



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PPGMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

WILLIAM LUÍS LIMA PEREIRA

**EXISTÊNCIA de SOLUÇÃO para PROBLEMAS
ENVOLVENDO o OPERADOR p -LAPLACIANO**

São Luís - MA

2018

WILLIAM LUÍS LIMA PEREIRA

**EXISTÊNCIA de SOLUÇÃO para PROBLEMAS
ENVOLVENDO o OPERADOR p -LAPLACIANO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática
da Universidade Federal do Maranhão como
requisito parcial para obtenção do título de
Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Sandra Imaculada
Moreira Neto

São Luís - MA

2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Pereira, William Luís Lima.

Existência de solução para problemas envolvendo o
operador p-laplaciano / William Luís Lima Pereira. - 2018.
59 f.

Orientador(a): Sandra Imaculada Moreira Neto.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São
Luís, 2018.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Operador p-
laplaciano. 3. Teorema do Passo da Montanha. I. Moreira
Neto, Sandra Imaculada. II. Título.

WILLIAM LUÍS LIMA PEREIRA

**EXISTÊNCIA de SOLUÇÃO para PROBLEMAS
ENVOLVENDO o OPERADOR p -LAPLACIANO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática
da Universidade Federal da Maranhão como
requisito parcial para obtenção do título de
Mestre em Matemática, aprovada em 16 de
Julho de 2018.

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto (Orientadora)
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Rônei Sandro Vieira
Instituto Federal do Espírito Santo - IFES

*Aos meus pais, Yvana e Roberval
e à minha irmã Karla Raquel que
estiveram ao meu lado em todos os
momentos. Aos meus familiares e
amigos.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à Deus por ter me dado discernimento para fazer as escolhas corretas e colocar as pessoas certas no meu caminho para que eu não me desviasse dos meus objetivos.

À minha orientadora profa. Dra. Sandra Imaculada pela dedicação, empenho, ajuda e muita paciência que teve para comigo na construção e finalização deste trabalho. A todos os professores que muito contribuíram para a minha formação acadêmica e profissional, em especial, ao prof. Dr. Marcos Araújo, visto que, sem ele, talvez não estivesse concluindo mais esta etapa.

Aos professores que compuseram à banca, principalmente ao prof. Dr. Rônei Vieira, pelas valiosas correções que foram imprescindíveis para a finalização deste trabalho.

À minha família, que desde cedo me mostrou que o caminho para uma vida de sucesso é o conhecimento e o estudo, pois sem eles não se pode alcançar voos tão altos. E principalmente por me apoiar e incentivar a correr atrás dos meus sonhos e objetivos.

Aos meus amigos que durante esse tempo ficaram ao meu lado dando o apoio necessário e que foram indispensáveis para a minha formação acadêmica e pessoal, em especial, aos amigos Luiz Rocha, Rayana Gomes, Francisco Júnior, aos amigos que me acompanham desde a graduação como Andréia Tereza, Erica Reis e Zaqueu Guimarães, e aos amigos que me acompanharam no mestrado, Carla Santos, Daylanne Ribeiro, Felipe Ferreira e Márcio Gomes com quem dividi todos os momentos de decepções, tensão, angústia, mas principalmente, os de alegrias, brincadeiras e descontração, durante esses dois anos. E a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a minha formação, muito obrigado.

Finalmente, o meu agradecimento à Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão - FAPEMA - pelo apoio financeiro.

Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que a outra estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura.

(Hermann Hankel)

RESUMO

Neste trabalho, estabelecemos a existência de solução para uma classe de problemas envolvendo o operador p -laplaciano. Para isso, usamos resultados clássicos de Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais, a fim de aplicar o consagrado Teorema do Passo da Montanha.

Palavras-chave: Operador p -laplaciano, Equações Diferenciais Parciais, Teorema do Passo da Montanha.

ABSTRACT

In this work, we establish the existence of a solution to the class of problems involving the p -Laplacian operator. For this, we use classic results of Functional Analysis and Partial Differential Equations, in the order the established Mountain Pass Theorem.

Keywords: p -Laplacian operator, Partial Elliptic Differential, Mountain Pass Theorem.

NOTAÇÃO

Abaixo seguem todas as notações utilizadas neste trabalho.

- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o operador laplaciano da função u ;
- $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ denota o operador p-Laplaciano de uma função u ;
- $\|\nabla u\| = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ denota o gradiente da função u ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto de dualidade;
- $B_R(x)$ denota a bola aberta centrada em x e com raio R ;
- E^* representa o dual topológico do espaço de Banach E ;
- $\star$ representa $W^{-1, \frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$, o dual topológico de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$;
- $L^p(\mathbb{R}^N) = \left\{ f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável; } \int_{\mathbb{R}^N} |f|^p dx < +\infty \right\}$, $1 \leq p < \infty$, denota o espaço de Lebesgue;
- $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^N); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N), i = 1, \dots, n \right\}$ denota o espaço de Sobolev;
- $L_{loc}^p(\mathbb{R}^N) = \left\{ f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável; } \int_K |f|^p dx < +\infty \right\}$, onde $K \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto compacto e $1 \leq p < \infty$, denota o espaço das funções localmente integráveis;
- $C^1(\mathbb{R}^N)$ é o espaço das funções contínuas;
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto;
- Ω é o subconjunto limitado de $\mathbb{R}^N$;
- $\|\varsigma\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ denota a norma p em $\mathbb{R}^2$;
- $\|u\|_{0,p} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ é a norma da função u no espaço em $L^p(\mathbb{R}^N)$;

- $\|u\|_{1,p} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}}$ é a norma da função u no espaço $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$;
- $\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}}$ é uma norma equivalente da função u no espaço $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$;
- $\text{supp } v$ denota suporte da função v ;
- $(C)_c$ denota a condição de Cerami no nível c ;
- $\rightharpoonup$ denota a convergência fraca, quando $n \rightarrow \infty$;
- $\rightarrow$ denota a convergência forte, quando $n \rightarrow \infty$;
- $\hookrightarrow$ denota a imersão contínua;
- $\xhookrightarrow{c}$ denota a imersão compacta;
- I' representa a derivada de Gâteaux do funcional I ;
- $q.t.p.$ significa “quase todo ponto”;
- $p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & \text{se } N \geq p; \\ \infty, & \text{se } 1 \leq N \leq p \end{cases}$ denota o expoente crítico de Sobolev;
- $o_n(1)$ denota sequências que convergem a zero quando $n \rightarrow \infty$.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	13
2.1	Principais Resultados	13
2.2	Espaços de Sobolev	16
2.2.1	Imersões de Sobolev	16
2.2.2	Propriedades do Espaço de Sobolev	18
2.3	Funcionais Diferenciáveis	18
3	ESTUDO DO PROBLEMA (P)	20
3.1	Formulação Variacional	25
3.2	Existência de Solução	25
3.2.1	Geometria do Passo da Montanha	26
3.3	Resultado Principal	29
A	Formulação Fraca do Problema (P)	39
B	Estudo do Funcional Associado a (P)	41
	REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é estudar a solução de uma classe de problemas envolvendo o operador p -Laplaciano com potencial periódico e não linearidade subcrítica via teorema do Passo da Montanha, versão de Cerami. Assim, estudaremos a solução proposta no artigo de Gongbao Li e Chunhua Wang [20] para o seguinte problema em $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2} = h(u), & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (P)$$

onde $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, $1 < p < N$ é o operador p -Laplaciano, $V(x)$ é um potencial periódico Hölder localmente contínuo, limitado e h é uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, superlinear e subcrítica, como veremos no capítulo 3.

É bem conhecido que o caso quasilinear $p > 1$ surge em muitas aplicações nas áreas da Matemática Aplicada, Física e Mecânica como, por exemplo, na teoria de elasticidade não-linear, no processamento de imagem, fluídos não-newtonianos, fluídos pseudo-plásticos, e em algumas reações de difusão, conforme pode ser visto em [2] e [18].

Usaremos o método variacional que consiste em associar um funcional energia ao problema (P) e encontrar seus pontos críticos. Para isso, precisamos assegurar a limitação das sequências de Cerami desse funcional. Um modo de fazer isso, em muitos dos trabalhos sobre equações elípticas, é assumir a condição superlinear de Ambrosetti e Rabinowitz (AR): existe uma constante $\theta > 0$ tal que

$$0 < (p + \theta)F(x, t) \leq t f(x, t),$$

com $t \neq 0, x \in \mathbb{R}^N$ e $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$. No entanto, essa condição é muito restritiva e elimina muitas não linearidades interessantes e importantes. Ao longo dos anos, muitos autores utilizaram diversas estratégias para desenvolver resultados de existência de soluções para problemas de não linearidade tentando eliminar a condição (AR) como, por exemplo, no artigo [6], os autores usaram a condição:

$$f(s)s - pF(s) \geq a|s|^\mu > 0, \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Para este trabalho, tivemos auxílio para as realizações dos cálculos as dissertações de [2], [3], [17] e [18] e as teses de [9], [13] e [19], assim como foram modelo e base para a estrutura e organização do mesmo. O trabalho está dividido da seguinte forma:

No **Capítulo 2**, apresentamos alguns resultados preliminares que serão imprescindíveis para o entendimento e dinâmica deste trabalho. Com o propósito de deixar a leitura do texto mais agradável, apenas enunciamos os resultados, com suas respectivas referências para possíveis consultas das demonstrações. Nesse capítulo enfatizamos três resultados clássicos que serão recorrentes em quase todo o trabalho, a saber, a Desigualdade de Hölder, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e as Imersões de Sobolev.

No **Capítulo 3**, iniciamos com a formulação fraca do problema $((P))$, em seguida apresentamos a Geometria do Passo da Montanha, em que mostramos, primeiro, que qualquer sequência de Cerami associada ao funcional I é limitada. Finalizamos este capítulo, apresentando o principal resultado desse trabalho, ou seja, a garantia da existência de solução para o problema (P) , sob as condições de V e h . As principais dificuldades em mostrar esse resultado se dão em virtude da função h não satisfazer a tradicional condição de Ambrosetti-Rabinowitz (AR) (por isso precisamos usar o Teorema do Passo da Montanha na versão de Cerami), e da perda da compacidade, pois estamos estudando problemas em $\mathbb{R}^N$. Para contornar esta última dificuldade usamos uma adaptação do Lema de Lions [7].

E por fim, temos o apêndice, que se encontra dividido em duas seções. No **Apêndice A**, mostramos com mais detalhes a obtenção da formulação fraca da classe do problema (P) . No **Apêndice B**, é feito o estudo do funcional associado a esse problema.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo elencamos algumas definições e resultados essenciais para o desenvolvimento e entendimento deste trabalho.

2.1 Principais Resultados

Definição 2.1. Uma função $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente $\alpha, 0 < \alpha < 1$, se existe $C > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$,

$$|f(x) - f(y)| < C|x - y|^\alpha.$$

Teorema 2.1. (Teorema do Valor Médio de Lagrange - [11], pág. 123) Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^N$. Suponhamos que o segmento de reta $[a, a + v] = \{a + tv; 0 \leq t \leq 1\}$ esteja contido em U , que a restrição $f|_{[a, a+v]}$ seja contínua e que exista a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$, segundo v , em todo ponto $x \in (a, a + v)$. Então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$f(a + v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v).$$

Teorema 2.2. (Regra da Cadeia - [11], pág. 256) Sejam $U \subset \mathbb{R}^M, V \subset \mathbb{R}^N$ abertos, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ diferenciável no ponto a , com $f(U) \subset V$, e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^P$, diferenciável no ponto $f(a)$. Então $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^P$ é derivável no ponto a , com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^P$.

Definição 2.2. Seja E um espaço vetorial real. Suponha que esteja definida em E uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

- (i) $\|u\| \geq 0$, para todo $u \in E$ e $\|u\| = 0$ se, e somente se, $u = 0$;
- (ii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$, para todo $u \in E$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, para todo $u, v \in E$.

Nestas condições a função $\|\cdot\|$ é chamada de norma e $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço normado.

A seguir apresentamos as definições segundo [14] sobre equivalência das normas, Espaço de Banach e dual de um espaço normado.

Definição 2.3. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço E são equivalentes, se existem $\alpha, \beta > 0$ tal que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \text{ para todo } x \in E.$$

Observação 2.1. As normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes se, e somente se, a aplicação identidade de $(E, \|\cdot\|_1)$ em $(E, \|\cdot\|_2)$ é um isomorfismo isométrico.

Definição 2.4. Seja E um espaço vetorial normado. Dessa forma, dizemos que E é um espaço de Banach, quando E é completo.

Definição 2.5. Seja E um espaço normado. Definimos por E^* , o espaço dual de E . Os elementos de E^* são chamados funcionais lineares. Se $\lambda \in E^*$ então,

$$\|\lambda\|_{E^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \lambda(x).$$

Teorema 2.3. (Corolário 1.2 - [5], pág. 03) Seja $G \subset E$ um subespaço linear. Se $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional contínuo e linear, então existe $f \in E^*$ que estende g e tal que

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |g(x)| = \|g\|_{G^*} \text{ para todo } x \in G.$$

Definição 2.6. Seja E um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset E$ converge fracamente para $u \in E$, escrevendo $u_n \rightharpoonup u$, se $\langle u^*, u_n \rangle \rightarrow \langle u^*, u \rangle$ para cada funcional linear limitado $u^* \in E^*$.

Teorema 2.4. (Proposição 3.5, (iii) - [5], pág. 58) Sejam E um espaço de Banach e (u_n) uma sequência em E . Se $u_n \rightharpoonup u$ na topologia fraca de E , então $(\|u_n\|)$ é limitada e temos que

$$\|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|.$$

Teorema 2.5. (Teorema 3.18 - [5], pág. 69) Sejam E um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em E , então existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge na topologia fraca de E .

Teorema 2.6. (Lema de Lions - [9], pág. 116) Seja $r > 0$ e $p \leq s < p^*$. Se (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e se

$$\sup \int_{B(y,r)} |u_n|^s dx \rightarrow 0,$$

então $u_n \rightarrow 0$ em $L^t(\mathbb{R}^N)$ para $p < t < p^*$.

Definição 2.7. *Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço L^p consiste de todas as classes de equivalência $[f]$ tal que $\int |f|^p d\mu < \infty$, cuja norma é definida por $\|f\|_{0,p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$.*

Teorema 2.7. (Desigualdade de Minkowski - [4], pág. 57) *Seja $f, g \in L^p$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

$$\|f + g\|_{0,p} \leq \|f\|_{0,p} + \|g\|_{0,p}.$$

A combinação entre os três próximos teoremas são os resultados mais utilizados no decorrer deste trabalho e essenciais em várias demonstrações.

Teorema 2.8. (Desigualdade de Hölder - [5], pág. 92) *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{0,p} \|g\|_{0,q}.$$

Teorema 2.9. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue - [5], pág. 90) *Seja (f_n) uma sequência de funções em L^1 que satisfaz:*

- (i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω ;
 - (ii) *Existe uma função $g \in L^1$ tal que para todo n , $|f_n(x)| \leq g(x)$, q.t.p. em Ω .*
- Então $f \in L^1$ e $\|f_n - f\|_{0,1} \rightarrow 0$.*

Teorema 2.10. (Teorema 4.9 - [5], pág. 94) *Seja (f_n) uma sequência de funções em L^p e seja $f \in L^p$ tal que $\|f_n - f\|_{0,p} \rightarrow 0$. Então existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p$ tal que:*

- (i) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω ;
- (ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, q.t.p. em Ω .

Definição 2.8. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e Ω um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^N$. Dizemos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em $L^p(\Omega)$, e denotamos por $f \in L_{loc}^p(\Omega)$, se f é uma função mensurável e para qualquer compacto $K \subset \Omega$*

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty.$$

Teorema 2.11. (Proposição 1.8 - [10], pág. 03) *Seja $1 \leq p < q \leq \infty$. Então $L_{loc}^q(\Omega) \subset L_{loc}^p(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.*

2.2 Espaços de Sobolev

Definição 2.9. *Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o Espaço de Sobolev de ordem 1 em $\mathbb{R}^N$ por,*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^N); \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N), i = 1, \dots, n \right\}, \quad (2.1)$$

onde para cada $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ denota a derivada fraca de u , isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

2.2.1 Imersões de Sobolev

Antes de enunciarmos os teoremas das imersões contínuas e compactas de Sobolev, necessitamos primeiramente definir o que vem ser uma imersão contínua e uma imersão compacta. Sendo assim, de [16], segue suas respectivas definições:

Definição 2.10. *Sejam E e F espaços de Banach, com $E \subset F$ e $i : E \rightarrow F$ a injeção canônica de E em F , que a cada elemento $x \in E$ fazemos corresponder $i(x) = x$ como elemento de F . Dizemos que a imersão de E em F é contínua quando existe uma constante $C > 0$, tal que $\|x\|_F \leq C\|x\|_E$, para todo $x \in E$.*

Definição 2.11. *Sejam E e F espaços de Banach, com $E \subset F$. Dizemos que E está compactamente imerso em F se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) *Existe uma constante $C > 0$, tal que $\|x\|_F \leq C\|x\|_E$, para todo $x \in E$.*
- (ii) *Qualquer sequência limitada em E é pré-compacta em F .*

As imersões contínuas e compactas de E em F são denotadas, respectivamente, por $E \hookrightarrow F$ e $E \xhookrightarrow{c} F$.

Agora enunciaremos os teoremas sobre imersões contínuas e, em seguida, o Teorema das Imersões Compactas, de acordo com [5].

Teorema 2.12. (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg - [5], pág. 278) *Seja $1 \leq p < N$. Então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N), \text{ onde } p^* \text{ é dado por } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

e existe uma constante $C = C(p, N)$ tal que

$$\|u\|_{0,p^*} \leq C \|\nabla u\|_{0,p} \text{ para todo } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Corolário 2.1. (Corolário 9.10 - [5], pág. 281) *Seja $1 \leq p < N$. Então,*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \text{ para todo } q \in [p, p^*]$$

com imersão contínua.

Corolário 2.2. (Corolário 9.11 - [5], pág. 281) *Seja $p = N$. Então,*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \text{ para todo } q \in [N, \infty)$$

com imersão contínua.

Teorema 2.13. (Morrey - [5], pág. 278) *Seja $p > N$. Então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

com imersão contínua. Além disso, para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$|u(x)u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_{0,p} \text{ q.t.p. } x, y \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ e C é uma constante (dependendo somente de p e N).

Teorema 2.14. (Rellich–Kondrachov - [5], pág. 285) *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja limitado e de classe C^1 . Então as seguintes imersões são compactas:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega), & \text{para todo } q \in [p, p^*), \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \text{ se } p < N; \\ W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega), & \text{para todo } q \in [p, +\infty), \text{ se } p = N; \\ W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C(\overline{\Omega}), & \text{se } p > N. \end{array} \right.$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^p(\Omega)$ com a imersão compacta para todo p (e para todo N).

2.2.2 Propriedades do Espaço de Sobolev

Os espaços de Sobolev gozam de algumas propriedades que são essenciais para a demonstrações de alguns resultados nos próximos capítulos.

Teorema 2.15. (Teorema 3.2 - [1], pág. 45) $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach.

Teorema 2.16. (Teorema 3.5 - [1], pág. 47) $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é separável, se $1 \leq p < \infty$ e é reflexivo e uniformemente convexo se $1 < p < \infty$.

Teorema 2.17. (Teorema 2.2.1 - [12], pág. 47) $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

2.3 Funcionais Diferenciáveis

Os resultados a seguir serão utilizados para provar que o funcional energia I , associado ao problema, é de classe C^1 , encontrado no apêndice B.

Definição 2.12. Seja $I : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach E . O funcional I é Gâteaux diferenciável, com $f \in E'$ em $u \in U$ se, para todo $h \in E$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [I(u + th) - I(u) - \langle f, th \rangle] = 0$$

A derivada de Gâteaux em u é denotado por $I'(u)$.

Definição 2.13. Seja $I : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach E . O funcional I é Fréchet diferenciável, com $f \in E'$ em U se,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} [I(u + h) - I(u) - \langle f, h \rangle] = 0.$$

Teorema 2.18. (Proposição A.1 - [15], pág. 48) Se I tem derivada de Gâteaux contínua em E então $I \in C^1(E, \mathbb{R})$.

Teorema 2.19. (Lema 2.24 - [1], pág. 34) Se $p \in [1, \infty)$ e $a, b \geq 0$, então:

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Teorema 2.20. (Lema A.1 - [18], pág. 95) Para todo $y, z \in \mathbb{R}^N$ e $\beta, \bar{\beta} \in \mathbb{R}$ temos:

(i) Se $p \in [2, \infty)$, então vale:

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq \beta|z - y|(|z| + |y|)^{p-2};$$

(ii) Se $p \in (1, 2]$, então vale:

$$\left| |z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y \right| \leq \bar{\beta} |z - y|^{p-1}.$$

3 ESTUDO DO PROBLEMA (P)

Neste capítulo, investigaremos a existência de solução de uma equação envolvendo o operador p-Laplaciano com crescimento subcrítico. Mais precisamente, estudaremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2} = h(u), & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (P)$$

em que $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Hölder localmente contínua, limitada que satisfaz:

(V₁) *existe $\alpha \geq 0$ tal que $V(x) \geq \alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$;*

(V₂) *$V(x) = V(x + y)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{Z}^N$.*

A função $h(t) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ satisfaz as seguintes condições:

(H₁) *$h(t) = 0$ para todo $t \leq 0$;*

(H₂) $\lim_{|t| \rightarrow 0^+} \frac{h(t)}{|t|^{p-2}t} = 0$;

(H₃) *Existe $C > 0$ e $q \in (p, p^*)$ tal que*

$$|h(t)| \leq C(|t|^{p-1} + |t|^{q-1}), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}^+;$$

(H₄) $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{H(t)}{|t|^p} = +\infty$, $H(t) = \int_0^t h(s)ds$;

(H₅) *Para $\alpha > 0$ dado por (V₁) existe $L > p$ e $\sigma \in (0, (\frac{L}{p} - 1)\alpha)$, tal que*

$$th(t) - LH(t) \geq -\sigma|t|^p, \text{ para todo } t \neq 0.$$

Observamos que das hipóteses (H₂) e (H₃) temos que para algum $\delta > 0$, existe C_δ tal que:

$$|H(t)| \leq \delta|t|^p + C_\delta|t|^q \text{ para todo } t \in \mathbb{R}^+. \quad (3.1)$$

Um exemplo de função que satisfaz as hipóteses acima é dada por $h(t) = t^{q-1}$, com $q \in (p, p^*)$.

Vale ressaltar que a função $f(t) = t^{q-1} + \epsilon(1 + \cos t)t^{r-1}$, com $L < q < p^* \leq r$ satisfaz (H₅) mas não satisfaz a condição (AR).

Proposição 3.1. $\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}}$ é norma em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: De fato, para cada $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ temos $\|u\| \geq 0$ e

$$\begin{aligned} \|u\| = 0 &\Leftrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ &\Leftrightarrow |\nabla u|^p + V(x)|u|^p = 0 \text{ q.t.p.} \end{aligned}$$

Como por (V_1) , $V(x) > 0$, segue que $|\nabla u|^p = 0$ e $|u|^p = 0$ q.t.p.

Logo,

$$u = 0 \text{ q.t.p.} \quad (3.2)$$

Seja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|^p &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(\lambda u)|^p + V(x)|\lambda u|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda^p |\nabla u|^p + V(x)\lambda^p |u|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \lambda^p (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lambda \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lambda \|u\|. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Agora, sejam $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então pela desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned} \|u + v\|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(u + v)|^p + V(x)|u + v|^p) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u + \nabla v|^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u + v|^p dx \\ &= \|\nabla u + \nabla v\|_{0,p}^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u + v|^p dx \\ &\leq (\|\nabla u\|_{0,p} + \|\nabla v\|_{0,p})^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u + v|^p dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

Observamos que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u + v|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u + v| \cdot |u + v|^{p-1} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u + v|^{p-1} \cdot (|u| + |v|) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u + v|^{p-1}|u| dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u + v|^{p-1}|v| dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Tomando $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ temos $(p-1)q = p$, e assim $|u+v|^{p-1} \in L^q(\mathbb{R}^N)$.

De fato,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u+v|^{p-1})^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u+v|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Notamos também que podemos reescrever $V(x)$ como o produto de $V(x)^{\frac{1}{p}}$ e $V(x)^{\frac{1}{q}}$, isto é:

$$V(x) = V(x)^{\frac{1}{p}} \cdot V(x)^{\frac{1}{q}}.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder em cada uma das parcelas do segundo membro de (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u+v|^{p-1} |u| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} V(x)^{\frac{1}{p}} |u| V(x)^{\frac{1}{q}} |u+v|^{p-1} dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (V(x)^{\frac{1}{p}} |u|)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} (V(x)^{\frac{1}{q}} |u+v|^{p-1})^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u+v|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u+v|^{p-1} |v| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} V(x)^{\frac{1}{p}} |v| V(x)^{\frac{1}{q}} |u+v|^{p-1} dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (V(x)^{\frac{1}{p}} |v|)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} (V(x)^{\frac{1}{q}} |u+v|^{p-1})^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u+v|^p dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Somando (3.6) e (3.7), e substituindo em (3.5) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u+v|^p dx \\ &\leq \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u+v|^p dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Agora, dividindo ambos os membros de (3.8) por $\left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u+v|^p dx \right)^{\frac{1}{q}}$ vem que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u+v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u+v|^p dx \leq \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p. \quad (3.9)$$

Substituindo (3.9) em (3.4), obtemos

$$\|u+v\|^p \leq (\|\nabla u\|_{0,p} + \|\nabla v\|_{0,p})^p + \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p. \quad (3.10)$$

Para facilitar os cálculos e a fim de simplificar a notação, vamos chamar

$$\bar{V}_u = \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ e } \bar{V}_v = \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Consideremos $a = (\|\nabla u\|_{0,p}, \bar{V}_u)$ e $b = (\|\nabla v\|_{0,p}, \bar{V}_v)$, onde $a, b \in \mathbb{R}^2$ munido da norma p em $\mathbb{R}^2$, isto é, se $\varsigma = (x, y)$, então $\|\varsigma\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Notamos o seguinte:

$$\begin{aligned} \|a+b\|_p &= \|(\|\nabla u\|_{0,p}, \bar{V}_u) + (\|\nabla v\|_{0,p}, \bar{V}_v)\|_p \\ &= \|(\|\nabla u\|_{0,p} + \|\nabla v\|_{0,p}, \bar{V}_u + \bar{V}_v)\|_p \\ &= \left(\|\nabla u\|_{0,p}^p + \|\nabla v\|_{0,p}^p + |\bar{V}_u + \bar{V}_v|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aplicando a desigualdade de Minkowski em (3.11), temos

$$\begin{aligned} \|a+b\|_p &\leq \|a\|_p + \|b\|_p \\ &= \|(\|\nabla u\|_{0,p}, \bar{V}_u)\|_p + \|(\|\nabla v\|_{0,p}, \bar{V}_v)\|_p \\ &= (\|\nabla u\|_{0,p}^p + |\bar{V}_u|^p)^{\frac{1}{p}} + (\|\nabla v\|_{0,p}^p + |\bar{V}_v|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\|\nabla u\|_{0,p}^p + \bar{V}_u^p)^{\frac{1}{p}} + (\|\nabla v\|_{0,p}^p + \bar{V}_v^p)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Usando (3.12), (3.11), e elevando ambos os membros a p , obtemos

$$\begin{aligned} &(\|\nabla u\|_{0,p} + \|\nabla v\|_{0,p})^p + (\bar{V}_u + \bar{V}_v)^p \\ &\leq \left[(\|\nabla u\|_{0,p}^p + \bar{V}_u^p)^{\frac{1}{p}} + (\|\nabla v\|_{0,p}^p + \bar{V}_v^p)^{\frac{1}{p}} \right]^p. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Desta forma, de (3.10) e (3.13), temos

$$\begin{aligned} \|u+v\|^p &\leq \left[(\|\nabla u\|_{0,p}^p + \bar{V}_u^p)^{\frac{1}{p}} + (\|\nabla v\|_{0,p}^p + \bar{V}_v^p)^{\frac{1}{p}} \right]^p \\ &= \left[\left(\|\nabla u\|_{0,p}^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\|\nabla v\|_{0,p}^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \\ &= (\|u\| + \|v\|)^p, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad (3.14)$$

Portanto, de (3.2), (3.3) e (3.14) segue que $\|\cdot\|$ é uma norma em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Sabemos que a norma em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é equivalente a

$$\|u\|^p = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx,$$

pois, da definição de norma em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e da hipótese (V_1) temos,

$$\begin{aligned} \|u\|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + \alpha|u|^p) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \alpha|u|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \alpha \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \\ &= \|\nabla u\|_{0,p}^p + \alpha \|u\|_{0,p}^p. \end{aligned}$$

Tomando $K_1 = \min\{1, \alpha\}$ obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|^p &\geq K_1 (\|\nabla u\|_{0,p}^p + \|u\|_{0,p}^p) \\ &= K_1 \|u\|_{1,p}^p. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|u\| \geq K_2 \|u\|_{1,p}, \quad (3.15)$$

onde $K_2 = K_1^{\frac{1}{p}}$ é uma constante que independe de u .

Novamente pela definição de norma em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e agora pela limitação de $V(x)$ temos,

$$\begin{aligned} \|u\|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \sup V(x) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \\ &= \|\nabla u\|_{0,p}^p + \sup V(x) \|u\|_{0,p}^p. \end{aligned}$$

Tomando $K_3 = \max\{1, \sup V(x)\}$ obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|^p &\leq K_3 (\|\nabla u\|_{0,p}^p + \|u\|_{0,p}^p) \\ &= K_3 \|u\|_{1,p}^p. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|u\| \leq K_4 \|u\|_{1,p}, \quad (3.16)$$

onde $K_4 = K_3^{\frac{1}{p}} > 0$ é uma constante que independe de u .

Portanto, de (3.15) e (3.16) segue a equivalência das normas.

3.1 Formulação Variacional

O principal objetivo desta seção é garantir a existência de solução fraca para o problema (P) . Para isso, fazemos a seguinte definição.

Definição 3.1. Dizemos que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca de (P) se

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + V(x)|u|^{p-2} uv) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(u)v \, dx = 0 \quad (3.17)$$

para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

A equação (3.17) é chamada formulação fraca do problema (P) . Veja o apêndice A para maiores detalhes.

Seguindo o método variacional, associamos ao problema (P) o seguinte funcional $I : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(u) \, dx, \quad (3.18)$$

em que $H(u) = \int_0^u h(s) \, ds$.

Além disso, temos que $I \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e sua derivada de Gâteaux é dada por:

$$\langle I'(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + V(x)|u|^{p-2} uv) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(u)v \, dx, \quad (3.19)$$

para todo $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (veja os detalhes no Apêndice B).

Portanto, cada ponto crítico de I é uma solução fraca do problema (P) .

3.2 Existência de Solução

Definição 3.2. Seja $(E, \|\cdot\|_E)$ um espaço de Banach com seu espaço dual $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Para $c \in \mathbb{R}$, dizemos que I satisfaz a condição de Cerami no nível c ,

denotado por $(C)_c$, se para alguma sequência $(u_n) \subset E$, quando $n \rightarrow \infty$, com

$$\begin{aligned} I(u_n) &\rightarrow c, \\ \|I'(u_n)\|_{E^*}(1 + \|u_n\|_E) &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

existe uma subsequência que converge fortemente em E . A sequência (u_n) acima é chamada sequência de Cerami.

Tendo o conhecimento da definição acima, o resultado de existência de solução será obtido por base na versão do Teorema do Passo da Montanha, que garante a existência de uma sequência de Cerami a nível do passo da montanha. O teorema a seguir pode ser visto em [6]. Para maiores detalhes sobre o Teorema do Passo da Montanha, veja [21].

Teorema 3.1. *Seja E um espaço de Banach real e suponha que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaça a condição*

$$\max\{I(0), I(d)\} \leq \alpha < \beta \leq \inf_{\|u\|=r} I(u), \quad (3.21)$$

para algum $\alpha < \beta, \rho > 0$ e $d \in E$ com $\|d\|_E > \rho$. Seja $c \geq \beta$ caracterizada por:

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)), \quad (3.22)$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C^0([0, 1], E), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = d\}$ é o conjunto de caminhos contínuos ligando 0 e d . Então, existe uma sequência de Cerami de I com o nível do passo da montanha $c \geq \beta$.

3.2.1 Geometria do Passo da Montanha

Lema 3.1. *Assumindo que V e h satisfaçam (V_1) e $(H_1) - (H_5)$, respectivamente, então qualquer sequência de Cerami $\{u_n\}$ associada ao funcional I é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Seja L dado em (H_5) , assim $LI(u_n)$ e $\langle I'(u_n), u_n \rangle$ são, tais que:

$$\begin{aligned} LI(u_n) &= L \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p} |\nabla u_n|^p + V(x) |u_n|^p \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(u_n) dx \right) \\ &= \frac{L}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + V(x) |u_n|^p) dx - L \int_{\mathbb{R}^N} H(u_n) dx \end{aligned} \quad (3.23)$$

e

$$\begin{aligned} \langle I'(u_n), u_n \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u_n + V(x) |u_n|^{p-2} u_n u_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(u_n) u_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + V(x) |u_n|^p) dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(u_n) u_n dx. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Subtraindo (3.23) de (3.24) e usando (H_5) , obtemos:

$$\begin{aligned}
LI(u_n) - \langle I'(u_n), u_n \rangle &= \left(\frac{L}{p} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + V(x)|u_n|^p) dx - L \int_{\mathbb{R}^N} H(u_n) u_n dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} h(u_n) u_n dx \\
&= \left(\frac{L}{p} - 1 \right) \|u_n\|^p + \int_{\mathbb{R}^N} (h(u_n) u_n - LH(u_n)) dx \\
&\geq \left(\frac{L}{p} - 1 \right) \|u_n\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} \sigma |u_n|^p dx \\
&= \left(\frac{L}{p} - 1 \right) \|u_n\|^p - \sigma \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Como $V(x) \geq \alpha > 0$, decorre que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^p dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^p dx \\
&\geq \alpha \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$- \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx \geq -\frac{1}{\alpha} \|u_n\|^p. \tag{3.26}$$

Substituindo (3.26) em (3.25), vem que:

$$\begin{aligned}
LI(u_n) - \langle I'(u_n), u_n \rangle &\geq \left(\frac{L}{p} - 1 \right) \|u_n\|^p - \frac{\sigma}{\alpha} \|u_n\|^p \\
&= \left(\frac{L}{p} - 1 - \frac{\sigma}{\alpha} \right) \|u_n\|^p.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Seja (u_n) uma sequência de Cerami, o que implica, pela Definição 3.2, que $I(u_n) = c + o_n(1)$ e $\|I'(u_n)\|_*(1 + \|u_n\|) = o_n(1)$. Dessa forma:

$$LI(u_n) - \langle I'(u_n), u_n \rangle \leq Lc + o_n(1), \tag{3.28}$$

tomemos $C_2 = Lc + o_n(1)$.

Assim, de (3.27) e (3.28), temos que $LI(u_n) - \langle I'(u_n), u_n \rangle$ é limitada. Desta forma, tomando $\left(\frac{L}{p} - 1 - \frac{\sigma}{\alpha} \right) = C_1$, temos que:

$$C_2 \geq LI(u_n) - \langle I'(u_n), u_n \rangle \geq C_1 \|u_n\|^p$$

o que implica

$$C_2 \geq C_1 \|u_n\|^p.$$

Logo,

$$\|u_n\|^p \leq \frac{C_2}{C_1}$$

Portanto, (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Lema 3.2. *Suponha que V e h satisfaçam (V_1) e $(H_1) - (H_4)$, respectivamente. Então, I possui a geometria do Passo da Montanha.*

Demonstração: De (3.1), temos que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx \\ &\geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} (\delta |u|^p + C_\delta |u|^q) dx \\ &\geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \delta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx - C_\delta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev (Corolário 2.1) temos $\|u\|_{0,p} \leq C \|\nabla u\|_{0,p}$ e $\|u\|_{0,q} \leq C \|\nabla u\|_{0,p}$. Assim, por (V_1) , temos:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C_1 \|u\|. \end{aligned} \quad (3.30)$$

e

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} &\leq C_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C_2 \|u\|. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Daí, tomando $C_1^p = \alpha$ e $C_2^q = \beta$, em seguida, somando (3.30) e (3.31), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \leq \alpha \|u\|^p + \beta \|u\|^q. \quad (3.32)$$

Multiplicando (3.32) por (-1) e substituindo em (3.29) vem que:

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \alpha \delta \|u\|^p - \beta C_\delta \|u\|^q \\ &= \|u\|^p \left[\left(\frac{1}{p} - \alpha \delta \right) - \beta C_\delta \|u\|^{q-p} \right]. \end{aligned}$$

Escolhendo $0 < \delta < \frac{1}{p\alpha}$, existem dois números positivos ρ e b tais que:

$$\rho = \|u\| \quad \text{e} \quad b = \left(\frac{1}{p} - \alpha\delta\right)\rho^p - \beta C_\delta \rho^q$$

satisfazendo

$$b = \inf_{\|u\|=\rho} I(u) > I(0) = 0.$$

Por (H_4) , para algum $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{I(tv)}{|t|^p} &= \lim_{|t| \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{|t|^p} \left(\frac{1}{p} \|tv\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} H(tu) \, dx \right) \right] \\ &= \lim_{|t| \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{p} \frac{|t|^p \|v\|^p}{|t|^p} - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{H(tv)}{|t|^p} \, dx \right] \\ &= \lim_{|t| \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{p} \|v\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{H(tv)}{|t|^p} \, dx \right] \\ &= \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{1}{p} - \lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{H(tv)}{|t|^p |v|^p} |v|^p \, dx \\ &= \frac{1}{p} - \lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{H(tv)}{|tv|^p} |v|^p \, dx, \end{aligned}$$

logo $\frac{I(tv)}{|t|^p} \rightarrow -\infty$, quando $|t| \rightarrow +\infty$.

Portanto, existe $d = tv$ satisfazendo $\|d\| > \rho$ e $I(d) < 0 = I(0)$, para $|t|$ suficientemente grande. $\square$

3.3 Resultado Principal

Teorema 3.2. *Assumindo que V e h satisfazem $(V_1), (V_2)$ e $(H_1) - (H_5)$, respectivamente. Então (P) tem solução positiva tal que*

$$\|u\|^p \leq \frac{Lp c \alpha}{L\alpha - p\alpha - p\sigma}$$

onde α e σ são dados por (V_1) e (H_5) , respectivamente e c é o nível minimax associado a (P) .

Demonstração: Como, pelo Lema 3.2, o funcional I satisfaz a geometria do Passo da Montanha, temos, pelo Teorema 3.1, que existe uma sequência de Cerami. Suponhamos que $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ seja essa sequência.

Pelo Lema 3.1, (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e como $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, pelo Teorema 2.5, podemos extrair uma subsequência, que ainda denotaremos por (u_n) , tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para algum $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos pelo Teorema das Imersões Compactas de Sobolev, que para todo $q \in [1, p^*)$, $W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado. Logo, $u_n \rightarrow u$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [1, p^*)$ e assim, pelo Teorema 2.11, $u_n \rightarrow u$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$. A menos de subsequência e pelo Teorema 2.10, existem funções $f(x), g(x) \in L^p(\mathcal{F})$ onde $\mathcal{F} : \text{supp } v$, tal que:

$$\nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x) \text{ q.t.p. em } \mathcal{F} \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (3.33)$$

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathcal{F}, \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (3.34)$$

e

$$|\nabla u_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p. em } \mathcal{F}. \quad (3.35)$$

$$|u_n(x)| \leq f(x) \text{ q.t.p. em } \mathcal{F}. \quad (3.36)$$

Daí, por (3.33) e (3.34) obtemos,

$$|\nabla u_n(x)| \rightarrow |\nabla u(x)| \text{ q.t.p. em } \mathcal{F}. \quad (3.37)$$

e

$$|u_n(x)| \rightarrow |u(x)| \text{ q.t.p. em } \mathcal{F}. \quad (3.38)$$

Consideremos $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e observemos que

$$\begin{aligned} \langle I'(u_n) - I'(u), v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla v \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v \, dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (h(u_n) - h(u)) v \, dx. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para analisarmos as convergências faremos as seguinte desigualdades:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} |(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla v| \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} ||\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u| |\nabla v| \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} (||\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n| + ||\nabla u|^{p-2} \nabla u|) |\nabla v| \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}) |\nabla v| \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}) |\nabla v| \, dx. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Observe que $(|\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. De fato, se $|\nabla u_n|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$ e $|\nabla u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$ temos, respectivamente,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty$$

e

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty.$$

Como $L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço vetorial normado, segue que $(|\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. Logo, $(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$.

Desta forma, podemos aplicar a desigualdade de Hölder em (3.40) e assim,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} |(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla v| \, dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} ||\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u|^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= ||\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u||_{0, \frac{p}{p-1}} \cdot ||\nabla v||_{0, p}.
\end{aligned}$$

Combinando (3.33) e (3.37), obtemos

$$(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \rightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \mathcal{F}. \tag{3.41}$$

Como $||\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u| \leq (|\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1})$ segue de (3.35) que

$$||\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u| \leq g(x)^{p-1} + |\nabla u|^{p-1},$$

assim

$$\begin{aligned}
||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}} &\leq (g(x)^{p-1} + |\nabla u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq 2^{(\frac{p}{p-1}-1)}(g(x)^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}} + |\nabla u|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}}) \\
&= 2^{\frac{1}{p-1}}(g(x)^p + |\nabla u|^p) \\
&\leq C(g(x)^p + |\nabla u|^p).
\end{aligned}$$

Daí,

$$||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}} \leq C(g(x)^p + |\nabla u|^p) \in L^1(\mathcal{F}). \quad (3.42)$$

Desta forma, a partir de (3.41) e (3.42) podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada, logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla v \, dx \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.43)$$

Do fato de $V(x)$ ser limitado, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |V(x)(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)v| \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\sup V(x)(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)v| \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\sup V(x)(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)||v| \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\sup V(x)(|u_n|^{p-2}|u_n| + |u|^{p-2}|u|)|v| \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\sup V(x)(|u_n|^{p-1} + |u|^{p-1})|v| \, dx.
\end{aligned} \quad (3.44)$$

Observe que $|u_n|^{p-1} + |u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. Logo, $V(x)(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. Desta forma, aplicando a desigualdade de Hölder em (3.44) temos,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |V(x)(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)v| \, dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\sup V(x)(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)|^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup |V(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Combinando (3.34) e (3.38), obtemos

$$(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u) \rightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \mathcal{F}. \quad (3.45)$$

Como $||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u| \leq |u_n|^{p-1} - |u|^{p-1}$ segue de (3.36) que

$$||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u| \leq f(x)^{p-1} + |u|^{p-1} \text{ q.t.p. em } \mathcal{F}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} ||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u|^{\frac{p}{p-1}} &\leq (f(x)^{p-1} + |u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq 2^{\frac{p}{p-1}-1} (f(x)^{p-1 \cdot \frac{p}{p-1}} + |u|^{p-1 \cdot \frac{p}{p-1}}) \\ &\leq 2^{\frac{1}{p-1}} (f(x)^p + |u|^p). \end{aligned}$$

Dai,

$$||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u|^{\frac{p}{p-1}} \leq C(f(x)^p + |u|^p) \in L^1(\mathcal{F}). \quad (3.46)$$

Então, como $V(x)$ é limitada, de (3.45) e (3.46) podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada, logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)v \, dx \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.47)$$

Do fato de $u_n \rightarrow u$ q.t.p. em $\mathcal{F}$ e da continuidade de h , segue que

$$h(u_n) \cdot v \rightarrow h(u) \cdot v \text{ q.t.p em } \mathcal{F}. \quad (3.48)$$

De (3.1), temos que:

$$|h(u_n) \cdot v| = |h(u_n)| \cdot |v| \leq C(|u_n|^{p-1} + |u_n|^{q-1}) \cdot |v| \quad (3.49)$$

e pelo Teorema 2.10, existe uma função $g \in L^s(\mathcal{F})$ com $s \in (p, p^*)$ tal que

$$|u_n| \leq g(x) \text{ em } \mathcal{F}. \quad (3.50)$$

Substituindo (3.50) em (3.49), segue que:

$$|h(u_n)| \cdot |v| \leq C(g(x)^{p-1} + g(x)^{q-1}) \cdot |v| = Cg(x)^{p-1}|v| + Cg(x)^{q-1}|v|.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder para:

- $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = 1$, com $p > 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} Cg(x)^{p-1}|v| \, dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|Cg(x)|^{p-1})^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|g(x)|^p) \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (3.51)$$

- $\frac{1}{s} + \frac{1}{q} = 1$, com $q \in (p, p^*)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} Cg(x)^{q-1}|v| \, dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|Cg(x)|^{q-1})^s \, dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|g(x)|^q) \, dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&< \infty.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Desta forma, de (3.51) e (3.52) segue que $(g(x)^{p-1}|v| + g(x)^{q-1}|v|) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e acrescentando a isso o resultado (3.48), temos, pelo Teorema da Convergência Dominada, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (h(u_n) - h(u)) \, v \, dx \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \tag{3.53}$$

De (3.39), (3.43), (3.47) e (3.53) segue que $\langle I'(u_n) - I'(u), v \rangle \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ ou, em outras palavras,

$$\langle I'(u_n), v \rangle \rightarrow \langle I'(u), v \rangle. \tag{3.54}$$

Como (u_n) é sequência de Cerami, temos, pela Definição 3.2, que $I'(u_n) \rightarrow 0$. Em particular, temos que

$$\langle I'(u_n), v \rangle \rightarrow 0. \tag{3.55}$$

Por (3.54), (3.55) e pela unicidade do limite segue que $I'(u) = 0$. Daí,

$$\langle I'(u), v \rangle = 0, \text{ para todo } v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (Teorema 2.17), logo

$$\langle I'(u), v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{3.56}$$

Portanto, u é solução fraca de (P) . Além disso, notamos que:

$$\begin{aligned}
I'(u_n)(u_n^-) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u_n^- \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^{p-2} u_n u_n^- \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(u_n) u_n^- \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^-|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n^-|^p \, dx \\
&= \|u_n^-\|^p.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Assim, do fato de (u_n) ser limitada, segue que $u_n^- = u_n^+ - u_n$ também é limitada e como $I'(u_n) \rightarrow 0$ temos de (3.57) que $\|u_n^-\| \rightarrow 0$, assim, $u_n^- \rightarrow 0$ e, a continuidade de I e I' , nos permite considerar sequências de Cerami não negativas a partir de agora, isto é, dada

uma sequência de Cerami (u_n) , podemos considerar que $u_n(x) \geq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, para todo n .

Falta mostrar que $u \not\equiv 0$. Com base em [9] e [19] vejamos o seguinte lema:

Lema 3.3. *Seja I o funcional associado a (P) e (u_n) uma sequência de Cerami para I com $u_n \rightharpoonup 0$. Então somente uma das alternativas ocorre:*

(i) $u_n \rightarrow 0$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$;

ou

(ii) *Existem uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e constantes $R > 0, \eta > 0$ tais que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^p dx > \eta > 0.$$

Demonstração: Suponha que (ii) não ocorre. Assim, para todo $R > 0$, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^p dx = 0.$$

Pelo Lema 3.1 a sequência (u_n) é limitada, daí pelo Lema de Lions (Teorema 2.6) segue que

$$u_n \rightarrow 0 \text{ em } L^r(\mathbb{R}^N), r \in (p, p^*). \quad (3.58)$$

De (3.1) temos que

$$h(u_n) \leq \delta |u_n|^{p-1} + C_\delta |u_n|^{q-1},$$

assim,

$$\begin{aligned} h(u_n)u_n &\leq \delta |u_n|^{p-1}u_n + C_\delta |u_n|^{q-1}u_n \\ &\leq \delta |u_n|^p + C_\delta |u_n|^q. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Integrando em ambos os lados de (3.59) obtemos, a partir de (3.58), que:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(u_n)u_n dx &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (\delta |u_n|^p + C_\delta |u_n|^q) dx \\ &= \delta \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx + C_\delta \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q dx \\ &= \delta \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Como $\delta > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno e a sequência $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é limitada, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(u_n) u_n \, dx = 0 \quad (3.61)$$

Como (u_n) é uma sequência de Cerami, temos, pelo Lema 3.1, que (u_n) é limitada. Assim, pela Definição 3.2, tem-se que $I'(u_n)u_n = o_n(1)$. Mas,

$$I'(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p - V(x)|u_n|^p) dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(u_n)u_n \, dx \quad (3.62)$$

$$= \|u_n\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} h(u_n)u_n \, dx. \quad (3.63)$$

Logo,

$$\|u_n\|^p = \int_{\mathbb{R}^N} h(u_n)u_n \, dx + o_n(1), \quad (3.64)$$

o que implica, de (3.61), que a sequência (u_n) converge forte a zero em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$u_n \rightarrow 0 \text{ em } W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

e portanto, (i) ocorre. $\square$

Suponhamos por contradição que $u \equiv 0$. Assim, temos $u_n \rightarrow 0$. Mas, pela continuidade do funcional I temos $I(u_n) \rightarrow 0$, contradizendo o fato de que $I(u_n) \rightarrow c > 0$. Segue do Lema 3.3 que (ii) acontece, isto é, existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e constantes positivas R e η tais que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^p dx > \eta > 0.$$

Por (V_2) , podemos assumir, sem perda de generalidade, que $y_n \in \mathbb{Z}^N$. De fato, se $y_n = (y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^N) \in \mathbb{R}^N$, existe $w_n^i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq N$ tal que $|y_n^i - w_n^i| \leq \frac{1}{2}$. Agora considerando $z_n = (z_n^1, z_n^2, \dots, z_n^N) \in \mathbb{Z}^N$, temos $|z_n - y_n| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^N |z_n^i - y_n^i|^2} \leq \frac{\sqrt{N}}{2}$. Logo, $B_R(y_n) \subset B_{R+\frac{\sqrt{N}}{2}}(z_n)$, pois se $x \in B_R(y_n)$ temos

$$|z_n - x| \leq |z_n - y_n| + |y_n - x| < \frac{\sqrt{N}}{2} + R.$$

Portanto,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{R+\frac{\sqrt{N}}{2}}(z_n)} |u_n|^p \, dx \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^p > \eta > 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Suponhamos $y_n \in \mathbb{Z}^N$ definindo $\tilde{u}_n(x) = u_n(x + y_n)$. Observe que $\{\tilde{u}_n\}$ é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, pois $\|\nabla u_n\|_{0,p} = \|\nabla \tilde{u}_n\|_{0,p}$ e por (V_2) novamente, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\tilde{u}_n(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(z - y_n)|u_n(z)|^p dz = \int_{\mathbb{R}^N} V(z)|u_n(z)|^p dz,$$

ou seja,

$$\|\tilde{u}_n\| = \|u_n\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Desta forma podemos assumir $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. A menos de subsequência $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ em $L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$ e $\tilde{u}_n(x) \rightarrow \tilde{u}(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. De (ii) do Lema 3.3, sabemos que $\tilde{u} \neq 0$. Além disso, pela periodicidade de V , temos que $\langle I'(\tilde{u}_n), \tilde{u}_n \rangle = \langle I'(u_n), u_n \rangle$ e $I(\tilde{u}_n) = I(u_n)$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle I'(\tilde{u}_n), \tilde{u}_n \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \tilde{u}_n|^{p-2} \nabla \tilde{u}_n \nabla \tilde{u}_n + V(x)|\tilde{u}_n|^{p-2} \tilde{u}_n \tilde{u}_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(\tilde{u}_n) \tilde{u}_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u_n + V(x)|u_n|^{p-2} u_n u_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(u_n) u_n dx \\ &= \langle I'(u_n), u_n \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I(\tilde{u}_n) &= \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \tilde{u}_n|^p + V(x)|\tilde{u}_n|^p) dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(\tilde{u}_n) dx \\ &= \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + V(x)|u_n|^p) dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(u_n) dx \\ &= I(u_n). \end{aligned}$$

Prosseguindo de maneira análoga aos cálculos anteriores, obtemos que $\{\tilde{u}_n\}$ é uma sequência de Cerami de I , e

$$\langle I'(\tilde{u}), v \rangle = \langle I'(u), v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ com } \tilde{u} \neq 0. \quad (3.65)$$

Logo, $\tilde{u}$ é uma solução fraca não trivial de (P) .

Finalmente, devemos verificar que $\|u\|^p \leq \frac{Lp\alpha}{L\alpha - p\alpha - p\sigma}$. Procedendo como na

limitação da sequência de Cerami do Lema 3.1, temos por (H_5) e (V_1) que

$$\begin{aligned}
LI(\tilde{u}_n) - \langle I'(\tilde{u}_n), u_n \rangle &= \left(\frac{L}{p} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \tilde{u}_n|^p + V(x)|\tilde{u}_n|^p) dx - L \int_{\mathbb{R}^N} H(\tilde{u}_n) \tilde{u}_n dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} h(\tilde{u}_n) \tilde{u}_n dx \\
&= \left(\frac{L}{p} - 1 \right) \|\tilde{u}_n\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} (h(\tilde{u}_n) \tilde{u}_n - LH(\tilde{u}_n)) dx \\
&\geq \left(\frac{L}{p} - 1 \right) \|\tilde{u}_n\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} \sigma |\tilde{u}_n|^p dx \\
&= \left(\frac{L}{p} - 1 \right) \|\tilde{u}_n\|^p - \sigma \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_n|^p dx \\
&\geq \left(\frac{L}{p} - 1 \right) \|\tilde{u}_n\|^p - \frac{\sigma}{\alpha} \|\tilde{u}_n\|^p \\
&= \left(\frac{L}{p} - 1 - \frac{\sigma}{\alpha} \right) \|\tilde{u}_n\|^p,
\end{aligned} \tag{3.66}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, como $I(u_n) \rightarrow c$ e $I(u_n) = I(\tilde{u}_n)$, temos que $I(\tilde{u}_n) \rightarrow c$ e de (3.65) tem-se

$$Lc = \liminf_{n \rightarrow \infty} (LI(\tilde{u}_n) - \langle I'(\tilde{u}_n), \tilde{u}_n \rangle). \tag{3.67}$$

Substituindo (3.66) em (3.67), obtemos

$$\begin{aligned}
Lc &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{L}{p} - 1 \right) - \frac{\sigma}{\alpha} \right] \|\tilde{u}_n\|^p \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{L}{p} - 1 \right) - \frac{\sigma}{\alpha} \right] \|u_n\|^p \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{L\alpha - p\alpha - p\sigma}{p\alpha} \right] \|u_n\|^p.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{Lcp\alpha}{L\alpha - p\alpha - p\sigma} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^p.$$

E pela semicontinuidade fraca da norma (Teorema 2.4), segue que:

$$\frac{Lcp\alpha}{L\alpha - p\alpha - p\sigma} \geq \|u\|^p.$$

Portanto,

$$\|u\|^p \leq \frac{Lcp\alpha}{L\alpha - p\alpha - p\sigma}.$$

□

A Formulação Fraca do Problema (P)

Neste apêndice, nosso objetivo é obter a formulação fraca do problema (P), vista no Capítulo 3, seção 3.1.

Seja u uma solução clássica do problema (P), isto é, uma função $u \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz a equação (P) e considere a equação

$$-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = h(u). \quad (\text{A.1})$$

Multiplicando (A.1) por uma função teste $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e integrando, em ambos os lados, em $\mathbb{R}^N$, obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^N} -\Delta_p u \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-2}u \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(u) \varphi \, dx. \quad (\text{A.2})$$

Observemos que,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} -\Delta_p u \varphi \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \varphi \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi \, dx \\ &= - \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi \, dx. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Usando a integração por partes em (A.3) e do fato de $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi \, dx &= \sum_{i=1}^N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Logo, substituindo (A.4) em (A.2), segue que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-2}u \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(u) \varphi \, dx$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pelo Teorema 2.17, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-2}u \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(u) \varphi \, dx. \quad (\text{A.5})$$

para toda $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Observe que (A.5) é satisfeita por funções $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ que possuem propriedades bem mais fracas (isto é, menos restritivas) que as funções $u \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$, que são soluções de (A.1). Por isso, dizemos que (A.5) é a formulação fraca para o problema (P).

B Estudo do Funcional Associado a (P)

Definamos o seguinte funcional $I : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx,$$

com $H(u) = \int_0^u h(s)ds$.

Verifiquemos que I está bem definido. De fato, seja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\begin{cases} I_1(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx, & \text{(I)} \\ I_2(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx, & \text{(II)} \\ I_3(u) = \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx & \text{(III)} \end{cases}$$

Como $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx < \infty.$$

Tomando o módulo em (II), temos:

$$|I_2(u)| = \left| \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx \right| \leq \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |V(x)||u|^p dx$$

e como $V(x)$ é limitado, segue que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |V(x)||u|^p dx &\leq \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \sup |V(x)||u|^p dx \\ &= \frac{1}{p} \sup |V(x)| \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx < \infty, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue das imersões contínuas de Sobolev. Logo,

$$\frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p < \infty.$$

Observe em (III), que por (H_3) temos:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_0^u h(t) dt \right] dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_0^u h(t) dt \right| dx. \quad (\text{B.1})$$

Analisaremos os seguintes casos de u da equação (B.1):

Caso (i): $u \geq 0$

Pela condição (H_3) segue-se:

$$\left| \int_0^u h(t) dt \right| \leq \int_0^u |h(t)| dt \leq \int_0^u C (|t|^{p-1} + |t|^{q-1}) dt, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}^+,$$

assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^u h(t) dt \right| &\leq \int_0^u C (t^{p-1} + t^{q-1}) dt \\ &= C \left(\frac{t^p}{p} + \frac{t^q}{q} \right) \Big|_0^u \\ &\leq C \left(\frac{u^p}{p} + \frac{u^q}{q} \right) \\ &\leq C (u^p + u^q). \end{aligned}$$

Logo,

$$\left| \int_0^u h(t) dt \right| \leq C (|u|^p + |u|^q), \text{ para todo } q \in (p, p^*).$$

Caso (ii): $u < 0$

Pela condição (H_3) segue-se:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^u h(t) dt \right| &= \left| - \int_u^0 h(t) dt \right| \\ &\leq \int_u^0 |h(t)| dt \\ &\leq \int_u^0 C (|t|^{p-1} + |t|^{q-1}) dt, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^u h(t) dt \right| &\leq \int_u^0 C (t^{p-1} + t^{q-1}) dt \\ &= C \left(\frac{t^p}{p} + \frac{t^q}{q} \right) \Big|_u^0 \\ &\leq C \left(\frac{(-u)^p}{p} + \frac{(-u)^q}{q} \right) \\ &\leq C ((-u)^p + (-u)^q). \end{aligned}$$

Logo,

$$\left| \int_0^u h(t) dt \right| \leq C ((-u)^p + (-u)^q) \leq C (|u|^p + |u|^q), \text{ para todo } q \in (p, p^*).$$

Portanto, dos casos (i) e (ii), segue que:

$$\left| \int_0^u h(t) dt \right| \leq C (|u|^p + |u|^q), \text{ para todo } q \in (p, p^*). \quad (\text{B.2})$$

De (B.1) e (B.2), temos,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx \right| \leq C \left[\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \right]$$

e pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx \right| < \infty.$$

A proposição a seguir é o principal resultado deste apêndice.

Proposição B.1. *O funcional I é de classe $C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, com derivada de Gâteaux dada por*

$$\langle I'(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + V(x) |u|^{p-2} uv) dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(u) v dx \quad (\text{B.3})$$

para todo $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Para provar a proposição acima, faremos uso dos três lemas a seguir.

Lema B.1. *O funcional I_1 é de classe $C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, com derivada de Gâteaux dada por*

$$\langle I_1'(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx. \quad (\text{B.4})$$

Demonstração:

Afirmação 1: *O funcional I_1 é Gâteaux diferenciável.*

Sejam $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Definamos a seguinte função:

$$\begin{aligned} \varphi : (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \varphi(t) = \frac{1}{p} |\nabla u + t \nabla v|^p \end{aligned}$$

Observe que $\varphi(t)$ é claramente contínua e diferenciável em $(0, 1)$. Por definição, temos

$$\nabla u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ e } \nabla v = \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Daí, pelas propriedades de somatório, tem-se:

$$\nabla u + t \nabla v = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} + t \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N t \frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t \frac{\partial v}{\partial x_i} \right).$$

Desta forma,

$$|\nabla u + t\nabla v| = \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

o que implica

$$|\nabla u + t\nabla v|^p = \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2} \cdot p}.$$

$$\text{Logo, } \varphi(t) = \frac{1}{p} |\nabla u + t\nabla v|^p = \frac{1}{p} \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{p}{2}}.$$

Agora, derivando $\varphi(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{1}{p} \cdot \frac{p}{2} \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{p-2}{2}} \cdot \left[\sum_{i=1}^N 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \right] \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2} \cdot (p-2)} \cdot 2 \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} + t \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ &= |\nabla u + t\nabla v|^{p-2} \cdot (\nabla u + t\nabla v) \cdot \nabla v. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Logo, $\varphi(t)$ é diferenciável em $(0, 1)$.

Do fato de φ ser contínua e diferenciável, temos pelo Teorema do Valor Médio que existe $\theta \in (0, t)$, onde $\theta = ct$ com $0 < c < 1$ tal que:

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)(t - 0) = \varphi'(\theta) \cdot t.$$

Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} |\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p} |\nabla u|^p &= |\nabla u + ct\nabla v|^{p-2} \cdot (\nabla u + ct\nabla v) \nabla v \cdot t \\ \frac{1}{t} \left[\frac{1}{p} \left(|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p \right) \right] &= |\nabla u + ct\nabla v|^{p-2} \cdot (\nabla u + ct\nabla v) \cdot \nabla v. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Tomando o limite em t , quando $t \rightarrow 0$, na expressão (B.6) obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{p} \right) = |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v. \quad (\text{B.7})$$

Por outro lado, tomando o módulo em (B.6), pela desigualdade triangular e como

$0 < ct < 1$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{t} \left(\frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{p} \right) \right| &= \left| |\nabla u + ct\nabla v|^{p-2} \cdot (\nabla u + ct\nabla v) \cdot \nabla v \right| \\
&\leq \left| |\nabla u + \nabla v|^{p-2} \cdot (\nabla u + \nabla v) \cdot \nabla v \right| \\
&= |\nabla u + \nabla v|^{p-2} \cdot |\nabla u + \nabla v| \cdot |\nabla v| \\
&\leq (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} \cdot (|\nabla u| + |\nabla v|) \cdot |\nabla v| \\
&= (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1} \cdot |\nabla v|. \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder, para $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$, com $p > 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1} \cdot |\nabla v| dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} [(|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p}{r}}]^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u + \nabla v|^p dx) \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \| (|\nabla u + \nabla v|)^{p-1} \|_{0,r} \cdot \|\nabla v\|_{0,p}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(|\nabla u + \nabla v|)^{p-1} \cdot |\nabla v| \in L^1(\mathbb{R}^N). \tag{B.9}$$

Assim, por (B.6)

$$\begin{aligned}
\langle I'_1(u), v \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_1(u + tv) - I_1(u)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{t} \left(\frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{p} \right) dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u + ct\nabla v|^{p-2} (\nabla u + ct\nabla v) \nabla v \, dx.
\end{aligned}$$

Considerando $t = t_n$, (B.7) e (B.9) nos permitem aplicar o Teorema da Convergência Dominada, donde segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} (\nabla u + ct\nabla v) \nabla v \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx.$$

Portanto, I_1 é Gâteaux diferenciável e, para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, sua derivada é dada por,

$$\langle I'_1(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx,$$

ficando provada a afirmação 1.

Consideremos o seguinte espaço:

$$\chi = \prod_{i=1}^N L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N),$$

munido da norma,

$$\|h\|_{\chi} = \left(\sum_{i=1}^N \|h_i\|_{0, \frac{p}{p-1}}^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (\text{B.10})$$

com $h = (h_1, h_2, \dots, h_N) \in \chi$.

Definamos

$$\begin{aligned} g &= (g_1, g_2, \dots, g_N) : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \chi \\ u &\longmapsto g(u) = |\nabla u|^{p-2} \nabla u \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

com $g_i(u) = |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Afirmação 2: $g(u)$ está bem definido. De fato, de (V_1) , temos

$$\begin{aligned} \|g_i(u)\|_{0, \frac{p}{p-1}}^{\frac{p}{p-1}} &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| |\nabla u|^{p-2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\frac{p}{p-1}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^{p-2} \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \right)^{\frac{p}{p-1}} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \cdot |\nabla u|)^{\frac{p}{p-1}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{\frac{(p-2)p}{p-1}} \cdot |\nabla u|^{\frac{p}{p-1}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx \\ &= \|u\|^p < +\infty. \end{aligned}$$

Provando assim, a afirmação 2.

Afirmação 3: $g(u)$ é contínua. De fato, pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$, podemos encontrar uma constante $C_1 > 0$ para todo $h \in \chi$ tal que

$$\|h\|_{\chi}^{\frac{p}{p-1}} \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |h|^{\frac{p}{p-1}}. \quad (\text{B.12})$$

Sejam $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então:

$$\begin{aligned} \|g(u) - g(v)\|_{\chi}^{\frac{p}{p-1}} &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |g(u) - g(v)|^{\frac{p}{p-1}} dx \\ &= C_1 \int_{\mathbb{R}^N} \left| |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v \right|^{\frac{p}{p-1}} dx. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Vamos analisar os seguintes casos, em relação a p :

Caso (i): $p \in (1, 2)$

Do Teorema 2.20 - (ii) e de (V_1) , segue que:

$$\begin{aligned}
 \|g(u) - g(v)\|_{\chi}^{\frac{p}{p-1}} &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{\beta} |\nabla u - \nabla v|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dx \\
 &= C_1 \bar{\beta}^{\frac{p}{p-1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^p dx \\
 &\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u - \nabla v|^p + V(x)|u - v|^p) dx \\
 &= C_2 \|u - v\|^p.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\|g(u) - g(v)\|_{\chi} \leq C_2^{\frac{p-1}{p}} \|u - v\|^{p-1} = C \|u - v\|^{p-1}, \quad (\text{B.14})$$

onde $C = C_2^{\frac{p-1}{p}}$ é uma constante positiva que independe de u e v .

Caso (ii): $p \geq 2$

Do Teorema 2.20 - (i), segue de (B.12) que:

$$\begin{aligned}
 \|g(u) - g(v)\|_{\chi}^{\frac{p}{p-1}} &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\beta |\nabla u - \nabla v| (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2}|^{\frac{p}{p-1}} dx \\
 &= C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\beta^{\frac{p}{p-1}} |\nabla u - \nabla v|^{\frac{p}{p-1}} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p \cdot (p-2)}{p-1}}| dx \\
 &= C_1 \beta^{\frac{p}{p-1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^{\frac{p}{p-1}} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p \cdot (p-2)}{p-1}} dx \\
 &\leq C_1 \beta^{\frac{p}{p-1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^{\frac{p}{p-1}} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p \cdot (p-2)}{p-1}} dx.
 \end{aligned}$$

Temos que $|\nabla u - \nabla v|^{\frac{p}{p-1}} \in L^{p-1}(\mathbb{R}^N)$ e $(|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p \cdot (p-2)}{p-1}} \in L^{\frac{p-1}{p-2}}(\mathbb{R}^N)$. De fato,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u - \nabla v|^{\frac{p}{p-1}})^{p-1} dx \right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}} < \infty$$

e

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} ((|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p \cdot (p-2)}{p-1}})^{\frac{p-1}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{p-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u| + |\nabla v|)^p dx \right)^{\frac{p-2}{p-1}} < \infty.$$

Assim, pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
\|g(u) - g(v)\|_{\chi}^{\frac{p}{p-1}} &\leq C_1 \beta^{\frac{p}{p-1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^{\frac{p}{p-1}} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p \cdot (p-2)}{p-1}} dx \\
&\leq \tilde{C}_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u - \nabla v|^{\frac{p}{p-1}})^{p-1} dx \right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} [(|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p \cdot (p-2)}{p-1}}]^{\frac{p-1}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \\
&\leq \tilde{C}_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u| + |\nabla v|)^p dx \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \\
&= \tilde{C}_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u - v)|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u| + |\nabla v|)^p dx \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \\
&\leq \tilde{C}_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(u - v)|^p + V(x)|u - v|^p) dx \right)^{\frac{p}{p-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u| + |\nabla v|)^p dx \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \\
&= \tilde{C}_2 \|u - v\|^{\frac{p}{p-1}} \left(\|\nabla u\|_{0,p}^p + \|\nabla v\|_{0,p}^p \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \\
&= \tilde{C}_2 \|u - v\|^{\frac{p}{p-1}} \|\nabla u\|_{0,p}^{p \cdot \frac{p-2}{p-1}}, \tag{B.15}
\end{aligned}$$

onde $\tilde{C}_2 = C_1 \beta^{\frac{p}{p-1}}$ independe de u e v .

Da desigualdade de Minkowski, da definição de norma em $L^p(\mathbb{R}^N)$, e de (V_1) segue que:

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{0,p} + \|\nabla v\|_{0,p} &\leq (\|\nabla u\|_{0,p} + \|\nabla v\|_{0,p})^{p \cdot \frac{p-2}{p-1}} \\
&= \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{p \cdot \frac{p-2}{p-1}} \\
&\leq \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^p + V(x)|v|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{p \cdot \frac{p-2}{p-1}} \\
&= (\|u\| + \|v\|)^{p \cdot \frac{p-2}{p-1}}. \tag{B.16}
\end{aligned}$$

Substituindo (B.16) em (B.15), vem que:

$$\|g(u) - g(v)\|_{\chi}^{\frac{p}{p-1}} \leq \tilde{C}_2 \|u - v\|^{\frac{p}{p-1}} (\|u\| + \|v\|)^{p \cdot \frac{p-2}{p-1}}.$$

Desta forma,

$$\|g(u) - g(v)\|_{\chi} \leq \tilde{C}_2^{\frac{p-1}{p}} \|u - v\| (\|u\| + \|v\|)^{p-2}.$$

Logo,

$$\|g(u) - g(v)\|_{\chi} = C' \|u - v\| (\|u\| + \|v\|)^{p-2}, \tag{B.17}$$

onde $C' = \tilde{C}_2^{\frac{p-1}{p}}$ é uma constante positiva que independe de u e v .

Portanto, de (B.14) e (B.17) segue a continuidade de $g(u)$, ficando provanda a afirmação 3.

Agora, mostremos que a derivada de Gâteaux I'_1 do funcional I_1 é contínua. Com efeito, a partir da continuidade de $g(u)$, basta mostrarmos que $\|I'_1(u) - I'_1(v)\|_* \leq K\|g(u) - g(v)\|_\chi$, onde K é uma constante positiva que independe de $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. De fato, de (B.11) temos

$$\begin{aligned} |\langle I'_1(u) - I'_1(v), w \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \nabla w \, dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |(|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \nabla w| \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |(g(u) - g(v)) \nabla w| \, dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, por (B.12) e (B.10), segue que:

$$\begin{aligned} |\langle I'_1(u) - I'_1(v), w \rangle| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(u) - g(v)|^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq K \left(\|g(u) - g(v)\|_{0, \frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq K \left(\sum_{i=1}^p \|g_i(u) - g_i(v)\|_{0, \frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w|^p + V(x)|w|^p) \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= K \|g(u) - g(v)\|_\chi \cdot \|w\|. \end{aligned}$$

Logo, $|\langle I'_1(u) - I'_1(v), w \rangle| \leq K' \|g(u) - g(v)\|_\chi$, onde $K' = K \cdot \|w\|$, para todo $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $I'_1(u)$ é contínuo.

Portanto, do Teorema 2.18, segue que $I_1 \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. □

Lema B.2. *O funcional I_2 é de classe $C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, com derivada de Gâteaux dada por*

$$\langle I'_2(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^{p-2} uv \, dx. \quad (\text{B.18})$$

Demonstração: Primeiro, mostremos que I_2 é Gâteaux diferenciável. Para isso, sejam $t \in \mathbb{R}$ satisfazendo $t \in (0, 1)$ e $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Definamos a seguinte função:

$$\begin{aligned} \psi : (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \psi(t) = \frac{1}{p} V(x) |u + tv|^p \end{aligned}$$

Observe que $\psi(t)$ é claramente contínua e diferenciável em $(0, 1)$.

De fato, pela regra da cadeia, temos que a derivada de $\psi(t)$ é:

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \frac{1}{p}V(x) \cdot p|u + tv|^{p-1} \cdot \frac{(u + tv)}{|u + tv|}v \\ &= V(x)|u + tv|^{p-2}(u + tv) \cdot v\end{aligned}\tag{B.19}$$

Logo, $\psi(t)$ é diferenciável em $(0, 1)$.

Assim, do fato de ψ ser contínua e diferenciável, temos pelo Teorema do Valor Médio que existe $\theta \in (0, t)$, onde $\theta = ct$, tal que

$$\psi(t) - \psi(0) = \psi'(\theta)(t - 0) = \psi'(\theta) \cdot t.$$

Daí,

$$\frac{1}{p}V(x) \left[|u + tv|^p - |u|^p \right] = V(x)|u + ctv|^{p-2}(u + ctv)vt,$$

logo,

$$\frac{1}{t} \left[\frac{V(x)(|u + tv|^p - |u|^p)}{p} \right] = V(x)|u + ctv|^{p-2}(u + ctv)v.\tag{B.20}$$

Tomando o limite em (B.20), quando $t \rightarrow 0$, temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[V(x) \left(\frac{|u + tv|^p - |u|^p}{p} \right) \right] = V(x)|u|^{p-2}u \cdot v.\tag{B.21}$$

Por outro lado, tomando o módulo em (B.20), pela desigualdade triangular, e como $0 < ct < 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{t} \left[V(x) \left(\frac{|u + tv|^p - |u|^p}{p} \right) \right] \right| &= |V(x)|u + ctv|^{p-2}(u + ctv)v| \\ &\leq |V(x)|u + v|^{p-2}(u + v)v| \\ &= |V(x)||u + v|^{p-2}|u + v||v| \\ &\leq |V(x)|(|u| + |v|)^{p-2}(|u| + |v|)|v| \\ &= V(x)(|u| + |v|)^{p-1}|v|.\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder para $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ com $p > 1$, e de (V_1) , obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(|u| + |v|)^{p-1}|v|dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(|u| + |v|)^{p-1}|v| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \sup V(x)(|u| + |v|)^{p-1}|v| dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (\sup V(x)(|u| + |v|)^{p-1})^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup V(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u| + |v|)^p dx \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup V(x) \| |u| + |v| \|_{0,r} \cdot \|v\|_{0,p}.\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$V(x)(|u| + |v|)^{p-1}|v| \in L^1(\mathbb{R}^N). \quad (\text{B.22})$$

De (B.20), obtemos

$$\begin{aligned} \langle I'_2(u), v \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_2(u + tv) - I_2(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{t} \left[\frac{V(x)(|u + tv|^p - |u|^p)}{p} \right] dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u + tv|^{p-2}(u + tv)v \, dx. \end{aligned}$$

Considerando $t = t_n$, (B.21) e (B.22) podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada, donde segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u + tv|^{p-2}(u + tv)v \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-2}uv \, dx.$$

Portanto, I_2 é Gâteaux diferenciável e para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ a derivada de Gâteaux é dada por

$$\langle I'_2(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-2}uv \, dx.$$

Agora mostraremos que a derivada de Gâteaux I'_2 do funcional I_2 é contínua. Para isso, vamos provar que $\|I'_2(u_n) - I'_2(u)\| \rightarrow 0$.

Consideremos uma sequência $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, com $u_n \rightarrow u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para algum $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Assim, temos, pelo Teorema das Imersões Contínuas de Sobolev, que $u_n \rightarrow u$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [1, p^*)$. A menos de subsequência e pelo Teorema 2.10, existe uma função $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que:

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (\text{B.23})$$

e

$$|u_n(x)| \leq f(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \quad (\text{B.24})$$

Por (B.23), temos que

$$|u_n(x)| \rightarrow |u(x)| \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \quad (\text{B.25})$$

Para toda $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e do fato de $V(x)$ ser limitado, temos:

$$\begin{aligned}
|\langle I_2'(u_n) - I_2'(u), v \rangle| &= |\langle I_2'(u_n), v \rangle - \langle I_2'(u), v \rangle| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^{p-2} u_n v \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^{p-2} u v \, dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v \, dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |V(x) (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v| \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\sup V(x) (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v| \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\sup V(x) (|u_n|^{p-2} u_n + |u|^{p-2} u)| \cdot |v| \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\sup V(x) (|u_n|^{p-1} + |u|^{p-1}) \cdot |v| \, dx. \tag{B.26}
\end{aligned}$$

Observe que $|u_n|^{p-1} + |u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. Desta forma, podemos aplicar a desigualdade de Hölder em (B.26) e daí,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |V(x) (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v| \, dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\sup V(x) (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u)|^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup V(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u)^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup V(x) \| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \|_{0, \frac{p}{p-1}} \cdot \|v\|_{0,p}.
\end{aligned}$$

Combinando (B.23) e (B.25), obtemos

$$(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) \rightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{B.27}$$

Como $||u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u| \leq |u_n|^{p-1} - |u|^{p-1}$ segue de (B.24) que

$$||u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u| \leq f(x)^{p-1} + |u(x)|^{p-1} \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
||u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u|^{\frac{p}{p-1}} &\leq (f(x)^{p-1} + |u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq 2^{\frac{p}{p-1}-1} (f(x)^{p-1 \cdot \frac{p}{p-1}} + |u|^{p-1 \cdot \frac{p}{p-1}}) \\
&\leq 2^{\frac{1}{p-1}} (f(x)^p + |u|^p) \\
&= C(f(x)^p + |u|^p).
\end{aligned}$$

Dai,

$$\left| |u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u \right|^{\frac{p}{p-1}} \leq C(f(x)^p + |u|^p) \in L^1(\mathbb{R}^N). \quad (\text{B.28})$$

Então, como $V(x)$ é limitado, de (B.27) e (B.28) podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada, logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^{p-2} u_n v \, dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^{p-2} u v \, dx \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Ou, equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v \, dx \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

o que implica que

$$|\langle I'_2(u_n) - I'_2(u), v \rangle| \leq |I'_2(u_n) - I'_2(u)| \cdot |v| \rightarrow 0$$

e desta forma,

$$\|I'_2(u_n) - I'_2(u)\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Ou seja, a derivada de Gâteaux I'_2 é contínua.

Portanto, pelo Teorema 2.18 segue que $I_2 \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. $\square$

Lema B.3. *O funcional I_3 é de classe $C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, com derivada de Gâteaux dada por*

$$\langle I'_3(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} h(u) v \, dx. \quad (\text{B.29})$$

Demonstração: Seja o funcional $I_3 : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I_3(u) = \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx.$$

Sejam $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $t \in (0, 1)$ então,

$$\begin{aligned} I_3(u + tv) - I_3(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} H(u + tv) dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [H(u + tv) - H(u)] dx. \end{aligned}$$

Das hipóteses iniciais, temos que H é contínua e derivável, assim, pelo Teorema do Valor Médio, temos que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} [H(u + tv) - H(u)] dx &= \int_{\mathbb{R}^N} H'(u + \theta tv) \cdot tv \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h(u + \theta tv) \cdot tv \, dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{I_3(u + tv) - I_3(u)}{t} &= \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^N} h(u + \theta tv) \cdot tv \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(u + \theta tv) \cdot tv}{t} \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} h(u + \theta tv) \cdot v \, dx.
\end{aligned} \tag{B.30}$$

Tomando o limite em (B.30) quando $t \rightarrow 0$, vem que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_3(u + tv) - I_3(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} h(u + \theta tv) \cdot v \, dx. \tag{B.31}$$

Afirmção: Podemos comutar o limite com a integral na equação (B.31).

De fato, observe que $u + \theta tv \rightarrow u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ quando $t \rightarrow 0$ e da continuidade de h , temos que

$$h(u + \theta tv) \cdot v \rightarrow h(u) \cdot v \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

Oberve que $h(u) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. De fato, por (H_3) para todo $q \in (p, p^*)$, tem-se que

$$|h(u)| \leq C(|u|^{p-1} + |u|^{q-1}),$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|h(u + \theta tv)v| &= |h(u + \theta tv)| \cdot |v| \\
&\leq C(|u + \theta tv|^{p-1} + |u + \theta tv|^{q-1}) \cdot |v| \\
&\leq C[(|u| + |\theta tv|)^{p-1} + (|u| + |\theta tv|)^{q-1}] \cdot |v| \\
&\leq C[2^{p-2}(|u|^{p-1} + |\theta tv|^{p-1}) + 2^{q-2}(|u|^{q-1} + |\theta tv|^{q-1})] \cdot |v| \\
&\leq C[2^{p-2}(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}) + 2^{q-1}(|u|^{q-1} + |v|^{q-1})] \cdot |v| \\
&= (2^{p-2}C|u|^{p-1} + 2^{p-2}C|v|^{p-1}) \cdot |v| + (2^{q-2}C|u|^{q-1} + 2^{q-2}C|v|^{q-1}) \cdot |v| \\
&= 2^{p-2}C|u|^{p-1}|v| + 2^{p-2}C|v|^p + 2^{q-1}C|u|^{q-1}|v| + 2^{q-2}C|v|^q \\
&= 2^{p-2}C|u|^{p-1}|v| + 2^{q-1}C|u|^{q-1}|v| + 2^{p-2}C|v|^p + 2^{q-2}C|v|^q \\
&= (2^{p-2}C|u|^{p-1} + 2^{q-1}C|u|^{q-1}) \cdot |v| + 2^{p-2}C|v|^p + 2^{q-2}C|v|^q.
\end{aligned} \tag{B.32}$$

Tomando a integral em ambos os lados de (B.32), temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |h(u + \theta tv)v| \, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (2^{p-2}C|u|^{p-1} + 2^{q-1}C|u|^{q-1}) \cdot |v| \, dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (2^{p-2}C|v|^p + 2^{q-2}C|v|^q) \, dx.
\end{aligned} \tag{B.33}$$

Observe que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} 2^{p-2} C |u|^{p-1} \cdot |v| \, dx < \infty \quad (\text{B.34})$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} 2^{p-2} C |u|^{q-1} \cdot |v| \, dx < \infty. \quad (\text{B.35})$$

De fato, utilizando a desigualdade de Hölder em:

- (B.34), para $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$, com $p > 1$, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} 2^{p-2} C |u|^{p-1} \cdot |v| \, dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (2^{p-2} C |u|^{p-1})^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} 2^{(p-2)r} C^r |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{p-2} C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|2^{p-2} C |u|^{p-1}\|_{0, \frac{r}{r-1}} \cdot \|v\|_{0,p} < \infty. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

- (B.35), para $\frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1$, com $q \in (p, p^*)$, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} 2^{p-2} C |u|^{q-1} \cdot |v| \, dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (2^{p-2} C |u|^{q-1})^s \, dx \right)^{\frac{1}{s}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} 2^{(p-2)s} C^s |u|^q \, dx \right)^{\frac{1}{s}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= 2^{p-2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} C^s |u|^q \, dx \right)^{\frac{1}{s}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|2^{p-2} C |u|^{q-1}\|_{0, \frac{s}{s-1}} \cdot \|v\|_{0,q} < \infty. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Assim, $2^{p-2} C |u|^{p-1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $2^{p-2} C |u|^{q-1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. E usando o fato de $L^1(\mathbb{R}^N)$ ser um espaço vetorial temos que $2^{p-2} C |u|^{p-1} + 2^{p-2} C |u|^{q-1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Logo, pelo Teorema da Convergência de Dominada de Lebesgue temos que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} h(u + \theta t v) v \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(u) v \, dx$$

provando assim, a afirmação.

Portanto, I_3 é Gâteaux diferenciável e, para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, a derivada de Gâteaux é dada por

$$\langle I'_3(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} h(u) v \, dx,$$

finalizando assim a prova da afirmação.

Mostremos agora que a derivada de Gâteaux I'_3 do funcional I_3 é contínua. Para isso, consideremos uma sequência $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Como $u_n \rightarrow u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para algum $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos pelo Teorema das Imersões Contínuas de Sobolev que $u_n \rightarrow u \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Devemos mostrar que $I'_3(u_n) \rightarrow I'_3(u)$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, ou equivalentemente:

$$\|I'_3(u_n) - I'_3(u)\|_* \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Com efeito, pela Definição 2.5 e pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} |I'_3(u_n) - I'_3(u)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (h(u_n) - h(u)) \cdot v \, dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |(h(u_n) - h(u)) \cdot v| \, dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(u_n) - h(u)|^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|h(u_n) - h(u)\|_{0, \frac{p}{p-1}} \cdot \|v\|_{0,p} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|I'_3(u_n) - I'_3(u)\|_* \leq C \|h(u_n) - h(u)\|_{0, \frac{p}{p-1}}.$$

Assim,

$$\|I'_3(u_n) - I'_3(u)\|_* \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Donde concluímos que I'_3 é contínuo.

Portanto, do Teorema 2.18, segue que $I_3 \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. □

Dos Lemas B.1, B.2 e B.3 segue que a Proposição B.1 é verdadeira. Com efeito, como

$$I(u) = I_1(u) + I_2(u) + I_3(u)$$

temos que, a partir dos lemas B.1, B.2 e B.3, o funcional I é de classe C^1 em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e sua derivada é dada por

$$\langle I'(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + V(x)|u|^{p-2}) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(u)v \, dx$$

para todo $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

REFERÊNCIAS

- [1] ADAMS, Robert A. *Sobolev Spaces*, Academic Press, Nova York, 1975.
- [2] ARAÚJO, Gustavo da S. *Sobre soluções de equações elípticas envolvendo o N -Laplaciano e crescimento crítico exponencial*. 2010. 122f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- [3] ARAÚJO, Yane Lísley R. *Existência e multiplicidade de soluções positivas para algumas classes de problemas envolvendo o p -laplaciano*. 122f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2012.
- [4] BARTLE, Robert G. *The Elements of Integration*, John Wiley & Sons, Nova York, 1966.
- [5] BREZIS, Haim. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Rutgers University, 2010.
- [6] COSTA, David. G.; MIYAGAKI Olympo. H. *Nontrivial solutions for perturbations of the p -Laplaciano on unbounded domains*, Journal of Mathematical Analysis and Application, vol. 193 p. 737-755, 1995.
- [7] COTI, Zelati V. e RABINOWTIZ P. H. *Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on $\mathbb{R}^N$* , Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 45 p. 1217-1269, 1992.
- [8] EVANS, Lawrence C. *Partial Differential Equations*, Graduate studies in mathematics, American Math. Society, vol. 19, 2000.
- [9] FIGUEIREDO, Giovany de Jesus M. *Multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas quasilineares*. 126f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2004.

-
- [10] HEBELER, Thiago H. *Teoria das distribuições e seus espaços topológicos*. 68f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 2010.
- [11] LIMA, Elon L. *Curso de Análise*, vol. 2, IMPA, Projeto Euclides, 11.ed. Rio de Janeiro, 2014.
- [12] MEDEIROS, Luís A.; MIRANDA, Manuel M. *Espaços de Sobolev - Iniciação aos problemas elípticos não homogêneos*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.
- [13] MOREIRA NETO, Sandra I. *Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de equações de Schrödinger com expoente supercrítico*. 113f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 2014.
- [14] REED, Michael; SIMON, Barry. *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. I, Academic Press, Londres, 1980.
- [15] SANTOS, Andreilino V. *Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos não locais dos tipos Kirchhoff e p -Kirchhoff*. 73f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Pará, 2007.
- [16] SANTOS, Carla Regina S. *Controlabilidade nula e aproximada para uma equação parabólica não linear*. 90f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Maranhão, 2018.
- [17] SILVA, José de B. *O método das sub e supersoluções para um sistema do tipo $(p-q)$ -Laplaciano*. 105f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, 2013.
- [18] VIEIRA, Gilberto F. *Existência de soluções para algumas classes de problemas envolvendo o operador p -Laplaciano*. 119f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2006.
- [19] VIEIRA, Gilberto F. *Métodos variacionais aplicados a uma classe de equações de Schrödinger quasilineares*. 117f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2010.

- [20] WANG, Chunhua; LI Gongbao. *The existence of a nontrivial solution to p -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with supercritical growth*. Mathematical Methods in the Applied Science, n.36, p. 69-77, 2013.
- [21] WILLEM, M. *Minimax Theorems*, Birkhäuser, 1996.