1)} = \bar{\mathcal{N}}' \begin{pmatrix} \bar{\Delta} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_{\hat{\tau}^{23}}^{(2)} = \bar{\mathcal{N}}' \begin{pmatrix} \bar{\Delta} (-\Upsilon_{23}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.102a)$$

$$\bar{\Psi}_{\hat{\tau}^{23}}^{(3)} = \bar{\mathcal{N}}' \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\Delta} (-\Upsilon_{23}) \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_{\hat{\tau}^{23}}^{(4)} = \bar{\mathcal{N}}' \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\Delta} \end{pmatrix}, \quad (5.102b)$$

onde fizemos uso das seguintes definições⁴

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} ip_2 p_3 + i(E_0 + m_\psi) \Upsilon_{13} \\ E_0(E_0 + m_\psi) + ip_2(p_1 + ip_2) \end{pmatrix}, \quad (5.104a)$$

4

Os covariantes bilineares σ_{i3} para $i = \{1, 2\}$ são mostrados a seguir

$$\sigma_{13} = \frac{i}{2} [\gamma_1, \gamma_3] = i \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (5.103a)$$

$$\sigma_{23} = \frac{i}{2} [\gamma_2, \gamma_3] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}. \quad (5.103b)$$

Como podemos observar, a estrutura destes dois termos são bastante semelhantes. Portanto, a conexão entre eles é factível.

$$\bar{\Delta} = \begin{pmatrix} -p_1 p_3 + (E_0 + m_\psi) \Upsilon_{23} \\ E_0 (E_0 + m_\psi) - p_1 (p_1 + i p_2) \end{pmatrix}. \quad (5.104b)$$

As configurações em questão, assim como os casos tratados nas subseções 5.3.1 e 5.4.1, possuem uma conexão. Como pode ser observado das definições acima,

$$\Delta = \begin{pmatrix} i\bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \end{pmatrix} (p_1 \rightarrow -p_2, p_2 \rightarrow p_1, \Upsilon_{23} \rightarrow \Upsilon_{13}). \quad (5.105)$$

Portanto, só precisamos obter as soluções para uma das configurações, digamos $\hat{\mathcal{T}}^{23}$, e fazer uso das transformações (5.105) para conectar as soluções espinoriais do outro coeficiente.

Os espinores (5.101a – 5.102b) não são as soluções mais gerais possíveis e, assim como nos outros casos, precisamos conhecer a matriz transformação que bloco-diagonaliza a equação de Dirac modificada (5.97). De acordo com a equação (4.40) a matriz transformação desejada é dada por

$$U = VW + \frac{\hat{\mathcal{T}}^{i3}}{4E_0} [\gamma_5, VW \gamma_0 \sigma_{i3} W^\dagger V^\dagger] VW. \quad (5.106)$$

Aplicando a matriz transformação inversa $U^\dagger \left(\hat{\mathcal{T}}^{23} \right)$ às soluções (5.102a), obtemos as duas soluções a seguir

$$u^{(1)}|_{E^{(+)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} = U^\dagger \left(\hat{\mathcal{T}}^{23} \right) \bar{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{23}}^{(1)}, \quad (5.107a)$$

$$u^{(1)}|_{E^{(+)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} = \bar{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{23}(1)} \tilde{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} \left(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{23}, \Upsilon_{23} \right), \quad (5.107b)$$

$$u^{(2)}|_{E^{(-)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} = U^\dagger \left(\hat{\mathcal{T}}^{23} \right) \bar{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{23}}^{(1)}, \quad (5.108a)$$

$$u^{(2)}|_{E^{(-)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} = \bar{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{23}(2)} \tilde{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} \left(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{23}, -\Upsilon_{23} \right), \quad (5.108b)$$

onde fizemos uso das seguintes definições

$$\tilde{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{T}}^{23}}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{23}, \Upsilon_{23}) = \begin{pmatrix} \bar{\bar{\phi}}_+ \\ -\bar{\bar{\phi}}_- \end{pmatrix} + \frac{p_1}{2E_0^2} \begin{pmatrix} \bar{\bar{\phi}}_- \\ \bar{\bar{\phi}}_+ \end{pmatrix} \hat{\mathcal{T}}^{23}, \quad (5.109a)$$

$$\bar{\bar{\phi}}_{\pm} = \begin{pmatrix} -\bar{\bar{A}}_{\pm} \\ \bar{\bar{B}}_{\pm} \end{pmatrix}, \quad (5.109b)$$

$$\bar{\bar{A}}_{\pm} = p_1 - ip_2 \pm (E_0 + m_{\psi} \mp p_3) \bar{\bar{A}}, \quad (5.110a)$$

$$\bar{\bar{B}}_{\pm} = (p_1 + ip_2) \bar{\bar{A}} \pm (E_0 + m_{\psi} \pm p_3), \quad (5.110b)$$

$$\bar{\bar{A}} = \frac{p_1 p_3 + (E_0 + m_{\psi}) \Upsilon_{23}}{E_0 (E_0 + m_{\psi}) - p_1 (p_1 + ip_2)}. \quad (5.110c)$$

As constantes de normalização que aparecem nas equações (5.107b – 5.108b) são:

$$\bar{\bar{N}}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{23}(1)} = \frac{\sqrt{E_0 + m_{\psi} - p_1 p_3 / \Upsilon_{23} \frac{p_1 p_3}{\Upsilon_{23}}}}{4(E_0 + m_{\psi})} \left(2 + \frac{\Upsilon_{23}}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{23} \right), \quad (5.111a)$$

$$\bar{\bar{N}}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{23}(2)} = \bar{\bar{N}}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{23}(1)} (-\Upsilon_{23}). \quad (5.111b)$$

As soluções para o coeficiente $\hat{\mathcal{T}}^{13}$ são obtidas a partir das transformações (5.105). Efetuando as transformações na solução (5.107b), obtemos

$$u^{(1)}|_{E^{(+)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{13}} = \bar{\bar{N}}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{23}(1)} \begin{pmatrix} i\tilde{\mathcal{Z}}_1^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} \\ \tilde{\mathcal{Z}}_2^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} \\ i\tilde{\mathcal{Z}}_3^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} \\ \tilde{\mathcal{Z}}_4^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} \end{pmatrix} \left(p_1 = -p_2, p_2 = p_1, p_3, \hat{\mathcal{T}}^{13}, \Upsilon_{13} \right), \quad (5.112)$$

$$u^{(2)}|_{E^{(-)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{13}} = \bar{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{23}(1)} \begin{pmatrix} i\tilde{\mathcal{Z}}_1^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} \\ \tilde{\mathcal{Z}}_2^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} \\ i\tilde{\mathcal{Z}}_3^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} \\ \tilde{\mathcal{Z}}_4^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} \end{pmatrix} \left(p_1 = -p_2, p_2 = p_1, p_3, \hat{\mathcal{T}}^{13}, -\Upsilon_{13} \right). \quad (5.113)$$

As constantes de normalização para os casos acima são:

$$\begin{aligned} \bar{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{13}(1)} &\equiv \bar{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{23}(1)} \left(p_1 = -p_2, p_2 = p_1, p_3, \hat{\mathcal{T}}^{13}, \Upsilon_{13} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{E_0 + m_\psi + \frac{p_2 p_3}{\Upsilon_{13}}}}{4(E_0 + m_\psi)} \left(2 + \frac{\Upsilon_{13}}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{13} \right), \end{aligned} \quad (5.114a)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{13}(2)} &\equiv \bar{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{23}(1)} \left(p_1 = -p_2, p_2 = p_1, p_3, \hat{\mathcal{T}}^{13}, -S_{13} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{E_0 + m_\psi - \frac{p_2 p_3}{\Upsilon_{13}}}}{4(E_0 + m_\psi)} \left(2 - \frac{\Upsilon_{13}}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{13} \right). \end{aligned} \quad (5.114b)$$

Para finalizar, precisamos das soluções que descrevem as antipartículas. De acordo com a subseção 5.1.2, as soluções desejadas são:

$$v^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}} = u^{(2,1)c}(-H^{\mu\nu\dots}), \quad (5.115)$$

cujas constantes de normalização possuem a seguinte forma

$$\bar{N}_v^{\hat{\mathcal{T}}^{i3}(1,2)} = \bar{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{i3}(2,1)}(-H^{\mu\nu\dots}). \quad (5.116)$$

5.4.4 Operador $\hat{\mathcal{T}}^{12}$

Como último caso, calcularemos as soluções da seguinte equação de Dirac modificada

$$\left(\gamma_\mu p^\mu - m_\psi + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{12} \sigma_{12} \right) \psi = 0. \quad (5.117)$$

Estamos interessados em obter a forma bloco-diagonal da equação acima e para isso usaremos a equação (4.43), a saber:

$$E\psi' + \gamma_5 E_0 \psi' + \frac{\hat{\mathcal{T}}^{12}}{2E_0} \left(-E_0 \gamma^3 \gamma_0 + \frac{p^3 p^k \gamma^k \gamma_0}{(E_0 + m_\psi)} \right) \psi' = 0, \quad (5.118)$$

onde $\psi' = U\psi$. Os dois autovalores positivos que advêm da equação (5.118) são

$$E_u^{(\pm)} |^{\hat{\mathcal{T}}^{12}} = E_0 \left(1 \pm \frac{\Upsilon_{12}}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{12} \right), \quad \Upsilon_{12} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + m_\psi^2}. \quad (5.119)$$

Os autovetores da equação (5.118) são mostrados abaixo

$$\check{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{12}}^{(1)} = \check{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{12}}^{(2)} = \check{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} (-\Upsilon_{12}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.120a)$$

$$\check{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{12}}^{(3)} = \check{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\Delta} (-\Upsilon_{12}) \end{pmatrix}, \quad \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{12}}^{(4)} = \check{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\Delta} \end{pmatrix}, \quad (5.120b)$$

onde fizemos uso das seguintes definições:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} (E_0 + m_\psi) \Upsilon_{12} - \Upsilon_{12}^2 - E_0 m_\psi \\ (p_1 + ip_2) p_3 \end{pmatrix}. \quad (5.121)$$

Como já mencionado nas subseções anteriores, as soluções espinoriais que obtemos a partir da equação bloco-diagonal (5.118) não são as mais gerais possíveis. Portanto, precisamos da matriz transformação $U \left(\hat{\mathcal{T}}^{12} \right)$ que bloco-diagonaliza a equação (5.117), ou seja, precisamos da seguinte matriz

$$U \left(\hat{\mathcal{T}}^{12} \right) = VW + \frac{\hat{\mathcal{T}}^{12}}{4E_0} [\gamma_5, VW \gamma_0 \sigma_{12} W^\dagger V^\dagger] VW. \quad (5.122)$$

Calculando a matriz adjunta da matriz $U \left(\hat{\mathcal{T}}^{12} \right)$ e aplicando aos espinores (5.120a), obtemos os seguintes resultados:

$$u^{(1)} |_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{12}} = U^\dagger \left(\hat{\mathcal{T}}^{12} \right) \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{12}}^{(1)} \quad (5.123a)$$

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{12}} = \tilde{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{12}(1)} \bar{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{T}}^{12}} \left(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{12}, \Upsilon_{12} \right), \quad (5.123b)$$

e

$$u^{(2)}|_{E_u^{(-)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{12}} = U^\dagger \left(\hat{\mathcal{T}}^{12} \right) \check{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{12}}^{(2)} \quad (5.124a)$$

$$u^{(1)}|_{E_u^{(-)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{12}} = \tilde{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{12}(2)} \bar{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{T}}^{12}} \left(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{12}, -\Upsilon_{12} \right), \quad (5.124b)$$

onde fizemos uso das seguintes definições

$$\bar{\mathcal{Z}}^{\hat{\mathcal{T}}^{12}} \left(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{12}, \Upsilon_{12} \right) = \begin{pmatrix} \check{\phi}_+ \\ -\check{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{p_3}{2E_0^2} \begin{pmatrix} \check{\phi}_- \\ \check{\phi}_+ \end{pmatrix} \hat{\mathcal{T}}^{12}, \quad (5.125a)$$

$$\check{\phi}_\pm = \begin{pmatrix} -\check{A}_\pm \\ \check{B}_\pm \end{pmatrix}, \quad (5.125b)$$

$$\check{A}_\pm = p_1 - ip_2 \pm (E_0 + m_\psi \mp p_3) \check{A}, \quad (5.126a)$$

$$\check{B}_\pm = (p_1 + ip_2) \check{A} \pm (E_0 + m_\psi \pm p_3), \quad (5.126b)$$

$$\check{A} = \frac{(E_0 + m_\psi)(E_0 - \Upsilon_{12})}{(p_1 + ip_2)p_3}. \quad (5.126c)$$

As constantes de normalização que aparecem nas soluções (5.123b – 5.124b) são obtidas a partir dos critérios mencionados na subseção 5.1.2 e, portanto, assumem os seguintes valores:

$$\tilde{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{12}(1)} = \frac{\sqrt{E_0 + m_\psi - \Upsilon_{12} + \frac{E_0 m_\psi}{\Upsilon_{12}}}}{4(E_0 + m_\psi)} \left(2 + \frac{\Upsilon_{12}}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{12} \right), \quad (5.127)$$

$$\tilde{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{12}(2)} = \tilde{N}_u^{\hat{\mathcal{T}}^{12}(1)} (-\Upsilon_{12}). \quad (5.128)$$

Para finalizar, precisamos das soluções que descrevem as antipartículas. De acordo com a subseção 5.1.2, as soluções desejadas são:

$$v^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}} = u^{(2,1)c}(-H^{\mu\nu\dots}), \quad (5.129)$$

cujas constantes de normalização e energias, respectivamente, possuem a seguinte forma

$$\check{N}_v^{\hat{T}^{12}(1,2)} = \check{N}_u^{\hat{T}^{12}(2,1)}(-H_{\mu\nu\dots}), \quad (5.130a)$$

$$E_v^{(\pm)}(\mathbf{p}) = E_u^{(\mp)}(\mathbf{p}, -H_{\mu\nu\dots}). \quad (5.130b)$$

Como mencionado no início desta seção e pudemos constatar ao longo dos cálculos efetuados, as soluções para as diversas configurações do operador tensorial são muito mais complicadas que as demais tratadas neste capítulo. Vimos também que os novos parâmetros Θ_i e Υ_{ij} que introduzimos, além de caracterizar as soluções anisotrópicas, possibilitaram a conexão entre as duas soluções distintas que surgem devido a quebra da degenerescência de spin.

5.5 Soluções para o operador $\hat{\mathcal{P}}$

Para finalizarmos o estudo das soluções espinoriais fazendo uso da metodologia apresentada, trataremos agora a equação de Dirac modificada pelo operador pseudoescalar. A equação de Dirac escreve-se como:

$$\left(\gamma_\mu p^\mu - m_\psi + i\hat{\mathcal{P}}\gamma_5\right)\psi = 0. \quad (5.131)$$

O operador pseudoescalar possui a seguinte equação de dispersão exata

$$p^2 - m_\psi^2 + \hat{\mathcal{P}}^2 = 0. \quad (5.132)$$

A partir da equação acima podemos obter as energias permitidas para quaisquer configurações do operador $\hat{\mathcal{P}}$. O interesse em calcular as soluções para esta configuração reside no fato inusitado de que o operador pseudoescalar não possui contribuições em primeira ordem na relação de dispersão, ou seja, se expandirmos as soluções advindas da equação (5.132) obteremos como primeira contribuição não nula em $\hat{\mathcal{P}}$ correções quadráticas. A seguir, mostramos a primeira contribuição não

nula da relação de dispersão

$$E_u = E_0 + \frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{2E_0}. \quad (5.133)$$

De fato, todas as potências ímpares advindas da expansão das soluções da equação (5.132) são nulas. Observamos também que as soluções são degeneradas, ou seja, haverá apenas uma energia para ambas as configurações de spin.

Como o operador pseudoescalar não possui contribuições em primeira ordem, esperamos então que a forma bloco-diagonal para a configuração em questão não tenha uma contribuição em $\hat{\mathcal{P}}$. A explicação para essa ausência deve-se ao fato da matriz transformação U usada para bloco-diagonaliza a equação (5.131) nos conduz a uma equação que retém apenas contribuições em primeira ordem. Portanto, a forma bloco-diagonal da equação (5.131) é dada por

$$E\psi' + \gamma_5 E_0 \psi' = 0. \quad (5.134)$$

Vemos que a equação acima não faz qualquer menção ao operador $\hat{\mathcal{P}}$. Os autovetores da equação acima são dados por

$$\hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{P}}}^{(1)} = \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{P}}} \begin{pmatrix} \Omega \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{P}}}^{(2)} = \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{P}}} \begin{pmatrix} \Delta \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.135a)$$

$$\hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{P}}}^{(3)} = \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{P}}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Omega \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{P}}}^{(4)} = \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{P}}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta \end{pmatrix}, \quad (5.135b)$$

onde

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.136)$$

Os autovalores obtidos são quatro vezes degenerados e possuem o seguinte valor: $E_u = E_0$ e $E_v = E_0$.

As soluções (5.135a – 5.135b) não são as mais gerais possíveis, portanto, precisamos obter os espinores mais gerais. Para isso, precisamos da matriz $U^\dagger(\hat{\mathcal{P}})$

que pode ser obtida a partir da equação (4.40), a saber:

$$U = \left(1 + \frac{i\hat{\mathcal{P}}}{4E_0} [\gamma_5, VW\gamma_0\gamma_5W^\dagger V^\dagger] \right) VW. \quad (5.137)$$

A matriz U acima é a responsável por bloco-diagonalizar a equação (5.131). Aplicando então a transformação inversa $U^\dagger \left(\hat{\mathcal{P}} \right)$ às soluções (5.135a) obtemos os seguintes espinores

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)} }^{\hat{\mathcal{P}}} = \mathcal{N}_u^{\hat{\mathcal{P}}} \begin{pmatrix} \sigma^3 \cdot \phi_- \\ \phi_+ \end{pmatrix} - \mathcal{N}_u^{\hat{\mathcal{P}}} \frac{i\hat{\mathcal{P}}}{2E_0} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ -\sigma^3 \cdot \phi_- \end{pmatrix}, \quad (5.138a)$$

$$u^{(2)}|_{E_u^{(+)} }^{\hat{\mathcal{P}}} = \mathcal{N}_u^{\hat{\mathcal{P}}} \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \cdot \phi_+^* \\ \sigma^1 \cdot \phi_-^* \end{pmatrix} - \mathcal{N}_u^{\hat{\mathcal{P}}} \frac{i\hat{\mathcal{P}}}{2E_0} \begin{pmatrix} \sigma^1 \cdot \phi_-^* \\ i\sigma^2 \cdot \phi_+^* \end{pmatrix}, \quad (5.138b)$$

onde

$$\phi_\pm = \begin{pmatrix} A_\pm \\ B \end{pmatrix}, \quad (5.139a)$$

$$A_\pm = E_0 + m_\psi \pm p_3, \quad B = p_1 + ip_2, \quad (5.139b)$$

* significa complexo conjugado e σ^i são as matrizes de Pauli. A constante de normalização $\mathcal{N}_{\hat{\mathcal{P}}}$ é calculada seguindo os critérios apresentados na subseção 5.1.2. Para o caso corrente, temos:

$$\mathcal{N}_u^{\hat{\mathcal{P}}} = \frac{1}{\sqrt{2(E_0 + m_\psi)} \sqrt{1 + \frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{4E_0^2}}}.$$

Para finalizar, precisamos das soluções que descrevem as antipartículas. De acordo com a subseção 5.1.2, as soluções desejadas são:

$$v^{(1,2)}|_{E_v} = u^{(2,1)c}(-f^{\mu\cdots}), \quad (5.140)$$

cujas constantes de normalização possuem a seguinte forma:

$$\check{N}_v^{\hat{\mathcal{P}}} = \mathcal{N}_u^{\hat{\mathcal{P}}} (-f^{\mu\dots}). \quad (5.141)$$

Apesar da equação de Dirac modificada (5.131) não quebrar a degenerescência de spin, é interessante notar o fato deste coeficiente não possuir contribuições em primeira ordem e, como analisamos soluções para várias configurações do setor fermiônico, por completeza, finalizamos detalhando as soluções para o operador $\hat{\mathcal{P}}$.

5.6 Consistência das soluções espinoriais

Apenas por segurança, é sempre aconselhável verificar se as soluções obtidas realmente satisfazem a equação de Dirac modificada. Para realizar tal verificação, precisamos multiplicar o operador de Dirac modificado, que será representado por $\hat{\mathcal{D}}$, por cada um dos espinores obtidos e, ao final, substituímos a relação de dispersão relativa a cada espinor. O resultado desta operação deve ser identicamente nulo para que os resultados sejam consistentes. Os espinores, assim como o operador de Dirac modificado e a própria relação de dispersão, possuem uma forma extremamente complexa. Portanto, faz-se necessário o uso de algum método numérico para que possamos realizar o procedimento mencionado acima. A metodologia escolhida consiste em atribuir valores consistentes as variáveis do problema de modo a facilitar a interpretação dos resultados. Efetuando este procedimento para todas as soluções espinores calculadas nas seções anteriores, constatamos que nossos resultados satisfazem a equação de Dirac modificada com uma precisão de 100 casas decimais. Não devemos esquecer que os nossos resultados são válidos apenas em primeira ordem. Assim, devemos ter o cuidado de verificar se apenas contribuições em primeira ordem nos coeficientes que violam a simetria de Lorentz estão sendo levadas em consideração quando efetuamos o produto entre o operador de Dirac modificado $\hat{\mathcal{D}}$ e os espinores. Somente nessas circunstâncias, a metodologia descrita acima realmente nos dará uma solução correta. Como exemplo ilustrativo, avaliaremos sucintamente o caso anisotrópico apresentado na subseção 5.3.2. O

operador de Dirac modificado é mostrado a seguir

$$\hat{\mathcal{D}}_{\hat{\mathcal{A}}^3} = E + \gamma_5 E_0 + \frac{\hat{\mathcal{A}}^3}{E_0} \hat{\mathcal{R}}, \quad (5.142)$$

onde definimos $\hat{\mathcal{R}}$ como

$$\hat{\mathcal{R}} \equiv \left(m_\psi \gamma^3 \gamma_0 \gamma_5 + \frac{p^3 p^k \gamma^k \gamma_0 \gamma_5}{(E_0 + m_\psi)} \right). \quad (5.143)$$

A solução espinorial que usaremos como exemplo será

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^3} = \check{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_+ \\ \bar{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{p_1 + ip_2}{2E_0^2} \check{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \delta \bar{\phi}_+ \\ \delta \bar{\phi}_- \end{pmatrix} \hat{\mathcal{A}}^3.$$

Multiplicando a expressão (5.142) pelo espinor $u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^3}$ acima e substituindo as expressões para $\hat{\mathcal{D}}_{\hat{\mathcal{A}}^3}$ e $u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^3}$, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_{\hat{\mathcal{A}}^3} \times u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^3} &= E \mathbb{I}_4 \begin{pmatrix} \bar{\phi}_+ \\ \bar{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{(p_1 + ip_2)}{2E_0} E \mathbb{I}_4 \begin{pmatrix} \delta \bar{\phi}_+ \\ \delta \bar{\phi}_- \end{pmatrix} \frac{\hat{\mathcal{A}}^3}{E_0} + E_0 \gamma_5 \begin{pmatrix} \bar{\phi}_+ \\ \bar{\phi}_- \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{p_1 + ip_2}{2} \gamma_5 \begin{pmatrix} \delta \bar{\phi}_+ \\ \delta \bar{\phi}_- \end{pmatrix} \frac{\hat{\mathcal{A}}^3}{E_0} + \hat{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_+ \\ \bar{\phi}_- \end{pmatrix} \frac{\hat{\mathcal{A}}^3}{E_0} + \frac{p_1 + ip_2}{2E_0} \hat{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \delta \bar{\phi}_+ \\ \delta \bar{\phi}_- \end{pmatrix} \left(\frac{\hat{\mathcal{A}}^3}{E_0} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.144)$$

Como $E \equiv p_0$ e devemos substituir p_0 por $E_u^{(+)}|_{\hat{\mathcal{A}}^3} = E_0 \left(1 + \frac{\Omega_3}{E_0^2} \hat{\mathcal{A}}^3 \right)$, a equação acima assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_{\hat{\mathcal{A}}^3} \times u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^3} &= E_0 \left(1 + \frac{\Omega_3}{E_0^2} \hat{\mathcal{A}}^3 \right) \begin{pmatrix} \bar{\phi}_+ \\ \bar{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{(p_1 + ip_2)}{2} \left(1 + \frac{\Omega_3}{E_0^2} \hat{\mathcal{A}}^3 \right) \begin{pmatrix} \delta \bar{\phi}_+ \\ \delta \bar{\phi}_- \end{pmatrix} \frac{\hat{\mathcal{A}}^3}{E_0} + \\ &E_0 \gamma_5 \begin{pmatrix} \bar{\phi}_+ \\ \bar{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{p_1 + ip_2}{2} \gamma_5 \begin{pmatrix} \delta \bar{\phi}_+ \\ \delta \bar{\phi}_- \end{pmatrix} \frac{\hat{\mathcal{A}}^3}{E_0} + \hat{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_+ \\ \bar{\phi}_- \end{pmatrix} \frac{\hat{\mathcal{A}}^3}{E_0} + \frac{p_1 + ip_2}{2E_0} \hat{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \delta \bar{\phi}_+ \\ \delta \bar{\phi}_- \end{pmatrix} \left(\frac{\hat{\mathcal{A}}^3}{E_0} \right)^2. \end{aligned}$$

Como dissemos inicialmente, devemos reter apenas termos em primeira ordem nos coeficiente que induzem a violação na simetria de Lorentz. Portanto, eliminando

termos quadráticos em $\hat{\mathcal{A}}^3$, obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_{\hat{\mathcal{A}}^3} \times u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^3} = & E_0 \left(1 + \frac{\Omega_3}{E_0^2} \hat{\mathcal{A}}^3 \right) \begin{pmatrix} \bar{\phi}_+ \\ \bar{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{(p_1 + ip_2)}{2} \begin{pmatrix} \delta \bar{\phi}_+ \\ \delta \bar{\phi}_- \end{pmatrix} \frac{\hat{\mathcal{A}}^3}{E_0} + \\ & + E_0 \gamma_5 \begin{pmatrix} \bar{\phi}_+ \\ \bar{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{p_1 + ip_2}{2} \gamma_5 \begin{pmatrix} \delta \bar{\phi}_+ \\ \delta \bar{\phi}_- \end{pmatrix} \frac{\hat{\mathcal{A}}^3}{E_0} + \hat{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_+ \\ \bar{\phi}_- \end{pmatrix} \frac{\hat{\mathcal{A}}^3}{E_0}. \end{aligned} \quad (5.145)$$

Para avaliarmos numericamente a expressão acima, fizemos uso do sistema de álgebra computacional Mathematica. Para verificar a consistência das soluções, fizemos uso dos seguintes valores numéricos arbitrários

$$\mathcal{G} = \left\{ p_1 = e\pi, p_2 = \frac{\pi^3}{e}, p_3 = \frac{e^3}{\pi}, m_\psi = e, \hat{\mathcal{A}}^3 = \frac{\pi^2}{100} \right\}. \quad (5.146)$$

Fizemos a escolha desses números transcendentais nas definições acima, pois isso impede que haja cancelamentos “milagrosos” em primeira ordem que possam nos induzir a interpretações errôneas. Devemos observar também que o valor de $\hat{\mathcal{A}}^3$ deve ser arbitrariamente pequeno, tendo em vista que estamos tratando os operadores de maneira perturbativa. O comando a ser utilizado no Mathematica é mostrado a seguir

$$\text{N}[\text{expressão}, n], \quad (5.147)$$

onde “expressão” indica a função que desejamos avaliar numericamente e “ n ” indica a precisão da avaliação numérica que estamos interessados. Para avaliar o caso em questão, basta introduzir o seguinte comando no Mathematica

$$\text{N} \left[\hat{\mathcal{D}}_{\hat{\mathcal{A}}^3} \times u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^3} /. \mathcal{G}, 100 \right], \quad (5.148)$$

onde $/. \mathcal{G}$ é o comando que indica que estamos substituindo todas as variáveis pelos valores definidos na equação (5.146). O resultado apresentado pelo Mathematica foi

$$\hat{\mathcal{D}}_{\hat{\mathcal{A}}^3} \times u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^3} = \begin{pmatrix} 0. \times 10^{-150} + 0. \times 10^{-150}i \\ 0. \times 10^{-151} + 0. \times 10^{-151}i \\ 0. \times 10^{-150} + 0. \times 10^{-150}i \\ 0. \times 10^{-151} + 0. \times 10^{-151}i \end{pmatrix}. \quad (5.149)$$

Portanto, pode-se concluir que o nosso resultado satisfaz a equação de Dirac modificada. Fizemos uso deste procedimento para todos os casos propostos nas seções anteriores e obtivemos resultados satisfatórios para todos eles.

Outra maneira de verificar a consistência dos nossos resultados consiste em verificar se o limite $\hat{Q} \rightarrow 0$ reproduz as soluções da equação de Dirac na ausência de termos de violação. No apêndice C obtivemos as soluções para equação de Dirac livre na representação quirial. A seguir, reproduzimos as equações (C.29a – C.29d) obtidas naquele apêndice

$$u^{(1,2)}|_{E_0} = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \pm \Lambda^{(+)} \\ \Lambda^{(-)} \end{pmatrix} \leftrightarrow E_0,$$

$$v^{(1,2)}|_{E_0} = i\gamma^2 \cdot \mathcal{N} \begin{pmatrix} \pm \Lambda^{(-)} \\ \Lambda^{(+)} \end{pmatrix}^* \leftrightarrow E_0.$$

A partir destas soluções, podemos verificar se nossas soluções são realmente consistentes. Uma olhada rápida nas soluções espinoriais $\mathring{\Psi}^{(\alpha)}$, $\mathring{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}_i}^{(\alpha)}$, $\mathring{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{0i}}^{(\alpha)}$, $\mathring{\Psi}_{\hat{\mathcal{T}}^{ij}}^{(\alpha)}$ e verificamos que simplesmente fazer $\hat{Q} \rightarrow 0$ não reproduzirá as soluções da equação de Dirac livre na forma bloco-diagonal, ou seja, estas soluções não correspondem aos espinores do operador

$$\hat{\mathcal{D}} = E + \gamma_5 E_0. \quad (5.150)$$

Porém, não é tão difícil perceber que uma combinação linear daquelas soluções, no limite em que $\hat{Q} \rightarrow 0$, nos fornecerão as soluções corretas para o operador de Dirac (5.150). Como a transformação $U^\dagger(\hat{Q} \rightarrow 0)$ é linear, temos que

$$U^\dagger(\hat{Q} \rightarrow 0) \left(a_{(1)} \mathring{\Psi}^{(1)} \pm b_{(2)} \mathring{\Psi}^{(2)} \right) = a_{(1)} \mathring{u}^{(1)}|_{E_0} \pm b_{(2)} \mathring{u}^{(2)}|_{E_0}, \quad (5.151)$$

por exemplo. Dessa forma, os parâmetros escolhidos convenientemente para a combinação linear das soluções da forma bloco-diagonal não se modificarão após a transformação inversa ser aplicada. Todos os espinores obtidos nas diversas configurações propostas nas seções 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 assumem os seguintes valores

no limite em que $\hat{Q} \rightarrow 0$:

$$\sum_{\beta=1}^2 \xi_s^{(\beta)} \hat{u}^{(\beta)}|_{\hat{E}_u^{(\beta)}} = u^{(s)}|_{\hat{E}_u^{(\pm)} \rightarrow E_0}, \quad \sum_{\beta=1}^2 \varsigma_s^{(\beta)} \hat{v}^{(\beta)}|_{\hat{E}_v^{(\beta)}} = v^{(s)}|_{\hat{E}_v^{(\pm)} \rightarrow E_0}, \quad (5.152a)$$

$$\sum_{\beta=1}^2 \xi_s^{\hat{A}^i(\beta)} u^{(\beta)}|_{\hat{E}_u^{(\beta)}} = u^{(s)}|_{E_u^{(\pm)} \rightarrow E_0}, \quad \sum_{\beta=1}^2 \varsigma_s^{\hat{A}^i(\beta)} v^{(\beta)}|_{\hat{E}_v^{(\beta)}} = v^{(s)}|_{E_v^{(\pm)} \rightarrow E_0}, \quad (5.152b)$$

$$\sum_{\beta=1}^2 \xi_s^{\hat{T}^{0i}(\beta)} u^{(\beta)}|_{\hat{E}_u^{(\beta)}} = u^{(s)}|_{E_u^{(\pm)} \rightarrow E_0}, \quad \sum_{\beta=1}^2 \varsigma_s^{\hat{T}^{0i}(\beta)} v^{(\beta)}|_{\hat{E}_v^{(\beta)}} = v^{(s)}|_{E_v^{(\pm)} \rightarrow E_0}, \quad (5.152c)$$

$$\sum_{\beta=1}^2 \xi_s^{\hat{T}^{ij}(\beta)} u^{(\beta)}|_{\hat{E}_u^{(\beta)}} = u^{(s)}|_{E_u^{(\pm)} \rightarrow E_0}, \quad \sum_{\beta=1}^2 \varsigma_s^{\hat{T}^{ij}(\beta)} v^{(\beta)}|_{\hat{E}_v^{(\beta)}} = v^{(s)}|_{E_v^{(\pm)} \rightarrow E_0}, \quad (5.152d)$$

$$\sum_{\beta=1}^2 \xi_s^{\hat{P}(\beta)} u^{(\beta)}|_{\hat{E}_u} = u^{(s)}|_{E_u \rightarrow E_0}, \quad \sum_{\beta=1}^2 \varsigma_s^{\hat{P}(\beta)} v^{(\beta)}|_{\hat{E}_v} = v^{(s)}|_{E_v \rightarrow E_0}, \quad (5.152e)$$

onde o parâmetro s assume os valores 1 e 2, e $u^{(s)}$ e $v^{(s)}$ correspondem às soluções (C.29a – C.29d). Os limites acima tendem aos resultados desejados para as escolhas apropriadas dos parâmetros $\xi_s^{(\beta)}$ e $\varsigma_s^{(\beta)}$. Devemos salientar que as combinações lineares (5.152a – 5.152d) só satisfazem a equação de Dirac no limite em que $\hat{Q} \rightarrow 0$, caso contrário elas não satisfarão. O motivo, deve-se ao fato de que cada espinor $\hat{u}^{(1)}|_{\hat{E}_u^{(+)}}$ e $\hat{u}^{(2)}|_{\hat{E}_u^{(-)}}$, por exemplo, possui uma relação de dispersão diferente. Consequentemente, cada espinor satisfará sua equação de Dirac modificada com sua respectiva energia separadamente. Este problema não ocorre quando fazemos $\hat{Q} \rightarrow 0$, uma vez que todas as nossas soluções passam a ser degeneradas, ou seja, possuem a mesma relação de dispersão. A única exceção a essa regra são as soluções (5.152e), já que elas são degeneradas. As tabelas 5.1 e 5.2 mostram os valores destes parâmetros para algumas configurações escolhidas. Com estes resultados em mãos, mostramos definitivamente a consistência das nossas soluções.

Podemos observar a partir das soluções dispostas acima que elas diferem das soluções usuais encontradas comumente na literatura. A explicação para esta dife-

rença reside no fato de termos usado uma representação diferente para as matrizes gamma, que diferem da representação usual encontrada na literatura. A conexão entre estas representações pode ser encontrada de maneira mais detalhada no apêndice C.

Configuração isotrópica.		Configuração anisotrópica $\hat{\mathcal{A}}^3$	
Parâmetro	Valores	Parâmetro	Valores
$\xi_1^{(1)}$	$\frac{(p_3+ p)}{2 p (p_1+ip_2)}$	$\xi_1^{\hat{\mathcal{A}}^3(1)}$	$\frac{1}{\Omega_3(E_0+m_\psi)}$
$\xi_1^{(2)}$	$\frac{-(p_3- p)}{2 p (p_1+ip_2)}$	$\xi_1^{\hat{\mathcal{A}}^3(2)}$	$\frac{-1}{\Omega_3(E_0+m_\psi)}$
$\xi_2^{(1)}$	$\frac{-1}{2 p }$	$\xi_2^{\hat{\mathcal{A}}^3(1)}$	$\frac{(p^2-p_3)p_3}{2(p_1+ip_2)(E_0+m)((E_0+m)(m+\Omega_3)+p_3^2)\Omega_3}$
$\xi_2^{(2)}$	$\frac{1}{2 p }$	$\xi_2^{\hat{\mathcal{A}}^3(2)}$	$\frac{-(p^2-p_3)p_3}{2(p_1+ip_2)(E_0+m)((E_0+m)(m-\Omega_3)+p_3^2)\Omega_3}$
$\zeta_1^{(1)}$	$\frac{(p_3+ p)}{2 p (p_1+ip_2)}$	$\zeta_1^{\hat{\mathcal{A}}^3(1)}$	$\frac{1}{\Omega_3(E_0+m_\psi)}$
$\zeta_1^{(2)}$	$\frac{-(p_3- p)}{2 p (p_1+ip_2)}$	$\zeta_1^{\hat{\mathcal{A}}^3(2)}$	$\frac{-1}{\Omega_3(E_0+m_\psi)}$
$\zeta_2^{(1)}$	$\frac{-1}{2 p }$	$\zeta_2^{\hat{\mathcal{A}}^3(1)}$	$\frac{(p^2-p_3)p_3}{2(p_1+ip_2)(E_0+m)((E_0+m)(m+\Omega_3)+p_3^2)\Omega_3}$
$\zeta_2^{(2)}$	$\frac{1}{2 p }$	$\zeta_2^{\hat{\mathcal{A}}^3(2)}$	$\frac{-(p^2-p_3)p_3}{2(p_1+ip_2)(E_0+m)((E_0+m)(m-\Omega_3)+p_3^2)\Omega_3}$

Tabela 5.1: Valores dos coeficientes $\xi_s^{(\beta)}$ e $\zeta_s^{(\beta)}$ para a configuração isotrópica e anisotrópica $\hat{\mathcal{A}}^3$.

Configuração anisotrópica $\hat{\mathcal{T}}^{03}$		Configuração anisotrópica $\hat{\mathcal{T}}^{12}$	
Parâmetro	Valores	Parâmetro	Valores
$\xi_1^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(1)}$	$\frac{1}{2i\Theta_3}$	$\xi_1^{\hat{\mathcal{T}}^{12}(1)}$	$\frac{1}{2\Upsilon_{12}(E_0+m_\psi)}$
$\xi_1^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(2)}$	$-\frac{1}{2i\Theta_3}$	$\xi_1^{\hat{\mathcal{T}}^{12}(2)}$	$\frac{-1}{2\Upsilon_{12}(E_0+m_\psi)}$
$\xi_2^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(1)}$	$\frac{1}{2(p_1+ip_2)}$	$\xi_2^{\hat{\mathcal{T}}^{12}(1)}$	$\frac{(E_0^2-\Upsilon_{12}^2)(\Upsilon_{12}^2-m_\psi^2)}{2\Upsilon_{12}p_3(p_1+ip_2)(E_0+m_\psi)((E_0+m_\psi)\Upsilon_{12}-\Upsilon_{12}^2-E_0m_\psi)}$
$\xi_2^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(2)}$	$\frac{1}{2(p_1+ip_2)}$	$\xi_2^{\hat{\mathcal{T}}^{12}(2)}$	$\frac{(E_0^2-\Upsilon_{12}^2)(\Upsilon_{12}^2-m_\psi^2)}{2\Upsilon_{12}p_3(p_1+ip_2)(E_0+m_\psi)((E_0+m_\psi)\Upsilon_{12}+\Upsilon_{12}^2+E_0m_\psi)}$
$\zeta_1^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(1)}$	$\frac{1}{2i\Theta_3}$	$\zeta_1^{\hat{\mathcal{T}}^{12}(1)}$	$\frac{1}{2\Upsilon_{12}(E_0+m_\psi)}$
$\zeta_1^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(2)}$	$-\frac{1}{2i\Theta_3}$	$\zeta_1^{\hat{\mathcal{T}}^{12}(2)}$	$\frac{-1}{2\Upsilon_{12}(E_0+m_\psi)}$
$\zeta_2^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(1)}$	$\frac{1}{2(p_1+ip_2)}$	$\zeta_2^{\hat{\mathcal{T}}^{12}(1)}$	$\frac{(E_0^2-\Upsilon_{12}^2)(\Upsilon_{12}^2-m_\psi^2)}{2\Upsilon_{12}p_3(p_1+ip_2)(E_0+m_\psi)((E_0+m_\psi)\Upsilon_{12}-\Upsilon_{12}^2-E_0m_\psi)}$
$\zeta_2^{\hat{\mathcal{T}}^{03}(2)}$	$\frac{1}{2(p_1+ip_2)}$	$\zeta_2^{\hat{\mathcal{T}}^{12}(2)}$	$\frac{(E_0^2-\Upsilon_{12}^2)(\Upsilon_{12}^2-m_\psi^2)}{2\Upsilon_{12}p_3(p_1+ip_2)(E_0+m_\psi)((E_0+m_\psi)\Upsilon_{12}+\Upsilon_{12}^2+E_0m_\psi)}$

Tabela 5.2: Valores dos coeficientes $\xi_s^{(\beta)}$ e $\zeta_s^{(\beta)}$ para a configurações anisotrópica $\hat{\mathcal{T}}^{03}$ e $\hat{\mathcal{T}}^{12}$.

5.7 Derivadas temporais adicionais

Como mencionado nas seções 5.3 e 5.4, estamos trabalhando com operadores de dimensão arbitrária e devido a essa arbitrariedade alguns problemas podem surgir. Como já citado, problemas com a dinâmica usual da equação de Dirac surge quando p^0 adicionais estão presentes nas equações de campo. A relação de dispersão também exibe um comportamento singular que se manifesta no aparecimento de soluções “espúrias”, ou seja, relações de dispersão que não reproduzem o limite esperado quando os coeficientes que violam a simetria de Lorentz se anulam. Mostraremos a seguir como resolver estes problemas nos setores fermiônico mínimo e não mínimo.

5.7.1 Setor fermiônico mínimo

No setor fermiônico mínimo não surgem problemas com a relação de dispersão, uma vez que não há p^0 suficientes nas estruturas dos coeficientes que induzam relações de dispersão “espúrias”. No entanto, uma olhada rápida na equação (4.7a) e observamos que os p^0 adicionais que surgem modificam somente a dinâmica da equação de Dirac. A seguir, reproduzimos o operador de Dirac modificado (4.6) para o setor fermiônico mínimo

$$\hat{\mathcal{D}} = \gamma^\mu p_\mu + \left(c^{(4)\mu\nu} \gamma_\nu + d^{(4)\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\nu + e^{(4)\mu} + i f^{(4)\mu} \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{(4)\kappa\lambda\mu} \sigma_{\kappa\lambda} \right) p_\mu - M, \quad (5.153)$$

ou de forma explícita

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}} = & \gamma^\mu p_\mu + \left(c^{(4)0\nu} \gamma_\nu + d^{(4)0\nu} \gamma_5 \gamma_\nu + e^{(4)0} + i f^{(4)0} \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{(4)\kappa\lambda 0} \sigma_{\kappa\lambda} \right) p_0 \\ & + \left(c^{(4)i\nu} \gamma_\nu + d^{(4)i\nu} \gamma_5 \gamma_\nu + e^{(4)i} + i f^{(4)i} \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{(4)\kappa\lambda i} \sigma_{\kappa\lambda} \right) p_i - M. \end{aligned} \quad (5.154)$$

Os coeficientes que integram o coeficiente M não introduzem p^0 adicionais, portanto, não modificam a dinâmica da equação de Dirac. Porém, vemos claramente que os coeficientes $\{c^{(4)\mu\nu}, d^{(4)\mu\nu}, e^{(4)\mu}, f^{(4)\mu}, g^{(4)\kappa\lambda\mu}\}$ introduzem modificações na dinâmica do operador (5.154).

Nosso interesse reside então em recuperar a evolução temporal convêncional da equação de Dirac. Uma maneira de recuperar o comportamento desejado foi proposto D. Colladay e V.A. Kostelecký [77] e será descrito e aplicado a um caso particular. A metodologia consiste em introduzir um novo espinor χ que conecta-se ao espinor original ψ através da seguinte transformação

$$\psi = A\chi. \quad (5.155)$$

A matriz A deve ser inversível e deve satisfazer a seguinte propriedade

$$A^\dagger \gamma^0 \Gamma^0 A = \mathbb{I}_4. \quad (5.156)$$

Como pudemos observar na equação (5.154), Γ^0 contém todas as derivadas temporais que devem ser removidas pelo procedimento mencionado. O procedimento é eficaz e, como exemplo, calcularemos a matriz A para o caso em que $d^{(4)00}$ e $c^{(4)00}$ são os únicos coeficientes não nulos. Para encontrar a matriz A basta resolvermos a seguinte equação

$$A^\dagger \gamma^0 (\gamma^0 + d^{(4)00} \gamma_5 \gamma_0 + c^{(4)00} \gamma_0) A = \mathbb{I}_4, \quad (5.157)$$

cuja solução é

$$A = \text{diag} (A_{00}, A_{11}, A_{22}, A_{33}), \quad (5.158)$$

onde

$$A_{00} = A_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 + c^{(4)00} + d^{(4)00}}}, \quad (5.159)$$

$$A_{22} = A_{33} = \frac{1}{\sqrt{1 + c^{(4)00} - d^{(4)00}}}. \quad (5.160)$$

Com esse resultado em mãos, obtemos a equação de Dirac com a evolução temporal correta. A equação de Dirac para o novo espinor χ possui a mesma relação de dispersão, porém, algumas quantidades são modificadas devido a nova forma da equação de Dirac. Como exemplo, tanto o propagador como quaisquer quantidades relacionadas aos espinores se modificarão [78]. Para a configuração citada, o

operador de Dirac modificado assume a seguinte forma:

$$S'^{-1} \equiv \gamma^0 A^\dagger \gamma^0 \left(\gamma^\mu p_\mu - m_\psi \mathbb{I}_4 + d^{(4)00} \gamma_5 \gamma_0 p_0 + c^{(4)00} \gamma_0 p_0 \right) A, \quad (5.161)$$

cujo propagador modificado pela matriz A será:

$$iS' = \frac{i}{\Delta} \left(\hat{\xi}_\mu \gamma^\mu + \hat{\Xi} \mathbb{I}_4 + \hat{\Upsilon} \gamma^5 + \hat{\zeta}_\mu \gamma^5 \gamma^\mu + \hat{\psi}_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right), \quad (5.162)$$

onde

$$\hat{\Xi} = -m_\psi A_{11} A_{33} \alpha_-, \quad \hat{\Upsilon} = 0, \quad (5.163a)$$

$$\hat{\xi}_\mu = -2\mathbf{p}^2 d_{00}^{(4)2} p_0 \delta_{0\mu} + A_{11}^2 A_{33}^2 \alpha_- p_0 \delta_{0\mu} - \alpha_- \beta p_i \delta_{i\mu}, \quad (5.163b)$$

$$\hat{\zeta}_\mu = 2\mathbf{p}^2 d_{00}^{(4)} \beta p_0 \delta_{0\mu} - d_{00}^{(4)} \alpha_+ p_i \delta_{i\mu}, \quad (5.163c)$$

$$\hat{\psi}_{\mu 0} = 0, \quad \hat{\psi}_{ij} = m_\psi A_{11} A_{33} d_{00}^{(4)} p_0 \varepsilon_{ijk} p_k, \quad (5.163d)$$

$$\alpha_\pm = \pm E_0^2 + A_{11}^2 A_{33}^2 p_0^2, \quad (5.163e)$$

$$\beta = 1 + c_{00}^{(4)}. \quad (5.163f)$$

A metodologia empregada para obter o propagador é mostrada no apêndice E. O fator Δ corresponde à equação de dispersão e pode ser obtido a partir da equação (4.28), ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta = & E_0^4 + 4m_\psi^2 \left(d^{(4)00} p^0 \right)^2 - 2E_0^2 \left[\left(1 + c^{(4)00} \right)^2 + \left(d^{(4)00} \right)^2 \right] \left(p^0 \right)^2 \\ & + \left[\left(1 + c^{(4)00} \right)^2 - \left(d^{(4)00} \right)^2 \right]^2 \left(p^0 \right)^4. \end{aligned} \quad (5.164)$$

5.7.2 Setor fermiônico não-mínimo

Diferentemente do caso anterior, no setor não mínimo as derivadas temporais adicionais modificam não só a dinâmica como também a relação de dispersão. As modificações que surgem na relação de dispersão se manifestam na forma de soluções ditas “espúrias”, ou seja, que não possuem equivalentes na teoria de Dirac

usual. Como um exemplo elucidativo, a relação de dispersão para a equação de Dirac modificada pelo operador $\hat{\mathcal{Q}} = b^{(5)000} (i\partial_0)^2 \gamma_5 \gamma_0$ possui as seguintes soluções para a relação de dispersão

$$p_0^{(\pm)} = E_0 \pm p E_0 b^{(5)000} + \dots, \quad (5.165a)$$

$$p_0^{(\pm)} = -E_0 \pm p E_0 b^{(5)000} + \dots, \quad (5.165b)$$

$$p_0^{(\pm)} = \frac{1}{b^{(5)000}} \pm |\mathbf{p}| - \frac{1}{2} (2\mathbf{p}^2 + m_\psi^2) b^{(5)000} + \dots, \quad (5.165c)$$

$$p_0^{(\pm)} = -\frac{1}{b^{(5)000}} \pm |\mathbf{p}| + \frac{1}{2} (2\mathbf{p}^2 + m_\psi^2) b^{(5)000} + \dots. \quad (5.165d)$$

As duas últimas equações não possuem o comportamento adequado quando efetuamos o limite $b^{(5)000} \rightarrow 0$. Tais soluções são interpretadas como efeitos provenientes da escala de Planck e normalmente são descartadas. Outra observação válida é que, a *tree-level*, tais soluções podem ser descartadas sem nenhum prejuízo às análises fenomenológicas. Deve-se mencionar que as soluções “espúrias” não ocorrem quando os operadores possuem apenas componentes do momento $\mathbf{p}$ na sua estrutura. Como exemplo, as relações de dispersão para a equação de Dirac modificada pelo operador $\hat{\mathcal{Q}} = \sum_1^3 b^{(5)1ii} (i\partial_i)^2 \gamma_5 \gamma_1$, com $b^{(5)111} = b^{(5)122} = b^{(5)133}$ apenas por simplicidade, são

$$p_0^{(\pm)} = \pm \sqrt{E_0^2 + \mathbf{p}^4 (b^{(5)133})^2 + b^{(5)133} \mathbf{p}^2 \sqrt{m_\psi^2 + p_1^2}}, \quad (5.166a)$$

$$p_0^{(\pm)} = \pm \sqrt{E_0^2 + \mathbf{p}^4 (b^{(5)133})^2 - b^{(5)133} \mathbf{p}^2 \sqrt{m_\psi^2 + p_1^2}}. \quad (5.166b)$$

Assim, vemos claramente que fazendo $b^{(5)133} \rightarrow 0$ obtemos as soluções da equação de Dirac usual.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho fizemos uma rápida abordagem no capítulo 2 sobre simetrias. Comentamos rapidamente sobre simetrias discretas, onde demos ênfase nas simetrias C, P, T, sua combinação CPT e estudamos como os covariantes bilineares se comportam sob estas transformações. Descrevemos de maneira sucinta a teoria dos grupos de Lie, onde enfatizamos suas principais propriedades. Como exemplo, descrevemos os grupos $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$ e suas principais propriedades. Como o grupo de Lorentz constitui um grupo de Lie muito importante na Física de partículas e foi de fundamental importância para o desenvolvimento do nosso trabalho, tratamos-o de maneira detalhada neste capítulo. Finalizamos descrevendo como os covariantes bilineares se comportam sobre uma transformação de Lorentz.

Iniciamos o capítulo 3 discutindo os conceitos básicos do MPE e detalhamos como o modelo em questão foi estruturado. Descrevemos todos os setores que compõem o MPE de forma sucinta e demos ênfase especial ao setor dos férmions. Apresentamos o setor fermiônico mínimo do MPE e um compilado dos principais resultados obtidos para este setor.

No capítulo 4 o setor dos férmions foi generalizado, ou seja, transformamos os coeficientes que violam a simetria de Lorentz, que outrora eram constantes, em operadores. Tais operadores possuem em sua estrutura derivadas de alta ordem. O setor fermiônico generalizado apresentado é conhecido na literatura como setor fermiônico não-mínimo. Numa tentativa de condensar os setores mínimo e não-mínimo em uma única estrutura, fomos levados a decompor o operador $\hat{Q}$ em

termos dos operadores $\{\hat{c}^{\mu\nu}, \hat{d}^{\mu\nu}, \hat{e}^\mu, \hat{f}^\mu, \hat{g}^{\kappa\lambda\mu}, \hat{m}, \hat{m}_5, \hat{a}^\mu, \hat{b}^\mu, \hat{H}^{\mu\nu}\}$ de modo a facilitar a conexão entre os resultados. Apenas por simplicidade nos restringimos ao tratamento de um único férmion. Mostramos também a forma geral do operador $\hat{Q}$, sua decomposição em termos dos covariantes bilineares, sua classificação sob transformações CPT e de Lorentz, bem como a forma em que a densidade Lagrangeana $\mathcal{L}$ de Dirac é modificada. Estudamos ainda alguns aspectos da equação de Dirac modificada pelo operador $\hat{Q}$.

Após a apresentação do setor generalizado, calculamos as equações de campo, a equação de dispersão exata, apresentamos as relações de dispersão em primeira ordem nos operadores $\{\hat{S}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{V}}^\mu, \hat{\mathcal{A}}^\mu, \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\}$, além de detalhar algumas propriedades deste resultado. Mostramos também uma nova abordagem para resolver a equação de Dirac. Essa nova metodologia consistiu em encontrar uma transformação U de modo que a equação de Dirac modificada fosse posta em sua forma bloco diagonal. A vantagem desta nova metodologia consistiu em poder tratar o operador $\hat{Q}$ de maneira geral, nos possibilitar generalizar as soluções espinoriais, bem como desacoplar as equações que descrevem as partículas das equações que descrevem as antipartículas.

Já no capítulo 5 usamos todo o arcabouço teórico desenvolvido nos capítulos anteriores para resolver a equação de Dirac modificada por operadores de spin não-degenerado. Os operadores de spin não-degenerado foram representados pelos operadores $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ e $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$. Conforme mostrado no capítulo 3, o operador pseudovetorial $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ contempla em sua estrutura os coeficientes $\hat{d}^\mu$ e $\hat{b}^\mu$, já o operador tensorial de *rank*-2 $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ contempla os coeficientes $\hat{g}^{\mu\nu}$ e $\hat{H}^{\mu\nu}$. Uma das características mais notória destes operadores é que eles possuem duas relações de dispersão distintas para cada projeção de spin. Para estes dois operadores calculamos as relações de dispersão, bem como as soluções espinoriais para as várias configurações possíveis.

A primeira configuração tratada para ambos os operadores foi a “isotrópica,” uma vez que as soluções dependem de poucos parâmetros. Mostramos que, de fato, as relações de dispersão e espinores dependem apenas do módulo do momento, o que caracteriza isotropia, e possuem uma forma relativamente simples. Porém, quando generalizamos tais soluções para o setor não-mínimo, as soluções tornam-se mais complexas devido ao aparecimento de componentes adicionais do momento. Finalizamos obtendo os espinores que descrevem as antipartículas e as

constantes de normalização seguindo a metodologia apresentada na subseção 5.1.1. Em seguida tratamos separadamente as configurações anisotrópicas dos operadores $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ e $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$. Percebemos que as soluções espinoriais são muito mais complicadas quando comparadas às soluções isotrópicas. Percebemos, e era esperado nestes casos, o aparecimento de parâmetros que dependem das componentes do momento e, portanto, caracterizam a anisotropia da configuração tratada. Os parâmetros anisotrópicos $\Omega_i, \Theta_i, \Upsilon_{ij}$ desempenharam um papel importante na conexão entre as soluções que descrevem a quebra na degenerescência de spin. Fazer $\Omega_i \mapsto -\Omega_i$, por exemplo, conecta os dois espinores que descrevem as partículas e os dois anti-espinores. A mesma conexão foi observada entre as relações de dispersão e entre as constantes de normalização. Na tabela 6.1 compilamos todos os resultados obtidos no capítulo 5.

Por completeza, avaliamos também o operador $\hat{\mathcal{P}}$ que, apesar de ser degenerado com respeito ao spin, possui uma característica peculiar. Tal operador não possui contribuições em primeira ordem, como foi mostrado a partir da relação de dispersão (4.31). Em observáveis experimentais como taxas de decaimento, por exemplo, é esperado que o operador $\hat{\mathcal{P}}$ contribua apenas em segunda ordem. Portanto, em princípio, era esperado que os espinores obtidos via formalismo apresentado no capítulo 4 também não possuíssem tal contribuição. Porém, mostramos que o operador $\hat{\mathcal{P}}$ contribui em primeira ordem nas soluções espinoriais, como pôde ser

Coeficiente X	$E_u^{(\pm)}/E_0$	Espinores	Anti-espinores	Parâmetros
$\frac{4}{3}E_0\hat{d} - \hat{b} + m_\psi\hat{g}$	$1 \pm \frac{ \mathbf{p} }{E_0^2}X$	Eq. (5.21)	Eq. (5.23)	$ \mathbf{p} $
$\hat{\mathcal{A}}^1$	$1 \pm \frac{\Omega_i}{E_0^2}X$	Eq's. (5.36b) e (5.37b)	Eq. (5.43)	$\Omega_i = \sqrt{p_i^2 + m_\psi^2}$
$\hat{\mathcal{A}}^2$		Eq's. (5.44b) e (5.45b)	Eq. (5.51)	
$\hat{\mathcal{A}}^3$		Eq's. (5.59b) e (5.60b)	Eq. (5.64)	
$\hat{\mathcal{T}}^{01}$	$1 \pm \frac{\Theta_i}{E_0^2}X$	Eq's. (5.75b) e (5.76b)	Eq. (5.82)	$\Theta_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 - p_i^2}$
$\hat{\mathcal{T}}^{02}$		Eq's. (5.80a) e (5.80b)	Eq. (5.82)	
$\hat{\mathcal{T}}^{03}$		Eq's. (5.89b) e (5.90b)	Eq. (5.94)	
$\hat{\mathcal{T}}^{13}$	$1 \pm \frac{\Upsilon_{ij}}{E_0^2}X$	Eq's. (5.112) e (5.113)	Eq. (5.116)	$\Upsilon_{ij} = \sqrt{p_i^2 + p_j^2 + m_\psi^2}$
$\hat{\mathcal{T}}^{23}$		Eq's. (5.107b) e (5.108b)	Eq. (5.116)	
$\hat{\mathcal{T}}^{12}$		Eq's. (5.123b) e (5.124b)	Eq. (5.129)	

Tabela 6.1: Resumo dos resultados obtidos para as relações de dispersão e espinores modificados.

visto na seção 5.5.

Discutimos a consistência das soluções espinoriais de duas formas: numérica e analiticamente. No que concerne a análise numérica, explicamos detalhadamente como proceder para testar a consistência dos espinores. Empregamos este método, pois as estruturas das equações de Dirac modificada, bem como os espinores e relações de dispersão envolvidas no problema são bastante complexas. No que diz respeito ao teste analítico, tentamos reproduzir as soluções da equação de Dirac livre, no limite em que $\hat{\mathcal{Q}} \rightarrow 0$, a partir das soluções espinoriais obtidas para cada caso. Ambos os procedimentos adotados se mostraram eficazes e nos possibilitaram mostrar que as nossas soluções são realmente consistentes para todos os casos tratados.

Avaliamos e discutimos também os efeitos causados pela presença de derivadas temporais adicionais nos setores mínimo e não mínimo do MPE. Apresentamos um método desenvolvido na referência [77] que nos permite recuperar a dinâmica usual da equação de Dirac no setor mínimo do MPE. Como um exemplo ilustrativo, calculamos a forma explícita da matriz A necessária para remover as derivadas temporais adicionais devido a presença do operador $\hat{\mathcal{Q}} = d^{(4)00}\gamma_5\gamma_0i\partial_0 + c^{(4)00}\gamma_0i\partial_0$ na densidade Lagrangeana $\mathcal{L}$. Através do procedimento discutido na seção 5.7.1, mostramos como a equação de Dirac modificada recupera novamente a evolução temporal adequada. Calculamos também o propagador para a nova equação de Dirac e mostramos que a matriz A não modifica a relação de dispersão. Por fim, avaliamos as consequências dessas derivadas temporais no setor não-mínimo do MPE. Um dos principais efeitos foi o surgimento de relações de dispersão ditas “espúrias.” Tais relações de dispersão adicionais não reproduzem o limite esperado quando $\hat{\mathcal{Q}} \rightarrow 0$ e, portanto, são interpretadas como efeitos advindos da escala de Planck.

Todos os resultados obtidos no capítulo 5 podem ser usados em aplicações fenomenológicas, tais como radiação Cherenkov e decaimento de fótons. Podemos também avaliar quais efeitos o setor não-mínimo induz no limite não-relativístico usando forma bloco-diagonal apresentada no capítulo 4. Portanto, nosso próximo objetivo é usar todo o ferramental aqui desenvolvido para avaliar todas as possíveis aplicações fenomenológicas.

Apêndice A

Cálculo da relação de dispersão

Iremos agora calcular explicitamente a relação de dispersão mostrada na seção 4.3. Como já mencionado, podemos escrever o operador de Dirac modificado em forma de bloco,

$$\gamma_\mu p^\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Escrevendo explicitamente o operador $\hat{\mathcal{Q}}$, temos

$$\hat{\mathcal{Q}} = \hat{\mathcal{S}} + i\hat{\mathcal{P}}\gamma_5 + \hat{\mathcal{V}}^\mu \gamma_\mu + \hat{\mathcal{A}}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}, \quad (\text{A.2})$$

organizando um pouco mais

$$\left(p^\mu + \hat{\mathcal{V}}^\mu + \hat{\mathcal{A}}^\mu \gamma_5 \right) \gamma_\mu + \left(-m_\psi + \hat{\mathcal{S}} + i\hat{\mathcal{P}}\gamma_5 \right) + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}, \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} & p^\mu \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \gamma_\mu + \hat{\mathcal{V}}^\mu \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \gamma_\mu + \hat{\mathcal{A}}^\mu \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \gamma_\mu - m_\psi \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \\ & + \hat{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} + i\hat{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

obtemos

$$\begin{pmatrix} p^\mu + \hat{\mathcal{V}}^\mu - \hat{\mathcal{A}}^\mu & 0 \\ 0 & p^\mu + \hat{\mathcal{V}}^\mu + \hat{\mathcal{A}}^\mu \end{pmatrix} \gamma_\mu + \begin{pmatrix} -m_\psi + \hat{\mathcal{S}} - i\hat{\mathcal{P}} & 0 \\ 0 & -m_\psi + \hat{\mathcal{S}} + i\hat{\mathcal{P}} \end{pmatrix} + \frac{i}{4} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (\text{A.5})$$

Usando as definições

$$\hat{\mathcal{S}}_\pm = -m_\psi + \hat{\mathcal{S}} \pm i\hat{\mathcal{P}}, \quad \hat{\mathcal{V}}_\pm^\mu = p^\mu + \hat{\mathcal{V}}^\mu \pm \hat{\mathcal{A}}^\mu, \quad (\text{A.6})$$

temos

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{V}}_-^\mu & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \end{pmatrix} \gamma_\mu + \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_- & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{S}}_+ \end{pmatrix} + \frac{i}{4} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (\text{A.7})$$

Introduzindo a notação

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i), \quad (\text{A.8})$$

onde σ^0 é a matriz identidade em duas dimensões e σ^i representa a i -ésima matriz de Pauli. A matriz adjunta a σ^μ é $\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i)$, e ambas satisfazem a seguinte identidade básica:

$$\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = \eta_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \bar{\sigma}^\kappa \sigma^\lambda. \quad (\text{A.9})$$

Reescrevendo (A.7)

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{V}}_-^\mu & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \end{pmatrix} \gamma_\mu + \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_- & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{S}}_+ \end{pmatrix} + \frac{i}{4} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \{\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu\}, \quad (\text{A.10})$$

e usando a forma explícita para as matrizes gamma, obtemos

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{V}}_-^\mu & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_- & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{S}}_+ \end{pmatrix} + \frac{i}{4} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\nu \\ \bar{\sigma}_\nu & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{4} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\nu \\ \bar{\sigma}_\nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

ou de forma mais compacta

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_- & \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \\ \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu & \hat{\mathcal{S}}_+ \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \begin{pmatrix} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Fazendo $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu})$ na última parcela

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_- & \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \\ \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu & \hat{\mathcal{S}}_+ \end{pmatrix} + \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

e substituindo a equação (A.9), obtemos

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_- & \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \\ \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu & \hat{\mathcal{S}}_+ \end{pmatrix} + \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \mathbb{G}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbb{G}_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

onde

$$\mathbb{G}_{11} = \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \sigma^\kappa \bar{\sigma}^\lambda, \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbb{G}_{22} = \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \bar{\sigma}^\kappa \sigma^\lambda, \quad (\text{A.16})$$

Como $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = 0$ e a parcela $\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda} = \tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ equivale ao dual do operador $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$, temos

$$\mathbb{G}_{11} = (\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} - i\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}) \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu, \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbb{G}_{22} = (\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} + i\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}) \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu. \quad (\text{A.18})$$

Definindo

$$\hat{\mathcal{T}}_\pm^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \pm i\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}), \quad (\text{A.19})$$

obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu & \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \\ \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu & \hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Precisamos agora calcular o determinante da equação acima. Para isso, nos valem da identidade já mencionada no capítulo 4, isto é

$$\det \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix} = \det(\mathbb{A}\mathbb{D}) + \det(\mathbb{B}\mathbb{C}) - \text{tr}(\bar{\mathbb{B}}\mathbb{A}\bar{\mathbb{C}}\mathbb{D}). \quad (\text{A.21})$$

Substituindo a equação (A.20), temos

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu & \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \\ \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu & \hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \end{pmatrix} = \\ & = \det \left[\left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu \right) \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) \right] + \det \left(\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu \right) \\ & - \text{tr} \left[\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \bar{\sigma}_\mu \left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu \right) \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \sigma_\mu \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Calcularemos cada um dos termos separadamente, a saber

- Primeiro termo: O primeiro termo pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \det \left[\left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu \right) \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) \right] = \\ & = \det \left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu \right) \det \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Calcularemos inicialmente o $\det \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right)$. Analisando separadamente o segundo termo entre parênteses, temos

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu &= \frac{1}{2} \left(\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda} \right) \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu, \\ \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu &= \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu. \end{aligned}$$

Substituindo $\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = (\eta_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \bar{\sigma}^\kappa \sigma^\lambda)$ no segundo termo, temos

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda} \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\sigma}^\alpha \sigma^\beta \right), \quad (\text{A.24})$$

como $\eta_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda} = 0$, obtemos

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu = \frac{1}{2}\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu - \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda}\bar{\sigma}^\alpha\sigma^\beta, \quad (\text{A.25})$$

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu = \frac{1}{2}\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu - \frac{1}{8}(\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\kappa\beta} - \delta_{\alpha\kappa}\delta_{\beta\lambda})\hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda}\bar{\sigma}^\alpha\sigma^\beta, \quad (\text{A.26})$$

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu = \frac{1}{2}\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu - \frac{1}{8}\hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda}\bar{\sigma}^\lambda\sigma^\kappa + \frac{1}{8}\hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda}\bar{\sigma}^\kappa\sigma^\lambda, \quad (\text{A.27})$$

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu = \frac{1}{2}\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu - \frac{1}{4}\hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda}\bar{\sigma}^\lambda\sigma^\kappa, \quad (\text{A.28})$$

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu = \frac{1}{4}\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu. \quad (\text{A.29})$$

Efetando a soma de Einstein, temos

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu = \frac{1}{4}\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu = \hat{\mathcal{T}}^{00}\bar{\sigma}_0\sigma_0 + \hat{\mathcal{T}}^{0i}\bar{\sigma}_0\sigma_i + \hat{\mathcal{T}}^{i0}\bar{\sigma}_i\sigma_0 + \hat{\mathcal{T}}^{ij}\bar{\sigma}_i\sigma_j, \quad (\text{A.30})$$

ou ainda

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu = \hat{\mathcal{T}}^{0i}\sigma_0\sigma_i - \hat{\mathcal{T}}^{i0}\sigma_i\sigma_0 - \hat{\mathcal{T}}^{ij}\sigma_i\sigma_j. \quad (\text{A.31})$$

Usando a identidade $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ na equação acima, obtemos a seguinte expressão

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu = 2\hat{\mathcal{T}}^{0i}\sigma_0\sigma_i - \hat{\mathcal{T}}^{ij}(\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k), \quad (\text{A.32})$$

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu = 2\hat{\mathcal{T}}^{0i}\sigma_0\sigma_i - i\varepsilon_{ijk}\hat{\mathcal{T}}^{ij}\sigma_k, \quad (\text{A.33})$$

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu = 2\left(\hat{\mathcal{T}}^{0k} - \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}\hat{\mathcal{T}}^{ij}\right)\sigma_k. \quad (\text{A.34})$$

Efetando a soma sobre o índice k , chegamos ao seguinte resultado

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu = 2\left(\hat{\mathcal{T}}^{01} - \frac{i}{2}\varepsilon_{ij1}\hat{\mathcal{T}}^{ij}\right)\sigma_1 + 2\left(\hat{\mathcal{T}}^{02} - \frac{i}{2}\varepsilon_{ij2}\hat{\mathcal{T}}^{ij}\right)\sigma_2 + 2\left(\hat{\mathcal{T}}^{03} - \frac{i}{2}\varepsilon_{ij3}\hat{\mathcal{T}}^{ij}\right)\sigma_3. \quad (\text{A.35})$$

Efetando agora a soma nos índices i, j , obtemos

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = 2 \left(\hat{\mathcal{T}}^{01} - i \hat{\mathcal{T}}^{23} \right) \sigma_1 + 2 \left(\hat{\mathcal{T}}^{02} - i \hat{\mathcal{T}}^{31} \right) \sigma_2 + 2 \left(\hat{\mathcal{T}}^{03} - i \hat{\mathcal{T}}^{12} \right) \sigma_3. \quad (\text{A.36})$$

Substituindo as matrizes gamma,

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.37})$$

obtemos o seguinte resultado

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = 2 \left(\hat{\mathcal{T}}^{01} - i \hat{\mathcal{T}}^{23} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \left(\hat{\mathcal{T}}^{02} - i \hat{\mathcal{T}}^{31} \right) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + 2 \left(\hat{\mathcal{T}}^{03} - i \hat{\mathcal{T}}^{12} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{i}{2}$ e adicionando o operador $\hat{\mathcal{S}}_+$, obtemos a seguinte matriz

$$\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_+ + i \hat{\mathcal{T}}^{03} + \hat{\mathcal{T}}^{12} & i \hat{\mathcal{T}}^{01} + \hat{\mathcal{T}}^{23} + \hat{\mathcal{T}}^{02} - i \hat{\mathcal{T}}^{31} \\ i \hat{\mathcal{T}}^{01} + \hat{\mathcal{T}}^{23} - \hat{\mathcal{T}}^{02} + i \hat{\mathcal{T}}^{31} & \hat{\mathcal{S}}_+ - \hat{\mathcal{T}}^{12} - i \hat{\mathcal{T}}^{03} \end{pmatrix}.$$

O determinante da expressão acima é

$$\begin{aligned} \det \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) &= \hat{\mathcal{S}}_+^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{01} \right)^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{02} \right)^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{03} \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{T}}^{12} \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{T}}^{31} \right)^2 \\ &\quad - \left(\hat{\mathcal{T}}^{23} \right)^2 + 2i \hat{\mathcal{T}}^{01} \hat{\mathcal{T}}^{23} + 2i \hat{\mathcal{T}}^{02} \hat{\mathcal{T}}^{31} + 2i \hat{\mathcal{T}}^{03} \hat{\mathcal{T}}^{12}, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\det \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) = \hat{\mathcal{S}}_+^2 - \hat{\mathcal{T}}_+^2, \quad (\text{A.38})$$

onde $\hat{\mathcal{T}}_+^2 = \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu}$.

Procedendo de maneira inteiramente semelhante ao cálculo acima, o primeiro termo da equação (A.23) é dado por

$$\begin{aligned} \det \left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) &= \hat{\mathcal{S}}_-^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{01} \right)^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{02} \right)^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{03} \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{T}}^{12} \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{T}}^{31} \right)^2 \\ &\quad - \left(\hat{\mathcal{T}}^{23} \right)^2 - 2i \hat{\mathcal{T}}^{01} \hat{\mathcal{T}}^{23} - 2i \hat{\mathcal{T}}^{02} \hat{\mathcal{T}}^{31} - 2i \hat{\mathcal{T}}^{03} \hat{\mathcal{T}}^{12}, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\det \left(\hat{S}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) = \hat{S}_-^2 - \hat{\mathcal{T}}_-^2, \quad (\text{A.39})$$

onde $\hat{\mathcal{T}}_-^2 = \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu}$ ¹.

Substituindo os resultados (A.38) e (A.39) em (A.23), obtemos

$$\det \left[\left(\hat{S}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu \right) \left(\hat{S}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) \right] = \left(\hat{S}_-^2 - \hat{\mathcal{T}}_-^2 \right) \left(\hat{S}_+^2 - \hat{\mathcal{T}}_+^2 \right). \quad (\text{A.40})$$

- Segundo termo: O segundo termo é mostrado a seguir

$$\det \left(\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu \right) = \det \left(\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \right) \det \left(\hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu \right), \quad (\text{A.41})$$

expandindo a soma de cada um dos termos do lado esquerdo, obtemos

$$\det \left(\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu \right) = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{V}}_-^0 - \hat{\mathcal{V}}_-^3 & i\hat{\mathcal{V}}_-^2 - \hat{\mathcal{V}}_-^1 \\ -\hat{\mathcal{V}}_-^1 - i\hat{\mathcal{V}}_-^2 & \hat{\mathcal{V}}_-^0 + \hat{\mathcal{V}}_-^3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{V}}_+^0 - \hat{\mathcal{V}}_+^3 & i\hat{\mathcal{V}}_+^2 - \hat{\mathcal{V}}_+^1 \\ -\hat{\mathcal{V}}_+^1 - i\hat{\mathcal{V}}_+^2 & \hat{\mathcal{V}}_+^0 + \hat{\mathcal{V}}_+^3 \end{pmatrix}.$$

O determinante é dado por

$$\det \left(\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu \right) = \left[\left(\hat{\mathcal{V}}_-^0 \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{V}}_-^1 \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{V}}_-^2 \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{V}}_-^3 \right)^2 \right] \times \left[\left(\hat{\mathcal{V}}_+^0 \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{V}}_+^1 \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{V}}_+^2 \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{V}}_+^3 \right)^2 \right]. \quad (\text{A.42})$$

O lado esquerdo ainda pode ser escrito de uma maneira mais compacta, a saber

$$\det \left(\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu \right) = \hat{\mathcal{V}}_-^2 \hat{\mathcal{V}}_+^2. \quad (\text{A.43})$$

- Terceiro termo

¹O valor das contrações $\hat{\mathcal{T}}_+^2$ e $\hat{\mathcal{T}}_-^2$ são mostrados a seguir

$$\hat{\mathcal{T}}_+^2 = - \left(\hat{\mathcal{T}}^{01} \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{T}}^{02} \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{T}}^{03} \right)^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{12} \right)^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{31} \right)^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{23} \right)^2 - 2i\hat{\mathcal{T}}^{01}\hat{\mathcal{T}}^{23} - 2i\hat{\mathcal{T}}^{02}\hat{\mathcal{T}}^{31} - 2i\hat{\mathcal{T}}^{03}\hat{\mathcal{T}}^{12},$$

e

$$\hat{\mathcal{T}}_-^2 = - \left(\hat{\mathcal{T}}^{01} \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{T}}^{02} \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{T}}^{03} \right)^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{12} \right)^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{31} \right)^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{23} \right)^2 + 2i\hat{\mathcal{T}}^{01}\hat{\mathcal{T}}^{23} + 2i\hat{\mathcal{T}}^{02}\hat{\mathcal{T}}^{31} + 2i\hat{\mathcal{T}}^{03}\hat{\mathcal{T}}^{12}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{tr} \left[\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \bar{\sigma}_\mu \left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa} \sigma_\nu \bar{\sigma}_\kappa \right) \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \sigma_\lambda \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\rho\sigma} \bar{\sigma}_\rho \sigma_\sigma \right) \right] = \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \hat{\mathcal{S}}_- \hat{\mathcal{S}}_+ \text{tr} (\bar{\sigma}_\mu \sigma_\lambda) \\
& + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \hat{\mathcal{S}}_+ \hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa} \text{tr} (\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \bar{\sigma}_\kappa \sigma_\lambda) + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \hat{\mathcal{S}}_- \hat{\mathcal{T}}_+^{\rho\sigma} \text{tr} (\bar{\sigma}_\mu \sigma_\lambda \bar{\sigma}_\rho \sigma_\sigma) \\
& + \left(\frac{i}{2} \right)^2 \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa} \hat{\mathcal{T}}_+^{\rho\sigma} \text{tr} (\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \bar{\sigma}_\kappa \sigma_\lambda \bar{\sigma}_\rho \sigma_\sigma), \tag{A.44}
\end{aligned}$$

fazendo uso das identidades

$$\text{tr} (\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu) = 2\eta_{\mu\nu} \tag{A.45}$$

$$\text{tr} (\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \bar{\sigma}_\kappa \sigma_\lambda) = 2\eta_{\mu\nu\kappa\lambda}, \tag{A.46}$$

$$\text{tr} (\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \bar{\sigma}_\kappa \sigma_\lambda \bar{\sigma}_\rho \sigma_\sigma) = 2\eta_{\mu\nu\kappa}{}^\tau \eta_{\tau\lambda\rho\sigma}, \tag{A.47}$$

$$\eta_{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa} = 4\hat{\mathcal{T}}_{-\mu\lambda}, \quad \eta_{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_+^{\kappa\lambda} = -4\hat{\mathcal{T}}_{+\mu\nu}, \tag{A.48}$$

$$\eta_{\mu\nu\kappa\lambda} = \eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda} - \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa} - i\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}, \tag{A.49}$$

temos

$$\begin{aligned}
& \text{tr} \left[\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \bar{\sigma}_\mu \left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa} \sigma_\nu \bar{\sigma}_\kappa \right) \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \sigma_\lambda \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\rho\sigma} \bar{\sigma}_\rho \sigma_\sigma \right) \right] = 2\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \hat{\mathcal{S}}_- \hat{\mathcal{S}}_+ \eta_{\mu\lambda} \\
& + 2\frac{i}{2} \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \hat{\mathcal{S}}_+ \hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa} \eta_{\mu\nu\kappa\lambda} + 2\frac{i}{2} \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \hat{\mathcal{S}}_- \hat{\mathcal{T}}_+^{\rho\sigma} \eta_{\mu\lambda\rho\sigma} \\
& + 2 \left(\frac{i}{2} \right)^2 \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa} \hat{\mathcal{T}}_+^{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu\kappa}{}^\tau \eta_{\tau\lambda\rho\sigma}. \tag{A.50}
\end{aligned}$$

Usando as definições $\eta_{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa} = 4\hat{\mathcal{T}}_{-\mu\lambda}$ e $\eta_{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_+^{\kappa\lambda} = -4\hat{\mathcal{T}}_{+\mu\nu}$, temos

$$\text{tr} \left[\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \bar{\sigma}_\mu \left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa} \sigma_\nu \bar{\sigma}_\kappa \right) \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \sigma_\lambda \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\rho\sigma} \bar{\sigma}_\rho \sigma_\sigma \right) \right] =$$

$$= 2\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \hat{\mathcal{S}}_- \hat{\mathcal{S}}_+ \eta_{\mu\lambda} + 4i\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \hat{\mathcal{S}}_+ \hat{\mathcal{T}}_{-\mu\lambda} - 4i\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \hat{\mathcal{S}}_- \hat{\mathcal{T}}_{+\mu\lambda} + 8\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \hat{\mathcal{V}}_{+\lambda} \hat{\mathcal{T}}_{-\mu\alpha} \hat{\mathcal{T}}_+^{\alpha\lambda}. \quad (\text{A.51})$$

O resultado acima pode ainda ser escrito de uma maneira mais compacta, a saber

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \bar{\sigma}_\mu \left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa} \sigma_\nu \bar{\sigma}_\kappa \right) \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \sigma_\lambda \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\rho\sigma} \bar{\sigma}_\rho \sigma_\sigma \right) \right] = \\ = 2\hat{\mathcal{V}}_- \cdot \left(\hat{\mathcal{S}}_- + 2i\hat{\mathcal{T}}_- \right) \cdot \left(\hat{\mathcal{S}}_+ - 2i\hat{\mathcal{T}}_+ \right) \cdot \hat{\mathcal{V}}_+. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Juntando os resultados (A.40), (A.43) e (A.52) acima, encontramos:

$$\left(\hat{\mathcal{S}}_-^2 - \hat{\mathcal{T}}_-^2 \right) \left(\hat{\mathcal{S}}_+^2 - \hat{\mathcal{T}}_+^2 \right) + \hat{\mathcal{V}}_-^2 \hat{\mathcal{V}}_+^2 - 2\hat{\mathcal{V}}_- \cdot \left(\hat{\mathcal{S}}_- + 2i\hat{\mathcal{T}}_- \right) \cdot \left(\hat{\mathcal{S}}_+ - 2i\hat{\mathcal{T}}_+ \right) \cdot \hat{\mathcal{V}}_+ = 0.$$

Apêndice B

Espinores exatos para algumas configurações especiais

Iremos mostrar algumas soluções exatas para configurações isotrópicas dos coeficientes $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ e $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ que controlam a violação da simetria de Lorentz. Mesmo para estes casos com a escolha de um único coeficiente fizemos uso do Software Mathematica para obter as soluções a seguir.

B.1 Coeficiente b isotrópico

O primeiro caso no qual obteremos as soluções espinoriais exatas é para a configuração $b^{(3)0}$. Esta configuração nos fornece a seguinte relação de dispersão

$$E_u^{(\pm)} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_\psi^2 \mp 2b^{(3)0} |\mathbf{p}| + (b^{(3)0})^2}. \quad (\text{B.1})$$

Há duas soluções distintas, como esperado, e elas diferem uma da outra em primeira ordem em $b^{(3)0}$. As energias em primeira ordem são:

$$E_u^{(\pm)(1)} = \sqrt{p^2 + m_\psi^2} \mp \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{p^2 + m_\psi^2}} b^{(3)0}. \quad (\text{B.2})$$

Como a relação de dispersão acima nos mostra, a configuração escolhida de fato é isotrópica pois depende apenas de $|\mathbf{p}|$ na parcela que contém a violação de

Lorentz.

Para a obtenção dos espinores procederemos como descrito no capítulo 4. Introduzindo os valores das energias (B.1) na equação de Dirac

$$(\gamma^\mu \partial_\mu - m_\psi + b^{(3)0} \gamma_5 \gamma_0) \psi = 0, \quad (\text{B.3})$$

e resolvendo o sistema de equações resultantes com o auxílio do Mathematica, obtemos as seguintes soluções

$$u^{(1,2)}|_{E_u^{(\pm)}}(\mathbf{p}) = N_u^{(1,2)} \begin{pmatrix} (p_3 \pm |\mathbf{p}|) (E_u^{(\pm)} - p_3 + b^{(3)0}) - (p_1^2 + p_2^2) \\ (p_1 + ip_2) (E_u^{(\pm)} \mp |\mathbf{p}| + b^{(3)0}) \\ m_\psi (p_3 \pm |\mathbf{p}|) \\ m_\psi (p_1 + ip_2) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

para as partículas e

$$v^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}}(\mathbf{p}) = N_v^{(1,2)} \begin{pmatrix} m_\psi (p_1 - ip_2) \\ -m_\psi (p_3 \mp |\mathbf{p}|) \\ - (p_1 - ip_2) (E_u^{(\pm)} \pm |\mathbf{p}| + b^{(3)0}) \\ (p_3 \mp |\mathbf{p}|) (E_u^{(\pm)} - p_3 + b^{(3)0}) - (p_1^2 + p_2^2) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

para antipartículas. A condição de normalização é escolhida de tal forma que $(u^{(\alpha)})^\dagger u^{(\beta)} = 2E_u^{(\alpha)} \delta_{\alpha\beta}$ de modo similarmente temos $(v^{(\alpha)})^\dagger v^{(\beta)} = 2E_v^{(\alpha)} \delta_{\alpha\beta}$. Isso requer que os espinores relativos a diferentes energias sejam ortogonais, todavia esta condição é garantida pois o operador de Dirac é hermitiano. Para o caso em questão, a constante de normalização é

$$N_u^{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| \pm p_3) (E_u^{(\pm)} \mp |\mathbf{p}| + b^{(3)0})}}, \quad (\text{B.6})$$

e

$$N_v^{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| \mp p_3) (E_u^{(\mp)} \pm |\mathbf{p}| + b^{(3)0})}}.$$

B.2 Coeficiente g isotrópico

É sabido que o coeficiente H não possui uma configuração isotrópica [22]. No entanto, para o coeficiente g há uma configuração isotrópica. Esta configuração é especificada pela escolha dos seguintes coeficientes não nulos: $g^{(4)ijk} = \varepsilon^{ijk} g_1$. Onde i, j, k são os índices espaciais. De maneira idêntica ao item anterior, aqui há duas relações de dispersão que diferem uma da outra em primeira ordem nos coeficientes de violação de Lorentz:

$$E_u^{(\pm)} = \sqrt{(1 + g_1^2) \mathbf{p}^2 \pm 2g_1 m_\psi |\mathbf{p}| + m_\psi^2}, \quad (\text{B.7})$$

que em primeira ordem em g_1 é

$$E_u^{(\pm)(1)} = \sqrt{p^2 + m_\psi^2} \mp \frac{|\mathbf{p}| m_\psi}{\sqrt{p^2 + m_\psi^2}} g_1. \quad (\text{B.8})$$

Deve-se observar que o coeficiente g_1 é adimensional.

A equação de Dirac modificada é

$$\left(\gamma^\mu \partial_\mu - m_\psi + \frac{1}{2} g^{(4)ijk} \partial_i \sigma_{jk} \right) \psi = 0. \quad (\text{B.9})$$

As soluções espinoriais são obtidas de maneira análoga ao item anterior. Tais soluções são:

$$u^{(1,2)}|_{E_u^{(\pm)}}(\mathbf{p}) = N_u^{(1,2)} \begin{pmatrix} - \left[p_1^2 + p_2^2 \pm \left(p_3 - E_u^{(\pm)} \right) (|\mathbf{p}| \pm p_3) \right] \\ (p_1 + ip_2) \left(E_u^{(\pm)} \mp |\mathbf{p}| \right) \\ (p_3 \pm |\mathbf{p}|) (m_\psi \pm g_1 |\mathbf{p}|) \\ (p_1 + ip_2) (m_\psi \pm g_1 |\mathbf{p}|) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

para as partículas e

$$v^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}}(\mathbf{p}) = N_v^{(1,2)} \begin{pmatrix} (p_1 - ip_2)(m_\psi \mp g_1 |\mathbf{p}|) \\ -(p_3 \mp |\mathbf{p}|)(m_\psi \mp g_1 |\mathbf{p}|) \\ -(p_1 - ip_2)(E_u^{(\pm)} \pm |\mathbf{p}|) \\ -[p_1^2 + p_2^2 \mp (p_3 - E_u^{(\pm)})(|\mathbf{p}| \mp p_3)] \end{pmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

para as antipartículas. As constantes de normalização são dadas por

$$N_u^{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| \pm p_3)(E_u^{(\pm)} \mp |\mathbf{p}|)}}, \quad (\text{B.12})$$

e

$$N_v^{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| \mp p_3)(E_u^{(\mp)} \pm |\mathbf{p}|)}}. \quad (\text{B.13})$$

Apêndice C

Forma bloco-diagonal da equação de Dirac e suas soluções

A seguir, usaremos o formalismo apresentado na seção 4.4 para solucionar a equação de Dirac livre. Obteremos a equação de Dirac na forma bloco diagonal, apresentaremos suas soluções espinoriais, verificaremos se de fato satisfazem a equação de Dirac e, para finalizar, mostraremos como se dá a conexão entre as soluções nas representações quirais e *standard*.

C.1 Obtenção da equação de Dirac transformada e suas soluções.

A equação de Dirac no espaço dos momentos é dada por

$$(\gamma^\mu p_\mu - m_\psi) \psi = 0. \quad (\text{C.1})$$

Aplicando a transformação U na expressão acima obtemos a equação de Dirac transformada, a saber

$$U \gamma^0 (\gamma^\mu p_\mu - m_\psi I_4) U^\dagger U \psi = 0, \quad (\text{C.2})$$

onde $U = VW$ e é dada por (4.36a) e (4.36b)

$$\begin{cases} V = \frac{1+\gamma_0\gamma_5}{\sqrt{2}} \\ W = \frac{E_0+m+\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{2E_0(E_0+m)}} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Escrevendo a equação de Dirac explicitamente, temos

$$U\gamma^0\left(\gamma_0p_0 - \gamma_i p_i - m_\psi \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}\right)U^\dagger U\psi = (E - \hat{H})U\psi = 0, \quad (\text{C.4})$$

ou ainda

$$U\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 & p_0 \\ p_0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m_\psi & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -m_\psi \end{pmatrix}\right)U^\dagger U\psi = (E - \hat{H})U\psi = 0.$$

Sabemos que $p_0 = E$, portanto

$$UU^\dagger\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}U\psi + U\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m_\psi & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -m_\psi \end{pmatrix}U^\dagger U\psi = (E - \hat{H})U\psi = 0,$$

comparando os dois membros da equação acima vemos que

$$U\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m_\psi & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -m_\psi \end{pmatrix}U^\dagger = -\hat{H}. \quad (\text{C.5})$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}U\psi - \hat{H}U\psi = 0. \quad (\text{C.6})$$

Os operadores V e W nas suas formas explícitas são:

$$\begin{cases} V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \\ -\mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \\ W = \frac{1}{\sqrt{2E_0(E_0+m_\psi)}}\begin{pmatrix} E_0 + m_\psi & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & E_0 + m_\psi \end{pmatrix} \end{cases}. \quad (\text{C.7})$$

Retornando à equação de Dirac (C.6), obtemos:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} U\psi + VW \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m_\psi & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m_\psi \end{pmatrix} W^\dagger V^\dagger U\psi = 0,$$

explicitando todos os operadores, temos

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} U\psi + \frac{1}{4E_0(E_0 + m_\psi)} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \\ -\mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 + m_\psi & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & E_0 + m_\psi \end{pmatrix} \times \\ & \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m_\psi & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 + m_\psi & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & E_0 + m_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & -\mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} U\psi = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Usando a convenção (C.5), calcularemos separadamente o segundo termo da equação acima a saber:

$$\begin{aligned} -\hat{H} &= \frac{1}{4E_0(E_0 + m_\psi)} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \\ -\mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 + m_\psi & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & E_0 + m_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \begin{pmatrix} -m_\psi & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 + m_\psi & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & E_0 + m_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & -\mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.9a})$$

$$\begin{aligned} -\hat{H} &= \frac{1}{4E_0(E_0 + m_\psi)} \begin{pmatrix} m_\psi + E_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & m_\psi + E_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -m_\psi - E_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & m_\psi + E_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \times \\ & \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m_\psi \\ -m_\psi & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_\psi + E_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m_\psi - E_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ m_\psi + E_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & m_\psi + E_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.9b})$$

$$-\hat{H} = \frac{1}{4E_0(E_0 + m_\psi)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.9c})$$

onde fizemos uso das seguintes definições:

$$a_{11} = -4E_0(m_\psi^2 + \mathbf{p}^2) - 2m_\psi E_0^2 - 2m_\psi(m_\psi^2 + \mathbf{p}^2), \quad (\text{C.10a})$$

$$a_{22} = 4E_0 (m_\psi^2 + \mathbf{p}^2) + 2m_\psi E_0^2 + 2m_\psi (m_\psi^2 + \mathbf{p}^2), \quad (\text{C.10b})$$

$$a_{12} = 2\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} (m_\psi^2 + \mathbf{p}^2 - E_0^2), \quad (\text{C.10c})$$

$$a_{21} = 2\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} (m_\psi^2 + \mathbf{p}^2 - E_0^2). \quad (\text{C.10d})$$

Usando a relação de dispersão $E_0^2 = m_\psi^2 + \mathbf{p}^2$, obtemos

$$-\hat{H} = \frac{1}{4E_0(E_0 + m_\psi)} \begin{pmatrix} -4E_0^2(E_0 + m_\psi) & 0 \\ 0 & 4E_0^2(E_0 + m_\psi) \end{pmatrix} \quad (\text{C.11a})$$

$$-\hat{H} = \begin{pmatrix} -E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.11b})$$

ou ainda

$$\hat{H} = -\gamma_5 E_0. \quad (\text{C.12})$$

Substituindo o resultado anterior na equação original (C.8), a equação de Dirac transformada torna-se:

$$\begin{aligned} (E - \hat{H}) U\psi &= 0, \\ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} U\psi &= \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & -E_0 \end{pmatrix} U\psi. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

A partir da equação de autovalor acima os espinores são facilmente obtidos:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} U\psi = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_0 \end{pmatrix} U\psi, \quad (\text{C.14})$$

os autovetores e seu respectivos autovalores são:

$$\chi^{(1,2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow E_0, \quad \chi^{(3,4)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -E_0. \quad (\text{C.15})$$

Os autovetores acima obtidos são os espinores da equação de Dirac transformada. Porém, estamos interessados nos espinores que satisfazem a equação de Dirac usual dada por (C.1). Para obter tais espinores precisamos aplicar a transformação inversa $U^\dagger = VW$ aos espinores (C.15). Definindo inicialmente o operador $\hat{W}^{\dagger(\pm)}$ como

$$\hat{W}^{\dagger(\pm)} = \begin{pmatrix} E_0 + m_\psi & 0 & \mp p_3 & \mp (p_1 - ip_2) \\ 0 & E_0 + m_\psi & \mp (p_1 + ip_2) & \pm p_3 \\ \pm p_3 & \pm (p_1 - ip_2) & E_0 + m_\psi & 0 \\ \pm (p_1 + ip_2) & \mp p_3 & 0 & E_0 + m_\psi \end{pmatrix}, \quad (\text{C.16})$$

onde sinal (+) representa o operador $W^\dagger$ usual e o sinal (−) simboliza operador $W^\dagger$ usual com as seguintes modificações, a saber: $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ e $p_0 \rightarrow -p_0$. A partir destas definições, faremos o cálculo de maneira separada e detalhada para cada um dos espinores $\chi^{(\alpha)}$, a saber:

- Primeiro espinor: Aplicando-se a matrix transformação inversa, obtemos

$$\Psi^{(1)} = U^\dagger \times \chi^{(1)}, \quad (\text{C.17})$$

$$\Psi^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{4E_0(E_0 + m_\psi)}} \hat{W}^{\dagger(+)} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.18})$$

efetuando o produto matricial, chegamos ao seguinte resultado

$$\Psi^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{4E_0(E_0 + m_\psi)}} \begin{pmatrix} E_0 + m_\psi - p_3 \\ -(p_1 + ip_2) \\ E_0 + m_\psi + p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.19})$$

- Segundo espinor: De maneira análoga ao item anterior, temos

$$\Psi^{(2)} = U^\dagger \times \chi^{(2)}, \quad (\text{C.20})$$

$$\Psi^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{4E_0(E_0 + m_\psi)}} \hat{W}^{\dagger(+)} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.21})$$

efetuando o produto matricial, chegamos ao seguinte resultado

$$\Psi^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{4E_0(E_0 + m_\psi)}} \begin{pmatrix} -(p_1 - ip_2) \\ E_0 + m_\psi + p_3 \\ p_1 - ip_2 \\ E_0 + m_\psi - p_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.22})$$

- Terceiro espinor: Para os espinores que descrevem as antipartículas precisamos da reinterpretação de Feynman-Stückelberg. Neste caso precisamos fazer $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ na matriz de transformação e nos espinores (C.15). Assim, temos

$$\Psi^{(3)} = U^\dagger \times \chi^{(3)}, \quad (\text{C.23})$$

$$\Psi^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{4E_0(E_0 + m_\psi)}} \hat{W}^{\dagger(-)} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.24})$$

efetuando o produto matricial, chegamos ao seguinte resultado

$$\Psi^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{4E_0(E_0 + m_\psi)}} \begin{pmatrix} -E_0 - m_\psi + p_3 \\ p_1 + ip_2 \\ E_0 + m_\psi + p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.25})$$

- Quarto espinor: Procedendo de maneira análoga ao item anterior, temos

$$\Psi^{(4)} = U^\dagger \times \chi^{(4)}, \quad (\text{C.26})$$

$$\Psi^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{4E_0(E_0 + m_\psi)}} \hat{W}^{\dagger(-)} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.27})$$

efetuando o produto matricial, chegamos ao seguinte resultado

$$\Psi^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{4E_0(E_0 + m_\psi)}} \begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ -E_0 - m_\psi - p_3 \\ p_1 - ip_2 \\ E_0 + m_\psi - p_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.28})$$

Portanto, as soluções da equação de Dirac (C.1) de maneira compacta são:

$$u^{(1)} \equiv \Psi^{(1)} = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \Lambda^{(+)} \\ \Lambda^{(-)} \end{pmatrix} \leftrightarrow E_0, \quad (\text{C.29a})$$

$$v^{(1)} \equiv \Psi^{(2)} = i\gamma^2 \cdot \mathcal{N} \begin{pmatrix} \Lambda^{(-)} \\ \Lambda^{(+)} \end{pmatrix}^* \leftrightarrow E_0, \quad (\text{C.29b})$$

$$u^{(2)} \equiv \Psi^{(3)} = \mathcal{N} \begin{pmatrix} -\Lambda^{(+)} \\ \Lambda^{(-)} \end{pmatrix} \leftrightarrow E_0, \quad (\text{C.29c})$$

$$v^{(2)} \equiv \Psi^{(4)} = i\gamma^2 \cdot \mathcal{N} \begin{pmatrix} -\Lambda^{(-)} \\ \Lambda^{(+)} \end{pmatrix}^* \leftrightarrow E_0, \quad (\text{C.29d})$$

onde $\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{4E_0(E_0 + m_\psi)}}$, γ^2 é a matriz gamma na representação quiral, $*$ significa complexo conjugado e $\Lambda^{(\pm)}$ é definido como

$$\Lambda^{(\pm)} = \begin{pmatrix} E_0 + m_\psi \mp p_3 \\ \mp (p_1 + ip_2) \end{pmatrix}.$$

Apenas por completeza iremos mostrar na próxima subseção que as soluções (C.19 – C.28) satisfazem a equação (C.1).

C.2 Verificação das soluções espinoriais (C.19 – C.28).

A equação de Dirac (C.1) de maneira explícita escreve-se como:

$$\hat{\mathcal{M}}^{(\pm)} \times \psi = 0, \quad (\text{C.30})$$

onde o operador de Dirac $\hat{\mathcal{M}}^{(\pm)}$ é definido como

$$\hat{\mathcal{M}}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} -m_\psi & 0 & \pm(p_0 - p_3) & \pm(ip_2 - p_1) \\ 0 & -m_\psi & \mp(p_1 + ip_2) & \pm(p_0 + p_3) \\ \pm(p_0 + p_3) & \pm(p_1 - ip_2) & -m_\psi & 0 \\ \pm(p_1 + ip_2) & \pm(p_0 - p_3) & 0 & -m_\psi \end{pmatrix}. \quad (\text{C.31})$$

O sinal (+) representa o operador de Dirac usual e o sinal (–) simboliza operador de Dirac usual com as seguintes modificações, a saber: $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ e $p_0 \rightarrow -p_0$. Este último resultado será de grande utilidade mais adiante.

O próximo passo será verificar separadamente cada um dos espinores obtidos na subseção anterior, a saber:

- Primeiro espinor (C.29a): Substituindo o primeiro espinor na equação (C.30) obtemos

$$\hat{\mathcal{M}}^{(+)} \times u^{(1)} \stackrel{?}{=} 0, \quad (\text{C.32})$$

substituindo $p_0 = E_0$ e o espinor $\psi^{(1)}$ dado por (C.29a), temos

$$\hat{\mathcal{M}}^{(+)}(p_0 = E_0) \times \mathcal{N} \begin{pmatrix} \Lambda^{(+)} \\ \Lambda^{(-)} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} 0. \quad (\text{C.33})$$

Efetuando o produto matricial e usando a relação de dispersão $E_0^2 = m_\psi^2 + \mathbf{p}^2$, obtemos:

$$\mathcal{N} \begin{pmatrix} -m_\psi^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + E_0^2 \\ 0 \\ -m_\psi^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + E_0^2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{C.34})$$

- Segundo espinor (C.29c):

$$\hat{\mathcal{M}}^{(+)} \times u^{(2)} \stackrel{?}{=} 0, \quad (\text{C.35})$$

substituindo $p_0 = E_0$ e o espinor $\psi^{(2)}$ dado por (C.29c), temos

$$\hat{\mathcal{M}}^{(+)}(p_0 = E_0) \times i\gamma^2 \cdot \mathcal{N} \begin{pmatrix} \Lambda^{(-)} \\ \Lambda^{(+)} \end{pmatrix}^* \stackrel{?}{=} 0. \quad (\text{C.36})$$

Efetuando o produto matricial e usando a relação de dispersão $E_0^2 = m_\psi^2 + \mathbf{p}^2$, obtemos

$$\mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 \\ -m_\psi^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + E_0^2 \\ 0 \\ -m_\psi^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + E_0^2 \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{C.37})$$

- Terceiro espinor (C.29b): Assim como fizemos para os anti-espinores, precisamos usar a reinterpretação de Feynman-Stückelberg na equação de Dirac, pois estamos tratando do espinor que descreve a antipartícula. Neste caso precisamos fazer $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ e $p_0 \rightarrow -p_0$ no operador de Dirac. Procedendo desta maneira, temos

$$\hat{\mathcal{M}}^{(-)} \times v^{(1)} \stackrel{?}{=} 0, \quad (\text{C.38})$$

substituindo $p_0 = E_0$ e o espinor $\psi^{(3)}$ dado por (C.29b), temos

$$\hat{\mathcal{M}}^{(-)}(p_0 = E_0) \times \mathcal{N} \begin{pmatrix} -\Lambda^{(+)} \\ \Lambda^{(-)} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} 0. \quad (\text{C.39})$$

Efetuando o produto matricial e usando a relação de dispersão $E_0^2 = m_\psi^2 + \mathbf{p}^2$, obtemos

$$\mathcal{N} \begin{pmatrix} m_\psi^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - E_0^2 \\ 0 \\ -m_\psi^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + E_0^2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{C.40})$$

- Quarto espinor (C.29d): De maneira análoga ao item anterior, precisamos

da reinterpretação de Feynman-Stückelberg. Prosseguindo com as mudanças, obtemos

$$\hat{\mathcal{M}}^{(-)} \times v^{(2)} \stackrel{?}{=} 0, \quad (\text{C.41})$$

substituindo $p_0 = E_0$ e o espinor $\psi^{(4)}$ dado por (C.29d), temos

$$\hat{\mathcal{M}}^{(-)}(p_0 = E_0) \times i\gamma^2 \cdot \mathcal{N} \begin{pmatrix} -\Lambda^{(-)} \\ \Lambda^{(+)} \end{pmatrix}^* \stackrel{?}{=} 0. \quad (\text{C.42})$$

Efetuando o produto matricial e usando a relação de dispersão $E_0^2 = m_\psi^2 + \mathbf{p}^2$, obtemos

$$\mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 \\ m_\psi^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - E_0^2 \\ 0 \\ -m_\psi^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + E_0^2 \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{C.43})$$

Portanto, vimos que as soluções (C.29a – C.29d) de fato satisfazem a equação de Dirac. Porém, se observarmos cautelosamente as soluções (C.29a – C.29d) veremos que elas diferem das soluções usuais encontradas na literatura. A explicação para isso é que, em vez de usar a representação *standard* das matrizes gamma, usamos a representação quirial. Por consequência, as soluções serão diferentes. Porém, é possível conectá-las através de uma transformação S que será detalhada na próxima subseção.

C.3 Conexão entre os espinores nos formalismos quirial e *Standard*.

A maneira conhecida de conectar a representação quirial à representação *Standard* é dada por [62]

$$M_{SR} = V M_{Ch} V^{-1}, \quad (\text{C.44})$$

onde M é uma matriz qualquer, os subscritos SR e Ch significam *Standard* e quirial, respectivamente, e V é a matriz que conecta as duas representações. A

forma explícita da transformação V é

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \\ -\mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.45})$$

cuja inversa é

$$V^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & -\mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.46})$$

A matriz V acima é a mesma a matriz V presente nas transformações (C.3) que bloco diagonalizam a equação de Dirac. Mostraremos a seguir que de fato as transformações acima conectam as representações *Standard* e quiral das matrizes gamma. As matrizes gamma na representação quiral são:

$$\gamma_{Ch}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_{Ch}^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma_{Ch}^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.47})$$

Aplicando a transformação de similaridade mostrada na equação (C.44) nas matrizes gamma acima, temos

$$\gamma_{SR}^0 = V \gamma_{Ch}^0 V^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \\ -\mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & -\mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.48a})$$

$$\gamma_{SR}^i = V \gamma_{Ch}^i V^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \\ -\mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & -\mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.48b})$$

$$\gamma_{SR}^5 = V \gamma_{Ch}^5 V^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \\ -\mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & -\mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.48c})$$

As matrizes gamma acima calculadas coincidem com as matrizes gamma que aparecem na literatura [62].

Após a ilustração acima, iremos calcular os espinores na representação *Standard*. A conexão entre os espinores é dada por [62]

$$\Psi_{SR}^{(i)} = V \Psi_{Ch}^{(i)}. \quad (\text{C.49})$$

Usando a expressão acima, obtemos

- Primeiro espinor (C.19)

$$\Psi_{SR}^{(1)} = V \Psi_{Ch}^{(1)}, \quad (C.50)$$

substituindo V e $\Psi_{Ch}^{(1)}$, temos

$$\Psi_{SR}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4E_0(E_0 + m_\psi)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 + m_\psi - p_3 \\ -(p_1 + ip_2) \\ E_0 + m_\psi + p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}, \quad (C.51a)$$

$$\Psi_{SR}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2E_0(E_0 + m)}} \begin{pmatrix} E_0 + m_\psi \\ 0 \\ p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}. \quad (C.51b)$$

- Segundo espinor (C.22)

$$\Psi_{SR}^{(2)} = V \Psi_{Ch}^{(2)}, \quad (C.52)$$

substituindo V e $\Psi_{Ch}^{(2)}$, temos

$$\Psi_{SR}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4E_0(E_0 + m_\psi)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(p_1 - ip_2) \\ E_0 + m_\psi + p_3 \\ p_1 - ip_2 \\ E_0 + m_\psi - p_3 \end{pmatrix}, \quad (C.53a)$$

$$\Psi_{SR}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2E_0(E_0 + m_\psi)}} \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 + m_\psi \\ p_1 - ip_2 \\ -p_3 \end{pmatrix}. \quad (C.53b)$$

- Terceiro espinor (C.25)

$$\Psi_{SR}^{(3)} = V \Psi_{Ch}^{(3)}, \quad (C.54)$$

substituindo V e $\Psi_{Ch}^{(3)}$, temos

$$\Psi_{SR}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4E_0(E_0 + m_\psi)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E_0 - m_\psi + p_3 \\ p_1 + ip_2 \\ E_0 + m_\psi + p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.55a})$$

$$\Psi_{SR}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2E_0(E_0 + m_\psi)}} \begin{pmatrix} p_3 \\ p_1 + ip_2 \\ E_0 + m_\psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.55b})$$

- Quarto espinor (C.28)

$$\Psi_{SR}^{(4)} = V \Psi_{Ch}^{(4)}, \quad (\text{C.56})$$

substituindo V e $\Psi_{Ch}^{(4)}$, temos

$$\Psi_{SR}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4E_0(E_0 + m_\psi)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ -E_0 - m_\psi - p_3 \\ p_1 - ip_2 \\ E_0 + m_\psi - p_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.57a})$$

$$\Psi_{SR}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2E_0(E_0 + m_\psi)}} \begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ -p_3 \\ 0 \\ E_0 + m_\psi \end{pmatrix}. \quad (\text{C.57b})$$

Portanto, as equações (C.51b – C.57b) são os espinores na representação *standard* que são frequentemente encontrados na literatura [62].

Apêndice D

Soluções exatas da equação de Dirac modificada por operadores de spin degenerado

Iremos fazer uso das transformações (4.38a) e (4.38b) para obter as soluções espinoriais exatas para a equação de Dirac modificada pelos operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$.

D.1 Soluções espinoriais

Como já mencionado na seção 4.4, as transformações modificadas (4.38a) e (4.38b)

$$\mathbb{V} = \frac{\mathbb{I}_4 + \gamma_0 \gamma_5}{\sqrt{2}}, \quad (\text{D.1a})$$

$$\mathbb{W}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0 + m_\psi - \hat{\mathcal{S}} + (\mathbf{p} + \hat{\mathcal{V}}) \cdot \boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{2 (\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0) (\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0 + m_\psi - \hat{\mathcal{S}})}}, \quad (\text{D.1b})$$

são as matrizes responsáveis por bloco diagonalizar a equação de Dirac modificada pelos operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$ de maneira exata. A equação de Dirac que estamos

interessados em resolver possui a seguinte forma

$$\gamma_\mu p^\mu \psi - m_\psi \psi + \hat{\mathcal{S}}\psi + \gamma_\mu \hat{\mathcal{V}}^\mu \psi = 0, \quad (\text{D.2})$$

em que os operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$ possuem dimensão de massa $d = 3$, *a priori*.

Aplicando a matriz transformação na equação acima, temos

$$U\gamma_0 \left(\gamma^\mu p_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{S}} + \gamma_\mu \hat{\mathcal{V}}^\mu \right) U^\dagger U\psi = \left(E - \hat{H} \right) U\psi = 0, \quad (\text{D.3})$$

onde a matriz $\hat{H}$ é dada por

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{E}_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbb{E}_u - 2\hat{\mathcal{V}}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbb{E}_u - 2\hat{\mathcal{V}}_0 \end{pmatrix},$$

e, neste caso, $\mathbb{E}_u = -\hat{\mathcal{V}}_0 + \sqrt{\left(\mathbf{p} + \hat{\mathcal{V}}\right)^2 + \left(m_\psi - \hat{\mathcal{S}}\right)^2}$.

Tendo em mãos a equação de autovalor (D.3), podemos obter os autovalores e autovetores da equação de Dirac. Os autovetores e seus respectivos autovalores são,

$$\chi^{(1,2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \mathbb{E}_u, \chi^{(3,4)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -\mathbb{E}_u - 2\hat{\mathcal{V}}_0. \quad (\text{D.4})$$

Os autovetores acima obtidos são os espinores da equação de Dirac modificada na sua representação bloco diagonal. Porém, estamos interessados nos espinores que satisfazem a equação de Dirac modificada usual dada por (D.2). Para obter tais espinores precisamos aplicar a transformação inversa $U^\dagger$ nas soluções (D.4). Faremos o cálculo de maneira separada para cada um deles, como segue:

- Primeiro espinor: Aplicando-se a matrix transformação inversa, obtemos

$$u^{(1)} = U^\dagger(\mathbf{p}) \times \chi^{(1)},$$

$$u^{(1)} = \frac{m_\psi - \hat{\mathcal{S}}}{\mathcal{N}_u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mathcal{N}_u} \begin{pmatrix} \mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0 - p_3 - \hat{\mathcal{V}}_3 \\ -p_1 - \hat{\mathcal{V}}_1 - ip_2 - i\hat{\mathcal{V}}_2 \\ \mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0 + p_3 + \hat{\mathcal{V}}_3 \\ p_1 + \hat{\mathcal{V}}_1 + ip_2 + i\hat{\mathcal{V}}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.5})$$

onde $\mathcal{N}_u = \sqrt{\frac{(\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0 + m_\psi - \hat{\mathcal{S}})^2 + (\mathbf{p} + \mathbf{V})^2}{\mathbb{E}_u}}$.

- Segundo espinor: De maneira análoga ao item anterior, temos

$$u^{(2)} = U^\dagger(\mathbf{p}) \times \chi^{(2)},$$

$$u^{(2)} = \frac{m_\psi - \hat{\mathcal{S}}}{\mathcal{N}_u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mathcal{N}_u} \begin{pmatrix} -p_1 - \hat{\mathcal{V}}_1 + ip_2 + i\hat{\mathcal{V}}_2 \\ \mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0 + p_3 + \hat{\mathcal{V}}_3 \\ p_1 + \hat{\mathcal{V}}_1 - ip_2 - i\hat{\mathcal{V}}_2 \\ \mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0 - p_3 - \hat{\mathcal{V}}_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.6})$$

Os espinores que descrevem as antipartículas estão conectados as soluções acima através da transformação de conjugação de carga, vide subseção 5.1.2. Portanto, ao invés de aplicar a matriz transformação inversa $U^\dagger$, faremos uso desta conexão. A seguir mostramos as soluções desejadas

$$v^{(1,2)}|_{E_v} = \frac{1}{\mathcal{N}_v} \begin{pmatrix} u_4^{(2,1)} \\ -u_3^{(2,1)} \\ -u_2^{(2,1)} \\ u_1^{(2,1)} \end{pmatrix}^* (-a^{\mu\nu\cdots}, -e^{\mu\nu\cdots}). \quad (\text{D.7})$$

As energias que descrevem as antipartículas são mostradas a seguir

$$E_v = \mathbb{E}_u (-a^{\mu\nu\cdots}, -e^{\mu\nu\cdots}). \quad (\text{D.8})$$

Já a constante de normalização é dada por

$$\mathcal{N}_v = \sqrt{\frac{\left(E_v + \hat{\mathcal{V}}_0 + m_\psi - \hat{\mathcal{S}}\right) + \left(\mathbf{p} + \hat{\mathbf{V}}\right)^2}{E_v}}. \quad (\text{D.9})$$

Deve-se notar que as soluções acima são exatas e foram calculadas para os operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$ de dimensão de massa $d = 3$. No entanto, tais soluções exatas podem ser estendidas para quaisquer configurações de $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$ com dimensão de massa $d > 3$ desde que façamos a seguinte substituição nos espinores, conforme subseção 5.1.2:

$$\hat{\mathcal{S}} \rightarrow \hat{\mathcal{S}} \left(p_0 = \tilde{\mathbb{E}}_u \right) = \sum_{d=3}^{\infty} \mathcal{S}^{(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (\text{D.10a})$$

$$\hat{\mathcal{V}}^\mu \rightarrow \hat{\mathcal{V}}^\mu \left(p_0 = \tilde{\mathbb{E}}_u \right) = \sum_{d=3}^{\infty} \mathcal{V}^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (\text{D.10b})$$

onde $\tilde{\mathbb{E}}_u$ é a relação de dispersão exata da equação de Dirac modificada pelos operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$ com dimensão de massa d arbitrária. $\tilde{\mathbb{E}}_u$ pode ser obtido através da equação (4.28), ou seja,

$$\left(-m_\psi + \hat{\mathcal{S}}\right)^4 + \left(p^\mu + \hat{\mathcal{V}}^\mu\right)^4 - 2 \left(p^\mu + \hat{\mathcal{V}}^\mu\right) \cdot \left(-m_\psi + \hat{\mathcal{S}}\right) \cdot \left(-m_\psi + \hat{\mathcal{S}}\right) \cdot \left(p^\mu + \hat{\mathcal{V}}^\mu\right) = 0. \quad (\text{D.11})$$

Apêndice E

Propagadores

No contexto da teoria quântica de campos, um propagador descreve uma partícula virtual que é gerada em um ponto do espaço-tempo e é aniquilada em outro ponto. Propagadores são importantes em processos de espalhamento em que a criação de partículas virtuais torna-se relevante. O propagador S representa a função de Green das equações de campo no espaço dos momentos e pode ser obtida invertendo o operador de Dirac, S^{-1} , (multiplicada por um fator i de acordo com a convenção usada em [61]). No espaço dos momentos o operador de Dirac modificado que estamos interessados possui a seguinte forma (4.6)

$$S^{-1} \equiv \gamma^\mu p_\mu - m_\psi \mathbb{I}_4 + \hat{\mathcal{Q}}.$$

O operador de Dirac modificado é uma matriz 4×4 no espaço dos momentos. Portanto, para obter o propagador precisamos inverter a matriz S^{-1} . Para efetuar o cálculo do propagador S , faremos uso dos 16 covariantes bilineares $\{\Gamma^A\} \equiv \{\mathbb{I}_4, \gamma_5, \gamma^\mu, i\gamma_5\gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}\}$; uma vez que qualquer matriz complexa 4×4 pode ser expandida em termos dos $\{\Gamma^A\}$. Como os covariantes bilineares são ortogonais entre si, podemos propor uma forma geral para a função de Green de modo a explorar tal propriedade. Assim, como um *Ansatz* sensato, podemos propor a seguinte estrutura para o propagador

$$iS = \frac{i}{\Delta} \left(\hat{\xi}_\mu \gamma^\mu + \hat{\Xi} \mathbb{I}_4 + \hat{\Upsilon} \gamma^5 + \hat{\zeta}_\mu \gamma^5 \gamma^\mu + \hat{\psi}_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right), \quad (\text{E.1})$$

onde Δ é um fator global que será identificado, *a posteriori*, como sendo o determinante da matriz S^{-1} .

Para obter o operador S , basta lembrar que os 16 covariantes bilineares satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade: $\text{Tr}(\Gamma_A \Gamma^B) = 4\delta_A^B$. Portanto, para encontrar o valor de cada um dos coeficientes presentes na equação (E.1), devemos multiplicar S^{-1} pelo covariante bilinear dual $\{\Gamma_A\} \equiv \{\mathbb{I}_4, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}\}$ e calcular o traço desse produto. Como resultado, obteremos todas as 16 componentes $\{\hat{\xi}_\mu, \hat{\Xi}, \hat{\Upsilon}, \hat{\zeta}_\mu, \hat{\psi}_{\mu\nu}\}$ presentes na equação (E.1). Exploraremos a metodologia apresentada para algumas configurações do operador $\hat{\mathcal{Q}}$.

E.1 Propagador para os operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$

Iniciaremos calculando o propagador para uma das configurações mais simples a fim de exemplificar a metodologia descrita anteriormente. A configuração em questão consiste na modificação do operador de Dirac S^{-1} pelos operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}^\mu$, ou seja,

$$S^{-1} = \gamma^\mu (p_\mu + \hat{\mathcal{V}}_\mu) - \mathbb{I}_4 (m_\psi - \hat{\mathcal{S}}). \quad (\text{E.2})$$

Como descrito no início deste apêndice, faremos uso das relações de ortogonalidade entre os covariantes bilineares. Portanto, para calcular as componentes $\{\hat{\xi}_\mu, \hat{\Xi}, \hat{\Upsilon}, \hat{\zeta}_\mu, \hat{\psi}_{\mu\nu}\}$, multiplicaremos cada um dos $\{\Gamma_A\}$ pelo operador S e calcularemos o traço. Antes de prosseguir, calcularemos a inversa do operador S^{-1} . Usando o Software **Mathematica** encontramos o seguinte resultado:

$$S = \frac{1}{\Delta} \left[(p_\mu + \hat{\mathcal{V}}_\mu) \gamma^\mu + (m_\psi - \hat{\mathcal{S}}) \mathbb{I}_4 \right], \quad (\text{E.3})$$

onde Δ é dado por

$$\Delta = (p + \hat{\mathcal{V}})^2 - (m_\psi - \hat{\mathcal{S}})^2. \quad (\text{E.4})$$

A equação (E.3) já está decomposta em termos dos covariantes bilineares, portanto, será fácil proceder usando a metodologia apresentada. A seguir, calculare-

mos as projeções do operador S , a saber:

$$\frac{1}{4}\widehat{\Xi} = \text{Tr}(\mathbb{I}_4 S) = (p_\mu + \hat{\mathcal{V}}_\mu) \text{Tr}(\mathbb{I}_4 \gamma^\mu) + (m_\psi - \hat{\mathcal{S}}) \text{Tr}(\mathbb{I}_4 \mathbb{I}_4) = (m_\psi - \hat{\mathcal{S}}), \quad (\text{E.5a})$$

$$\frac{1}{4}\widehat{\Upsilon} = \text{Tr}(\gamma_5 S) = (p_\mu + \hat{\mathcal{V}}_\mu) \text{Tr}(\gamma_5 \gamma^\mu) + (m_\psi - \hat{\mathcal{S}}) \text{Tr}(\gamma_5 \mathbb{I}_4) = 0, \quad (\text{E.5b})$$

$$\frac{1}{4}\widehat{\xi}_\mu = \text{Tr}(\gamma_\mu S) = (p_\mu + \hat{\mathcal{V}}_\mu) \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma^\mu) + (m_\psi - \hat{\mathcal{S}}) \text{Tr}(\gamma_\mu \mathbb{I}_4) = (p_\mu + \hat{\mathcal{V}}_\mu), \quad (\text{E.5c})$$

$$\frac{1}{4}\widehat{\zeta}_\mu = \text{Tr}(\text{i}\gamma_5 \gamma_\mu S) = (p_\mu + \hat{\mathcal{V}}_\mu) \text{Tr}(\text{i}\gamma_5 \gamma_\mu \gamma^\mu) + (m_\psi - \hat{\mathcal{S}}) \text{Tr}(\text{i}\gamma_5 \gamma_\mu \mathbb{I}_4) = 0, \quad (\text{E.5d})$$

$$\frac{1}{4}\widehat{\psi}_{\mu\nu} = \text{Tr}(\sigma_{\mu\nu} S) = (p_\mu + \hat{\mathcal{V}}_\mu) \text{Tr}(\sigma_{\mu\nu} \gamma^\mu) + (m_\psi - \hat{\mathcal{S}}) \text{Tr}(\sigma_{\mu\nu} \mathbb{I}_4) = 0, \quad (\text{E.5e})$$

onde o fator $\frac{1}{4}$ diante dos coeficientes foi colocado para normalizar o produto escalar entre as funções gamma. Substituindo cada uma das componentes na equação (E.1), obtemos

$$\text{i}S = \frac{\text{i}}{\Delta} \left[(p_\mu + \hat{\mathcal{V}}_\mu) \gamma^\mu + (m_\psi - \hat{\mathcal{S}}) \mathbb{I}_4 \right].$$

Devemos observar que fazendo $\Delta = 0$ e resolvendo para p_0 obtemos as energias permitidas.

E.2 Propagador para o operador $\hat{\mathcal{A}}^\mu$

A configuração que iremos explorar agora trata-se do operador pseudovetorial. O operador de Dirac modificado em questão é dado por

$$S^{-1} = \gamma_\mu p^\mu - m_\psi \mathbb{I}_4 + \hat{\mathcal{A}}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu. \quad (\text{E.6})$$

Procedendo de maneira equivalente a seção E.1, obtemos o seguinte propagador

$$iS = \frac{i}{\Delta_{\hat{\mathcal{A}}}} \left(\hat{\xi}_{\hat{\mathcal{A}}}^{\mu} \gamma_{\mu} + \hat{\Xi}_{\hat{\mathcal{A}}} \mathbb{I}_4 + \hat{\Upsilon}_{\hat{\mathcal{A}}} \gamma_5 + \hat{\zeta}_{\hat{\mathcal{A}}}^{\mu} \gamma_5 \gamma_{\mu} + \hat{\psi}_{\hat{\mathcal{A}}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right), \quad (\text{E.7})$$

em que

$$\hat{\Xi}_{\hat{\mathcal{A}}} = m_{\psi} \left(p^2 - m_{\psi}^2 - \hat{\mathcal{A}}^2 \right), \quad \hat{\Upsilon}_{\hat{\mathcal{A}}} = 0, \quad (\text{E.8a})$$

$$\hat{\xi}_{\hat{\mathcal{A}}}^{\mu} = (p^2 - m_{\psi}^2 + \hat{\mathcal{A}}^2) p^{\mu} - 2(p \cdot \hat{\mathcal{A}}) \hat{\mathcal{A}}^{\mu}, \quad (\text{E.8b})$$

$$\hat{\zeta}_{\hat{\mathcal{A}}}^{\mu} = 2(p \cdot \hat{\mathcal{A}}) p^{\mu} - (p^2 + m_{\psi}^2 + \hat{\mathcal{A}}^2) \hat{\mathcal{A}}^{\mu}, \quad (\text{E.8c})$$

$$\hat{\psi}_{\hat{\mathcal{A}}}^{\mu\nu} = m_{\psi} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{\rho} \hat{\mathcal{A}}_{\sigma}, \quad (\text{E.8d})$$

$$\Delta_{\hat{\mathcal{A}}} = (p + \hat{\mathcal{A}})^2 (p - \hat{\mathcal{A}})^2 - 2m_{\psi}^2 (p^2 - \hat{\mathcal{A}}^2) + m_{\psi}^4, \quad (\text{E.8e})$$

onde fizemos uso da versão 4-dimensional do símbolo de Levi-Civita $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ e, por definição, usamos $\varepsilon^{0123} = 1$. O fator global $\Delta_{\hat{\mathcal{A}}}$ foi obtido fazendo uso dos mesmos argumentos da seção anterior.

E.3 Propagador para o operador $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$

A próxima configuração que estamos interessados trata-se do operador tensorial de *rank* 2 $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$. O operador de Dirac modificado é dado por

$$S^{-1} = \gamma_{\mu} p^{\mu} - m_{\psi} \mathbb{I}_4 + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}. \quad (\text{E.9})$$

Seguindo todos os passos já descritos, temos o seguinte propagador

$$iS = \frac{i}{\Delta_{\hat{\mathcal{T}}}} \left(\hat{\xi}_{\hat{\mathcal{T}}}^{\mu} \gamma_{\mu} + \hat{\Xi}_{\hat{\mathcal{T}}} \mathbb{I}_4 + \hat{\Upsilon}_{\hat{\mathcal{T}}} \gamma_5 + \hat{\zeta}_{\hat{\mathcal{T}}}^{\mu} \gamma_5 \gamma_{\mu} + \hat{\psi}_{\hat{\mathcal{T}}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right), \quad (\text{E.10})$$

onde os coeficientes mostrados acima são dados por

$$\hat{\Xi}_{\hat{\mathcal{T}}} = m_{\psi} (p^2 - m_{\psi}^2 + 2X), \quad \hat{\Upsilon}_{\hat{\mathcal{T}}} = -2im_{\psi} Y, \quad (\text{E.11a})$$

$$\widehat{\xi}_{\hat{\mathcal{T}}}^{\mu} = (p^2 - m_{\psi}^2 - 2X)p^{\mu} - 2V^{\mu}, \quad \widehat{\zeta}_{\hat{\mathcal{T}}}^{\mu} = 2m_{\psi}\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}p_{\nu}, \quad (\text{E.11b})$$

$$\widehat{\psi}_{\hat{\mathcal{T}}}^{\mu\nu} = \left[X - \frac{1}{2}(p^2 + m_{\psi}^2) \right] \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} + Y\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\varrho}p_{\varrho}p^{\nu} - p^{\mu}\hat{\mathcal{T}}^{\nu\varrho}p_{\varrho}, \quad (\text{E.11c})$$

$$\Delta_{\hat{\mathcal{T}}} = (p^2 - m_{\psi}^2 - 2X)^2 + 4(Y^2 - V \cdot p - 2m_{\psi}^2X), \quad (\text{E.11d})$$

$$V^{\mu} \equiv \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\hat{\mathcal{T}}_{\nu\varrho}p^{\varrho}, \quad X \equiv \frac{1}{4}\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu}, \quad Y \equiv \frac{1}{4}\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad \tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\hat{\mathcal{T}}_{\varrho\sigma}. \quad (\text{E.11e})$$

Vemos que a estrutura do propagador em questão é muito mais complexa que os outros já obtidos. Isso deve-se a própria complexidade do operador $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ que é um operador tensorial. Nas definições acima, o parâmetro Y , por exemplo, está relacionado com o operador dual a $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ que introduz uma componente pseudoescalar não nula.

E.4 Propagador para o operador $\hat{\mathcal{P}}$

Apenas por completeza, calcularemos o propagador para o operador pseudoescalar $\hat{\mathcal{P}}$. O operador de Dirac modificado por este operador é mostrado a seguir

$$S^{-1} = \gamma_{\mu}p^{\mu} - m_{\psi}\mathbb{I}_4 + i\hat{\mathcal{P}}\gamma_5.$$

O propagador é dado por

$$iS = \frac{i}{\Delta_{\hat{\mathcal{P}}}} \left(\widehat{\xi}_{\hat{\mathcal{P}}}^{\mu}\gamma_{\mu} + \widehat{\Xi}_{\hat{\mathcal{P}}}\mathbb{I}_4 + \widehat{\Upsilon}_{\hat{\mathcal{P}}}\gamma_5 + \widehat{\zeta}_{\hat{\mathcal{P}}}^{\mu}\gamma_5\gamma_{\mu} + \widehat{\psi}_{\hat{\mathcal{P}}}^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \right), \quad (\text{E.12})$$

onde os coeficientes mostrados acima são dados por

$$\widehat{\xi}_{\hat{\mathcal{P}}}^{\mu} = p^{\mu}, \quad \widehat{\Xi}_{\hat{\mathcal{P}}} = m_{\psi}, \quad (\text{E.13a})$$

$$\widehat{\Upsilon}_{\hat{\mathcal{P}}} = i\hat{\mathcal{P}}, \quad \widehat{\zeta}_{\hat{\mathcal{P}}}^{\mu} = 0, \quad (\text{E.13b})$$

$$\widehat{\psi}_{\hat{\mathcal{P}}}^{\mu\nu} = 0, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{P}}} = p^2 - m_{\psi}^2 + \hat{\mathcal{P}}^2. \quad (\text{E.13c})$$

Vemos que o propagador possui uma estrutura bem simples quando comparado as configurações pseudovetorial e tensorial.

E.5 Observações finais

Alguns comentários podem ser feitos acerca dos resultados obtidos nas seções anteriores. Em primeiro lugar, no limite em que os coeficientes $\{\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{V}}^\mu, \hat{\mathcal{A}}^\mu, \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\} \rightarrow 0$ recuperamos o propagador usual, ou seja, $iS = i(p_\mu \gamma^\mu - m_\psi)/(p^2 - m_\psi^2)$. Este resultado mostra a consistência dos propagadores obtidos. Em segundo lugar, os propagadores que apresentamos nas seções anteriores são válidos para quaisquer dimensão, uma vez que a forma dos operadores não modificam a estrutura geral do propagador. Em terceiro lugar, ganhamos a estrutura fechada da relação de dispersão para os operadores $\{\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{V}}^\mu, \hat{\mathcal{A}}^\mu, \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\}$ para quaisquer dimensão de massa. Estes resultados podem ser confrontados com aqueles obtidos nas seções 5.3 e 5.4, uma vez que usamos outro método para obter as relações de dispersão, vide subseção 4.3. Por último, porém não menos importante, vimos que obter os propagadores para os operadores em dimensão arbitrária é mais simples que obter os espinores. A dificuldade reside no fato de que nos espinores precisamos substituir todos os p^0 pela relação de dispersão exata e, esta última, se torna mais complicada quanto maior for a dimensão dos operadores que estamos interessados em avaliar. Por outro lado, os propagadores matêm o valor de p^0 indeterminado o que torna o processo de obtenção dos mesmos mais fácil.

Apêndice F

Matrizes espinoriais

Neste apêndice calcularemos explicitamente o produto tensorial entre os espinores que descrevem as partículas $u^{(\alpha)}$. Faremos este cálculo apenas para algumas configurações especiais que podem ser obtidas a partir dos resultados encontrados nas seções 5.2, 5.3, 5.5 e no apêndice D.

O produto tensorial é representado por $\otimes$ e devemos efetuá-lo entre os espinores, ou seja, $u^{(\alpha)} \otimes \bar{u}^{(\alpha)}$ onde $\bar{u}^{(\alpha)} = u^{(\alpha)*} \gamma^0$. Este produto tensorial irá nos gerar como resultado uma matrix 4×4 que, por sua vez, pode ser decomposta em termos dos covariantes bilineares. Adotando o mesmo procedimento usado no apêndice E, obtemos:

$$u^{(\alpha)} \otimes \bar{u}^{(\alpha)} = \hat{\xi}_{(\alpha)}^{\mu} \gamma_{\mu} + \hat{\Xi}_{(\alpha)} \mathbb{I}_4 + \hat{\Upsilon}_{(\alpha)} \gamma_5 + \hat{\zeta}_{(\alpha)}^{\mu} \gamma_5 \gamma_{\mu} + \hat{\psi}_{(\alpha)}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}. \quad (\text{F.1})$$

A seguir, avaliamos alguns casos que podem ser obtidos a partir dos operadores $\hat{\mathcal{A}}$ e $\hat{\mathcal{T}}$, o caso não-mínimo do operador $\hat{\mathcal{P}}$, além da configuração mínima dos operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}$.

F.1 Algumas configurações do operador $\hat{\mathcal{A}}^{\mu}$

F.1.1 Matrizes espinoriais para o operador $\hat{\mathcal{A}}^0 = -b^{(3)0}$

O primeiro caso que avaliaremos é a configuração isotrópica do operador $\hat{\mathcal{A}}^{\mu}$. Substituindo $\hat{\mathcal{A}}^0 = -b^{(3)0}$ nas soluções para partículas obtidas na seção 5.2 e

efetuando o produto tensorial, obtemos a seguinte decomposição

$$u^{(1,2)} \otimes \bar{u}^{(1,2)} = \hat{\xi}_{(1,2)}^\mu \gamma_\mu + \hat{\Xi}_{(1,2)} \mathbb{I}_4 + \hat{\Upsilon}_{(1,2)} \gamma_5 + \hat{\zeta}_{(1,2)}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \hat{\psi}_{(1,2)}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \big|_{p^0=E_0}, \quad (\text{F.2})$$

onde

$$\hat{\Xi}_{(1,2)} = -\frac{m_\psi}{2}, \quad \hat{\Upsilon}_{(1,2)} = 0, \quad (\text{F.3a})$$

$$\hat{\xi}_{(1,2)}^\mu = \frac{1}{2} p^\mu \pm \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{p}|}{E_0} \right)^\mu b^{(3)0}, \quad (\text{F.3b})$$

$$\hat{\zeta}_{(1,2)}^\mu = \mp \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{p}|}{E_0} \mathbf{p} \right)^\mu - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_0} \right)^\mu b^{(3)0}, \quad (\text{F.3c})$$

$$\hat{\psi}_{(1,2)}^{i0} = 0, \quad \hat{\psi}_{(1,2)}^{ij} = \mp \frac{m_\psi}{4 |\mathbf{p}|} \varepsilon^{ijk} p^k. \quad (\text{F.3d})$$

O termo ε^{ijk} é o símbolo de Levi-Civita em três dimensões e usamos a convenção $\varepsilon^{123} = 1$. Devido a isotropia da configuração acima, observamos que todas as quantidades dependem apenas do modulo do momento.

F.1.2 Matrizes espinoriais para o operador $\hat{\mathcal{A}}^3 = -b^{(3)3}$

O segundo caso a ser tratado é a configuração anisotrópica $\hat{\mathcal{A}}^3 = -b^{(3)3}$. A partir das soluções obtidos na seção 5.3, obtemos os seguintes resultados

$$u^{(1,2)} \otimes \bar{u}^{(1,2)} = \hat{\xi}_{(1,2)}^\mu \gamma_\mu + \hat{\Xi}_{(1,2)} \mathbb{I}_4 + \hat{\Upsilon}_{(1,2)} \gamma_5 + \hat{\zeta}_{(1,2)}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \hat{\psi}_{(1,2)}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \big|_{p^0=E_0}, \quad (\text{F.4})$$

onde

$$\hat{\Xi}_{(1,2)} = -\frac{m_\psi}{2} \left(1 \pm \frac{b^{(3)3}}{\Omega_3} \right), \quad \hat{\Upsilon}_{(1,2)} = 0, \quad (\text{F.5a})$$

$$\hat{\xi}_{(1,2)}^\mu = \frac{1}{2}p^\mu + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\Omega_3}{E_0}b^{(3)3} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^\mu \pm \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\lambda} \\ \Omega_3 \end{pmatrix} b^{(3)3} \lambda^\mu, \quad (\text{F.5b})$$

$$\hat{\xi}_{(1,2)}^\mu = \pm \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\lambda} \\ 2\Omega_3 \end{pmatrix} p^\mu + \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\lambda} \\ 2\Omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\Omega_3}{E_0}b^{(3)3} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^\mu + \left(\pm\Omega_3 \mp \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\lambda} \\ \Omega_3 \end{pmatrix}^2 + b^{(3)3} \right) \lambda^\mu, \quad (\text{F.5c})$$

$$\hat{\psi}_{(1,2)}^{0i} = \pm \frac{m_\psi}{4\Omega_3} \varepsilon^{0ij} p^j, \quad \hat{\psi}_{(1,2)}^{12} = \frac{m_\psi}{4\Omega_3} \left(\pm E_0 + \frac{\Omega_3}{E_0} b^{(3)3} \right). \quad (\text{F.5d})$$

Fizemos uso dos seguintes parâmetros: $\Omega_3 = \sqrt{p_3^2 + m_\psi^2}$, $\lambda^\mu = \delta^{\mu 3}$ e $\varepsilon^{012} = 1$. Diferentemente do caso anterior, o aparecimento das quantidades Ω_3 e λ^μ garantem que a configuração em questão é realmente anisotrópica.

F.2 Matrizes espinoriais para o operador $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$

As soluções espinoriais para a configuração do operador $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ que iremos tratar pode ser obtida a partir das soluções calculadas em 5.2. A configuração de interesse é obtida fazendo $\hat{\mathcal{T}}^{ij} = g^{(4)ijk} = g_1 \times \varepsilon^{ijk}$. Esta escolha nos leva a uma configuração isotrópica (como mostrado no apêndice B.) Para este caso, obtemos os seguintes resultados para o produto tensorial

$$u^{(1,2)} \otimes \bar{u}^{(1,2)} = \hat{\xi}_{(1,2)}^\mu \gamma_\mu + \hat{\Xi}_{(1,2)} \mathbb{I}_4 + \hat{\Upsilon}_{(1,2)} \gamma_5 + \hat{\zeta}_{(1,2)}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \hat{\psi}_{(1,2)}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} |_{p^0=E_0}, \quad (\text{F.6})$$

onde

$$\hat{\Xi}_{(1,2)} = -\frac{1}{2} (m_\psi + g_1 |\mathbf{p}|), \quad \hat{\Upsilon}_{(1,2)} = 0, \quad (\text{F.7a})$$

$$\hat{\xi}_{(1,2)}^\mu = \frac{p^\mu}{2}, \quad \hat{\zeta}_{(1,2)}^\mu = \frac{p^\mu}{2|\mathbf{p}|}, \quad (\text{F.7b})$$

$$\hat{\psi}_{(1,2)}^{0i} = 0, \quad \hat{\psi}_{(1,2)}^{ij} = \frac{(m_\psi + g_1 |\mathbf{p}|)}{4} \varepsilon^{ijk} \frac{p^k}{|\mathbf{p}|}. \quad (\text{F.7c})$$

O termo ε^{ijk} é o símbolo de Levi-Civita em três dimensões e usamos a convenção $\varepsilon^{123} = 1$. Como já esperado, as componentes da decomposição acima dependem apenas do modulo do momento.

F.3 Matrizes espinoriais do operador não-mínimo

$\hat{\mathcal{P}}$

Para as soluções espinoriais do operador não-mínimo $\hat{\mathcal{P}}$, obtemos os seguintes resultados

$$u^{(1,2)} \otimes \bar{u}^{(1,2)} = \hat{\xi}_{(1,2)}^\mu \gamma_\mu + \hat{\Xi}_{(1,2)} \mathbb{I}_4 + \hat{\Upsilon}_{(1,2)} \gamma_5 + \hat{\zeta}_{(1,2)}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \hat{\psi}_{(1,2)}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} |_{p^0=E_0}, \quad (\text{F.8})$$

onde

$$\frac{1}{\mathcal{N}_u^2} \hat{\Xi}_{(1,2)} = \frac{m_\psi}{4E_0} \left(1 - \frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{4E_0^2} \right), \quad \hat{\Upsilon}_{(1,2)} = i \frac{\hat{\mathcal{P}}}{4E_0}, \quad (\text{F.9a})$$

$$\frac{1}{\mathcal{N}_u^2} \hat{\xi}_{(1,2)}^\mu = \frac{1}{4E_0} \left(1 - \frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{4E_0^2} \right) p^\mu + \frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{8E_0^2} \delta^{\mu 0}, \quad (\text{F.9b})$$

$$\frac{1}{\mathcal{N}_u^2} \hat{\zeta}_{(1,2)}^0 = \pm \frac{1}{4E_0} \left(1 - \frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{4E_0^2} \right) p_3, \quad (\text{F.9c})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{N}_u^2} \hat{\zeta}_{(1,2)}^i &= \pm \frac{\hat{\mathcal{P}}}{4E_0} \varepsilon^{ij} p^j \pm \frac{p^i}{4E_0 (E_0 + m_\psi)} \left(1 + \frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{4E_0^2} \right) p_3 \\ &\mp \frac{m_\psi}{4E_0} \left(1 + \frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{4E_0^2} \right) \delta^{i3}, \end{aligned} \quad (\text{F.9d})$$

$$\frac{1}{\mathcal{N}_u^2} \hat{\psi}_{(1,2)}^{i0} = \pm \frac{\varepsilon^{ij} p^j}{8E_0} \left(1 + \frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{4E_0^2} \right) \pm \frac{\hat{\mathcal{P}}}{8E_0^2 (E_0 + m_\psi)} p^i p_3 \mp \frac{\hat{\mathcal{P}}}{8E_0^2} m_\psi \delta^{i3}, \quad (\text{F.9e})$$

$$\frac{1}{\mathcal{N}_u^2} \hat{\psi}_{(1,2)}^{ij} = \pm \frac{\varepsilon^{ijk} p^k p_3}{8E_0 (E_0 + m_\psi)} \left(1 - \frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{4E_0^2}\right) \pm \frac{\varepsilon^{ij3}}{8} \left(1 - \frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{4E_0^2}\right). \quad (\text{F.9f})$$

Os termos ε^{ij} e ε^{ijk} são os símbolos de Levi-Civita em duas e três dimensões, respectivamente. Fizemos uso da seguinte convenção: $\varepsilon^{123} = 1$, $\varepsilon^{12} = 1$ e $\varepsilon^{3j} = 0$. O valor da constante de normalização $\mathcal{N}_u$ é dado por

$$\mathcal{N}_u = \frac{1}{\sqrt{2(E_0 + m_\psi)} \sqrt{1 + \frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{4E_0^2}}}.$$

Os resultados acima são gerais, ou seja, valem para qualquer configuração do operador $\hat{\mathcal{P}}$.

Como exemplo ilustrativo, iremos particularizar os resultado acima para o caso $\hat{\mathcal{P}} = f^{(4)1}p_1 + f^{(4)2}p_2 + f^{(4)3}p_3 = f^{(4)}\mathbf{p}$, ou seja, $f^{(4)1} = f^{(4)2} = f^{(4)3} \equiv f$. O resultado será

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_u} \hat{\Xi}_{(1,2)f^{(4)}} = \frac{m_\psi}{4E_0} \left(1 - \frac{f^2}{4E_0^2} \mathbf{p}^2\right), \quad \hat{\Upsilon}_{(1,2)} = i \frac{f}{4E_0} \mathbf{p}, \quad (\text{F.10a})$$

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_u} \hat{\xi}_{(1,2)f^{(4)}}^\mu = \frac{1}{4E_0} \left(1 - \frac{f^2}{4E_0^2} \mathbf{p}^2\right) p^\mu + \frac{f^2}{8E_0^2} \mathbf{p}^2 \delta^{\mu 0}, \quad (\text{F.10b})$$

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_u} \hat{\zeta}_{(1,2)f^{(4)}}^0 = \pm \frac{1}{4E_0} \left(1 - \frac{f^2}{4E_0^2} \mathbf{p}^2\right) p_3, \quad (\text{F.10c})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_u} \hat{\zeta}_{(1,2)f^{(4)}}^i &= \pm \frac{f}{4E_0} \mathbf{p} \varepsilon^{ij} p^j \pm \frac{p^i}{4E_0 (E_0 + m_\psi)} \left(1 + \frac{f^2}{4E_0^2} \mathbf{p}^2\right) p_3 \\ &\mp \frac{m_\psi}{4E_0} \left(1 + \frac{f^2}{4E_0^2} \mathbf{p}^2\right) \delta^{i3}, \end{aligned} \quad (\text{F.10d})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_u} \hat{\psi}_{(1,2)f^{(4)}}^{i0} &= \pm \frac{\varepsilon^{ij} p^j}{8E_0} \left(1 + \frac{f^2}{4E_0^2} \mathbf{p}^2\right) \pm \frac{f}{8E_0^2 (E_0 + m_\psi)} \mathbf{p} p^i p_3 \\ &\mp \frac{f}{8E_0^2} \mathbf{p} m_\psi \delta^{i3}, \end{aligned} \quad (\text{F.10e})$$

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_u} \hat{\psi}_{(1,2)f^{(4)}}^{ij} = \pm \frac{\varepsilon^{ijk} p^k p_3}{8E_0 (E_0 + m_\psi)} \left(1 - \frac{f^2}{4E_0^2} \mathbf{p}^2 \right) \pm \frac{\varepsilon^{ij3}}{8} \left(1 - \frac{f^2}{4E_0^2} \mathbf{p}^2 \right), \quad (\text{F.10f})$$

onde $\tilde{\mathcal{N}}_u$ é dado por

$$\tilde{\mathcal{N}}_u = \frac{1}{\sqrt{2(E_0 + m_\psi)} \sqrt{1 + \frac{f^2}{4E_0^2} \mathbf{p}^2}}. \quad (\text{F.11})$$

F.4 Matrizes espinoriais dos operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}$ mínimos

Por fim, o produto tensorial das soluções espinoriais obtidas no apêndice D é mostrado a seguir:

$$u^{(1,2)} \otimes \bar{u}^{(1,2)} = \hat{\xi}_{(1,2)}^\mu \gamma_\mu + \hat{\Xi}_{(1,2)} \mathbb{I}_4 + \hat{\Upsilon}_{(1,2)} \gamma_5 + \hat{\zeta}_{(1,2)}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \hat{\psi}_{(1,2)}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} |_{p^0 = \mathbb{E}_u}, \quad (\text{F.12})$$

onde

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_u^2} \hat{\Xi}_{(1,2)} = \frac{1}{4} \frac{m_\psi - \hat{\mathcal{S}}}{\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0}, \quad (\text{F.13a})$$

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_u^2} \hat{\Upsilon}_{(1,2)} = 0, \quad \frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_u^2} \hat{\xi}_{(1,2)}^\mu = \frac{(p^\mu + \hat{\mathcal{V}}^\mu)}{4(\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0)}, \quad (\text{F.13b})$$

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_u^2} \hat{\zeta}_{(1,2)}^\mu = \pm (p^3 + \hat{\mathcal{V}}^3) \frac{(p^\mu + \hat{\mathcal{V}}^\mu) + (m_\psi - \hat{\mathcal{S}}) \delta^{\mu 0}}{(\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0)^2 + (\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0) (m_\psi - \hat{\mathcal{S}})}, \quad (\text{F.13c})$$

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_u^2} \hat{\psi}_{(1,2)}^{i0} = \pm \varepsilon^{ij} \frac{(p^j + \hat{\mathcal{V}}^j)}{4(\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0)}, \quad (\text{F.13d})$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\check{\mathcal{N}}_u^2} \hat{\psi}_{(1,2)}^{ij} &= \pm \frac{1}{8} \frac{\varepsilon^{ijk} \left(p^k + \hat{\mathcal{V}}^k \right) \left(p^3 + \hat{\mathcal{V}}^3 \right)}{\left(\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0 \right)^2 + \left(\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0 \right) \left(m_\psi - \hat{\mathcal{S}} \right)} \\
&\pm \frac{1}{8} \frac{\varepsilon^{ij3}}{\left(\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0 \right)^2 + \left(\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0 \right) \left(m_\psi - \hat{\mathcal{S}} \right)}. \tag{F.13e}
\end{aligned}$$

Apesar de termos efetuado o produto tensorial usando as soluções espinoriais para as configurações mínimas dos operadores $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}$, as soluções acima podem ser generalizadas usando o mesmo procedimento descrito no final do apêndice D. Por fim, vale lembrar que a constante de normalização é dada por

$$\check{\mathcal{N}}_u = \sqrt{\frac{\mathbb{E}_u}{\left(\mathbb{E}_u + \hat{\mathcal{V}}_0 + m_\psi - \hat{\mathcal{S}} \right)^2 + (\mathbf{p} + \mathbf{v})^2}}.$$

Apêndice G

Trabalhos Publicados

Os resultados desta dissertação proporcionaram um artigo intitulado “**Lorentz-violating modification of Dirac theory based on spin-nondegenerate operators**”, publicado no periódico PHYSICAL REVIEW D **95**, 075016 (2017). Segue em anexo o artigo.

Lorentz-violating modification of Dirac theory based on spin-nondegenerate operators

J. A. A. S. Reis^{*} and M. Schreck[†]*Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão, 65080-805 São Luís, Maranhão, Brazil*

(Received 4 January 2017; published 12 April 2017)

The Standard Model extension (SME) parametrizes all possible Lorentz-violating contributions to the Standard Model and general relativity. It can be considered as an effective framework to describe possible quantum-gravity effects for energies much below the Planck energy. In the current paper, the spin-nondegenerate operators of the SME fermion sector are the focus. The propagators, energies, and solutions to the modified Dirac equation are obtained for several families of coefficients including nonminimal ones. The particle energies and spinors are computed at first order in Lorentz violation and, with the optical theorem, they are shown to be consistent with the propagators. The optical theorem is then also used to derive the matrices formed from a spinor and its Dirac conjugate at all orders in Lorentz violation. The results are the first explicit ones derived for the spin-nondegenerate operators. They will prove helpful for future phenomenological calculations in the SME that rely on the footing of quantum field theory.

DOI: [10.1103/PhysRevD.95.075016](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.075016)

I. INTRODUCTION

Quantum-gravity effects may induce minuscule violations of Lorentz invariance. This is motivated by a number of articles that have been published during the past 25 years. Lorentz symmetry violation was shown to occur in string-theory models [1–5], loop quantum gravity [6,7], non-commutative theories [8,9], models describing a small-scale structure of spacetime [10–12], quantum field theories on spacetimes with nontrivial topology [13,14], and last but not least, Hořava-Lifshitz gravity [15].

Although there are specific models in various approaches to quantum gravity, it is highly challenging to extract generic physical statements or principles from such models. After all, theoretical observations are very specific to a particular model under consideration and it is not clear at all whether the same or similar results will be obtained within a different model. Understanding the physics of model after model always requires starting a calculation from scratch and studying more general models may turn out to be impractical. Besides, it is not clear at all where to look for Lorentz violation specifically, insofar there is no preference of any particle sector or any prototype of quantum gravity.

For these reasons, it is much more reasonable to have a general, effective framework available including all possible Lorentz-violating terms that are consistent with coordinate invariance and the gauge structure of the Standard Model of elementary particles. Such a framework is provided by the Standard Model extension (SME), which is a collection of all Lorentz-violating contributions in both the Standard Model and general relativity [16–18]. Each Lorentz-violating term is decomposed into field operators

and component coefficients that can be interpreted as background fields permeating the vacuum. The SME allows for obtaining experimental predictions that are independent of any specific underlying model. The big advantage is that large regions of coefficient space can be tested with a single experiment only, i.e., in principle many distinct models are covered by doing so. Since every particle sector is contained, a large variety of experiments can be considered ranging from precise measurements of hyperfine splitting in hydrogen to observations of ultrahigh energy cosmic rays. In the physics community, there seems to be a greater interest in searches for *CPT* violation than for Lorentz violation. In this context, one has to remark that *CPT* violation implies Lorentz violation [19], which is why all *CPT*-violating operators are contained in the SME automatically.

Lorentz-violating operators are classified according to their mass dimension. The finite number of operators with mass dimensions of 3 and 4 are contained in the minimal SME [17]. The remaining infinite number of higher-dimensional operators are part of the nonminimal SME [20–22]. Note that the nonlinear nonminimal gravity sector was discussed in [23], where the recent paper [24] contains a classification of the nonminimal coefficients in the linearized gravity sector. The nonminimal SME is a natural generalization of the minimal framework. It must be kept in mind that nonminimal operators become more dominant for increasing energies. Also, due to the negative mass dimension of the commutativity tensor in noncommutative field theories, such models can only be mapped to coefficients of the nonminimal SME, which justifies its consideration.

With the construction of the (minimal) SME, searches for violations of Lorentz invariance in Nature have had their

^{*}jalfieres@gmail.com
[†]marco.schreck@ufma.br

revival. This has led to a steadily increasing number of cutting-edge experiments testing Lorentz invariance, which enlarges the set of constraints on Lorentz violation yearly. At the same time, the sensitivity for detecting Lorentz invariance has been augmenting at a fast pace, leading to an improvement of constraints by several orders of magnitude within a few years, such as in the neutrino sector [25].

The theoretical properties of the SME at tree level were investigated in a large series of papers [26–42], while radiative corrections were studied in [43–61]. In particular, the authors of [26] examined properties of the minimal fermion sector in general, whereas [28] is dedicated to the minimal a and b coefficients. Furthermore, in [38] the (nonminimal) fermion operators that are degenerate with respect to particle spin are the focus. This concerns the a , c , f , and m coefficients. So far, the modified propagators and particle spinors have not been stated explicitly in the literature for the spin-nondegenerate cases, which involves the b , d , H , and g coefficients.¹ The goal of the current paper is to fill this gap. Since all fields will be defined in Minkowski spacetime, it suffices to consider explicit Lorentz symmetry breaking. Hence, the Lorentz-violating background fields are introduced by hand and they lack any dynamics. Note that in curved spacetimes, this procedure is not sufficient, but one either has to break Lorentz symmetry spontaneously [62–65] or one must work in an extended geometrical framework. Finsler geometry seems to be very promising in this context and it has been in the spotlight for a couple of years [66–80].

The paper is organized as follows. In Sec. II, we state the propagators for the operators that break spin degeneracy. The results are valid for all possible choices of b , d , H , and g coefficients, no matter whether they are part of the minimal or nonminimal SME. In Sec. III, both the dispersion relations and the solutions of the modified Dirac equation are given at first order in Lorentz violation for specific choices of minimal and nonminimal coefficients. The method of obtaining these solutions, which was developed in [22], will be reviewed. Section IV is dedicated to obtaining the matrices constructed from a spinor and its Dirac conjugate. These objects are indispensable in phenomenological calculations within quantum field theory. In this context, the optical theorem is employed as a tool to obtain the matrices and also to check consistency between the propagators and the first-order solutions of the Dirac equation. It is well known that additional time derivatives in Lorentz-violating theories lead to several issues both in the minimal and the nonminimal SME. How these can be resolved for specific cases will be outlined in Sec. V. Last but not least, the results are summarized and discussed in

Sec. VI. For demonstration purposes, exact spinors for a limited number of coefficients can be found in Appendix A. For completeness, in Appendixes B and C we give the spinors and the propagator for the spin-degenerate operators. Besides, we will state a couple of specific spinor matrices in Appendix D. Natural units are used with $\hbar = c = 1$, unless otherwise stated. For typesetting purposes, momentum components will often have lower indices, but these should always be understood as components of the contravariant momentum.

II. SME FERMION SECTOR AND PROPAGATORS

The construction of the minimal SME fermion sector was initiated in [16,17]. Ultimately, the Lagrange density of both the minimal and the nonminimal sector is expressed as follows [22]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma^\mu i \partial_\mu - m_\psi \mathbb{1}_4 + \hat{\mathcal{Q}}) \psi + \text{H.c.} \quad (2.1)$$

Here, ψ is a Dirac spinor and $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ is its Dirac conjugate. The fermion mass is denoted as m_ψ to distinguish it from one of the Lorentz-violating operators. Furthermore, γ^μ are the standard Dirac matrices obeying the Clifford algebra $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \mathbb{1}_4$, with the Minkowski metric $\eta_{\mu\nu}$ and the identity matrix $\mathbb{1}_4$ in spinor space. Lorentz-violating contributions are contained in $\hat{\mathcal{Q}}$, which is a 4×4 matrix in spinor space as well. All fields are defined in Minkowski spacetime with metric signature $(+, -, -, -)$. In the nonminimal SME, $\hat{\mathcal{Q}}$ is an expansion in terms of derivatives ∂_μ , in position space, or momenta, $p_\mu = i\partial_\mu$, in momentum space. In spinor space, $\hat{\mathcal{Q}}$ is decomposed into the 16 Dirac bilinears:

$$\hat{\mathcal{Q}} = \hat{S} + i\hat{P}\gamma_5 + \hat{V}^\mu \gamma_\mu + \hat{A}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{T}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

with the chiral Dirac matrix $\gamma_5 = \gamma^5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ and the commutator $\sigma_{\mu\nu}$ of two Dirac matrices: $\sigma_{\mu\nu} \equiv i/2 [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. The scalar, pseudoscalar, and vector operators $\hat{S}$, $\hat{P}$, and $\hat{V}$ contain the a , c , e , f , m , and m_5 coefficients; cf. Eq. (7) in [22]. The m_5 coefficients can be absorbed into the physical fields by a chiral transformation but they are usually stated for completeness. The remaining ones were subject to studies in [38]. In the latter reference, certain properties of quantum field theories, based on these coefficients, were examined. Such frameworks do not break spin degeneracy, which means that the characteristics of a particle do not depend on the direction of the spin projection along the quantization axis. Hence, there is only a single dispersion relation and a single spinor for particles and antiparticles, respectively. The situation is different for the spin-nondegenerate operators, which are the pseudovector $\hat{A}^\mu$ and the two-tensor $\hat{T}^{\mu\nu}$. Those contain the b , d , H , and g

¹Note that even for these coefficients there are particular choices that have a single dispersion relation for particles and antiparticles, respectively. Currently such a framework is under consideration and the outcomes will be reported in a forthcoming paper.

coefficients and their nonminimal versions are given by [22]

$$\hat{A}^\mu = \hat{d}^\mu - \hat{b}^\mu, \quad \hat{T}^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} - \hat{H}^{\mu\nu}, \quad (2.3a)$$

$$\hat{b}^\mu = \sum_{d \text{ odd}} b^{(d)\mu\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (2.3b)$$

$$\hat{d}^\mu = \sum_{d \text{ even}} d^{(d)\mu\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (2.3c)$$

$$\hat{H}^{\mu\nu} = \sum_{d \text{ odd}} H^{(d)\mu\nu\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (2.3d)$$

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \sum_{d \text{ even}} g^{(d)\mu\nu\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (2.3e)$$

with the superscript (d) giving the mass dimension of each coefficient. Here $b^{(d)\mu\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}}$ etc. are called the component or controlling coefficients, which can be interpreted as background fields in the vacuum. The latter equations give the definitions of the Lorentz-violating operators that will be examined in the current paper. The mass dimensions of the minimal b and H coefficients are 1, whereas the minimal d and g coefficients are dimensionless. For each term in the expansions, the number of additional momentum components increases by 2, successively, which is why the mass dimension of the appropriate coefficients decreases by 2. Moreover, the associated b , d , H , and g coefficients break spin degeneracy. Therefore, there are two possible dispersion relations and spinors for both particles and antiparticles. We will encounter this behavior in the course of the article.

Before solving the modified Dirac equation, we are interested in the propagators of the frameworks that rest on the operators of Eq. (2.3). In the context of quantum field theory, a propagator describes a virtual particle that is generated at one spacetime point and annihilated at another one. Propagators play a role in interaction processes where virtual particles occur. Thereby, due to the physical propagator poles, the contribution to the probability amplitude becomes large whenever the momentum of any virtual particle is nearly on shell. The propagator iS is the Green's function of the free-field equations in momentum space, i.e., it is the inverse of the Dirac operator, S^{-1} , that appears in the field equations (multiplied by an additional factor of i according to the conventions of [81]). In momentum space the latter is given by Eq. (4) of [22]:

$$S^{-1} = \gamma^\mu p_\mu - m_\psi \mathbb{1}_4 + \hat{Q}. \quad (2.4)$$

The Dirac operator is a 4×4 matrix in spinor space. Thus, to obtain the propagator this matrix has to be inverted, for which the 16 Dirac bilinears $\{\Gamma^A\} \equiv \{\mathbb{1}_4, \gamma^5, \gamma^\mu, i\gamma^5 \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}\}$ are indispensable. Any complex 4×4 matrix can be

expanded in terms of $\{\Gamma_A\}$. Hence, for the inverse of the Dirac operator we propose the *Ansatz*

$$iS = \frac{i}{\Delta} (\hat{\Xi} \gamma^\mu + \hat{\Xi} \mathbb{1}_4 + \hat{\Upsilon} \gamma^5 + \hat{\xi}_\mu \gamma^5 \gamma^\mu + \hat{\psi}_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}), \quad (2.5)$$

where Δ is the overall denominator of the propagator. There are now two possibilities of proceeding. First, Eq. (2.5) can be inserted into $S^{-1}S = SS^{-1} = \mathbb{1}_4$. This delivers a system of 16 linear equations in the 16 parameters $\{\hat{\Xi}, \hat{\Upsilon}, \hat{\xi}_\mu, \hat{\psi}_{\mu\nu}\}/\Delta$ that are themselves functions of the four-momentum components, the particle mass, and the Lorentz-violating coefficients. It is no obstacle solving this system with computer algebra. The second possibility is to keep in mind that the Dirac bilinears obey the orthogonality relation $\text{Tr}(\Gamma_A \Gamma^B) = 4\delta_A^B$, where the appropriate Lorentz indices are lowered to obtain the dual basis $\{\Gamma_A\}$. Multiplying the inverse of the Dirac operator with each of the Dirac bilinears, each parameter can be obtained relying on the orthogonality condition.

A. Propagator for $\hat{A}^\mu$

Now the propagator is obtained for the b and d coefficients, that are comprised in the observer Lorentz pseudovector $\hat{A}^\mu$, according to Eq. (2.3a). The Dirac operator is given by Eq. (2.4), where $\hat{Q} = \hat{A}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu$. Either of the two procedures outlined above leads to the result

$$\hat{\Xi}_{\hat{A}} = m_\psi (p^2 - m_\psi^2 - \hat{A}^2), \quad (2.6a)$$

$$\hat{\Upsilon}_{\hat{A}} = 0, \quad (2.6b)$$

$$\hat{\xi}_{\hat{A}}^\mu = (p^2 - m_\psi^2 + \hat{A}^2) p^\mu - 2(p \cdot \hat{A}) \hat{A}^\mu, \quad (2.6c)$$

$$\hat{\xi}_{\hat{A}}^\mu = 2(p \cdot \hat{A}) p^\mu - (p^2 + m_\psi^2 + \hat{A}^2) \hat{A}^\mu, \quad (2.6d)$$

$$\hat{\psi}_{\hat{A}}^{\mu\nu} = m_\psi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \hat{A}_\sigma, \quad (2.6e)$$

$$\Delta_{\hat{A}} = (p + \hat{A})^2 (p - \hat{A})^2 - 2m_\psi^2 (p^2 - \hat{A}^2) + m_\psi^4, \quad (2.6f)$$

with the four-dimensional totally antisymmetric Levi-Civita symbol, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, where $\epsilon^{0123} = 1$. Several remarks are in order. First, the physical dispersion relations are poles of the propagator, i.e., they are zeros of the global denominator Δ . The result for Δ corresponds to the determinant of the Dirac operator that was obtained in Eq. (4) of [70]. For minimal coefficients, this is a fourth-order polynomial in p_0 —even when the Lagrange density contains additional time derivatives. Under that condition, there are two particle dispersion relations and (after reinterpretation) two antiparticle dispersion relations. Hence, the usual spin degeneracy of the particle energy

is broken for this framework. Note that with additional time derivatives, the number of poles even increases. Second, for vanishing Lorentz violation, $\hat{\mathcal{A}}^\mu = 0$, the standard propagator $iS = i(\not{p} + m_\psi)/(p^2 - m_\psi^2)$ is recovered. Third, the propagator, as it stands, is valid for both the minimal and nonminimal framework because additional powers of the four-momentum, which are contained in $\hat{\mathcal{A}}^\mu$, do not modify the overall propagator structure.

B. Propagator for $\hat{T}^{\mu\nu}$

The second framework considered is based on a non-vanishing observer two-tensor $\hat{T}^{\mu\nu}$ in Eq. (2.3a), which contains both the H and the g coefficients. The Dirac operator includes the modification $\hat{\mathcal{Q}} = \hat{T}^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}/2$. The propagator can be obtained in analogy to the previous framework and its structure is a bit more involved:

$$\hat{\Xi}_{\hat{T}} = m_\psi(p^2 - m_\psi^2 + 2X), \quad (2.7a)$$

$$\hat{Y}_{\hat{T}} = -2im_\psi Y, \quad (2.7b)$$

$$\hat{\xi}_{\hat{T}}^\mu = (p^2 - m_\psi^2 - 2X)p^\mu - 2V^\mu, \quad (2.7c)$$

$$\hat{\zeta}_{\hat{T}}^\mu = 2m_\psi \tilde{T}^{\mu\nu} p_\nu, \quad (2.7d)$$

$$\hat{\psi}_{\hat{T}}^{\mu\nu} = \left[X - \frac{1}{2}(p^2 + m_\psi^2) \right] \hat{T}^{\mu\nu} + Y \tilde{T}^{\mu\nu} + \hat{T}^{\mu\epsilon} p_\epsilon p^\nu - p^\mu \hat{T}^{\nu\epsilon} p_\epsilon, \quad (2.7e)$$

$$\Delta_{\hat{T}} = (p^2 - m_\psi^2 - 2X)^2 + 4(Y^2 - V \cdot p - 2m_\psi^2 X), \quad (2.7f)$$

$$V^\mu \equiv \hat{T}^{\mu\nu} \hat{T}_{\nu\epsilon} p^\epsilon, \quad (2.7g)$$

$$X \equiv \frac{1}{4} \hat{T}^{\mu\nu} \hat{T}_{\mu\nu}, \quad Y \equiv \frac{1}{4} \tilde{T}^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad \tilde{T}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\epsilon\sigma} \hat{T}_{\epsilon\sigma}. \quad (2.7h)$$

Again several remarks are in order. First, the zeros of the overall denominator Δ correspond to the physical dispersion relations. Note that Δ is equal to the determinant of the Dirac operator, which is stated in Eq. (15) of [70]. Such as for $\hat{\mathcal{A}}^\mu$, the denominator Δ has at least four zeros. Second, the propagator has a pseudoscalar part that is characterized by a nonvanishing quantity, Y , linked to the dual tensor of $\hat{T}^{\mu\nu}$.

It is interesting to observe that computing the propagators is much easier than obtaining the spinors, as we shall see. The reason is that propagators are off-shell objects, where p^0 is a free quantity. However, the spinor solutions of the Dirac equation are valid on shell. Exact dispersion relations can become highly complicated even for simple choices of component coefficients, for example when they

produce third-order polynomials in p^0 . It may not even be possible to give solutions of polynomials with order higher than four in a closed form. Hence, it is not surprising that the complexity of the spinors follows the complexity of the dispersion laws.

III. DISPERSION RELATIONS AND SPINORS

The Lorentz-violating background field does not only modify the propagators but it changes the physical energy-momentum correspondences as well. We have already observed this from the modified overall denominator in the propagator, whose poles correspond to these dispersion relations on the one hand. On the other hand, it is possible to obtain the dispersion relations directly from the determinant of the Dirac operator that changes due to Lorentz violation. The modified Dirac operator is stated in Eq. (2.4) with the Lorentz-violating modification $\hat{\mathcal{Q}}$. In the current section, the Dirac equation will be solved for multiple frameworks that are considered as exemplary. There are several procedures to do so.

The first method is to simply consider the Dirac equation in momentum space as a homogeneous linear system of equations whose solutions are the Dirac spinors. For the spinor solutions to be nontrivial, the determinant of the Dirac operator has to vanish. This condition sets the hitherto arbitrary zeroth four-momentum component to allowed energy levels. Since the Dirac operator is a 4×4 matrix in spinor space, the polynomial in p^0 is at least of degree 4. There are both positive- and negative-energy values. The positive ones $E_>$ can be interpreted as the energies for free particles, i.e., $p^0 = E_>(\mathbf{p})$ in this case. The negative ones $E_<$ indicate the appearance of antiparticles, which are reinterpreted according to the procedure of Feynman and Stückelberg to give physically meaningful results. The reinterpretation works such that antiparticles are considered as particles propagating backward in time, which leads to four-momentum components with opposite signs. Hence, for antiparticles we have that $p^0 = -E_<(-\mathbf{p}) > 0$ [22,26,38]. With p^0 set to the allowed energy values, the system of equations has nontrivial solutions for the spinors. For antiparticles, the Feynman-Stückelberg reinterpretation has to be applied not only to the negative-energy solutions but to the whole Dirac operator. Solving the resulting system produces the spinors for antiparticles.

The advantage of this general procedure is to deliver energies and spinors that are exact in Lorentz violation. However, the complexity of both the energies and the spinors rises drastically the more controlling coefficients are taken into account. The reason is that, even at second order in Lorentz violation, more and more possible products of distinct coefficients can be formed with an increasing number of coefficients. For the purpose of demonstration, two isotropic cases will be treated in Appendix A according to the method outlined.

It makes sense to obtain such exact solutions for theoretical reasons, e.g., to investigate the physical consistency of the framework under consideration. However, for phenomenological studies it often suffices to restrain particle energies, spinors, etc. to first order in Lorentz violation. The particle and antiparticle energies can then be obtained from the first-order Hamiltonians given by Eqs. (60) and (64) of [22], respectively. The method of computing the spinors is presented in Sec. III. A of the latter paper. In this context, a unitary matrix U is constructed to block-diagonalize the Dirac operator, which decouples positive- and negative-energy states. In the standard case, the matrix U is given by the product of two matrices, V and W , with

$$V = \frac{\mathbb{1}_4 + \gamma_0 \gamma_5}{\sqrt{2}}, \quad W(\mathbf{p}) = \frac{E_0 + m_\psi + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{2E_0(E_0 + m_\psi)}}, \quad (3.1)$$

where $E_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_\psi^2}$ is the standard dispersion relation for fermions [22]. Note that for certain Lorentz-violating frameworks such as those based on the a , c , e and m coefficients, the matrix U that block-diagonalizes the Dirac operator still has this form, where just the four-momentum or the particle mass is replaced by a suitable combination involving the controlling coefficients (for details cf. Appendix B). This works at all orders in Lorentz violation. However, constructing U for the b , d , H , and g coefficients is much more involved, which is why the result is only known at first order in Lorentz violation:

$$U = \left(\mathbb{1}_4 + \frac{1}{4E_0} [\gamma_5, VW\gamma_0\hat{Q}W^\dagger V^\dagger] \right) VW, \quad (3.2)$$

where $[\bullet, \bullet]$ denotes the ordinary commutator of two matrices [22]. After block diagonalization, the Dirac equation is brought into the form $(E - H)U\psi = 0$, with the energy E , the Hamiltonian H , and the spinor ψ . This is an eigenvalue problem for the energies and the eigenvectors $U\psi$. Having these eigenvectors at hand allows for computing the spinors by multiplying the eigenvectors with $U^\dagger$. The approach developed is similar to the Foldy-Wouthuysen procedure [82] in spirit. Note that all computations will be carried out with the Dirac matrices in the chiral representation:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.3a)$$

using the Pauli matrices

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.3b)$$

and the identity matrix $\mathbb{1}_2$ in two dimensions.

A. General properties of particle and antiparticle energies

In the standard case and for some Lorentz-violating frameworks such as those based on the a and c coefficients, the particle energy is degenerate with respect to the particle spin, i.e., the energy is the same no matter in what direction along the quantization axis spin points. However, the frameworks based on the b , d , H and g coefficients are nondegenerate with respect to the particle spin. Therefore, a particle has two possible energy states that are denoted as $E_{\pm}^{(\pm)} \equiv E_u^{(\pm)}$, where the ordering of the energies is chosen along the lines of Appendix B in [16]. We use a notation for the particle energies similar to that introduced in [26].

Since there exist two distinct positive energies, there are two distinct negative ones that will be called $E_{\pm}^{(\pm)}$. Based on the transformation properties of controlling coefficients under charge conjugation C , the positive energies are related to the negative ones as follows [26]:

$$E_{\pm}^{(\pm)}(\mathbf{p}, d^{\mu\nu\dots}, H^{\mu\nu\dots}) = -E_{\mp}^{(\mp)}(-\mathbf{p}, -d^{\mu\nu\dots}, -H^{\mu\nu\dots}). \quad (3.4)$$

Hence, only the d and H coefficients appear with opposite signs on both sides of the equation where the signs of the b and g coefficients remain unaffected. This is due to the fact that the d and H coefficients are odd under C , whereas the b and g coefficients are even (see Table P31 in [25]).

The ordering of the energies is reversed as well according to Appendix B of [16] and Eq. (16) of [26]. These negative energies are physically meaningless and they have to be reinterpreted according to Feynman and Stückelberg. By doing so, the signs of the spatial momentum components and of the energy, which corresponds to the zeroth four-momentum component, have to be reversed:

$$-E_{\pm}^{(\mp)}(-\mathbf{p}, -d^{\mu\nu\dots}, -H^{\mu\nu\dots}) \mapsto E_{\pm}^{(\mp)}(\mathbf{p}, -d^{\mu\nu\dots}, -H^{\mu\nu\dots}) \\ \equiv E_v^{(\mp)}(\mathbf{p}), \quad (3.5)$$

where we employ the notation of [26] for the antiparticle energies as well. Hence, ultimately the antiparticles have the latter positive energy values with both the signs of the d and H coefficients reversed. As the d and H coefficients violate C , the particle energies are related to the antiparticle energies as follows:

$$E_u^{(\pm)}(\mathbf{p}, d^{\mu\nu\dots}, H^{\mu\nu\dots}) = E_u^{(\mp)}(\mathbf{p}, -d^{\mu\nu\dots}, -H^{\mu\nu\dots}) = E_v^{(\mp)}(\mathbf{p}). \quad (3.6)$$

B. Obtaining the spinors

The great advantage of using the method of obtaining the spinors, which was outlined at the beginning of the current section, will be explained as follows. First of all, it suffices to compute such a spinor for one particular nonzero component coefficient, such as for the minimal coefficient $b_3^{(3)}$, defining a preferred direction pointing along the third spatial axis of the coordinate system. Having obtained this result allows us to generalize it to the pseudovector $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ and even to the appropriate nonminimal frameworks. For example, with the particle spinors for the coefficient $b_3^{(3)}$ at hand, we can replace $b_3^{(3)}$ by $-(d_3^{(4)} - b_3^{(3)}) \equiv -\mathcal{A}_3^{(3)}$; cf. Eq. (7) in [22], which is the generalization within the minimal SME. In a further step at first order in Lorentz violation, the latter $\mathcal{A}_3^{(3)}$ is promoted to an operator, which corresponds to generalizing it to the nonminimal SME:

$$\mathcal{A}^{(3)3} \mapsto \hat{\mathcal{A}}^3 \equiv \sum_{d \text{ odd}} \mathcal{A}^{(d)3\alpha_1\dots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{d-3}}. \quad (3.7)$$

Similarly, this works for the tensor coefficients H and g . As a first step, it is reasonable to obtain the spinors for a particular nonzero H coefficient, such as for $H_{01}^{(3)}$. The results are then generalized within the minimal SME according to Eq. (7) of [22], i.e., we replace $H_{01}^{(3)}$ by $-(g_{01}^{(4)} - H_{01}^{(3)}) \equiv -\mathcal{T}_{01}^{(3)}$. The generalization to the non-minimal SME amounts to promoting $\mathcal{T}_{01}^{(3)}$ to an operator:

$$\mathcal{T}^{(3)01} \mapsto \hat{\mathcal{T}}^{01} \equiv \sum_{d \text{ odd}} \mathcal{T}^{(d)01\alpha_1\dots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{d-3}}. \quad (3.8)$$

So it is wise to start with the simplest component coefficients in this context, which are the minimal b and H coefficients and to generalize the spinors obtained based on the previous description. Note that for the spinors at first order in Lorentz violation it is sufficient to replace all additional p^0 components in the Lorentz-violating terms of the particle and antiparticle spinors by the standard energy E_0 . It has to be kept in mind, though, that the simple generalization outlined above only works at first order in Lorentz violation. The exact spinors are expected to involve complicated combinations of distinct coefficients of both the minimal and nonminimal SME such as $b_3^{(3)}$ and $d_{3111}^{(6)}$.

C. Normalization

The positive-energy spinors (for particles) are denoted as $u^{(\alpha)}$ and the negative-energy spinors (reinterpreted for

antiparticles according to Feynman and Stückelberg) are denoted as $v^{(\alpha)}$. Additional subscripts $E_u^{(\pm)}$ will indicate whether a spinor is associated with an energy $E_u^{(+)}$ or $E_u^{(-)}$. This distinction is necessary because of broken spin degeneracy. For the latter reason, both particle spinors and the antiparticle spinors are automatically orthogonal to each other. Furthermore, the spinors should be normalized. We choose a normalization such that the spinors satisfy

$$u^{(\alpha)\dagger} u^{(\alpha)} = 2E_u^{(\alpha)}, \quad (3.9a)$$

$$v^{(\alpha)\dagger} v^{(\alpha)} = 2E_v^{(\alpha)}. \quad (3.9b)$$

Note that α is not summed over on the left-hand sides. This normalization has a great advantage when dealing with the optical theorem. There is then no additional global adjustment necessary in the optical theorem to make it work. We will observe this in Sec. IV. Except for a factor $2/m_\psi$ on the right-hand sides of these conditions, our normalization corresponds to the normalization of spinors chosen for the minimal SME in [26].

D. Energies and spinors for $\hat{\mathcal{A}}^\mu$

We start computing the spinors for the pseudovector operator $\hat{\mathcal{A}}^\mu$. All results are understood to be valid for a positive expansion parameter, i.e., for a positive combination of Lorentz-violating coefficients and four-momentum components. If this combination is negative, the labels of the dispersion relations and the spinor solutions just have to be switched. We will elaborate on this at the very end of Sec. IV.

1. Full “isotropic” operator

It is always a good advice to start with an isotropic framework. First, this is due to practical reasons, since computations are expected to be much simpler when there is no direction dependence. Second, from a phenomenological point of view, controlling coefficients that are associated with preferred spacelike directions are often constrained more strictly in comparison to their isotropic counterparts. The leading-order terms in the dimensional expansion of the b , d , and g coefficients are chosen to be isotropic, which will be indicated by the standard notation of a ring diacritic (cf. Sec. IV.B in [22]). For the minimal b coefficients, only the zeroth component of the coefficient (pseudo)vector leads to an isotropic dispersion relation, i.e., $\mathring{b} \equiv b^{(3)0}$. The minimal d coefficient matrix has to be chosen as a diagonal (traceless) matrix with the spatial components equal to each other, i.e., $\mathring{d}^{(4)\mu\nu} = \mathring{d} \times \text{diag}(1, 1/3, 1/3, 1/3)^{\mu\nu}$, where $\mathring{d} \equiv d^{(4)00}$. Last but not least, the minimal g coefficients produce isotropic expressions if all spatial

coefficients with a totally antisymmetric permutation of indices are equal modulo the sign of the permutation: $g^{(4)ijk} = \hat{g} \times \varepsilon^{ijk}$, with $\hat{g} \equiv g^{(4)123}$. There is no isotropic choice for the minimal H coefficients. Respecting these leading-order choices, we define the total “isotropic” operators as follows:

$$\hat{\mathcal{A}} \equiv \hat{d}^0 - \hat{b}, \quad (3.10a)$$

$$\hat{b} \equiv \sum_{d \text{ odd}} b^{(d)0\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (3.10b)$$

$$\hat{d}^\mu \equiv \hat{d} \times \text{diag}\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^{\mu\alpha_1} p_{\alpha_1},$$

$$\hat{d} \equiv \sum_{d \text{ even}} d^{(d)00\alpha_2 \dots \alpha_{d-3}} p_{\alpha_2} \dots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (3.10c)$$

$$\hat{g}^{ij} \equiv \hat{g} \times \varepsilon^{ijk} p_k, \quad \hat{g} \equiv \sum_{d \text{ even}} g^{(d)123\alpha_2 \dots \alpha_{d-3}} p_{\alpha_2} \dots p_{\alpha_{d-3}}. \quad (3.10d)$$

Including the higher-dimensional contributions, these choices are certainly no longer isotropic. However, they will still be denoted with a ring diacritic to remind the reader of the isotropic nature of the leading-order (minimal) terms. The modified dispersion relations, at first order in the controlling coefficients, read

$$\dot{E}_u^{(\pm)} = E_0 \left[1 \pm \frac{|\mathbf{p}|}{E_0^2} \left(\frac{4}{3} E_0 \hat{d} - \hat{b} + m_\psi \hat{g} \right) \right]. \quad (3.11)$$

Relying on the second procedure reviewed at the beginning of the current section, the particle spinors at first order in Lorentz violation are calculated and cast into the following shape:

$$\dot{u}^{(1,2)}|_{\dot{E}_u^{(\pm)}} = \dot{N}_u^{(1,2)} \dot{\mathfrak{F}} \left(\hat{\mathcal{A}} - \hat{g} \frac{\mathbf{p}^2}{m_\psi} \right), \quad (3.12a)$$

$$\dot{\mathfrak{F}}(X) = \begin{pmatrix} \dot{\phi}_\mp \\ \dot{\chi}_\pm \end{pmatrix} - \frac{m_\psi}{2E_0^2} \begin{pmatrix} \dot{\chi}_\pm \\ -\dot{\phi}_\mp \end{pmatrix} X, \quad (3.12b)$$

$$\dot{\phi}_\pm = [E_0 + m_\psi \pm |\mathbf{p}|] \begin{pmatrix} p_3 \mp |\mathbf{p}| \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}, \quad (3.12c)$$

$$\dot{\chi}_\pm = [E_0 + m_\psi \pm |\mathbf{p}|] \begin{pmatrix} p_3 \pm |\mathbf{p}| \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}, \quad (3.12d)$$

with the normalization factors

$$\dot{N}_u^{(1,2)} = \frac{1}{4\sqrt{|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| \pm p_3)(E_0 + m_\psi)}} \times \left[2 \pm \frac{|\mathbf{p}|}{E_0^2} \left(\frac{4}{3} E_0 \hat{d} - \hat{b} + m_\psi \hat{g} \right) \right]. \quad (3.12e)$$

Disregarding the momentum dependence in the Lorentz-violating operators, the isotropic spinors only depend on the magnitude of the momentum, as expected. The spinors contain a small number of functions dependent on the energy, momentum, and mass with different combinations of signs. Thereby, the Lorentz-violating contribution does not introduce any terms with a different structure. For vanishing Lorentz violation the spinors do not reproduce the standard results given in most textbooks. However, two issues must be taken into account in this context. First, in most textbooks, the spinors are given for the Dirac representation of the Dirac matrices, whereas here the chiral representation is used; cf. Eq. (3.3). Second, the standard method for solving the Dirac equation with a decomposition into two-component spinors does not work for the b , d , H , and g coefficients. Therefore, the structure of these spinors for vanishing Lorentz violation is more involved than the structure of the usual spinors obtained for the chiral representation of Dirac matrices. Nevertheless, the more complicated standard spinors, deduced from Eq. (3.12a), satisfy the standard Dirac equation. It is also possible to transform the spinors from the chiral representation to the Dirac representation and we will come back to this point at the very end of the current section. Additionally, the Lorentz-violating term is suppressed by the ratio of the fermion mass and the standard particle energy E_0 . The combination of m_ψ/E_0^2 and the Lorentz-violating operators is dimensionless to make the second summand match the mass dimension of the first.

Note that the widely used field-theory model by Myers and Pospelov [83] can be mapped to effective dimension-5 a and dimension-6 g coefficients; cf. Eqs. (27), (156), and (157) in [22]. Therefore, it is possible to treat this particular model based on the combined results of [22,38] and the current article. Choosing a special observer frame, with a purely timelike preferred direction $n^\mu = (1, 0, 0, 0)^\mu$, allows for identifying the Myers-Pospelov Lagrangian with a subset of the general isotropic SME fermion sector for $d = 5, 6$, which is given by Eqs. (97), (98) of [22]. The model of [83] is a special case of the latter equations, where the isotropic effective coefficients $\dot{a}_0^{(5)}$ and $\dot{g}_1^{(6)}$ are non-vanishing only. Hence, there is a single $d = 5$ and a single $d = 6$ isotropic degree of freedom out of the eight possible ones for dimension 5 and 6 (see Table III in [22]). The degree of freedom $\dot{g}_1^{(6)}$ is a combination of the nonvanishing component coefficients $b^{(5)000} \equiv b_5$ and $g^{(6)ijk00} \equiv \varepsilon^{ijk} g_6$. Then, the above energies and spinors are valid with

$$\hat{b} = b_5 E_0^2, \quad \hat{d} = 0, \quad \hat{g} = g_6 E_0^2. \quad (3.13)$$

2. Anisotropic operator $\hat{\mathcal{A}}^i$ with $i = \{1, 2\}$

After establishing the isotropic result, we intend to consider anisotropic Lorentz violation in the realm of the pseudovector $\hat{\mathcal{A}}^\mu$. The preferred direction is chosen to either point along the first or the second spatial axis of the coordinate system, as both cases can be treated in one go. The particle spinors are obtained in the same manner as before, based on the perturbative method reviewed at the very beginning of the current section. First of all, the particle dispersion relations at first order in Lorentz violation are given by

$$E_u^{(\pm)}|_{\hat{\mathcal{A}}^i} = E_0 \left(1 \pm \frac{\Theta_i}{E_0^2} \hat{\mathcal{A}}^i \right), \quad \Theta_i = \sqrt{p_i^2 + m_\psi^2}. \quad (3.14)$$

Quantities such as Θ_i are characteristic for anisotropic frameworks and they will appear at various places in the spinors. For all cases that follow, we will only state the first particle spinor $u^{(1)}$ that is connected to the particle energy $E_u^{(+)}$. The remaining spinors can be computed from $u^{(1)}$ by simple transformations; cf. Sec. III D 4. In this context the spinors for the components $\hat{\mathcal{A}}^1$ and $\hat{\mathcal{A}}^2$ are closely related to each other, being expressed in terms of a master function $\check{\mathfrak{F}}$:

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^1} = \check{N}_u^{(1)} \check{\mathfrak{F}}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{A}}^1, \Theta_1), \quad (3.15a)$$

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^2} = \check{N}_u^{(1)} \begin{pmatrix} -i\check{\mathfrak{F}}_1 \\ \check{\mathfrak{F}}_2 \\ -i\check{\mathfrak{F}}_3 \\ \check{\mathfrak{F}}_4 \end{pmatrix} (p_1 = p_2, p_2 = -p_1, p_3, \hat{\mathcal{A}}^2, \Theta_2), \quad (3.15b)$$

$$\check{\mathfrak{F}}(\mathbf{p}, X, \Theta_i) = \begin{pmatrix} \check{\phi}_+ \\ \check{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{1}{2E_0^2} \begin{pmatrix} \delta\check{\phi}_+ \\ \delta\check{\phi}_- \end{pmatrix} X, \quad (3.15c)$$

$$\check{\phi}_\pm = \begin{pmatrix} \check{A}_\pm \\ \check{B}_\pm \end{pmatrix}, \quad \delta\check{\phi}_\pm = \pm i p_2 \begin{pmatrix} \check{A}_\pm \\ -\check{B}_\pm \end{pmatrix} \pm p_3 \begin{pmatrix} -\check{B}_\pm \\ \check{A}_\pm \end{pmatrix}, \quad (3.15d)$$

$$\check{A}_\pm = (\pm p_3 - E_0)(\Theta_i \pm p_1) + m_\psi(\pm i p_2 - \Theta_i), \quad (3.15e)$$

$$\check{B}_\pm = m_\psi(E_0 + m_\psi \pm p_3) + (p_1 + i p_2)(p_1 \pm \Theta_i), \quad (3.15f)$$

with the normalization factor

$$\check{N}_u^{(1)}(\mathbf{p}, X, \Theta_i) = \frac{1}{4\sqrt{(E_0 + m_\psi)\Theta_i^2 - p_1 p_3 \Theta_i}} \left(2 + \frac{\Theta_i}{E_0^2} X \right). \quad (3.15g)$$

The structure of the spinors is evidently a bit more involved in comparison to the “isotropic” case of Sec. III D 1. The spinors can still be expressed via two different functions including two sign choices for each. The transformations $p_1 = p_2, p_2 = -p_1$ have to be applied to the normalization factor as well, when computing the spinor for $\hat{\mathcal{T}}^{02}$. However, note that the momentum components contained in the Lorentz-violating operator itself stay unaffected.

3. Anisotropic operator $\hat{\mathcal{A}}^3$

For a framework with a nonzero $\hat{\mathcal{A}}^3$, the energies correspond to Eq. (3.14), where just the Lorentz-violating operator and the quantity Θ_3 have to be adapted accordingly:

$$E_u^{(\pm)}|_{\hat{\mathcal{A}}^3} = E_0 \left(1 \pm \frac{\Theta_3}{E_0^2} \hat{\mathcal{A}}^3 \right), \quad \Theta_3 = \sqrt{p_3^2 + m_\psi^2}. \quad (3.16)$$

The spinors for this framework can be expressed in a very convenient form:

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{A}}^3} = \bar{N}_u^{(1)} \check{\mathfrak{F}}(\hat{\mathcal{A}}^3), \quad (3.17a)$$

$$\check{\mathfrak{F}}(X) = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_+ \\ \bar{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{p_1 + i p_2}{2E_0^2} \begin{pmatrix} \delta\bar{\phi}_+ \\ \delta\bar{\phi}_- \end{pmatrix} X, \quad (3.17b)$$

$$\bar{\phi}_\pm = \begin{pmatrix} \bar{A}_\pm \\ \bar{B}_\pm \end{pmatrix}, \quad \delta\bar{\phi}_\pm = \pm \varepsilon \cdot \bar{\phi}_\pm^*, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.17c)$$

$$\bar{A}_\pm = (E_0 - \Theta_3)(m_\psi \mp p_3 - \Theta_3), \quad (3.17d)$$

$$\bar{B}_\pm = \pm(p_1 + i p_2)(m_\psi \pm p_3 - \Theta_3), \quad (3.17e)$$

with the normalization factor

$$\bar{N}_u^{(1)} = \frac{1}{4\sqrt{\Theta_3(E_0 - \Theta_3)(\Theta_3 - m_\psi)}} \left(2 + \frac{\Theta_3}{E_0^2} \hat{\mathcal{A}}^3 \right). \quad (3.17f)$$

Here, the asterisk means complex conjugation and ε is the matrix representation of the two-dimensional Levi-Civita symbol. Hence, the spinors can again be expressed completely in terms of two functions, where additional sign choices must be taken into account. The Lorentz-violating contribution involves a global ratio of certain

momentum components over the standard particle energy squared.

4. Second particle spinor and antiparticle spinors

For the pseudovector operator $\hat{\mathcal{A}}^\mu$, both particle spinors are related to each other by changing the sign of certain quantities. For the isotropic case, the latter is the magnitude $|\mathbf{p}|$ of the momentum and for the anisotropic cases, these are the quantities Θ_i :

$$\begin{aligned} \hat{E}_u^{(-)}(|\mathbf{p}|) &= \hat{E}_u^{(+)}(-|\mathbf{p}|), \\ \hat{u}^{(2)}|_{\hat{E}_u^{(-)}}(|\mathbf{p}|) &= \hat{u}^{(1)}|_{\hat{E}_u^{(+)}}(-|\mathbf{p}|), \end{aligned} \quad (3.18a)$$

$$\begin{aligned} E_u^{(-)}|\hat{\mathcal{A}}^i(\Theta_i) &= E_u^{(+)}|\hat{\mathcal{A}}^i(-\Theta_i), \\ u^{(2)}|\hat{\mathcal{A}}^i_{E_u^{(-)}}(\Theta_i) &= u^{(1)}|\hat{\mathcal{A}}^i_{E_u^{(+)}}(-\Theta_i). \end{aligned} \quad (3.18b)$$

Hence, the objects $|\mathbf{p}|$ and Θ_i are essential as they control both the particle energies and the spinor types. The antiparticle spinors can be computed from the particle spinors by applying the charge conjugation matrix C to them; cf. Eq. (21) of [26]. Independently of any representation, the charge-conjugated spinor reads $\psi_c = C\bar{\psi}^T$, where $C = B(\gamma^0)^T$ with $-(\gamma^\mu)^* = B^{-1}\gamma^\mu B$. In the chiral representation, we find that $B = i\gamma^2$ and thus $\psi_c = i\gamma^2[(\gamma^0)^T]\psi^* = i\gamma^2\psi^*$. Therefore, the charge-conjugated spinors in the special frameworks considered result in

$$\begin{aligned} v^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}} &= \begin{pmatrix} u_4^{(2,1)} \\ -u_3^{(2,1)} \\ -u_2^{(2,1)} \\ u_1^{(2,1)} \end{pmatrix}^* (-d^{\mu\nu\dots}), \\ N_v^{(1,2)} &= N_u^{(2,1)}(-d^{\mu\nu\dots}), \end{aligned} \quad (3.19)$$

where $N_v^{(1,2)}$ are the spinor normalization constants for the antiparticle spinors. So the spinor components just have to be rearranged including additional signs at appropriate positions (followed by a complex conjugation). Recall that the signs of the d coefficients have to be reversed as well, since the latter are odd under charge conjugation; cf. Table P31 in [25].

E. Energies and spinors for $\hat{T}^{\mu\nu}$

The second type of frameworks that shall be considered are based on the two-tensor operator $\hat{T}^{\mu\nu}$ that comprises both the H and g coefficients. The structure of the spinors is expected to be more complicated than the previous results for $\hat{\mathcal{A}}^\mu$. We consider only one of the six nonzero components of $\hat{T}^{\mu\nu}$ at a time.

1. Operator $\hat{T}^{0i}$ with $i = \{1, 2\}$

The spinor results for $\hat{T}^{0i}$, with $i = \{1, 2\}$, are observed to be related to each other. Once the first particle spinor for one of the two operators is known, the spinor for the other is obtained by rearranging its components and by relabeling the momentum components. A similar behavior was observed for the anisotropic $\hat{\mathcal{A}}^{1,2}$ in Sec. III D 2. First, the modified particle dispersion relations read

$$E_u^{(\pm)}|\hat{T}^{0i} = E_0 \left(1 \pm \frac{\Phi_i}{E_0^2} \hat{T}^{0i} \right), \quad \Phi_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 - p_i^2}. \quad (3.20)$$

In contrast to the quantities Θ_i that were defined in the context of the pseudovector operator $\hat{\mathcal{A}}^\mu$, such as in Eq. (3.14), the current Φ_i do not depend on the fermion mass, but only on certain momentum components. The spinors associated with the particle energy $E_u^{(+)}$ for both operators are based on a single master function $\hat{\mathfrak{S}}$ and they are given by

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{T}^{01}} = \hat{N}_u^{(1)} \hat{\mathfrak{S}}(\mathbf{p}, \hat{T}^{01}, \Phi_1), \quad (3.21a)$$

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{T}^{02}} = \hat{N}_u^{(1)} \begin{pmatrix} -i\hat{\mathfrak{S}}_1 \\ \hat{\mathfrak{S}}_2 \\ -i\hat{\mathfrak{S}}_3 \\ \hat{\mathfrak{S}}_4 \end{pmatrix} (p_1 = p_2, p_2 = -p_1, p_3, \hat{T}^{02}, \Phi_2), \quad (3.21b)$$

$$\hat{\mathfrak{S}}(\mathbf{p}, X, \Phi_i) = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_+ \\ \hat{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{1}{2E_0^2} \begin{pmatrix} \delta\hat{\phi}_+ \\ \delta\hat{\phi}_- \end{pmatrix} X, \quad (3.21c)$$

$$\hat{\phi}_\pm = \begin{pmatrix} \hat{A}_\mp \\ \hat{B}_\pm \end{pmatrix}, \quad \delta\hat{\phi}_\pm = ip_1 \begin{pmatrix} \hat{A}_\pm \\ \hat{B}_\mp \end{pmatrix} \pm im_\psi \begin{pmatrix} \hat{B}_\pm \\ \hat{A}_\mp \end{pmatrix}, \quad (3.21d)$$

$$\hat{A}_\pm = i(E_0 + m_\psi)(p_2 - \Phi_i) \pm p_3(p_1 - i\Phi_i), \quad (3.21e)$$

$$\hat{B}_\pm = p_3(E_0 + m_\psi \pm p_3) \pm (p_2 - ip_1)(p_2 - \Phi_i), \quad (3.21f)$$

with the normalization factor

$$\hat{N}_u^{(1)} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\Phi_i + p_2}{p_3^2 \Phi_i (E_0 + m_\psi)}} \left(2 + \frac{\Phi_i}{E_0^2} \hat{T}^{0i} \right). \quad (3.21g)$$

Again, the transformation $p_1 = p_2$, $p_2 = -p_1$ must be applied to the normalization factor as well, but the

momentum components within the Lorentz-violating operator should not be touched; cf. Sec. III D 2. Furthermore, we have observed that these results are very similar to the spinors for $\hat{\mathcal{A}}^{1,2}$ in structure. There are the following correspondences between the parameters that appear in both spinors:

$$\hat{A}_{1,2} = i\check{A}_{2,1}(p_1 \leftrightarrow \pm p_2, p_3 \leftrightarrow \pm m_\psi), \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_{1,2} &= \pm \check{B}_{2,1}(p_1 \mapsto \pm p_2, p_2 \mapsto \mp p_1, \\ p_3 &\mapsto \mp m_\psi, m_\psi \mapsto \pm p_3). \end{aligned} \quad (3.22b)$$

2. Operator $\hat{\mathcal{T}}^{03}$

The particle energies for the operator $\hat{\mathcal{T}}^{03}$ are given by Eq. (3.20) with $i = 3$. The first particle spinor is simpler than the previous two:

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{03}} = \tilde{N}_u^{(1)} \tilde{\mathfrak{S}}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{03}, \Phi_3), \quad (3.23a)$$

$$\tilde{\mathfrak{S}}(\mathbf{p}, X, \Phi_3) = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_+ \\ \tilde{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{1}{2E_0^2} \begin{pmatrix} \delta\tilde{\phi}_- \\ \delta\tilde{\phi}_+ \end{pmatrix} X, \quad (3.23b)$$

$$\tilde{\phi}_\pm = \begin{pmatrix} (ip_1 + p_2)\tilde{A}_\pm \\ \Phi_3\tilde{A}_\mp \end{pmatrix}, \quad \delta\tilde{\phi}_\pm = \begin{pmatrix} (ip_1 + p_2)\tilde{B}_\pm \\ \Phi_3\tilde{B}_\mp \end{pmatrix}, \quad (3.23c)$$

$$\tilde{A}_\pm = E_0 \pm i\Phi_3 \mp p_3 + m_\psi, \quad (3.23d)$$

$$\tilde{B}_\pm = ip_3(\tilde{A}_\pm - m_\psi) + im_\psi(p_3 \mp \tilde{A}_\mp), \quad (3.23e)$$

with the normalization constant

$$\tilde{N}_u^{(1)} = \frac{1}{4|\Phi_3|\sqrt{E_0 + m_\psi}} \left(2 + \frac{\Phi_3}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{03} \right). \quad (3.23f)$$

Two functions including sign choices are sufficient to parametrize the solution of the Dirac equation. Note the absolute-value bars around $\Phi_3 > 0$ in the normalization. They are stated explicitly to indicate that the normalization does not change sign for the antiparticle spinors when Φ_3 is replaced by $-\Phi_3$; cf. Sec. III E 5 below. This is also the only case where a quantity Φ_i appears outside of a square root function in the standard part of the normalization factor.

3. Operator $\hat{\mathcal{T}}^{i3}$ with $i = \{1, 2\}$

Last but not least, we want to state the spinor solutions for the $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ operator with two spatial indices nonvanishing. The subsequent results are simpler than the previous ones for $\hat{\mathcal{T}}^{0i}$ with one timelike index. First of all, the energy levels at first order in Lorentz violation can be expressed as

before, with anisotropic quantities Ψ_{ij} that here depend on the particle mass:

$$E_u^{(\pm)}|\hat{\mathcal{T}}^{ij} = E_0 \left(1 \pm \frac{\Psi_{ij}}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{ij} \right), \quad \Psi_{ij} = \sqrt{p_i^2 + p_j^2 + m_\psi^2}. \quad (3.24)$$

The spinors for $\hat{\mathcal{T}}^{13}$ and $\hat{\mathcal{T}}^{23}$ are again related to each other, which makes it possible to express them via a single master function $\bar{\mathfrak{S}}$. A similar behavior was encountered for $\hat{\mathcal{A}}^{1,2}$ in Sec. III D 2, and for $\hat{\mathcal{T}}^{01,02}$ in Sec. III E 1,

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{23}} = \bar{N}_u^{(1)} \bar{\mathfrak{S}}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{23}, \Psi_{23}), \quad (3.25a)$$

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{13}} = \bar{N}_u^{(1)} \begin{pmatrix} i\bar{\mathfrak{S}}_1 \\ \bar{\mathfrak{S}}_2 \\ i\bar{\mathfrak{S}}_3 \\ \bar{\mathfrak{S}}_4 \end{pmatrix} (p_1 = -p_2, p_2 = p_1, p_3, \hat{\mathcal{T}}^{13}, \Psi_{13}), \quad (3.25b)$$

$$\bar{\mathfrak{S}}(\mathbf{p}, X, \Psi_{ij}) = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_+ \\ \bar{\phi}_- \end{pmatrix} + \frac{p_1}{2E_0^2} \begin{pmatrix} -\bar{\phi}_- \\ \bar{\phi}_+ \end{pmatrix} X, \quad (3.25c)$$

$$\bar{\phi}_\pm = \pm \begin{pmatrix} -\bar{A}_\pm \\ \bar{B}_\pm \end{pmatrix}, \quad (3.25d)$$

$$\bar{A} = \frac{p_1 p_3 + (E_0 + m_\psi) \Psi_{ij}}{E_0(E_0 + m_\psi) - p_1(p_1 + ip_2)}, \quad (3.25e)$$

$$\bar{A}_\pm = p_1 - ip_2 \pm (E_0 + m_\psi \mp p_3) \bar{A}, \quad (3.25f)$$

$$\bar{B}_\pm = (p_1 + ip_2) \bar{A} \pm (E_0 + m_\psi \pm p_3), \quad (3.25g)$$

with the normalization factor

$$\bar{N}_u^{(1)} = \frac{\sqrt{E_0 + m_\psi - p_1 p_3 / \Psi_{ij}}}{4(E_0 + m_\psi)} \left(2 + \frac{\Psi_{ij}}{E_0^2} \hat{\mathcal{T}}^{ij} \right). \quad (3.25h)$$

In contrast to the spinors for $\hat{\mathcal{T}}^{0i}$, only two two-dimensional vectors are sufficient to construct the spinors at first order in Lorentz violation. The same will be true for $\hat{\mathcal{T}}^{12}$ below.

4. Operator $\hat{\mathcal{T}}^{12}$

For the last operator to be considered, the energies are given by Eq. (3.24) with $\{i, j\} = \{1, 2\}$. The first particle spinor reads

$$u^{(1)}|_{E_u^{(+)}}^{\hat{\mathcal{T}}^{12}} = \check{N}_u^{(1)} \check{\mathfrak{S}}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{T}}^{12}, \Psi_{12}), \quad (3.26a)$$

$$\check{\mathfrak{F}}(\mathbf{p}, X, \Psi_{12}) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}_+ \\ \check{\Phi}_- \end{pmatrix} + \frac{p_3}{2E_0^2} \begin{pmatrix} -\check{\Phi}_- \\ \check{\Phi}_+ \end{pmatrix} X, \quad (3.26b)$$

$$\check{\Phi}_\pm = \pm \begin{pmatrix} -\check{A}_\pm \\ \check{B}_\pm \end{pmatrix}, \quad (3.26c)$$

$$\check{A} = \frac{(E_0 + m_\psi)(E_0 - \Psi_{12}) - p_3^2}{(p_1 + ip_2)p_3}, \quad (3.26d)$$

$$\check{A}_\pm = p_1 - ip_2 \pm (E_0 + m_\psi \mp p_3)\check{A}, \quad (3.26e)$$

$$\check{B}_\pm = (p_1 + ip_2)\check{A} \pm (E_0 + m_\psi \pm p_3), \quad (3.26f)$$

$$\check{N}_u^{(1)} = \frac{\sqrt{E_0 + m_\psi + \Psi_{12} + E_0 m_\psi / \Psi_{12}}}{4(E_0 + m_\psi)} \left(2 + \frac{\Psi_{12}}{E_0^2} \hat{T}^{12} \right). \quad (3.26g)$$

Evidently, the form of the spinor is analogous to the results for $\hat{T}^{01}$ and $\hat{T}^{02}$. Furthermore, the parameters $\check{A}_\pm, \check{B}_\pm$ have the same form as the previous $\bar{A}_\pm, \bar{B}_\pm$. However, $\check{A} \neq \bar{A}$ and the structure of the normalization factors differs from each other, too.

5. Second particle spinor and antiparticle spinors

For the tensor operator $\hat{T}^{\mu\nu}$ the first particle spinors only were given previously. The second particle spinors can be obtained from the first ones in an easy way in replacing all quantities Φ_i or Ψ_{ij} by their counterparts with opposite sign:

$$\begin{aligned} E_u^{(-)} | \hat{T}^{0i}(\Phi_i) &= E_u^{(+)} | \hat{T}^{0i}(-\Phi_i), \\ E_u^{(-)} | \hat{T}^{ij}(\Psi_{ij}) &= E_u^{(+)} | \hat{T}^{ij}(-\Psi_{ij}), \end{aligned} \quad (3.27a)$$

$$\begin{aligned} u^{(2)} | \hat{T}^{0i}(\Phi_i) &= u^{(1)} | \hat{T}^{0i}(-\Phi_i), \\ u^{(2)} | \hat{T}^{ij}(\Psi_{ij}) &= u^{(1)} | \hat{T}^{ij}(-\Psi_{ij}). \end{aligned} \quad (3.27b)$$

In analogy to the pseudovector operator, the types of energy and spinor are controlled by the quantities Φ_i and Ψ_{ij} . Also, the antiparticle spinors for $\hat{T}^{\mu\nu}$ are determined completely by the components of the particle spinors. With the charge-conjugated spinor $\psi_c = i\gamma^2 \psi^*$ in the chiral representation, we obtain them directly from Eq. (21) of [26]:

$$\begin{aligned} v^{(1,2)} |_{E_v^{(\pm)}} &= \begin{pmatrix} u_4^{(2,1)} \\ -u_3^{(2,1)} \\ -u_2^{(2,1)} \\ u_1^{(2,1)} \end{pmatrix}^* (-H^{\mu\nu} \dots), \\ N_v^{(1,2)} &= N_u^{(2,1)} (-H^{\mu\nu} \dots). \end{aligned} \quad (3.28)$$

The signs of the H coefficients also have to be reversed, since these are odd under charge conjugation; cf. Table P31 in [25].

F. Additional observations

It is interesting to note that some of the spinors can be cast into a very simple shape by factoring the Lorentz-invariant contribution out of each component. This can be carried out for the “isotropic case,” for each of the spacelike components of the pseudovector operator $\hat{A}^\mu$, and for the two-tensor operator components $\hat{T}^{03}, \hat{T}^{12}$. For these cases, it is possible to express each spinor component of the first particle spinor in the following form:

$$u_i^{(1)} |_{E_u^{(+)}} = \begin{pmatrix} \check{\Phi}_- \\ \check{\chi}_+ \end{pmatrix}_i (1 - \theta \mathcal{V}_i), \quad \theta = \frac{1}{2E_0^2} \left(\hat{A} - \hat{g} \frac{\mathbf{p}^2}{m_\psi} \right), \quad (3.29a)$$

$$u_i^{(1)} |_{E_u^{(+)}}^{\hat{A}^1} = \begin{pmatrix} \check{\Phi}_+ \\ \check{\Phi}_- \end{pmatrix}_i (1 - \iota \mathcal{W}_i), \quad \iota = \frac{\hat{A}^1}{2E_0} \left(\frac{\Theta_1}{E_0} p_3 + ip_2 \right), \quad (3.29b)$$

$$u_i^{(1)} |_{E_u^{(+)}}^{\hat{A}^3} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_+ \\ \bar{\Phi}_- \end{pmatrix}_i (1 - \kappa \mathcal{X}_i), \quad \kappa = \frac{\hat{A}^3}{2E_0^2}, \quad (3.29c)$$

$$u_i^{(1)} |_{E_u^{(+)}}^{\hat{T}^{03}} = \begin{pmatrix} \check{\Phi}_+ \\ \check{\Phi}_- \end{pmatrix}_i (1 - \tau \mathcal{W}_i), \quad \tau = \frac{\hat{T}^{03}}{2E_0} \left(\frac{\Phi_3}{E_0} p_3 + im_\psi \right), \quad (3.29d)$$

$$u_i^{(1)} |_{E_u^{(+)}}^{\hat{T}^{12}} = \begin{pmatrix} \check{\Phi}_+ \\ \check{\Phi}_- \end{pmatrix}_i (1 - \omega \mathcal{W}_i), \quad \omega = \hat{T}^{12} \frac{\Psi_{12}}{2E_0^2} p_3, \quad (3.29e)$$

with the vectors

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| + E_0 \\ |\mathbf{p}| + E_0 \\ |\mathbf{p}| - E_0 \\ |\mathbf{p}| - E_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W} = \begin{pmatrix} 1/(p_3 - E_0) \\ 1/(p_3 + E_0) \\ 1/(p_3 + E_0) \\ 1/(p_3 - E_0) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \Theta_3 + E_0 \\ \Theta_3 - E_0 \\ \Theta_3 + E_0 \\ \Theta_3 - E_0 \end{pmatrix}. \quad (3.29f)$$

Note the indices i on both sides of the relations, which refer to a particular component i of the spinors and defined vectors, respectively. What is characteristic for the stated spinors is the exceptionally simple form of the Lorentz-violating terms. For the second and the fourth of these spinors only, the Lorentz-violating contribution has an imaginary part. The spinor for $\hat{\mathcal{A}}^2$ can be obtained from the spinor for $\hat{\mathcal{A}}^1$, cf. Sec. III D 2, whereby it is discarded here. For the remaining spinors, it was not possible to obtain results with an analog simplicity, which is why they are dropped as well. Besides, the ratios,

$$\Omega_u \equiv \sqrt{\frac{u^\dagger u - u^\dagger u | \hat{X}^{\mu\dots} = 0}{u^\dagger u | \hat{X}^{\mu\dots} = 0}}, \quad \Omega_v \equiv \sqrt{\frac{v^\dagger v - v^\dagger v | \hat{X}^{\mu\dots} = 0}{v^\dagger v | \hat{X}^{\mu\dots} = 0}}, \quad (3.30)$$

with a generic Lorentz-violating operator $\hat{X}^{\mu\dots}$, are additional interesting quantities. They are measures for how much the Lorentz-violating part of the spinors is suppressed compared to the Lorentz-invariant part. The quantities Ω_u are simple for all operators considered and they read

$$\dot{\Omega}_u = \frac{m_\psi}{2E_0^2} \left| \hat{\mathcal{A}} - \hat{g} \frac{\mathbf{p}}{m_\psi} \right|, \quad \Omega_u | \hat{\mathcal{A}}^i = \frac{|\hat{\mathcal{A}}^i|}{2E_0^2} \Phi_i, \quad (3.31a)$$

$$\Omega_u | \hat{T}^{0i} = \frac{|\hat{T}^{0i}|}{2E_0^2} \Theta_i, \quad \Omega_u | \hat{T}^{ij} = \frac{|\hat{T}^{ij} \epsilon^{ijk} p_k|}{2E_0^2}, \quad (3.31b)$$

where in the latter equal indices are not summed over. The quantities Φ_i and Θ_i change their roles and the results for both particle spinors correspond to each other. Furthermore, $\Omega_v = \Omega_u(-d^{\mu\nu\dots}, -H^{\mu\nu\dots})$ for antiparticles. The findings tell us that Lorentz-violating effects may be additionally suppressed for $|\mathbf{p}| \ll m_\psi$, i.e., for decreasing momentum. First of all, all Lorentz-violating operators have mass dimension 1. As Ω_u is dimensionless, the operator has to be divided by a dimensionful scale, where for vanishing momentum the only one is the fermion mass. This holds for the “isotropic case” and the two-tensor operator with one timelike index. For the

remaining frameworks, there is an additional suppression factor p_i/m_ψ with the largest momentum component p_i .

Finally, another issue related to the spinors shall be mentioned at this point. There is a matrix transformation that connects the chiral representation of γ matrices to the Dirac representation [84]. It can be written in the form $M_D = V M_{\text{ch}} V^{-1}$, where M_{ch} and M_D are γ matrices in the chiral and the Dirac representation, respectively. The matrix V here corresponds to the matrix V in Eq. (3.1), contained in the transformation that diagonalizes the Dirac operator (with γ^0 and γ^5 themselves in the chiral representation). The spinors of both representations are then related by $\psi_D = V \psi_{\text{ch}}$. Hence, all of the spinors obtained in this paper can be transformed from the chiral to the Dirac representation according to this rule. We carried this out and considered the limits of the spinors for zero Lorentz violation, where the particle and antiparticle states become spin-degenerate. It was verified successfully that there exist proper linear combinations of the particle spinors $u^{(\alpha)}$ and of the antiparticle spinors $v^{(\alpha)}$, such that the standard solutions of the Dirac equation are obtained:

$$\sum_{\alpha=1,2} \zeta_s^{(\alpha)} u^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \phi^{(s)} \\ \sigma \cdot \mathbf{p} / (E_0 + m_\psi) \cdot \phi^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\phi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.32a)$$

$$\sum_{\alpha=1,2} \tau_s^{(\alpha)} v^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \sigma \cdot \mathbf{p} / (E_0 + m_\psi) \cdot \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.32b)$$

with $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$, where σ^i are the Pauli matrices. The parameters $\zeta_s^{(\alpha)}$ and $\tau_s^{(\alpha)}$ are chosen appropriately. Last but not least, the most important of the previous results are compiled in Table I.

IV. SPINOR MATRICES AND OPTICAL THEOREM

For calculations in high-energy physics that are based on quantum field theory, the spinors are often not needed directly. Instead, when computing matrix element squares spinors are always combined in the form of $u\bar{u}$, where the latter is a 4×4 matrix in spinor space. In the Lorentz-invariant case, it often suffices to calculate unpolarized cross sections, which means that one has to average over initial particle spins. As such a scattering or decay process is a quantum process; the final state is not predictable, which is why the final particle spins must be summed over and the phase space has to be integrated out. Hence, in the standard case the following well-known expressions (with proper normalization of the spinors) are usually extremely helpful:

TABLE I. Collection of modified particle energies and spinors.

Coeff. X	$E_u^{(\pm)}/E_0$	Spinors	Definitions
$(4/3)E_0\hat{d} - \hat{b} + m_\psi\hat{g}$	$1 \pm (\mathbf{p} /E_0^2)X$	Eq. (3.12a)	
$\hat{\mathcal{A}}^1$	$1 \pm (\Theta_i/E_0^2)X$	Eq. (3.15a)	$\Theta_i \equiv \sqrt{p_i^2 + m_\psi^2}$
$\hat{\mathcal{A}}^2$		Eq. (3.15b)	
$\hat{\mathcal{A}}^3$		Eq. (3.17a)	
$\hat{\mathcal{T}}^{01}$	$1 \pm (\Phi_i/E_0^2)X$	Eq. (3.21a)	$\Phi_i \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 - p_i^2}$
$\hat{\mathcal{T}}^{02}$		Eq. (3.21b)	
$\hat{\mathcal{T}}^{03}$		Eq. (3.23a)	
$\hat{\mathcal{T}}^{13}$	$1 \pm (\Psi_{ij}/E_0^2)X$	Eq. (3.25b)	$\Psi_{ij} \equiv \sqrt{p_i^2 + p_j^2 + m_\psi^2}$
$\hat{\mathcal{T}}^{23}$		Eq. (3.25a)	
$\hat{\mathcal{T}}^{12}$		Eq. (3.26a)	

$$\sum_{\alpha=1,2} u^{(\alpha)} \bar{u}^{(\alpha)} = \not{p} + m_\psi \mathbb{1}_4, \quad (4.1a)$$

$$\sum_{\alpha=1,2} v^{(\alpha)} \bar{v}^{(\alpha)} = \not{p} - m_\psi \mathbb{1}_4. \quad (4.1b)$$

For the Lorentz-violating case with broken spin degeneracy, there are essential differences. First, due to the modified kinematics in Lorentz-violating frameworks, a small part of the phase space of otherwise forbidden particle processes may open and render them possible. Examples are Cherenkov-type processes *in vacuo* and decays of photons into electron-positron pairs. Since in a theory with broken spin degeneracy both the particles and antiparticles can have two distinct energies, such a process may be allowed only for one of these energies. Under this circumstance, sums over both particle spins in the matrix element square do not have to be carried out as only a single spin state contributes. So what we are interested in are expressions such as $u^{(\alpha)} \bar{u}^{(\alpha)}$ or $v^{(\alpha)} \bar{v}^{(\alpha)}$, with a particular α . From now on these matrices will be referred to as “spinor matrices.” However, for calculational purposes, the matrices themselves are not that useful. Instead, such a matrix should be expressed in terms of the 16 Dirac bilinears. The matrix structure is supposedly more complicated than what we encountered in Eq. (4.1), where the Dirac matrices and the unit matrix only appear. For the Lorentz-violating frameworks considered here, the matrix structure is expected to include a large number of the 16 Dirac bilinears such as for the propagators; cf. Eqs. (2.6), (2.7).

There are two possibilities of computing the spinor matrices. The first takes into account the spinors that were determined in the previous section. The matrices are calculated directly based on these spinors and they are expressed in terms of the Dirac bilinears. The resulting expressions will be valid at first order in Lorentz violation. The second possibility is to use the optical theorem. The latter gives a relationship between the imaginary part of a

forward scattering amplitude to the total cross sections of all processes that are energetically allowed by cutting the propagators in the diagram representing the forward scattering amplitude. The validity of the optical theorem was demonstrated at tree level for various sets of Lorentz-violating frameworks, such as both minimal and non-minimal modifications of the photon and the fermion sector [31,32,36–39]. Therefore, it is not expected to lose its validity for the range of coefficients considered within the current paper. Nevertheless, a cross check will be carried out at first order in Lorentz violation using the spinor matrices obtained from the spinors directly.

To make use of the optical theorem, a particular scattering process is needed. Thus, we have to introduce an interaction and we decide to couple the modified fermions to standard photons. In this context it is reasonable to mention the very recent paper [85], where nonminimal Lorentz violation in the fermion sector is constrained by Penning trap experiments. To do so, fermions are minimally coupled to electromagnetic fields. This amounts to replacing the particle derivative at all occurrences by the covariant derivative $D_\mu = \partial_\mu - eA_\mu$, where A_μ is the vector potential and e the elementary charge. However, in contrast to the partial derivative, the covariant derivative does not commute, which introduces additional interactions for the nonminimal terms. In principle, when computing the cross section or decay rate of a particular process, all these additional interactions must be taken into account. Since we are only interested in investigating the validity and implications of the optical theorem for fermions and since this calculation will be purely formal, the exact form of the interaction is not important and we can even resort to the standard one. The fermion propagator and the external particles, which are described by spinors, lie in the center of our considerations.

The particular process to be analyzed is one of the two possible contributions of Compton scattering with an incoming photon and electron scattering and producing another

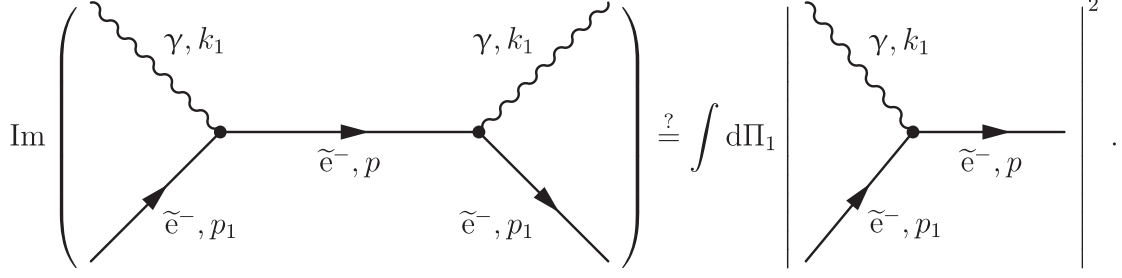


FIG. 1. Forward scattering amplitude of one of the two contributions for Compton scattering that is linked to the total cross section of photon absorption by an electron.

photon-electron pair; cf. Fig. 1. The second contribution with both vertices interchanged is not needed in this formal analysis. The left-hand side of the equation, presented in the latter figure, contains the forward scattering amplitude of this process, where the initial and the final states correspond to each other. Based on the optical theorem, the imaginary part of the left-hand side is linked to the total cross section of a photon absorption process shown on the right-hand side. The left-hand side of the equation contains a propagator where the right-hand side involves external fermions and, therefore, spinors that are combined into spinor matrices.

We consider the incoming electron to be in the spin-state associated with the energy $E_u^{(+)}$; it is then described by the spinor $u^{(1)}$. The standard Feynman rules for the external photons and the vertices can be employed for writing up the matrix element $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma)$ of the forward scattering amplitude (cf. also [81]):

$$\mathcal{M} = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(k_1 + p_1 - p) e^2 \bar{u}^{(\alpha)}(p_1) \gamma^\nu S(p) \times \gamma^\mu u^{(\alpha)}(p_1) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k_1) \epsilon_\nu^{*(\lambda)}(k_1), \quad (4.2)$$

where Lorentz violation just sits in the modified fermion propagator S . Furthermore, $\epsilon^{(\lambda)}$ is the standard polarization vector of a photon in the polarization state λ . The δ function directly behind the integration measure enforces energy-momentum conservation. The fermion propagator is either taken from Eq. (2.6) or Eq. (2.7), dependent on whether Lorentz violation based on $\hat{A}^\mu$ or $\hat{T}^{\mu\nu}$ is considered. However, for this formal calculation, it will be chosen generically. The Feynman-type propagator has to be used in the amplitude, which means that an infinitesimal imaginary part must be added to the denominator:

$$\frac{1}{\Delta + i\epsilon} = \frac{1}{\mathcal{Z}(p^0 - E_u^{(+)} + i\epsilon)(p^0 - E_u^{(-)} + i\epsilon)(p^0 - E_{<}^{(+)} - i\epsilon)(p^0 - E_{<}^{(-)} - i\epsilon)}, \quad (4.3)$$

with a global prefactor $\mathcal{Z}$ that does not depend on p^0 . The imaginary number $i\epsilon$ prevents singularities emerging for a vanishing Δ , which is exactly what produces the imaginary part of the forward scattering amplitude. The denominator has four roots in p^0 , which are composed of two positive ones $E_u^{(\pm)}$ and two negative ones $E_{<}^{(\pm)}$. The imaginary parts are added to the poles such that the two positive poles are shifted to the lower complex half plane and the two negative poles are shifted to the upper one. In Sec. V, it will be investigated under which circumstances the form of Eq. (4.3) fails to be valid and how such a case can be treated. Energy-momentum conservation of the process shall allow Δ to vanish for $p^0 = E_u^{(+)}$ only. To evaluate the expression, the following identity is used:

$$\frac{1}{p^0 - E_u^{(+)} + i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{p^0 - E_u^{(+)}} - i\pi \delta(p^0 - E_u^{(+)}), \quad (4.4)$$

where $\mathcal{P}$ is the principle value. The first term is real, i.e., it does not contribute to the imaginary part of $\mathcal{M}$. The second term does so only and it forces p^0 to be equal to the energy $E_u^{(+)}$ when evaluating the integral over p^0 . That corresponds to cutting the propagator in the Feynman diagram on the left-hand side of Fig. 1 into two lines, which represent on-shell fermions described by the spinor $u^{(1)}$. The imaginary part of the forward scattering amplitude can then be cast into the form

$$2\text{Im}(\mathcal{M}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_u^{(+)}} \delta^{(4)}(k_1 + p_1 - p) e^2 \bar{u}^{(\alpha)}(p_1) \gamma^\nu \mathcal{C}(E_u^{(-)}, E_{<}^{(+)}, E_{<}^{(-)})|_{p^0=E_u^{(+)}} \times (\hat{\xi}^\mu \gamma_\mu + \hat{\Xi} + \hat{\Upsilon} + \hat{\xi}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \hat{\Psi}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu})|_{p^0=E_u^{(+)}} \times \gamma^\mu u^{(\alpha)}(p_1) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k_1) \bar{\epsilon}_\nu^{(\lambda)}(k_1), \quad (4.5a)$$

with the generic function

$$\mathcal{C}(a, b, c) \equiv \frac{2p^0}{\mathcal{Z}(p^0 - a)(p^0 - b)(p^0 - c)}. \quad (4.5b)$$

The latter function, evaluated at $p^0 = E_u^{(+)}$, is the remainder of the denominator Δ . The additional factor of $2p^0$ is introduced to cancel the factor of twice the particle energy that has been generated in the denominator of the integral measure. Thus, what remains from the propagator is the scalar function $\mathcal{C}$ and the matrix structure, which is expressed in terms of the Dirac bilinears and which is evaluated at $p^0 = E_u^{(+)}$.

Due to the validity of the optical theorem, Eq. (4.5a) must be equal to the total cross section $\sigma \equiv \sigma(e^- \gamma \rightarrow e^-)$ of the process on the right-hand side of Fig. 1. Thereby, the initial electron is in the spin-state associated with the energy $E_u^{(+)}$, for which reason it is described by the spinor $u^{(1)}$. With $\widehat{\mathcal{M}} \equiv \mathcal{M}(e^- \gamma \rightarrow e^-)$, we obtain

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_u^{(+)}} \delta^{(4)}(k_1 + p_2 - p) |\widehat{\mathcal{M}}|^2 \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_u^{(+)}} \delta^{(4)}(k_1 + p_2 - p) (ie\bar{u}^{(1)}(p) \gamma^\nu u^{(\alpha)}(p_1) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k_1))^\dagger ie\bar{u}^{(1)}(p) \gamma^\mu u^{(\alpha)}(p_1) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k_1) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_u^{(+)}} \delta^{(4)}(k_1 + p_1 - p) e^2 \bar{u}^{(\alpha)}(p_1) \gamma^\nu [u^{(1)}(p) \bar{u}^{(1)}(p)] \gamma^\mu u^{(\alpha)}(p_1) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k_1) \bar{\varepsilon}_\nu^{(\lambda)}(k_1). \end{aligned} \quad (4.6)$$

A comparison of the latter final result with Eq. (4.5a) allows for deriving an expression for the spinor matrix formed from $u^{(1)}$. The whole computation can be performed for an electron in the spin state connected to $E_u^{(-)}$ in an analogous way leading to the spinor matrix obtained from $u^{(2)}$. The results will be given below. Similarly, it is possible to derive spinor matrices for the antiparticle spinor $v^{(1)}$. To do so, the same process is considered with only the electron replaced by a positron. Then, the forward scattering amplitude $\overline{\mathcal{M}} \equiv \overline{\mathcal{M}}(e^+ \gamma \rightarrow e^+ \gamma)$ reads

$$\overline{\mathcal{M}} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(k_1 + p_1 - p) e^2 \bar{v}^{(\alpha)}(p_1) \gamma^\mu S(-p) \gamma^\nu v^{(\alpha)}(p_1) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k_1) \bar{\varepsilon}_\nu^{(\lambda)}(k_1). \quad (4.7)$$

The propagator has to be evaluated at the negative of the four-momentum to take into account that the momentum of the internal line flows in a direction opposite to the arrow on this line. Besides, a global prefactor of -1 has to be considered to account for the interchange of fermionic operators when applying Wick's theorem [38]. First of all, we evaluate the denominator of the propagator for the four-momentum components with their signs reversed:

$$\begin{aligned} \Delta_{\hat{A}, \hat{H}}(-p) &= (-p^0 - E_u^{(+)})(-p^0 - E_u^{(-)})(-p^0 - E_{<}^{(+)})(-p^0 - E_{<}^{(-)})|_{\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}} \\ &= (p^0 + E_u^{(+)})(p^0 + E_u^{(-)})(p^0 + E_{<}^{(+)})(p^0 + E_{<}^{(-)})|_{\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}} \\ &= [p^0 - E_{<}^{(-)}(-d^{\mu\nu}, \dots, -H^{\mu\nu}, \dots)][p^0 - E_{<}^{(+)}(-d^{\mu\nu}, \dots, -H^{\mu\nu}, \dots)](p^0 - E_v^{(-)})(p^0 - E_v^{(+)}). \end{aligned} \quad (4.8a)$$

The result involves the two possible antiparticle energies $E_v^{(\pm)}$ and the negative-energy values with the signs of the C -odd coefficients $d^{\mu\nu}$ and $H^{\mu\nu}$ reversed. Based on this decomposition of the denominator, the imaginary part of the forward scattering amplitude can be cast into the form

$$\begin{aligned} 2\text{Im}(\overline{\mathcal{M}}) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_v^{(+)}} \delta^{(4)}(k_1 + p_1 - p) e^2 \bar{v}^{(\alpha)}(p_1) \gamma^\nu [-\mathcal{C}(E_v^{(-)}, E_{<}^{(+)}(-d^{\mu\nu}, \dots, -H^{\mu\nu}, \dots), E_{<}^{(-)}(-d^{\mu\nu}, \dots, -H^{\mu\nu}, \dots))]|_{p^0=E_v^{(+)}} \\ &\quad \times (\hat{\xi}^\mu \gamma_\mu + \hat{\Xi} + \hat{\Upsilon} + \hat{\xi}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \hat{\psi}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu})|_{\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}}^{p^0=E_v^{(+)}} \gamma^\mu v^{(\alpha)}(p_1) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k_1) \bar{\varepsilon}_\nu^{(\lambda)}(k_1), \end{aligned} \quad (4.9)$$

with the scalar function $\mathcal{C}$ defined in Eq. (4.5b). The remainder of the antifermion propagator $S(-p)$ contains the latter scalar function and the matrix structure of the propagator, which is evaluated at the antiparticle energy $E_v^{(+)}$ and with all spatial momentum components replaced by their counterparts with opposite sign. The optical theorem says that Eq. (4.9) is related to the cross section $\tilde{\sigma} \equiv \sigma(e^+ \gamma \rightarrow e^+)$, with the amplitude $\widehat{\mathcal{M}} \equiv \mathcal{M}(e^+ \gamma \rightarrow e^+)$, given as

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_v^{(+)}} \delta^{(4)}(k_1 + p_2 - p) |\widetilde{\mathcal{M}}|^2 \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_v^{(+)}} \delta^{(4)}(k_1 + p_1 - p) i e \bar{v}^{(\alpha)}(p_1) \gamma^\mu v^{(1)}(p) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k_1) (i e \bar{v}^{(\alpha)}(p_1) \gamma^\nu v^{(1)}(p) \epsilon_\nu^{(\lambda)}(k_1))^\dagger \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_v^{(+)}} \delta^{(4)}(k_1 + p_1 - p) e^2 \bar{v}^{(\alpha)}(p_1) \gamma^\mu [v^{(1)}(p) \bar{v}^{(1)}(p)] \gamma^\nu v^{(\alpha)}(p_1) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k_1) \bar{\epsilon}_\nu^{(\lambda)}(k_1).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

The calculation can be carried out one-to-one for the antiparticle energy $E_v^{(-)}$. With these results at hand, we are able to simply read the spinor matrices $v^{(\alpha)} \bar{v}^{(\alpha)}$ off by comparing Eqs. (4.9) and (4.10) directly to each other. It is possible to treat the frameworks of the pseudovector coefficients $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ and the two-tensor coefficients $\hat{T}^{\mu\nu}$ in one go. The spinor matrices for particles and antiparticles finally read as follows:

$$u^{(1,2)} \bar{u}^{(1,2)}|_{E_u^{(\pm)}} = \mathcal{C}(E_u^{(\mp)}, E_{<}^{(+)}, E_{<}^{(-)})|_{p^0=E_u^{(\pm)}} (\xi_{\hat{\mathcal{A}}, \hat{T}}^\mu \gamma_\mu + \hat{\Xi}_{\hat{\mathcal{A}}, \hat{T}} + \hat{\Upsilon}_{\hat{\mathcal{A}}, \hat{T}} + \xi_{\hat{\mathcal{A}}, \hat{T}}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}, \hat{T}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu})|_{p^0=E_u^{(\pm)}}, \tag{4.11a}$$

$$\begin{aligned}
v^{(1,2)} \bar{v}^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}} &= -\mathcal{C}(E_v^{(\mp)}, E_{<}^{(+)}, E_{<}^{(-)}(-d^{\mu\nu\dots}, -H^{\mu\nu\dots}), E_{<}^{(-)}(-d^{\mu\nu\dots}, -H^{\mu\nu\dots}))|_{p^0=E_v^{(\pm)}} \\
&\quad \times (\xi_{\hat{\mathcal{A}}, \hat{T}}^\mu \gamma_\mu + \hat{\Xi}_{\hat{\mathcal{A}}, \hat{T}} + \hat{\Upsilon}_{\hat{\mathcal{A}}, \hat{T}} + \xi_{\hat{\mathcal{A}}, \hat{T}}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \hat{\Psi}_{\hat{\mathcal{A}}, \hat{T}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu})|_{\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}},
\end{aligned} \tag{4.11b}$$

with the scalar function $\mathcal{C}$ of Eq. (4.5b). The matrix coefficients have to be taken accordingly either from the propagator for $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ or $\hat{T}^{\mu\nu}$. Several remarks are in order. First, since these expressions result from the exact propagators given in Sec. II A, they are valid at all orders in Lorentz violation. Second, they hold for on-shell particles, which is why all p^0 must be replaced by the appropriate energies $E_u^{(\pm)}$ for particles and $E_v^{(\pm)}$ for antiparticles that are associated with the spinors. Third, the results, as they stand, are only valid when there are no controlling coefficients that produce additional time derivatives. How to treat such cases will be described in the latter Sec. V. Fourth, for vanishing Lorentz violation, $\mathcal{C} \mapsto 1/(p^2 - m_w^2)$, and looking at the propagator coefficients of Eqs. (2.6), (2.7) shows that the standard expressions of Eq. (4.1) are recovered when Lorentz invariance is reestablished. Fifth, for the expressions of Eq. (4.11) we checked that

$$S^{-1}(p)(u^{(1,2)} \bar{u}^{(1,2)}|_{E_u^{(\pm)}}) = 0, \tag{4.12a}$$

$$S^{-1}(-p)(v^{(1,2)} \bar{v}^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}}) = 0, \tag{4.12b}$$

with the modified Dirac operator of Eq. (2.4). Sixth, since the spinors span spinor space and they are orthogonal to each other according to the orthogonality conditions of Eq. (3.9), adding up all four spinor matrices, leads to the completeness relation

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1,2} \left(\frac{1}{2E_u^{(\alpha)}} u^{(\alpha)} \bar{u}^{(\alpha)}|_{E_u^{(\alpha)}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2E_v^{(\alpha)}(-\mathbf{p})} v^{(\alpha)}(-\mathbf{p}) \bar{v}^{(\alpha)}(-\mathbf{p})|_{E_v^{(\alpha)}} \right) \gamma^0 = \mathbb{1}_4.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

The latter is directly connected to Eq. (23) in [26] and it was verified to be valid at all orders in Lorentz violation for the relations of Eq. (4.11). Furthermore, we were able to demonstrate the validity of Eq. (23) in [26], at first order in Lorentz violation, employing the spinor results directly. Finally, note that for the “isotropic” case of Sec. III D 1, the b and d coefficients have to be treated separately from the g coefficients, as the first are comprised by $\hat{\mathcal{A}}^\mu$ and the latter are contained in $\hat{T}^{\mu\nu}$. Besides the general expressions stated above, several special results at first order in Lorentz violation will be given in Appendix D to make the behavior of the spinor matrices more transparent. We will not state explicit results that are exact in Lorentz violation as they do not provide any further insight. Once a specific result is needed for practical purposes, it should be possible to derive it from the general formulas of Eq. (4.11), with the help of computer algebra.

At this point, we will make a couple of final statements on certain conditions for the validity of the previous results. For the pseudovector operator $\hat{\mathcal{A}}^\mu$, the spinors, the spinor matrices of Eq. (4.11), and the completeness relation of Eq. (4.13) are valid for controlling coefficients chosen such that the following conditions are fulfilled:

$$0 \leq \hat{\mathcal{A}}^\mu, \tag{4.14a}$$

$$0 \leq \hat{\mathcal{A}}^\mu(d^{\mu\nu\dots} \mapsto -d^{\mu\nu\dots}), \tag{4.14b}$$

$$0 \leq \hat{\mathcal{A}}^\mu(d^{\mu\nu\dots} \mapsto -d^{\mu\nu\dots}, \mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}). \tag{4.14c}$$

The first of those ensures that the particle energies and spinors are numbered such as indicated throughout the

paper. The second grants the same for the antiparticle energies and spinors. The third applies to the completeness relation and makes certain that the numbering of the antiparticle energies and spinors stays consistent. There exist controlling coefficients and momentum components such that all three conditions are satisfied. For the two-tensor operator, there are similar three conditions:

$$0 \leq \hat{T}^{\mu\nu}, \quad (4.15a)$$

$$0 \leq \hat{T}^{\mu\nu}(H^{\mu\nu\dots} \mapsto -H^{\mu\nu\dots}), \quad (4.15b)$$

$$0 \leq \hat{T}^{\mu\nu}(H^{\mu\nu\dots} \mapsto -H^{\mu\nu\dots}, \mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}). \quad (4.15c)$$

The reasons for choosing these conditions are analog to the reasons outlined for $\hat{A}^\mu$. However, $\hat{T}^{\mu\nu}$ differs from $\hat{A}^\mu$ crucially. Although each of the conditions above can be fulfilled for $\hat{A}^\mu$, this is not possible for $\hat{T}^{\mu\nu}$. Either the first two are true, but not the third or vice versa. The reason for this is that the g coefficients are contracted with one additional power of the momentum compared to the H coefficients. So, once the first two conditions are valid, changing the signs of the momentum components obscures the third condition. This does not occur for the pseudo-vector $\hat{A}^\mu$, since it is the d coefficients that are contracted with one additional four-momentum relative to the b coefficients. Hence, once the first two conditions are valid for $\hat{A}^\mu$, the third is not compromised by changing the signs of the momentum components. Now let us assume that the first two conditions for $\hat{T}^{\mu\nu}$ hold. The consequence is then that the antiparticle energies have to be switched in the completeness relation of Eq. (4.13).

V. ADDITIONAL TIME DERIVATIVES

The results established in the previous section with the help of the optical theorem are only valid in case there are not any controlling coefficients that introduce additional time derivatives into the Lagrangian. Such time derivatives lead to an unconventional time evolution of the physical states [86]. Furthermore, for the nonminimal SME they increase the degree of the polynomial in p^0 that follows from the determinant of the Dirac operator. First, this may lead to additional spurious dispersion relations that do not have Lorentz-invariant equivalents. Second, the structure of the denominator Δ in propagators is modified drastically, which renders the previous proof based on the optical theorem invalid [37,38].

A. Minimal fermion sector

One possibility of remedying this behavior at least for the minimal SME was outlined in [86]. The authors of the latter paper suggest introducing a new spinor χ , which is linked to the former spinor ψ via a transformation with

an invertible matrix A : $\psi = A\chi$. The matrix A shall be constructed such that $A^\dagger \gamma^0 \Gamma^0 A = \mathbb{1}_4$. Since Γ^0 is linked to additional time derivatives in the minimal fermion sector all such time derivatives can be removed in this way.

The procedure will be exemplified within the minimal fermion sector with a nonzero coefficient $d^{(4)00}$. The matrix A is found by solving the matrix equation $A^\dagger \gamma^0 (\gamma^0 + d^{(4)00} \gamma^5 \gamma^0) A = \mathbb{1}_4$. Making the *Ansatz* of a diagonal A with real coefficients allows for a convenient solution of the system and it gives

$$A = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + d^{(4)00}}}, \frac{1}{\sqrt{1 + d^{(4)00}}}, \frac{1}{\sqrt{1 - d^{(4)00}}}, \frac{1}{\sqrt{1 - d^{(4)00}}} \right). \quad (5.1)$$

Introducing the new spinor χ into the Dirac operator leads to

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\chi} S'^{-1} \chi + \text{H.c.},$$

$$S'^{-1} = \gamma^0 A^\dagger \gamma^0 (\gamma^\mu i \partial_\mu - m_\psi \mathbb{1}_4 + \hat{\mathcal{Q}}) A. \quad (5.2)$$

Note that the dispersion relations are not modified by this transformation but the propagator is. The new propagator S' can be shown to be of the following shape where the purely timelike four-vector $\lambda^\mu = (1, 0, 0, 0)^\mu$ is introduced for convenience:

$$S' = \frac{1}{\Delta} (\hat{\xi}'_\mu \gamma^\mu + \hat{\Xi}' \mathbb{1}_4 + \hat{\Upsilon}' \gamma^5 + \hat{\zeta}'_\mu \gamma^5 \gamma^\mu + \hat{\psi}'_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}), \quad (5.3a)$$

$$\hat{\Xi}' = (A_{11} A_{33})^{-1} \hat{\Xi}, \quad (5.3b)$$

$$\hat{\Upsilon}' = (A_{11} A_{33})^{-1} \hat{\Upsilon}, \quad (5.3c)$$

$$\hat{\xi}'^\mu = \hat{\xi}^\mu + \frac{1}{27} (\alpha \lambda^\mu + \beta p^\mu), \quad (5.3d)$$

$$\hat{\zeta}'^\mu = \hat{\zeta}^\mu + \frac{1}{9} (\gamma \lambda^\mu + \delta p^\mu), \quad (5.3e)$$

$$\hat{\psi}'^{\mu\nu} = (A_{11} A_{33})^{-1} \hat{\psi}^{\mu\nu}, \quad (5.3f)$$

with the helpful quantities

$$\alpha = 4p^0 (d^{(4)00})^2 \{ 8(d^{(4)00})^2 (p \cdot \lambda)^2 + [9 + (d^{(4)00})^2] p^2 + 9m_\psi^2 \}, \quad (5.3g)$$

$$\beta = -(d^{(4)00})^2 \{ 8[9 + (d^{(4)00})^2] (p \cdot \lambda)^2 - [9 - (d^{(4)00})^2] p^2 + 9m_\psi^2 \}, \quad (5.3h)$$

$$\gamma = 8p^0 (d^{(4)00})^3 [4(p \cdot \lambda)^2 - p^2], \quad (5.3i)$$

$$\delta = -d^{(4)00}\{16(d^{(4)00})^2(p \cdot \lambda)^2 + [9 - (d^{(4)00})^2]p^2 - 9m_\psi^2\}. \quad (5.3j)$$

Hence, the scalar, pseudoscalar, and the tensor parameters are just multiplied with a global prefactor, which corresponds to the inverse product of two matrix components. The modification of the vector and pseudovector parameters is more involved, though. As expected, the denominator Δ remains unchanged since it corresponds to the determinant of the Dirac operator modulo a global prefactor.

As the Dirac operator has changed the spinors will change as well. The new spinors are given by $\chi = A^{-1}\psi$ where the spinors ψ for particles at first order in Lorentz violation are stated in Eq. (3.12a) and for antiparticles they are obtained from Eq. (3.19). Hence, each of the already known spinors just has to be multiplied with the inverse of A , which is also a diagonal matrix. Note that the normalization must be adapted as well. Based on these spinors, the spinor matrices at first order in Lorentz violation are derived:

$$u^{(1,2)}\bar{u}^{(1,2)} = v_\pm(\xi^\mu\gamma_\mu + \Xi\mathbb{1}_4 \pm \zeta^\mu\gamma_5\gamma_\mu \pm \psi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu})|_{p^0=E_0}, \quad (5.4a)$$

$$v^{(1,2)}\bar{v}^{(1,2)} = v_\pm(\xi^\mu\gamma_\mu - \Xi\mathbb{1}_4 \pm \zeta^\mu\gamma_5\gamma_\mu \mp \psi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu})|_{p^0=E_0}, \quad (5.4b)$$

$$\xi^\mu = \frac{p^\mu}{2}, \quad (5.4c)$$

$$\zeta^0 = \frac{|\mathbf{p}|}{2}, \quad \zeta = \frac{E_0}{|\mathbf{p}|}\frac{\mathbf{p}}{2}, \quad (5.4d)$$

$$\psi^{0i} = 0, \quad \psi^{ij} = \frac{m_\psi}{4|\mathbf{p}|}\epsilon^{ijk}p^k, \quad (5.4e)$$

$$\Xi = \frac{m_\psi}{2}, \quad (5.4f)$$

$$v_\pm = 1 \pm \frac{4}{3}\frac{|\mathbf{p}|}{E_0}d^{(4)00}. \quad (5.4g)$$

Using the results for the modified propagator of Eq. (5.3) and the previously stated spinor matrices allows for demonstrating the validity of the optical theorem at first order in Lorentz violation. A reasonable assumption is that the optical theorem is valid at all orders in Lorentz violation; cf. [31,32,36–39]. Then the spinor matrices are given by Eq. (4.11) based on the modified propagator quantities stated in Eq. (5.3).

B. Nonminimal fermion sector

In the nonminimal SME, there is an infinite number of component coefficients that are contracted with additional

time derivatives. This leads to problems similar to the ones discussed in the previous section. One of the simplest examples within the scope of the paper is the operator $b^{(5)000}(i\partial^0)^2$ that is contracted with two time derivatives. Such nonminimal frameworks can have spurious dispersion relations that do not have equivalents in the standard theory:

$$(p^0)^{(\pm)} = \frac{1}{b^{(5)000}} \pm |\mathbf{p}| - \frac{1}{2}(2\mathbf{p}^2 + m_\psi^2)b^{(5)000} + \dots, \quad (5.5a)$$

$$(p^0)^{(\pm)} = -\frac{1}{b^{(5)000}} \pm |\mathbf{p}| + \frac{1}{2}(2\mathbf{p}^2 + m_\psi^2)b^{(5)000} + \dots. \quad (5.5b)$$

Dispersion relations like these could be interpreted as Planck-scale effects. However, since the realm of applicability of the SME is expected to be far below the Planck energy (see also the issues connected to highly boosted observer frames in [26]) such dispersion relations are usually discarded in any analysis at tree level and at energies that lie much below the Planck scale. Spurious dispersion relations may be crucial for quantum corrections only, i.e., for calculations at higher order in perturbation theory [87]. These take into account virtual particles in loops whose four-momentum components are not constrained by energy-momentum conservation. Note also that the validity of the optical theorem is obscured by the occurrence of spurious dispersion relations [37,38].

In contrast to the minimal fermion sector, contributions with additional time derivatives in the nonminimal sector do not modify the matrix structure in spinor space, which is why the additional time derivatives cannot be simply removed with a matrix transformation along the lines of the previous section. One method of dealing with such terms at least at first order in Lorentz violation was introduced in [37,38]. It amounts to replacing all zeroth four-momentum components in the Lorentz-violating terms of the Dirac operator by the standard dispersion relation $p^0 = E_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_\psi^2}$. This does not modify the physical dispersion relations at first order but it removes the spurious dispersion relations given by Eq. (5.5). As the current framework is isotropic the spinor solutions of Eq. (3.12a) must be taken with all p^0 in the Lorentz-violating terms replaced by E_0 , which was already indicated in Sec. III B anyhow. Additionally, the same should be carried out in the propagator where it has to be kept in mind that this modified propagator can only be used in the proof of the optical theorem. In general, a propagator describes virtual (off-shell) particles, which is why p^0 does not satisfy the dispersion relation in this context. Based on that simple modification, the validity

of the optical theorem is again established at first order in Lorentz violation. Hence, the spinor matrices are obtained from Eq. (4.11) with $p^0 = E_0$ in the Lorentz-violating contributions. The corresponding explicit results will be stated in Appendix D. As long as we work at first order in Lorentz violation and at tree level, the procedure described before should be justified. In case there are, indeed, more than four nonspurious poles in the propagator the proof in Sec. IV is not valid and must be adapted to that particular situation. However, this behavior is expected to be very rare and it is reasonable to treat it concurrently when considering such a special framework.

VI. CONCLUSIONS

In the current paper, we have examined the fermion sector of the Standard Model extension for the spin-non-degenerate Lorentz-violating operators. This concerned the b , d , H , and g coefficients where the first two are contained in the pseudovector $\hat{A}^\mu$ and the latter two are contained in the two-tensor $\hat{T}^{\mu\nu}$. We obtained the modified propagators for both $\hat{A}^\mu$ and $\hat{T}^{\mu\nu}$. These results are exact in Lorentz violation and they are valid for coefficients of both the minimal and the nonminimal SME.

Also, the dispersion relations and solutions of the modified Dirac equation, i.e., the spinors for particles and antiparticles, were computed at first order in Lorentz violation for particular families of both minimal and nonminimal coefficients in $\hat{A}^\mu$ and $\hat{T}^{\mu\nu}$. With the optical theorem, the propagators and the spinors were checked to be consistent with each other at first order in Lorentz violation. Under the assumption that the optical theorem is valid at tree level at all orders in Lorentz violation, which is reasonable based on earlier investigations, the spinor matrices $u\bar{u}$ and $v\bar{v}$ were extracted from the propagator at all orders in Lorentz violation.

The expressions obtained are valid for explicit Lorentz violation only and they will prove useful for both future theoretical and phenomenological studies. First, the spinor solutions of the Dirac equation and especially their non-relativistic limits may be employed for phenomenology in fermion systems where the electron spin is essential and cannot be neglected. Second, the spinor matrices and propagators are needed for computations in high-energy physics that are carried out in the context of quantum field theory. Such investigations are currently in progress and the findings will be reported elsewhere.

ACKNOWLEDGMENTS

It is a pleasure to thank V. A. Kostelecký and M. M. Ferreira Jr. for several helpful suggestions. This work was partially funded by the Brazilian foundation FAPEMA. Furthermore, the authors acknowledge the comments made

by the anonymous referee whereupon some statements were clarified.

APPENDIX A: EXACT SPINORS FOR SPECIAL FRAMEWORKS

In this part of the appendix, we demonstrate how to obtain exact solutions of the modified Dirac equation. Doing this with computer algebra is unproblematic as long as there is a single nonzero controlling coefficient only. However, the complexity of both the modified dispersion relations and the spinor solutions rises drastically with an increasing number of coefficients. This is the main reason why most of the computations were restricted to first order in Lorentz violation, which allows us to obtain the energies and spinors for large sets of coefficients—even including nonminimal ones. For brevity, we will study isotropic cases here only.

1. Isotropic b coefficients

The first framework shall be characterized by a nonzero $b^{(3)0}$. The particle dispersion relations are obtained directly from the determinant of the Dirac operator:

$$E_u^{(\pm)} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_\psi^2 \mp 2b^{(3)0}|\mathbf{p}| + (b^{(3)0})^2}. \quad (\text{A1})$$

There are two distinct ones, as expected, and they differ from each other at first order in Lorentz violation. Plugging these energies into the Dirac equation and solving it leads to the particle spinor solutions:

$$u^{(1,2)}|_{E_u^{(\pm)}}(\mathbf{p}) = N_u^{(1,2)} \begin{pmatrix} (p_3 \pm |\mathbf{p}|)(E_u^{(\pm)} - p_3 + b^{(3)0}) - (p_1^2 + p_2^2) \\ (p_1 + ip_2)(E_u^{(\pm)} \mp |\mathbf{p}| + b^{(3)0}) \\ m_\psi(p_3 \pm |\mathbf{p}|) \\ m_\psi(p_1 + ip_2) \end{pmatrix}. \quad (\text{A2})$$

The antiparticle spinors are connected to the particle spinors according to Eq. (3.19). The normalizations for the particle spinors are chosen such that $(u^{(\alpha)})^\dagger u^{(\beta)} = 2E_u^{(\alpha)} \delta_{\alpha\beta}$ and in analogy for the antiparticle spinors. This also requires that spinors for different energies are orthogonal to each other, which is granted by the Hermiticity of the Dirac operator. Furthermore, such a normalization allows for a convenient check of the optical theorem, which we saw in Sec. IV. For this particular case the normalizations read as follows:

$$N_u^{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| \pm p_3)(E_u^{(\pm)} \mp |\mathbf{p}| + b^{(3)0})}},$$

$$N_v^{(1,2)} = N_u^{(2,1)}. \quad (\text{A3})$$

2. Isotropic g coefficients

In contrast to the H coefficients, there is an isotropic case for the g coefficients. It is characterized by a totally antisymmetric choice of nonzero coefficients: $g^{(4)ijk} \equiv \epsilon^{ijk}g_1$ where i, j , and k are spatial indices. There are again two dispersion relations that differ from each other at first order in Lorentz violation:

$$E_u^{(\pm)} = \sqrt{(1 + g_1^2)\mathbf{p}^2 \pm 2g_1m_\psi|\mathbf{p}| + m_\psi^2}. \quad (\text{A4})$$

Note that the g coefficients are dimensionless. The particle spinor solutions can be obtained such as before:

$$u^{(1,2)}|_{E_u^{(\pm)}}(\mathbf{p}) = N_u^{(1,2)} \begin{pmatrix} -[p_1^2 + p_2^2 \pm (p_3 - E_u^{(\pm)})(|\mathbf{p}| \pm p_3)] \\ (p_1 + ip_2)(E_u^{(\pm)} \mp |\mathbf{p}|) \\ (p_3 \pm |\mathbf{p}|)(m_\psi \pm g_1|\mathbf{p}|) \\ (p_1 + ip_2)(m_\psi \pm g_1|\mathbf{p}|) \end{pmatrix}, \quad (\text{A5})$$

and the antiparticle spinor solutions are connected to these based on Eq. (3.28). The normalization factors are simply expressed in terms of the particle energies:

$$N_u^{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}| \pm p_3)(E_u^{(\pm)} \mp |\mathbf{p}|)}}, \quad N_v^{(1,2)} = N_u^{(2,1)}. \quad (\text{A6})$$

The exact spinors in both subsections were checked to correspond to the results in Sec. III D 1 at first order in Lorentz violation.

APPENDIX B: SPINORS FOR SPIN-DEGENERATE OPERATORS

For completeness, we state the spinors, normalization factors, and the propagator for the spin-degenerate cases that are encoded in the scalar operator $\hat{S}$ and the vector operator $\hat{\mathcal{V}}^\mu$. The Dirac operator can be diagonalized with the matrix $U = V \cdot W$ where V and W are given by Eq. (3.1). In these matrices all E_0 have to be replaced by the exact dispersion relation E_u and all occurrences of m_ψ by $m_\psi - \hat{S}$ and p^μ by $(p + \hat{\mathcal{V}})^\mu$ [22]. In the chiral representation the particle spinors at all orders in Lorentz violation can be cast into the following form:

$$\frac{1}{N_u}u^{(1)}|_{E_u} = (m_\psi - \hat{S}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(p + \hat{\mathcal{V}})^1 + i(p + \hat{\mathcal{V}})^2 \\ E_u + \hat{\mathcal{V}}^0 + (p + \hat{\mathcal{V}})^3 \\ (p + \hat{\mathcal{V}})^1 - i(p + \hat{\mathcal{V}})^2 \\ E_u + \hat{\mathcal{V}}^0 - (p + \hat{\mathcal{V}})^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{B1a})$$

$$\frac{1}{N_u}u^{(2)}|_{E_u} = (m_\psi - \hat{S}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_u + \hat{\mathcal{V}}^0 - (p + \hat{\mathcal{V}})^3 \\ -(p + \hat{\mathcal{V}})^1 - i(p + \hat{\mathcal{V}})^2 \\ E_u + \hat{\mathcal{V}}^0 + (p + \hat{\mathcal{V}})^3 \\ (p + \hat{\mathcal{V}})^1 + i(p + \hat{\mathcal{V}})^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B1b})$$

where E_u are the exact particle energies. The antiparticle spinors are obtained from the particle spinors by charge conjugation (cf. Sec. III D 4):

$$v^{(1,2)}|_{E_v} = \begin{pmatrix} u_4^{(2,1)} \\ -u_3^{(2,1)} \\ -u_2^{(2,1)} \\ u_1^{(2,1)} \end{pmatrix}^* (-a^{\mu\dots}, -e^{\mu\dots}),$$

$$E_v = E_u(-a^{\mu\dots}, -e^{\mu\dots}), \quad (\text{B2})$$

with the signs of the C -odd a and e coefficients reversed (see Table P31 in [25]). The normalization factors for particles and antiparticles read

$$N_u = \sqrt{\frac{E_u}{(E_u + \hat{\mathcal{V}}^0 + m_\psi - \hat{S})^2 + (\mathbf{p} + \hat{\mathcal{V}})^2}},$$

$$N_v = N_u(-a^{\mu\dots}, -e^{\mu\dots}), \quad (\text{B3})$$

where $\hat{\mathcal{V}}$ is the spatial part of the vector operator $\hat{\mathcal{V}}^\mu$. Last but not least, the propagator can be expressed as follows:

$$iS = \frac{i(\not{p} + \hat{\mathcal{V}} + (m_\psi - \hat{S})\mathbb{1}_4)}{(p + \hat{\mathcal{V}})^2 - (m_\psi - \hat{S})^2}. \quad (\text{B4})$$

APPENDIX C: SPINORS FOR PSEUDOSCALAR OPERATOR $\hat{f}$

The spinors for the pseudoscalar operator $\hat{Q} = i\hat{f}\gamma^5$ with $\hat{f} = \hat{f}^\nu p_\nu$ shall be stated as well. We do not consider the chiral mass term $i\hat{m}_5\gamma^5$, which in principle also adds to the pseudoscalar operator but can be rotated away by a chiral transformation in many cases [22]. The operator $\hat{f}$ has the peculiarity that its contributions to the dispersion relation are of quadratic order at least, i.e., $E_u = E_0 + \hat{f}^2/(2E_0)$. However, the spinors contain first-order terms in Lorentz violation:

$$\frac{1}{N_u} u^{(1)}|_{E_u} = \begin{pmatrix} \sigma^3 \phi_- \\ \phi_+ \end{pmatrix} - \frac{i\hat{f}}{2E_0} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ -\sigma^3 \phi_- \end{pmatrix}, \quad (\text{C1a})$$

$$\frac{1}{N_u} u^{(2)}|_{E_u} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \phi_+^* \\ \sigma^1 \phi_-^* \end{pmatrix} - \frac{i\hat{f}}{2E_0} \begin{pmatrix} \sigma^1 \phi_-^* \\ i\sigma^2 \phi_+^* \end{pmatrix}, \quad (\text{C1b})$$

$$\phi_{\pm} = \begin{pmatrix} A_{\pm} \\ B \end{pmatrix}, \quad (\text{C1c})$$

$$A_{\pm} = E_0 + m_{\psi} \pm p_3, \quad (\text{C1d})$$

$$B = p_1 + ip_2, \quad (\text{C1e})$$

with the Pauli matrices σ^i . The antiparticle spinors can be obtained as usual where the signs of the C -odd coefficients f^{μ} must be reversed (see Table P31 in [25]):

$$v^{(1,2)}|_{E_v} = \begin{pmatrix} u_4^{(2,1)} \\ -u_3^{(2,1)} \\ -u_2^{(2,1)} \\ u_1^{(2,1)} \end{pmatrix}^* (-f^{\mu\dots}), \quad E_v = E_u. \quad (\text{C2})$$

Last but not least, the normalization factors of the particle and antiparticle spinors read

$$N_u = \frac{1}{\sqrt{2(E_0 + m_{\psi})[1 + \hat{f}^2/(4E_0^2)]}}, \quad N_v = N_u(-f^{\mu\dots}), \quad (\text{C3})$$

and the propagator is given by

$$iS = \frac{i(\not{p} + m_{\psi} \mathbb{1}_4 + i\hat{f}\gamma^5)}{p^2 - m_{\psi}^2 - \hat{f}^2}. \quad (\text{C4})$$

In the denominator the square of $\hat{f}$ appears again demonstrating that $\hat{f}$ contributes to the dispersion relation quadratically. The latter result corresponds to Eq. (6.49) in [38].

APPENDIX D: SPECIAL RESULTS FOR SPINOR MATRICES

Finally, in the current section some explicit results for spinor matrices $u^{(\alpha)}\bar{u}^{(\alpha)}$ for particles and $v^{(\alpha)}\bar{v}^{(\alpha)}$ for antiparticles shall be presented. They are based on the general expressions stated in Eq. (4.11) and will be given for the purpose of illustration. Two cases for the pseudovector operator $\hat{A}^{\mu}$ and one case for the two-tensor operator $\hat{T}^{\mu\nu}$ will be under consideration.

1. Pseudovector operator

The first case is characterized by isotropic Lorentz violation and it was examined in Sec. III D 1. The spinor matrices for particles and antiparticles are explicitly given by

$$u^{(1,2)}\bar{u}^{(1,2)}|_{E_u^{(\pm)}} = \xi_{\pm}^{\mu}\gamma_{\mu} + \Xi\mathbb{1}_4 + \zeta_{\pm}^{\mu}\gamma_5\gamma_{\mu} + \psi_{\pm}^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}|_{p^0=E_u^{(\pm)}}, \quad (\text{D1a})$$

$$v^{(1,2)}\bar{v}^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}} = \xi_{\mp}^{\mu}\gamma_{\mu} - \Xi\mathbb{1}_4 - \zeta_{\mp}^{\mu}\gamma_5\gamma_{\mu} - \psi_{\pm}^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}|_{p^0=E_v^{(\pm)}}, \quad (\text{D1b})$$

$$\xi_{\pm}^0 = \frac{p^0}{2}, \quad \xi_{\pm} = \frac{\mathbf{p}}{2} \left(1 \mp \frac{b^{(3)0}}{|\mathbf{p}|} \right), \quad (\text{D1c})$$

$$\zeta_{\pm}^0 = \frac{1}{2}(\pm|\mathbf{p}| - b^{(3)0}), \quad \zeta_{\pm} = \pm \frac{p^0}{2|\mathbf{p}|} \mathbf{p}, \quad (\text{D1d})$$

$$\psi_{\pm}^{0i} = 0, \quad \psi_{\pm}^{ij} = \pm \frac{m_{\psi}}{4|\mathbf{p}|} \varepsilon^{ijk} p^k, \quad (\text{D1e})$$

$$\Xi = \frac{m_{\psi}}{2}. \quad (\text{D1f})$$

Due to isotropy, no momentum component is preferred in these expressions. Furthermore, all parameter functions decompose into a vector or tensor part and a scalar part that depends on the magnitude of the momentum only. Note that the signs of Ξ for particles and antiparticles are opposite, as expected.

The second framework is characterized by a nonvanishing $\hat{A}^3$, which makes it anisotropic; cf. Sec. III D 3. With the preferred purely spacelike direction $\lambda^{\mu} = (0, 0, 0, 1)^{\mu}$, the spinor matrices can be expressed conveniently:

$$u^{(1,2)}\bar{u}^{(1,2)}|_{E_u^{(\pm)}} = \xi_{\pm}^{\mu}\gamma_{\mu} + \Xi_{\pm}\mathbb{1}_4 + \zeta_{\pm}^{\mu}\gamma_5\gamma_{\mu} + \psi_{\pm}^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}|_{p^0=E_u^{(\pm)}}, \quad (\text{D2a})$$

$$v^{(1,2)}\bar{v}^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}} = \xi_{\mp}^{\mu}\gamma_{\mu} - \Xi_{\mp}\mathbb{1}_4 - \zeta_{\mp}^{\mu}\gamma_5\gamma_{\mu} - \psi_{\pm}^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}|_{p^0=E_v^{(\pm)}}, \quad (\text{D2b})$$

$$\xi_{\pm}^{\mu} = \frac{p^{\mu}}{2} \mp \frac{\hat{A}^3}{2\Theta_3} (p \cdot \lambda) \lambda^{\mu}, \quad (\text{D2c})$$

$$\zeta_{\pm}^{\mu} = \frac{1}{2} \left[\pm \left(\frac{(p \cdot \lambda)^2}{\Theta_3} - \Theta_3 \right) - \hat{A}^3 \right] \lambda^{\mu} \pm \frac{p \cdot \lambda}{2\Theta_3} p^{\mu}, \quad (\text{D2d})$$

$$\psi_{\pm}^{0i} = \pm \frac{m_{\psi}}{4\Theta_3} \varepsilon^{ij3} p^j, \quad \psi_{\pm}^{ij} = \mp \frac{m_{\psi} p^0}{4\Theta_3} \varepsilon^{ijk} \lambda^k, \quad (\text{D2e})$$

$$\Xi_{\pm} = \frac{m_{\psi}}{2} \left(1 \pm \frac{\hat{A}^3}{\Theta_3} \right). \quad (\text{D2f})$$

Since this case is anisotropic with the preferred direction pointing along the third spatial axis of the coordinate system the third spatial momentum component is preferred.

This manifests in expressions depending on $\Theta_3 = \sqrt{p_3^2 + m_\psi^2}$ and the scalar product $p \cdot \lambda$. Furthermore, due to the preferred spatial axis, the quantity Ξ becomes nondegenerate for the particle and antiparticle spinors, respectively.

2. Two-tensor operator

As an example for the two-tensor operator $\hat{T}^{\mu\nu}$, a nonzero $\hat{T}^{01}$ is considered; cf. Sec. III E 1. For convenience, we introduce the three-dimensional vectors $\mathbf{p}^{(3)} \equiv (0, p_2, p_3)$ and $\tilde{\mathbf{p}}^{(3)} = \epsilon^{1ij} \mathbf{p}^{(3)j} = (0, p_3, -p_2)$. The parameters of the spinor matrices can then be written in a handy form:

$$u^{(1,2)} \bar{u}^{(1,2)}|_{E_u^{(\pm)}} = \xi_\pm^\mu \gamma_\mu + \Xi \mathbb{1}_4 + \zeta_\pm^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \psi_\pm^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}|_{p^0=E_u^{(\pm)}}, \quad (\text{D3a})$$

$$v^{(1,2)} \bar{v}^{(1,2)}|_{E_v^{(\pm)}} = \xi_\mp^\mu \gamma_\mu - \Xi \mathbb{1}_4 - \zeta_\mp^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \psi_\mp^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}|_{h^{\mu\nu} \mapsto -h^{\mu\nu}}, \quad (\text{D3b})$$

$$\xi_\pm^\mu = \frac{p^\mu}{2} \pm \frac{\hat{T}^{01}}{2\Phi_1} (0, \mathbf{p}^{(3)})^\mu, \quad (\text{D3c})$$

$$\zeta_\pm^\mu = \pm \frac{m_\psi}{2\Phi_1} (0, \tilde{\mathbf{p}}^{(3)})^\mu, \quad (\text{D3d})$$

$$\psi_\pm^{01} = \frac{1}{4} (\pm \Phi_1 + \hat{T}^{01}), \quad \psi_\pm^{0i} = \mp \mathbf{p}^{(3)i} \frac{p_1}{4\Phi_1},$$

$$\psi_\pm^{ij} = \pm \epsilon^{ijk} \tilde{\mathbf{p}}^{(3)k} \frac{p_0}{4\Phi_1}, \quad (\text{D3e})$$

$$\Xi = \frac{m_\psi}{2}, \quad (\text{D3f})$$

with Φ_1 from Eq. (3.20). Note that it is possible to express the vectors in $\xi_\pm^\mu$ and $\zeta_\pm^\mu$ directly in terms of the two-tensor operator under consideration, i.e.,

$$(0, \tilde{\mathbf{p}}^{(3)})^\mu = -\frac{\tilde{T}^{\mu\nu} p_\nu}{\hat{T}^{01}}, \quad (0, \mathbf{p}^{(3)})^\mu = \frac{\epsilon^{01\mu\nu} \tilde{T}_\nu{}^\rho p_\rho}{\hat{T}^{01}}. \quad (\text{D4})$$

This concludes the examples for the spinor matrices that shall be stated explicitly.

-
- [1] V. A. Kostelecký and S. Samuel, Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory, *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989).
 - [2] V. A. Kostelecký and S. Samuel, Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989).
 - [3] V. A. Kostelecký and S. Samuel, Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings, *Phys. Rev. D* **40**, 1886 (1989).
 - [4] V. A. Kostelecký and R. Potting, *CPT* and strings, *Nucl. Phys.* **B359**, 545 (1991).
 - [5] V. A. Kostelecký and R. Potting, *CPT*, strings, and meson factories, *Phys. Rev. D* **51**, 3923 (1995).
 - [6] R. Gambini and J. Pullin, Nonstandard optics from quantum space-time, *Phys. Rev. D* **59**, 124021 (1999).
 - [7] M. Bojowald, H. A. Morales-Técosta, and H. Sahlmann, Loop quantum gravity phenomenology and the issue of Lorentz invariance, *Phys. Rev. D* **71**, 084012 (2005).
 - [8] G. Amelino-Camelia and S. Majid, Waves on noncommutative space-time and gamma-ray bursts, *Int. J. Mod. Phys. A* **15**, 4301 (2000).
 - [9] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecký, C. D. Lane, and T. Okamoto, Noncommutative Field Theory and Lorentz Violation, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001).
 - [10] F. R. Klinkhamer and C. Rupp, Spacetime foam, *CPT* anomaly, and photon propagation, *Phys. Rev. D* **70**, 045020 (2004).
 - [11] S. Bernadotte and F. R. Klinkhamer, Bounds on length scales of classical spacetime foam models, *Phys. Rev. D* **75**, 024028 (2007).
 - [12] S. Hossenfelder, Theory and phenomenology of space-time defects, *Adv. High Energy Phys.* **2014**, 950672 (2014).
 - [13] F. R. Klinkhamer, Z-string global gauge anomaly and Lorentz non-invariance, *Nucl. Phys.* **B535**, 233 (1998).
 - [14] F. R. Klinkhamer, A *CPT* anomaly, *Nucl. Phys.* **B578**, 277 (2000).
 - [15] P. Hořava, Quantum gravity at a Lifshitz point, *Phys. Rev. D* **79**, 084008 (2009).
 - [16] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *CPT* violation and the standard model, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997).
 - [17] D. Colladay and V. A. Kostelecký, Lorentz-violating extension of the standard model, *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998).
 - [18] V. A. Kostelecký, Gravity, Lorentz violation, and the standard model, *Phys. Rev. D* **69**, 105009 (2004).
 - [19] O. W. Greenberg, *CPT* Violation Implies Violation of Lorentz Invariance, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 231602 (2002).
 - [20] V. A. Kostelecký and M. Mewes, Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension, *Phys. Rev. D* **80**, 015020 (2009).

- [21] V. A. Kostelecký and M. Mewes, Neutrinos with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension, *Phys. Rev. D* **85**, 096005 (2012).
- [22] V. A. Kostelecký and M. Mewes, Fermions with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension, *Phys. Rev. D* **88**, 096006 (2013).
- [23] Q. G. Bailey, V. A. Kostelecký, and R. Xu, Short-range gravity and Lorentz violation, *Phys. Rev. D* **91**, 022006 (2015).
- [24] V. A. Kostelecký and M. Mewes, Testing local Lorentz invariance with gravitational waves, *Phys. Lett. B* **757**, 510 (2016).
- [25] V. A. Kostelecký and N. Russell, Data tables for Lorentz and *CPT* violation, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 11 (2011).
- [26] V. A. Kostelecký and R. Lehnert, Stability, causality, and Lorentz and *CPT* violation, *Phys. Rev. D* **63**, 065008 (2001).
- [27] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Causality and *CPT* violation from an Abelian Chern-Simons-like term, *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001).
- [28] M. M. Ferreira, Jr. and F. M. O. Moucherek, Influence of Lorentz- and *CPT*-violating terms on the Dirac equation, *Int. J. Mod. Phys. A* **21**, 6211 (2006).
- [29] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, and P. R. D. Pinheiro, Gauge propagator and physical consistency of the *CPT*-even part of the standard model extension, *Phys. Rev. D* **80**, 125040 (2009).
- [30] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, and F. E. P. dos Santos, Feynman propagator for the nonbirefringent *CPT*-even electrodynamics of the standard model extension, *Phys. Rev. D* **82**, 125006 (2010).
- [31] F. R. Klinkhamer and M. Schreck, Consistency of isotropic modified Maxwell theory: Microcausality and unitarity, *Nucl. Phys. B* **848**, 90 (2011); Models for low-energy Lorentz violation in the photon sector: Addendum to “Consistency of isotropic modified Maxwell theory”, *Nucl. Phys. B* **856**, 666 (2012).
- [32] M. Schreck, Analysis of the consistency of parity-odd nonbirefringent modified Maxwell theory, *Phys. Rev. D* **86**, 065038 (2012).
- [33] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, and R. P. M. Moreira, Consistency analysis of a nonbirefringent Lorentz-violating planar model, *Eur. Phys. J. C* **72**, 2070 (2012).
- [34] M. A. Hohensee, D. F. Phillips, and R. L. Walsworth, Covariant quantization of Lorentz-violating electromagnetism, [arXiv:1210.2683](https://arxiv.org/abs/1210.2683).
- [35] M. Cambiaso, R. Lehnert, and R. Potting, Massive photons and Lorentz violation, *Phys. Rev. D* **85**, 085023 (2012).
- [36] M. Schreck, Quantum field theory based on birefringent modified Maxwell theory, *Phys. Rev. D* **89**, 085013 (2014).
- [37] M. Schreck, Quantum field theoretic properties of Lorentz-violating operators of nonrenormalizable dimension in the photon sector, *Phys. Rev. D* **89**, 105019 (2014).
- [38] M. Schreck, Quantum field theoretic properties of Lorentz-violating operators of nonrenormalizable dimension in the fermion sector, *Phys. Rev. D* **90**, 085025 (2014).
- [39] M. Maniatis and C. M. Reyes, Unitarity in a Lorentz symmetry breaking model with higher-order operators, *Phys. Rev. D* **89**, 056009 (2014).
- [40] D. Colladay, P. McDonald, and R. Potting, Gupta-Bleuler photon quantization in the standard model extension, *Phys. Rev. D* **89**, 085014 (2014).
- [41] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, and F. E. P. dos Santos, Gupta-Bleuler quantization of the anisotropic parity-even and *CPT*-even electrodynamics of a standard model extension, *Phys. Rev. D* **90**, 105025 (2014).
- [42] S. Albayrak and I. Turan, *CPT*-odd photon in vacuum-orthogonal model, [arXiv:1505.07584](https://arxiv.org/abs/1505.07584).
- [43] R. Jackiw and V. A. Kostelecký, Radiatively induced Lorentz and *CPT* violation in electrodynamics, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3572 (1999).
- [44] J.-M. Chung, Radiatively-induced Lorentz and *CPT* violating Chern-Simons term in QED, *Phys. Lett. B* **461**, 138 (1999).
- [45] M. Pérez-Victoria, Exact Calculation of the Radiatively Induced Lorentz and *CPT* Violation in QED, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2518 (1999).
- [46] M. Pérez-Victoria, Physical (ir)relevance of ambiguities to Lorentz and *CPT* violation in QED, *J. High Energy Phys.* **04** (2001) 032.
- [47] V. A. Kostelecký, C. D. Lane, and A. G. M. Pickering, One-loop renormalization of Lorentz-violating electrodynamics, *Phys. Rev. D* **65**, 056006 (2002).
- [48] B. Altschul, Failure of gauge invariance in the nonperturbative formulation of massless Lorentz-violating QED, *Phys. Rev. D* **69**, 125009 (2004).
- [49] B. Altschul, Gauge invariance and the Pauli-Villars regulator in Lorentz- and *CPT*-violating electrodynamics, *Phys. Rev. D* **70**, 101701(R) (2004).
- [50] D. Colladay and P. McDonald, One-loop renormalization of pure Yang-Mills theory with Lorentz violation, *Phys. Rev. D* **75**, 105002 (2007).
- [51] D. Colladay and P. McDonald, One-Loop renormalization of QCD with Lorentz violation, *Phys. Rev. D* **77**, 085006 (2008).
- [52] D. Colladay and P. McDonald, One-Loop renormalization of the electroweak sector with Lorentz violation, *Phys. Rev. D* **79**, 125019 (2009).
- [53] M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov, and A. J. da Silva, Aetherlike Lorentz-breaking actions, *Phys. Rev. D* **81**, 045018 (2010).
- [54] A. Ferrero and B. Altschul, Renormalization of scalar and Yukawa field theories with Lorentz violation, *Phys. Rev. D* **84**, 065030 (2011).
- [55] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr, R. V. Maluf, and F. E. P. dos Santos, Radiative generation of the *CPT*-even gauge term of the SME from a dimension-five nonminimal coupling term, *Phys. Lett. B* **726**, 815 (2013).
- [56] A. P. Baeta Scarpelli, T. Mariz, J. R. Nascimento, and A. Y. Petrov, Four-dimensional aether-like Lorentz-breaking QED revisited and problem of ambiguities, *Eur. Phys. J. C* **73**, 2526 (2013).
- [57] M. Cambiaso, R. Lehnert, and R. Potting, Asymptotic states and renormalization in Lorentz-violating quantum field theory, *Phys. Rev. D* **90**, 065003 (2014).
- [58] T. R. S. Santos and R. F. Sobreiro, Renormalizability of Yang-Mills theory with Lorentz violation and gluon mass generation, *Phys. Rev. D* **91**, 025008 (2015).

- [59] T. R. S. Santos and R. F. Sobreiro, Remarks on the renormalization properties of Lorentz- and *CPT*-violating quantum electrodynamics, *Braz. J. Phys.* **46**, 437 (2016).
- [60] L. H. C. Borges, A. G. Dias, A. F. Ferrari, J. R. Nascimento, and A. Y. Petrov, Generation of higher derivatives operators and electromagnetic wave propagation in a Lorentz-violation scenario, *Phys. Lett. B* **756**, 332 (2016).
- [61] H. Belich, T. Mariz, J. R. Nascimento, and A. Y. Petrov, On one-loop corrections in the *CPT*-even extension of QED, [arXiv:1601.03600](#).
- [62] R. Bluhm, N. L. Gagne, R. Potting, and A. Vrublevskis, Constraints and stability in vector theories with spontaneous Lorentz violation, *Phys. Rev. D* **77**, 125007 (2008); Erratum, *Phys. Rev. D* **79**, 029902(E) (2009).
- [63] C. A. Hernaski, Quantization and stability of bumblebee electrodynamics, *Phys. Rev. D* **90**, 124036 (2014).
- [64] R. Bluhm, Explicit versus spontaneous diffeomorphism breaking in gravity, *Phys. Rev. D* **91**, 065034 (2015).
- [65] R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, R. Casana, and M. M. Ferreira Jr, Einstein-Hilbert graviton modes modified by the Lorentz-violating bumblebee field, *Phys. Rev. D* **90**, 025007 (2014).
- [66] V. A. Kostelecký and N. Russell, Classical kinematics for Lorentz violation, *Phys. Lett. B* **693**, 443 (2010).
- [67] V. A. Kostelecký, Riemann-Finsler geometry and Lorentz-violating kinematics, *Phys. Lett. B* **701**, 137 (2011).
- [68] V. A. Kostelecký, N. Russell, and R. Tso, Bipartite Riemann-Finsler geometry and Lorentz violation, *Phys. Lett. B* **716**, 470 (2012).
- [69] D. Colladay and P. McDonald, Classical Lagrangians for momentum dependent Lorentz violation, *Phys. Rev. D* **85**, 044042 (2012).
- [70] M. Schreck, Classical kinematics for isotropic, minimal Lorentz-violating fermion operators, *Phys. Rev. D* **91**, 105001 (2015).
- [71] N. Russell, Finsler-like structures from Lorentz-breaking classical particles, *Phys. Rev. D* **91**, 045008 (2015).
- [72] M. Schreck, Classical kinematics and Finsler structures for nonminimal Lorentz-violating fermions, *Eur. Phys. J. C* **75**, 187 (2015).
- [73] M. Schreck, Classical Lagrangians and Finsler structures for the nonminimal fermion sector of the standard model extension, *Phys. Rev. D* **93**, 105017 (2016).
- [74] M. Schreck, From classical Lagrangians to Hamilton operators in the standard model extension, *Phys. Rev. D* **94**, 025019 (2016).
- [75] J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, Kinematics and dynamics in a bipartite-Finsler spacetime, *Phys. Lett. B* **731**, 74 (2014).
- [76] J. Foster and R. Lehnert, Classical-physics applications for Finsler *b* space, *Phys. Lett. B* **746**, 164 (2015).
- [77] D. Colladay and P. McDonald, Singular Lorentz-violating Lagrangians and associated Finsler structures, *Phys. Rev. D* **92**, 085031 (2015).
- [78] M. Schreck, Eikonal approximation, Finsler structures, and implications for Lorentz-violating photons in weak gravitational fields, *Phys. Rev. D* **92**, 125032 (2015).
- [79] J. E. G. Silva, R. V. Maluf, and C. A. S. Almeida, A nonlinear dynamics for the scalar field in Randers spacetime, *Phys. Lett. B* **766**, 263 (2017).
- [80] J. E. G. Silva, Symmetries and fields in Randers-Finsler spacetime, [arXiv:1602.07345](#).
- [81] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Perseus Books Publishing, L.L.C., Reading, MA, 1995).
- [82] L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit, *Phys. Rev.* **78**, 29 (1950).
- [83] R. C. Myers and M. Pospelov, Ultraviolet Modifications of Dispersion Relations in Effective Field Theory, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 211601 (2003).
- [84] Y. Nagashima and Y. Nambu, *Elementary Particle Physics: Elementary Particle Physics* (Wiley-VCH, Weinheim, Germany, 2010).
- [85] Y. Ding and V. A. Kostelecký, Lorentz-violating spinor electrodynamics and Penning traps, *Phys. Rev. D* **94**, 056008 (2016).
- [86] D. Colladay and V. A. Kostelecký, Cross sections and Lorentz violation, *Phys. Lett. B* **511**, 209 (2001).
- [87] C. M. Reyes and L. F. Urrutia, Unitarity and Lee-Wick prescription at one loop level in the effective Myers-Pospelov electrodynamics: The $e^+ + e^-$ annihilation, *Phys. Rev. D* **95**, 015024 (2017).

Referências Bibliográficas

- [1] P.A.M. Dirac, *Proc. R. Soc. A* **117**, 610 (1928).
- [2] V.A. Kostelecký and S. Samuel, “Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory,” *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989).
- [3] V.A. Kostelecký and S. Samuel, “Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories,” *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989).
- [4] V.A. Kostelecký and S. Samuel, “Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings,” *Phys. Rev. D* **40**, 1886 (1989).
- [5] V.A. Kostelecký and R. Potting, “CPT and strings,” *Nucl. Phys. B* **359**, 545 (1991).
- [6] V.A. Kostelecký and R. Potting, “CPT, strings, and meson factories,” *Phys. Rev. D* **51**, 3923 (1995), hep-ph/9501341.
- [7] R. Gambini and J. Pullin, “Nonstandard optics from quantum space-time,” *Phys. Rev. D* **59**, 124021 (1999), gr-qc/9809038.
- [8] M. Bojowald, H.A. Morales-Técotl, and H. Sahlmann, “Loop quantum gravity phenomenology and the issue of Lorentz invariance,” *Phys. Rev. D* **71**, 084012 (2005), gr-qc/0411101.
- [9] G. Amelino-Camelia and S. Majid, “Waves on noncommutative spacetime and gamma-ray bursts,” *Int. J. Mod. Phys. A* **15**, 4301 (2000), hep-th/9907110.
- [10] S.M. Carroll, J.A. Harvey, V.A. Kostelecký, C.D. Lane, and T. Okamoto, “Noncommutative field theory and Lorentz violation,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001), hep-th/0105082.

- [11] F.R. Klinkhamer and C. Rupp, “Spacetime foam, CPT anomaly, and photon propagation,” *Phys. Rev. D* **70**, 045020 (2004), hep-th/0312032.
- [12] S. Bernadotte and F.R. Klinkhamer, “Bounds on length scales of classical spacetime foam models,” *Phys. Rev. D* **75**, 024028 (2007), hep-ph/0610216.
- [13] S. Hossenfelder, “Theory and phenomenology of space-time defects,” *Adv. High Energy Phys.* **2014**, 950672 (2014), arXiv:1401.0276 [hep-ph].
- [14] F.R. Klinkhamer, “Z-string global gauge anomaly and Lorentz non-invariance,” *Nucl. Phys. B* **535**, 233 (1998), hep-th/9805095.
- [15] F.R. Klinkhamer, “A CPT anomaly,” *Nucl. Phys. B* **578**, 277 (2000), hep-th/9912169.
- [16] P. Hořava, “Quantum gravity at a Lifshitz point,” *Phys. Rev. D* **79**, 084008 (2009), arXiv:0901.3775 [hep-th].
- [17] D. Colladay and V.A. Kostelecký, “CPT violation and the standard model,” *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997), hep-ph/9703464.
- [18] D. Colladay and V.A. Kostelecký, “Lorentz-violating extension of the standard model,” *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998), hep-ph/9809521.
- [19] V.A. Kostelecký, “Gravity, Lorentz violation, and the standard model,” *Phys. Rev. D* **69**, 105009 (2004) hep-th/0312310.
- [20] V.A. Kostelecký and M. Mewes, “Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension,” *Phys. Rev. D* **80**, 015020 (2009), arXiv:0905.0031 [hep-ph].
- [21] V.A. Kostelecký and M. Mewes, “Neutrinos with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension,” *Phys. Rev. D* **85**, 096005 (2012), arXiv:1112.6395 [hep-ph].
- [22] V.A. Kostelecký and M. Mewes, “Fermions with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension”, *Phys. Rev. D* **88**, 096006 (2013), arXiv:1308.4973 [hep-ph].

- [23] Q.G. Bailey, V.A. Kostelecký, and R. Xu, “Short-range gravity and Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **91**, 022006 (2015), arXiv:1410.6162 [gr-qc].
- [24] V.A. Kostelecký and M. Mewes, “Testing local Lorentz invariance with gravitational waves,” *Phys. Lett. B* **757**, 510 (2016), arXiv:1602.04782 [gr-qc].
- [25] S.M. Carroll, J.A. Harvey, V.A. Kostelecký, C.D. Lane, and T. Okamoto, “Noncommutative field theory and Lorentz violation,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001), arXiv:hep-th/0105082
- [26] M. Schreck, “From noncommutative spacetimes to Lorentz symmetry violation,” *Journal of Physics: Conference Series*, Volume 563.
- [27] C. Adam and F.R. Klinkhamer, “Causality and CPT violation from an Abelian Chern-Simons-like term,” *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001), hep-ph/0101087.
- [28] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, A.R. Gomes, and P.R.D. Pinheiro, “Gauge propagator and physical consistency of the CPT-even part of the standard model extension,” *Phys. Rev. D* **80**, 125040 (2009), arXiv:0909.0544 [hep-th].
- [29] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, A.R. Gomes, and F.E.P. dos Santos, “Feynman propagator for the nonbirefringent CPT-even electrodynamics of the standard model extension,” *Phys. Rev. D* **82**, 125006 (2010), arXiv:1010.2776 [hep-th].
- [30] F.R. Klinkhamer and M. Schreck, “Consistency of isotropic modified Maxwell theory: Microcausality and unitarity,” *Nucl. Phys. B* **848**, 90 (2011), arXiv:1011.4258 [hep-th], F.R. Klinkhamer and M. Schreck, “Models for low-energy Lorentz violation in the photon sector: Addendum to ‘Consistency of isotropic modified Maxwell theory’,” *Nucl. Phys. B* **856**, 666 (2012), arXiv:1110.4101 [hep-th].
- [31] M. Schreck, “Analysis of the consistency of parity-odd nonbirefringent modified Maxwell theory,” *Phys. Rev. D* **86**, 065038 (2012), arXiv:1111.4182 [hep-th].
- [32] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, and R.P.M. Moreira, “Consistency analysis of a nonbirefringent Lorentz-violating planar model,” *Eur. Phys. J. C* **72**, 2070 (2012), arXiv:1111.1222 [hep-th].

- [33] M.A. Hohensee, D.F. Phillips, and R.L. Walsworth, “Covariant quantization of Lorentz-violating electromagnetism,” arXiv:1210.2683 [quant-ph].
- [34] M. Cambiaso, R. Lehnert, and R. Potting, “Massive photons and Lorentz violation,” Phys. Rev. D **85**, 085023 (2012), arXiv:1201.3045 [hep-th].
- [35] M. Schreck, “Quantum field theory based on birefringent modified Maxwell theory,” Phys. Rev. D **89**, 085013 (2014), arXiv:1311.0032 [hep-th].
- [36] M. Schreck, “Quantum field theoretic properties of Lorentz-violating operators of nonrenormalizable dimension in the photon sector”, Phys. Rev. D **89**, 105019 (2014), arXiv:1312.4916 [hep-th].
- [37] R. Jackiw and V.A. Kostelecký, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics,” Phys. Rev. Lett. **82**, 3572 (1999), hep-ph/9901358.
- [38] J.-M. Chung, “Radiatively-induced Lorentz and CPT violating Chern-Simons term in QED,” Phys. Lett. B **461**, 138 (1999), hep-th/9905095.
- [39] M. Pérez-Victoria, “Exact calculation of the radiatively induced Lorentz and CPT violation in QED,” Phys. Rev. Lett. **83**, 2518 (1999), hep-th/9905061.
- [40] M. Pérez-Victoria, “Physical (ir)relevance of ambiguities to Lorentz and CPT violation in QED,” JHEP **0104**, 032 (2001), hep-th/0102021.
- [41] V.A. Kostelecký, C.D. Lane, and A.G.M. Pickering, “One-loop renormalization of Lorentz-violating electrodynamics,” Phys. Rev. D **65**, 056006 (2002), hep-th/0111123.
- [42] B. Altschul, “Failure of gauge invariance in the nonperturbative formulation of massless Lorentz-violating QED,” Phys. Rev. D **69**, 125009 (2004), hep-th/0311200.
- [43] B. Altschul, “Gauge invariance and the Pauli-Villars regulator in Lorentz- and CPT-violating electrodynamics,” Phys. Rev. D **70**, 101701(R) (2004), hep-th/0407172.

- [44] D. Colladay and P. McDonald, “One-loop renormalization of pure Yang-Mills theory with Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **75**, 105002 (2007), hep-ph/0609084.
- [45] D. Colladay and P. McDonald, “One-Loop renormalization of QCD with Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **77**, 085006 (2008), arXiv:0712.2055 [hep-ph].
- [46] D. Colladay and P. McDonald, “One-Loop renormalization of the electroweak sector with Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **79**, 125019 (2009), arXiv:0904.1219 [hep-ph].
- [47] M. Gomes, J.R. Nascimento, A.Y. Petrov, and A.J. da Silva, “Aetherlike Lorentz-breaking actions,” *Phys. Rev. D* **81**, 045018 (2010), arXiv:0911.3548 [hep-th].
- [48] A. Ferrero and B. Altschul, “Renormalization of scalar and Yukawa field theories with Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **84**, 065030 (2011), arXiv:1104.4778 [hep-th].
- [49] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, R.V. Maluf, and F.E.P. dos Santos, “Radiative generation of the CPT-even gauge term of the SME from a dimension-five nonminimal coupling term,” *Phys. Lett. B* **726**, 815 (2013), arXiv:1302.2375 [hep-th].
- [50] V.A. Kostelecký and R. Lehnert, “Stability, causality, and Lorentz and CPT violation,” *Phys. Rev. D* **63**, 065008 (2001), hep-th/0012060.
- [51] M.M. Ferreira Jr and F.M.O. Moucherek, “Influence of Lorentz- and CPT-violating terms on the Dirac equation,” *Int. J. Mod. Phys. A* **21**, 6211 (2006), hep-th/0601018.
- [52] R.C. Myers and M. Pospelov, “Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory,” *Phys. Rev. Lett.* **90** 211601 (2003).
- [53] O. Bertolami and J.G. Rosa, “Bounds on cubic Lorentz-violating terms in the fermionic dispersion relation,” *Phys. Rev. D* **71** 097901 (2005).

- [54] M. Schreck, “Quantum field theoretic properties of Lorentz-violating operators of nonrenormalizable dimension in the fermion sector,” *Phys. Rev. D* **90**, 085025 (2014), arXiv: 1403.6766 [hep-th].
- [55] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University press, UK, 2006).
- [56] V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields* (Princeton University press, UK, 1999).
- [57] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations* (Springer-Verlag, Germany, 2000).
- [58] N.A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Editora Livraria da Física, Brasil, 2007).
- [59] R. Gilmore, *Lie Groups, Physics and Geometry: An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists* (Cambridge University press, New York, 2008).
- [60] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particle* (Wiley-VCH, Place, Year).
- [61] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Perseus Books Publishing, L.L.C., Reading; Massachusetts, 1995).
- [62] Y. Nagashima and Y. Nambu, *Elementary Particle Physics: Quantum Field Theory and Particles* Vol. 1 (Wiley-VCH, Weinheim; Germany, 2010).
- [63] Figura disponível em: <http://abyss.uoregon.edu/~js/ast123/lectures/lec17.html>
- [64] Figura disponível em: https://www.google.com.br/imgres?imgurl=http%3A%2F%2Fwww.sexandquantumphysics.com%2Fwp-content%2Fuploads%2F2011%2F06%2Fvol2-02.jpg&imgrefurl=http%3A%2F%2Fwww.nanozine.org%2Fquantum-foam-theory.html&docid=Jx4hbiJn6SDNM&tbnid=bDrbWGXz8_0gbM%3A&vet=1&w=432&h=216&bih=950&biw=1920&q=Quantum-foam&ved=0ahUKEwj2yZ711bXSAhVFD5AKHZ-dCV8QMwhTKDAwMA&iact=mrc&uact=8&h=216&imgsrc=bDrbWGXz8_0gbM:&vet=1&w=432
- [65] O.W. Greenberg, “CPT violation implies violation of Lorentz invariance,” *Phys. Rev. Lett.* **89**, 231602 (2002), hep-ph/0201258.

- [66] R. Bluhm, N.L. Gagne, R. Potting, and A. Vrublevskis, “Constraints and stability in vector theories with spontaneous Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **77**, 125007 (2008) [Erratum-ibid. *D* **79**, 029902 (2009)], arXiv:0802.4071 [hep-th].
- [67] C.A. Hernaski, “Quantization and stability of bumblebee electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **90**, 124036 (2014), arXiv:1411.5321 [hep-th].
- [68] R. Bluhm, “Explicit versus spontaneous diffeomorphism breaking in gravity,” *Phys. Rev. D* **91**, 065034 (2015), arXiv:1401.4515 [gr-qc].
- [69] R.V. Maluf, C.A.S. Almeida, R. Casana, and M.M. Ferreira Jr, “Einstein-Hilbert graviton modes modified by the Lorentz-violating bumblebee field,” *Phys. Rev. D* **90**, 025007 (2014), arXiv:1402.3554 [hep-th].
- [70] V.A. Kostelecký and S. Samuel, *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989); V.A. Kostelecký and R. Potting, *Nucl. Phys. B* **359**, 545 (1991); *Phys. Rev. D* **51**, 3923 (1995).
- [71] R. Bluhm, V.A. Kostelecký and N. Russell, “CPT and Lorentz Tests in Hydrogen and Antihydrogen,” *Phys. Rev. Lett.* **82** 2254 (1999).
- [72] R. Bluhm, V.A. Kostelecký and N. Russell, “Testing CPT with Anomalous Magnetic Moments,” *Phys. Rev. Lett.* **79** 1432 (1997).
- [73] R. Bluhm, V.A. Kostelecký and C.D. Lane, “CPT and Lorentz Tests with Muons,” *Phys. Rev. Lett.* **84** 1098 (2000).
- [74] R. Bluhm and V.A. Kostelecký, “Lorentz and CPT Tests with Spin-Polarized Solids,” *Phys. Rev. D* **84** 1381 (2000)
- [75] N. Moeller and B. Zwiebach, *JHEP* **2010**, 34 (2002); arXiv:hep-th/0207107.
- [76] V.A. Kostelecký and N. Russell, “Data tables for Lorentz and CPT violation,” *Rev. Mod. Phys.* **83**, 11 (2011), arXiv:0801.0287 [hep-ph].
- [77] D. Colladay and V.A. Kostelecký, “Cross sections and Lorentz violation,” *Phys. Letters B* **511** 209 (2001).

- [78] J.A.A.S. Reis and M. Schreck, “Lorentz-violating modification of Dirac theory based on spin-nondegenerate operators,” *Phys. Rev. D* **95**, 075016 (2017), arXiv: 1612.06221[hep-th].
- [79] M. Schreck, “Classical kinematics for isotropic, minimal Lorentz-violating fermion operators,” *Phys. Rev. D* **91**, 105001 (2015), arXiv:1409.1539 [hep-th].