

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

João Luís Brandão Andrade

*Vórtices BPS no modelo de Maxwell- $CP(2)$ com
estrutura interna*

SÃO LUÍS, ABRIL DE 2019

João Luís Brandão Andrade

*Vórtices BPS no modelo de Maxwell-CP(2) com
estrutura interna*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos

SÃO LUÍS, ABRIL DE 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca Setorial - CCET/UFMA

Andrade, João Luis Brandão.

Vórtices BPS no modelo de Maxwell- $CP(2)$ com estrutura interna/
João Luís Brandão Andrade.-2019

91 f.

Impresso por computador

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Física/ccet,
Universidade Federal do Maranhão,São Luís,
2019.

1. Defeitos topológicos. 2. Sólitons. 3. Teorias de Gauge.4.Vórtices.
5.Estrutura Interna.

CDU 539.143.5

João Luís Brandão Andrade

*Vórtices BPS no modelo de Maxwell-CP(2) com
estrutura interna*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovado em: **23/04/2019** .

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos - UFMA (Orientador)

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes - UFMA

Prof. Dr. Fabiano de Carvalho Simas - UFMA - Campus Chapadinha

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado capacidade de superar mais este grande desafio.

A minha mãe Cecília e meu pai Luís Carlos, que me ensinaram a batalhar pelos meus objetivos, sendo sempre presentes em todos os momentos da minha vida.

A minha esposa Rosangela, uma mulher muito admirável e virtuosa, que sempre me dá conselhos quando preciso.

A toda a minha família, Avós, Tios, Tias, Primos e Primas, que sempre estão por perto quando preciso, nas horas boas e tristes. E que sempre acreditaram na minha capacidade. Aos meus amigos do curso, Joelson Reis Prado, Marcos Vinícius, Andrey Borges, Carlos Eduardo, Railson Oliveira, Rayanne, Daniel, Joel Félix, Joel Anderson, Kayman Jhosef, Wellington, Lucas Franco, Ticiania Franco, Sâmara Barros, George Bruno, Charles Duarte, Marcell, Uadson Pereira, Cássio Diego, Moizés Filho, Diego Aguiar, Emerson Chaves (Barba), Neyver Henry, Cesar Antonio, Marcelo Feitosa, Alexsandro Lucena, Letícia Lisboa, João Alfíeres, Andressa Macêdo, Andressa, Ruana Lima, Joyce Pinto, Luziane Diniz, Socorro Amorim, André Cavalcante, Elivaldo Ribeiro e aos demais cujos nomes não citei.

Ao Prof. Carlos Eduardo da Hora Santos, pela paciência e dedicação em me orientar.

Ao Prof. Rodolfo Alván Casana Sifuentes, por ter sido meu orientador e contribuído para a minha formação.

Ao Prof. Antônio Pinto Neto, que foi meu professor e tutor, e me ajudou com seus ensinamentos.

Ao Prof. Raimundo Aires, pelas em suas aulas de física no ensino médio que serviram para me incentivar a ingressar no curso de física.

A Universidade Federal do Maranhão, em particular, PIBIC-Física e ao PET-Física, por terem cedido espaço para os meus estudos

A CAPES e CNPQ que financiram a minha formação e elaboração desse trabalho.

“Os humanos são brindados com o desespero merecido para punir e ensinar a não serem presunçosos.”

(” A verdade- Fullmetal
Alchemist)

Resumo

Nesta dissertação, apresento a construção original de vórtices BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) inerentes à um modelo de calibre Maxwell- $CP(2)$ oriundo do cenário geral $CP(N-1)$ (no qual considera-se $N = 3$, com N correspondente ao número de componentes do campo $CP(2)$), quando sujeito a presença de um campo escalar adicional, real e neutro. Na sequência, com foco em estruturas radialmente simétricas, construímos uma estrutura de primeira ordem para o modelo, através do procedimento de Bogomol'nyi. A partir da minimização da energia total, obtemos expressões gerais para a energia mínima do modelo, cujo valor possui uma contribuição extra devido a presença do campo neutro, e para as respectivas equações de primeira ordem (equações BPS), na qual tanto a energia mínima quanto as equações BPS passam a depender diretamente da estrutura funcional da função dielétrica. A introdução do campo escalar, que interage com o setor eletromagnético via uma função dielétrica não-usual, produz significativas modificações na forma dos vórtices BPS resultantes, tais alterações sendo entendidas como a manifestação de estruturas internas originadas pela presença do campo neutro adicional.

PALAVRAS-CHAVE: Defeitos topológicos, Sólitons, Teorias de Gauge, Formalismo BPS, Vórtices, Estrutura Interna.

Abstract

In this dissertation, I present the original BPS vortices (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) inherent in a gauge model Maxwell- $CP(2)$ from the general scenario $CP(N-1)$ (in which $N=3$, with N corresponding to the number of components of the $CP(2)$ field), when subjected to the presence of an additional, real and neutral scalar field. Then, focusing on radially symmetrical structures, we construct a first-order structure for the model, using the Bogomol'nyi procedure. From the minimization of the total energy, we obtain general expressions for the minimum energy of the model, whose value has an extra contribution due to the presence of the neutral field, and for the respective first order equations (BPS equations), in which both the minimum energy while the BPS equations depend directly on the functional structure of the dielectric function. The introduction of the scalar field, which interacts with the electromagnetic sector via an unusual dielectric function, produces significant modifications in the shape of the resulting BPS vortices, such changes being understood as the manifestation of internal structures originated by the presence of the additional neutral field.

Key Words: Topological Defects, Sólitons, Gauge Theories, BPS Formalism, Vortices, Internal Structure.

Sumário

Sumário	7
Lista de Figuras	9
1 Introdução	14
2 Vórtices BPS na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs	18
2.1 O modelo de Maxwell-Higgs	18
2.2 Formalismo BPS aplicado ao modelo de Maxwell-Higgs.	21
2.3 Soluções BPS	22
3 Vórtices BPS no modelo de Maxwell-CP(2)	29
3.1 O modelo de Maxwell-CP(2)	29
3.2 Formalismo BPS aplicado ao modelo CP(2)	32
3.3 Soluções BPS	34
3.3.1 Primeiro caso: $\beta(r) = \beta_1$	34
3.3.2 Segundo caso: $\beta(r) = \beta_2$	36
4 Vórtices BPS no modelo de Maxwell-Higgs com estrutura interna	41
4.1 O modelo de Maxwell-Higgs com estrutura interna	41
4.2 Formalismo BPS no modelo de Maxwell com estrutura interna.	43
4.3 As soluções de primeira-ordem	45
5 Vórtices BPS no modelo de Maxwell-CP(2) com estrutura interna.	61
5.1 O modelo de Maxwell-CP(2) com estrutura interna	61

5.2	Formalismo BPS	64
5.3	Soluções BPS	66
5.3.1	Primeiro caso: $\beta(r) = \beta_1$	66
6	Conclusões e Perspectivas	84
	Referências Bibliográficas	88

Lista de Figuras

2.1	Solução numérica para a função $a(r)$ obtida a partir das equações (2.30) e (2.31) via as condições de contorno (2.12) e (2.21). Aqui, utilizou-se $e = v = +1$ e $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 2$ (curva azul tracejada), $n = 4$ (curva vermelha ponto-tracejada), e $n = 7$ (curva laranja traço-longo)	27
2.2	Solução numérica para a função $g(r)$ obtida a partir das equações (2.30) e (2.31) via as condições de contorno (2.12) e (2.21). As convenções são as mesmas da figura 2.1.	27
2.3	Solução numérica para o campo magnético $B(r)$ construída com o auxílio da equação (2.15). As convenções são as mesmas para a figura 2.1. Neste caso, as condições de contorno são $B(r = 0) \approx ev^2 = 1$ e $B(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$	28
2.4	Solução numérica para a densidade de energia $\varepsilon(r)$ obtida via expressão (2.24). Em particular, para $n = 1$ e $n \neq 1$ valem, respectivamente, $\varepsilon(r = 0) = \frac{5}{2}$ e $\varepsilon(r \neq 0) = 1$ (vide a solução (2.57)). Por outro lado, no limite assintótico, vale $\varepsilon(r \rightarrow 0) \rightarrow 0$, independente do valor da vorticidade (conforme a solução aproximada em (2.59)).	28
3.1	Solução numérica para $\alpha(r)$. Aqui, utilizou-se $m = 1$ (curva preta sólida), $m = 2$ (curva azul tracejada), $m = 5$ (curva vermelha ponto-tracejada) e $m = 9$ (curva laranja traço-longo).	38
3.2	Solução numérica para o campo magnético $A(r)$, as convenções são as mesmas da figura 3.1.	39
3.3	Solução numérica para o campo magnético $B(r)$ construída com o auxílio da equação 3.11. Aqui utilizou-se as mesmas convenções são as mesmas da figura 3.1.	39

3.4	Solução numérica para a densidade de energia obtida $\varepsilon(r)$ via a expressão (3.38). As convenções são as mesmas da figura 3.1.	40
4.1	Solução numérica $a(r)$ obtida a partir das equações (4.41) e (4.42) via as condições de contorno (4.14) e (4.26). Utilizamos $e = v = 1$ e $r_0 = 1$ e $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 2$ (curva azul tracejada) e $n = 3$ (curva vermelha ponto-tracejada), $n = 5$ (curva laranja traço-longo) e $n = 7$ (curva cinza sólida). De maneira geral, o comportamento é o mesmo daquele definido por Nielsen-Olesen.	49
4.2	Solução numérica $g(r)$. As convenções são as mesmas utilizadas na figura 4.1. .	50
4.3	Solução numérica para o campo magnético $B(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.1 com a adição de $n = 10$ (curva verde-escuro-sólida). O campo magnético nulo compensa a divergência existente em $G_1(r = 0)$	50
4.4	Solução numérica para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.3.	51
4.5	Solução numérica $a(r)$ obtida a partir das equações (4.41) e (4.42) via as condições de contorno (4.14) e (4.26). Utilizamos $e = v = 1$ e $r_0 = 2$ e $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 2$ (curva azul tracejada) e $n = 3$ (curva vermelha ponto-tracejada), $n = 5$ (curva laranja traço-longo) e $n = 7$ (curva cinza sólida). De maneira geral, o comportamento é o mesmo daquele definido por Nielsen-Olesen.	52
4.6	Solução numérica $g(r)$. As convenções são as mesmas utilizadas na figura 4.5. .	52
4.7	Solução numérica para o campo magnético $B(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.3. O campo magnético nulo compensa a divergência existente em $G_1(r = 0)$	53
4.8	Solução numérica para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.3.	53
4.9	Solução numérica para $a(r)$ a partir de (4.61) e (4.62) , via as condições de contorno (4.14) e (4.26). Utilizamos $e = v = 1$ e $r_0 = 1$ e $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 2$ (linha azul tracejada) e $n = 3$ (linha vermelha ponto-tracejada), $n = 5$ (curva laranja traço longo) e $n = 7$ (curva cinza-sólida). Devido a escolha da função dielétrica, as soluções diferem drasticamente das soluções usuais (obtidas na ausência do campo adicional).	56

4.10	Solução numérica para a função $g(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.9	57
4.11	Solução numérica para $B(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.9 com a adição de $n = 10$ (curva verde-escuro-sólida). Verifica-se que a função dielétrica modifica o comportamento do campo magnético, que anula-se em $r = r_0$, introduzindo uma estrutura interna ao vórtice.	57
4.12	Solução numérica para a densidade de energia total. As convensões são as mesmas da figura 4.11	58
4.13	Solução numérica $a(r)$ obtida a partir das equações (4.61) e (4.62) via as condições de contorno (4.14) e (4.26). Utilizamos $e = v = 1$ e $r_0 = 2$ e $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 2$ (curva azul tracejada) e $n = 3$ (curva vermelha ponto-tracejada), $n = 5$ (curva laranja traço-longo) e $n = 7$ (curva cinza sólida). De maneira geral, o comportamento é o mesmo daquele definido por Nielsen-Olesen.	59
4.14	Solução numérica $g(r)$. As convenções são as mesmas utilizadas na figura 4.13.	59
4.15	Solução numérica para o campo magnético $B(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.13 com a adição de $n = 10$ (curva verde-escuro-sólida). O campo magnético nulo compensa a divergência existente em $G_1(r = 0)$.	60
4.16	Solução numérica para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.15.	60
5.1	Soluções numéricas para $A(r)$ obtidas a partir das equações (5.55) e (5.56) via as condições de conntorno (5.14) e (5.47). Aqui utilizou-se $e = 2, h = 1, r_0 = 5$ e $m = 1$ (curva preta sólida), $m = 2$ (curva azul tracejada) e $m = 3$ (curva vermelha ponto-tracejada), $m = 7$ (curva laranja-traço-longo) e $m = 10$ (curva cinza sólida). Como já era de se esperar, as soluções aproximam-se dos valores limites monotonicamente.	71
5.2	Soluções numéricas para o campo $\alpha(r)$, as convenções são as mesmas da figura 5.1, e apresentam comportamento monotônico bem definido.	71
5.3	Soluções numéricas para o campo magnetico $B(r)$. As convenções seguem a figura 5.1. Aqui, mesmo na presença das condições topológicas, o campo magnético imita o comportamento não-topológico devido ao perfil não-trivial do campo escalar $\chi(r)$.	72

5.4	Soluções numéricas para a densidade de energia. As convenções seguem a figura 5.1. Neste caso, para $m = 1$, temos $\varepsilon_{bps}(r = 0) = 2h(C_0)^2$.	72
5.5	Soluções numéricas para $A(r)$ obtidas a partir das equações (5.55) e (5.56) via as condições de contorno (5.14) e (5.47). Aqui utilizou-se $e = 2, h = 1, r_0 = 7$ e $m = 1$ (curva preta sólida), $m = 2$ (curva azul tracejada) e $m = 3$ (curva vermelha ponto-tracejada), $m = 7$ (curva laranja-traço-longo) e $m = 10$ (curva cinza sólida). Como já era de se esperar, as soluções aproximam-se dos valores limites monotonicamente.	73
5.6	Soluções numéricas para o campo $\alpha(r)$, as convenções são as mesmas da figura 5.5, e apresentam comportamento monotônico bem definido.	74
5.7	Soluções numéricas para o campo magnético $B(r)$. As convenções seguem a figura 5.5. Aqui, mesmo na presença das condições topológicas, o campo magnético imita o comportamento não-topológico devido ao perfil não-trivial do campo escalar $\chi(r)$.	74
5.8	Soluções numéricas para a densidade de energia. As convenções seguem a figura 5.5. Neste caso, para $m = 1$, temos $\varepsilon_{bps}(r = 0) = 2h(C_0)^2$.	75
5.9	Soluções numéricas para $A(r)$ obtidas a partir das equações (5.78) e (5.79) via as condições de contorno (5.14) e (5.47). Aqui utilizou-se $e = 2, h = 1, r_0 = 5$ e para $m = 1$ (curva preta sólida), $m = 2$ (curva azul tracejada), $m = 3$ (curva vermelha pontilhada), e para $m = 5$ (curva laranja traço-longo), $m = 7$ (curva cinza tracejada) e $m = 10$ (curva verde-escuro-sólida). Neste caso, como m cresce, $A(r)$ gera um platô em torno de $r = r_0$.	79
5.10	Soluções numéricas para o campo $\alpha(r)$. As convenções seguem a figura 5.9, e apresentam comportamento monotônico bem definido.	79
5.11	Soluções numéricas para o campo magnético. As convenções são as mesmas da figura 5.9. Em $r = r_0$, o campo magnético $B(r)$ desaparece, garantindo que a distribuição de energia tenha um valor finito.	80
5.12	Soluções numéricas para a densidade de energia. As convenções são as mesmas da figura 5.9. Neste caso, obtém-se $\varepsilon_{bps}(r = 0) = e^2 h^2 + 2h(C_0)^2$, para $m = 1$.	80

5.13	Soluções numéricas para $A(r)$ obtidas a partir das equações (5.78) e (5.79) via as condições de contorno (5.14) e (5.47). Aqui utilizou-se $e = 2, h = 1, r_0 = 7$ e para $m = 1$ (curva preta sólida), $m = 2$ (curva azul tracejada), $m = 3$ (curva vermelha pontilhada), e para $m = 5$ (curva laranja traço-longo), $m = 7$ (curva cinza tracejada) e $m = 10$ (curva verde-escuro-sólida). Neste caso, como m cresce, $A(r)$ gera um platô em torno de $r = r_0$	81
5.14	Soluções numéricas para o campo $\alpha(r)$. As convenções seguem a figura 5.13, e apresentam comportamento monotônico bem definido.	82
5.15	Soluções numéricas para o campo magnético. As convenções são as mesmas da figura 5.13. Em $r = r_0$, o campo magnético $B(r)$ desaparece, garantindo que a distribuição de energia tenha um valor finito.	82
5.16	Soluções numéricas para a densidade de energia. As convenções são as mesmas da figura 5.13. Neste caso, obtém-se $\varepsilon_{bps}(r = 0) = e^2 h^2 + 2h(C_0)^2$, para $m = 1$. . .	83

Capítulo 1

Introdução

O conceito de defeito topológico na Física está intimamente ligado a quebra espontânea da simetria de um sistema físico, decorrente de uma transição de fase a qual tal sistema foi submetido. No contexto físico, os defeitos topológicos surgem das transições de fase que geram quebras espontâneas de simetria do sistema via o mecanismo de Kibble [1]. Matematicamente, eles surgem como soluções altamente estáveis de equações diferenciais não-lineares [2], e são classificados de acordo com a dimensão, recebendo o nome de sólitons.

No âmbito da teoria clássica de campos, os sólitons topológicos originários da quebra de simetria são descritos como soluções estáticas, estáveis e de energia finita (localizada em uma certa região do espaço) de equações de movimento de sistemas não-lineares. Usualmente, sólitons surgem da quebra espontânea de um tipo de simetria contínua.

Vale frisar que, a natureza da transição de fase é que determina qual tipo de defeito é gerado. Desse modo, podemos citar os defeitos tipo kinks, monopólos magnéticos, cordas cósmicas e vórtices. Em [2]-[3], apresentamos trabalhos relacionados a cada tipo de defeito mencionado. Nessa dissertação, abordaremos com ênfase somente do defeito topológico tipo vórtice.

De modo geral, os sólitons são oriundos da solução das equações de segunda ordem de Euler-Lagrange. Porém, em casos especiais, eles podem ser obtidos a partir da resolução de equações de primeira ordem. E. B. Bogomol'nyi em 1976 [4] e Prasad e C. M. Sommerfield [5], desenvolveram um método que permite obter sólitons a partir da solução de equações de primeira ordem, que ficaram conhecidas como equações BPS. As soluções obtidas são estáveis e possuem energia total finita, sendo proporcional a sua carga topológica.

O método BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) consiste em reescrever a densidade de

lagrangiana como uma soma de quadrados perfeitos e um termo de derivada total. A partir da integração da densidade de energia sobre todo o espaço, obtemos a energia mínima da configuração, ao impor que os termos quadráticos se anulam, originando as equações diferenciais de primeira ordem, as equações BPS, cuja as soluções satisfazem as equações de Euler-Lagrange, sendo portanto soluções legítimas do sistema.

Em particular, vórtices são sólitons planares construídos em teorias de gauge abelianas (2+1) dimensionais, são estacionários (não evoluem no tempo) e possuem simetria rotacional. Os vórtices oriundos da quebra espontânea de simetria de gauge local são de dois tipos: os topológicos, que possuem carga topológica não-nula, e os não-topológicos, que possuem carga topológica nula.

O primeiro estudo de configurações de vórtices foi realizado no campo da hidrodinâmica, através do trabalho de Helmholtz [6], na qual mostrou-se que um fluido pode rotacionar em torno de um eixo e esse movimento está associado a uma grandeza chamada *vorticidade*, definida como a circulação por unidade de área de um dado ponto do fluido [7]. Na matéria condensada, com a descoberta dos supercondutores do tipo II, e graças ao trabalho de Abrikosov [8], que usando a teoria de Ginzburg-Landau, obteve soluções não-relativísticas e com simetria rotacional.

O estudo de vórtices em teorias de campos foi motivado devido a ocorrência de tais estruturas no eletromagnetismo de Maxwell-Higgs, onde foram primeiramente estudados por Nielsen e Olesen [9] que obtiveram soluções de vórtices não-carregados estáveis na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs. Posteriormente, vórtices carregados foram obtidos a partir do estudo dos modelos de Chern-Simons-Higgs e Maxwell-Chern-Simons-Higgs. Nesse contexto, Jackiw, Lee e Weinberg [10, 11], levando em conta a quebra espontânea da simetria, obtiveram soluções que satisfaziam um conjunto de equações BPS.

Em alguns trabalhos mais recentes, vórtices BPS foram obtidos em *nonstandard models* [12]-[16], cujas soluções resultantes são empregadas na tentativa de explicar algumas questões cosmológicas [17]-[19].

Tendo em vista os diferentes cenários já mencionados, vale a pena considerar a ocorrência de vórtices estáticos no modelo $CP(N-1)$, uma vez que tal modelo é fenomenologicamente similar a teoria 4-dimensional de Yang-Mills, como é explicado em [20]. Nesse sentido, soluções

radialmente simétricas e planares de uma teoria $CP(2)$ dotadas de um termo de Maxwell foram obtidas em [21]. Entretanto, neste trabalho, as soluções foram obtidas diretamente das equações de Euler-Lagrange (as soluções não saturam o limite de Bogomol'nyi).

Em [22] as soluções para o modelo $CP(2)$ são obtidas seguindo o mesmo procedimento predito anteriormente. A obtenção do limite inferior da energia, através do procedimento de Bogomol'nyi, fornece as equações BPS (de primeira ordem) do modelo.

A dissertação está desenvolvida da seguinte forma: no Capítulo 2, apresento uma detalhada revisão sobre a obtenção de vórtices BPS no âmbito da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs [23]. Em particular, com foco em configurações regulares e possuidoras de simetria rotacional, procedo à implementação da prescrição de Bogomol'nyi, buscando a minimização da energia total do cenário efetivo, a partir da qual obtenho não só as equações BPS, mas também o limite mínimo para o valor da energia total propriamente dita. Resolvo as equações BPS numericamente com o auxílio de condições de contorno apropriadas e, a partir disso, resalto as principais características dos vórtices BPS canônicos.

No Capítulo 3, considero a existência de vórtices também no cenário Maxwell- $CP(2)$ [22]. Neste caso, além do campo de *gauge* padrão, a teoria é caracterizada pela presença de um setor escalar composto por um tripleto de campos escalares complexos. Como no caso anterior, implemento a minimização da energia total inerente às configurações dotadas de simetria rotacional. Assim, obtenho as equações BPS e o limite de Bogomol'nyi próprio ao modelo efetivo. A partir da resolução numérica das equações BPS, obtenho ainda estruturas regulares possuidoras de energia total finita. Estas soluções servirão como referência a ser utilizada durante o processo de introdução dos resultados originais apresentados nesta Dissertação.

Já no Capítulo 4, analiso uma extensão ao modelo de Maxwell-Higgs padrão. Neste caso, além dos campos de *gauge* e de *Higgs*, considero a presença de um campo escalar adicional, real e neutro, a interagir com o setor *gauge* via uma função dielétrica não-trivial[24]. Neste cenário, algo mais complexo, esclareço a construção de vórtices BPS a partir do uso da prescrição de Bogomol'nyi. Em particular, enfatizo que, a depender da estrutura funcional escolhida para a função dielétrica, as soluções finais apresentam importantes alterações em suas formas (quando comparadas com suas contrapartidas usuais, estudadas no Capítulo 2). De maneira geral, as alterações são entendidas como estruturas internas causadas pela presença do campo escalar

adicional.

Finalmente, o Capítulo 5 traz os resultados originais oriundos de minhas atividades de pesquisa. Neste capítulo, proponho uma extensão à teoria de Maxwell- $CP(2)$ a partir da introdução de um campo escalar, real e neutro, ainda a interagir com o setor de *gauge* via uma função dielétrica não-usual. Na primeira seção, partindo da densidade de lagrangeana do modelo, obtenho as equações de Euler-Lagrange para os campos de gauge $A(r)$, de Higgs $\alpha(r)$, e para o campo neutro $\chi(r)$. Em seguida, após fixar os ansatz, obtemos dois valores constantes da função $\beta(r)$, a partir das quais construo as soluções BPS.

Na segunda seção, ainda com foco em estruturas radialmente simétricas, desenvolvo o formalismo BPS ao modelo. A partir do tensor de energia-momento, encontro a expressão para a densidade de energia da configuração. Em seguida, através do procedimento de Bogomol'nyi [4], escrevo a energia total como uma soma de quadrados perfeitos e derivadas totais, e a partir da minimização da energia total, obtenho o limite mínimo para a energia e as equações BPS próprias ao referido modelo efetivo. Na última seção, tal como no Capítulo 4, esclareço que, também neste caso, a depender da estrutura funcional escolhida para a função dielétrica, os vórtices BPS apresentam alterações em suas respectivas formas, tais alterações sendo entendidas como estruturas internas originadas pela presença do campo neutro adicional.

No Capítulo 6, encerro esta Dissertação discutindo as principais conclusões oriundas do meu trabalho investigativo.

Capítulo 2

Vórtices BPS na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs

Vórtices são estruturas planares, regulares (isto é, livre de divergências), possuidoras de simetria rotacional e energia total finita. Tais estruturas são construídas através da resolução numérica das equações de Euler-Lagrange (equações diferenciais de segunda-ordem). Todavia, a partir do método desenvolvido por E. Bogomol'nyi, vórtices também podem ser obtidos via um conjunto de equações diferenciais de primeira-ordem, denominadas equações BPS. As estruturas obtidas desta maneira são conhecidos como vórtices BPS. Além disso, pode-se demonstrar explicitamente que, as soluções BPS satisfazem também as equações de Euler-Lagrange, sendo portanto, soluções legítimas da respectiva teoria.

Neste capítulo, apresentamos uma revisão a respeito da obtenção de vórtices BPS no âmbito da Eletrodinâmica de Maxwell-Higgs, um dos cenários teóricos considerado por Bogomol'nyi para o desenvolvimento de seu método.

2.1 O modelo de Maxwell-Higgs

O modelo de Maxwell-Higgs descreve a interação entre o campo (vetorial) eletromagnético A_μ e o campo (complexo) de Higgs ϕ . Em particular, a sua densidade de lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{(D_\mu\phi)}D^\mu\phi - V(|\phi|), \quad (2.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor do campo eletromagnético, $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ é a derivada covariante (responsável pela interação entre os campos vetorial e escalar. Neste caso, “ e ” representa uma constante de acoplamento entre os campos vetorial e escalar). Neste cenário, $V(|\phi|)$ representa o potencial de autointeração para o setor escalar, isto é

$$V(|\phi|) = \frac{e^2}{2} (v^2 - |\phi|^2)^2, \quad (2.2)$$

na qual v representa o valor esperado para o campo escalar no vácuo.

A partir da equação (2.1), obtemos as equações do movimento, relacionadas respectivamente, para os campos vetorial e escalar, a saber

$$\partial_\mu F^{\mu\beta} = -J^\beta, \quad (2.3)$$

$$D^\alpha D_\alpha \phi = -\frac{\partial V(|\phi|)}{\partial \bar{\phi}}, \quad (2.4)$$

nas quais

$$J^\beta = ie \left(\bar{\phi} D^\beta \phi - \phi \overline{D^\beta \phi} \right), \quad (2.5)$$

representa a densidade de corrente (conservada).

A componente temporal ($\beta = 0$) da equação (2.3) é a Lei de Gauss própria ao modelo (2.1). Para o caso de campos estáticos, esta expressão pode ser reescrita como:

$$\partial_i (\partial^i A^0) = -2e^2 |\phi|^2 A^0, \quad (2.6)$$

na qual a repetição do índice “ i ” representa um somatório apenas sobre as coordenadas espaciais (isto é, $i = 1, 2, 3$).

Neste caso, uma vez que $A^0 = 0$ satisfaz identicamente a equação (2.6), pode-se concluir que a escolha da condição de gauge resulta em configurações eletricamente neutras, isto é, possuidoras de carga elétrica total nula. Desse modo, as configurações serão puramente magnéticas. Ainda em um cenário com campos estáticos, a componente espacial da equação (2.3) resulta na Lei de Ampère

$$\epsilon_{ij} \partial_i B = J_i, \quad (2.7)$$

onde

$$J_i = ie \left(\bar{\phi} D_i \phi - \phi \overline{D_i \phi} \right), \quad (2.8)$$

representa a componente espacial do vetor densidade de corrente. Aqui, B é o campo magnético.

Vórtices são configurações planares dotadas de simetria rotacional. Em particular, em um cenário de campos estáticos, tais configurações são descritas pelos Ansatz

$$\phi(r, \theta) = v g(r) e^{in\theta}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{A}(r, \theta) = -\frac{\hat{\theta}}{er} (a(r) - n), \quad (2.10)$$

(os mesmos usados por Nielsen-Olesen em [9]), na qual r e θ são as coordenadas polares, $g(r)$ e $a(r)$ são funções adimensionais, e n é o winding number que caracteriza a topologia da configuração. Neste caso, da necessidade do campo de Higgs ser unívoco, isto é,

$$\phi(r, 0) = \phi(r, 2\pi), \quad (2.11)$$

os valores permitidos para o winding number são $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Para além disso, os Ansatz (2.9) e (2.10) encerrarão vórtices regulares (isto é, livres de divergências) quando as funções $g(r)$ e $a(r)$ satisfizerem

$$g(r \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad a(r \rightarrow 0) \rightarrow n. \quad (2.12)$$

Tendo em mente os Ansatz (2.9) e (2.10), as equações (2.7) e (2.4) podem ser reescritas como

$$\frac{dB}{dr} = -\frac{2eav^2 g^2}{r}, \quad (2.13)$$

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{a^2 g}{r^2} = \frac{1}{2v^2} \frac{dV}{dg}, \quad (2.14)$$

nas quais o campo magnético $B(r)$ é dado por

$$B = -\frac{1}{er} \frac{da}{dr}. \quad (2.15)$$

As equações (2.13) e (2.14) são as equações de Euler-Lagrange para as funções $a(r)$ e $g(r)$. Tais equações podem ser resolvidas a partir da fixação de condições de contorno específicas sobre as funções $a(r)$ e $g(r)$.

2.2 Formalismo BPS aplicado ao modelo de Maxwell-Higgs.

A partir de agora, revisamos a implementação do formalismo BPS no âmbito da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs. Para tanto, o ponto de partida é o respectivo tensor de energia-momento, o qual é dado por

$$T_{\lambda\rho} = -F_{\mu\lambda}F^\mu{}_\rho + D_\lambda\phi\overline{D_\rho\phi} + \overline{D_\lambda\phi}D_\rho\phi - \eta_{\lambda\rho}\mathcal{L}. \quad (2.16)$$

Por definição, a componente temporal do tensor de energia momento é igual a densidade de energia do modelo, ou seja, $\varepsilon = T_{00}$. Para o caso de campos estáticos, a densidade de energia pode ser reescrita simplesmente como

$$\varepsilon = T_{00} = -\mathcal{L}. \quad (2.17)$$

A partir da qual obtemos

$$\varepsilon = \frac{1}{2}B^2 + v^2 \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) + \frac{e^2 v^4}{2} (1 - g^2)^2, \quad (2.18)$$

na qual utilizamos os ansatz (2.9) e (2.10).

A energia total do modelo é obtida através da integral da densidade de energia sobre o todo o espaço

$$E = \int \varepsilon(r) d^2r, \quad (2.19)$$

ou

$$E = \int \left[\frac{1}{2}B^2 + v^2 \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) + \frac{e^2 v^4}{2} (1 - g^2)^2 \right] d^2r, \quad (2.20)$$

via a qual concluímos que, no intuito de construirmos vórtices com energia total finita, devemos fixar

$$a(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad g(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1. \quad (2.21)$$

Agora, a partir da prescrição de Bogomol'nyi [4], a densidade de energia (2.18) é reescrita como uma soma de quadrados perfeitos e um termo de derivada total. Neste caso, a expressão (2.20) para a energia total resulta em

$$E = \int \left[\frac{1}{2} (B \mp ev^2 (1 - g^2))^2 + v^2 \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} \right)^2 \right] d^2r + E_{bps}, \quad (2.22)$$

no qual, vale

$$E_{bps} = 2\pi \int_0^\infty r \varepsilon(r)_{bps} dr, \quad (2.23)$$

e

$$\varepsilon_{bps} = \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} [a(g^2 - 1)]. \quad (2.24)$$

Neste caso, dadas as condições (2.12) e (2.21), o valor da expressão em (2.23) pode ser calculado explicitamente, a saber:

$$E_{BPS} = \pm 2\pi v^2 \int_0^\infty d[a(g^2 - 1)] = 2\pi v^2 |n|, \quad (2.25)$$

na qual o sinal superior corresponde a $n > 0$ e o sinal inferior a $n < 0$. A partir da qual a energia total (2.22) resulta em

$$E = 2\pi \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} (B \mp ev^2 (1 - g^2))^2 + v^2 \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} \right)^2 \right] r dr + E_{bps} \geq 2\pi v^2 |n|. \quad (2.26)$$

Neste cenário, verifica-se que o resultado (2.25) introduz um limite inferior para o valor da energia total do modelo. Em particular, a energia será a mínima possível quando as funções $g(r)$ e $a(r)$ satisfizerem

$$\frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} = 0 \rightarrow \frac{dg}{dr} = \pm \frac{ag}{r}, \quad (2.27)$$

$$B \mp ev^2 (1 - g^2) = 0 \rightarrow B = \pm ev^2 (1 - g^2), \quad (2.28)$$

ou

$$\frac{1}{r} \frac{da}{dr} = \pm e^2 v^2 (g^2 - 1). \quad (2.29)$$

As quais são as equações BPS de primeira ordem próprias à eletrodinâmica de Maxwell-Higgs. A partir da resolução destas equações segundo as condições de contorno (2.12) e (2.21), são obtidos vórtices regulares de energia total dada por $E = E_{bps} = 2\pi v^2 |n|$, isto é, quantizada segundo o valor do winding number n .

2.3 Soluções BPS

Antes de construirmos as soluções para as equações BPS, é necessário verificar a compatibilidade das condições de contorno (2.12) e (2.21). Para isso, deve-se implementar o processo de

linearização das respectivas equações de primeira ordem. Este processo busca definir a forma funcional dos campos próximos às regiões $r = 0$ e $r \rightarrow \infty$. Como resultado, surgem soluções analíticas aproximadas para as funções $a(r)$ e $g(r)$.

Por simplicidade, vamos considerar somente os sinais superiores das equações (2.27) e (2.29). Neste caso, as equações tornam-se

$$\frac{dg}{dr} = \frac{ag}{r}, \quad (2.30)$$

e

$$\frac{1}{r} \frac{da}{dr} = e^2 v^2 (g^2 - 1), \quad (2.31)$$

próximos da origem ($r \rightarrow 0$), os campos $a(r)$ e $g(r)$ podem ser aproximados por

$$a(r) \approx n - \delta a(r) \quad \text{e} \quad g(r) \approx \delta g(r), \quad (2.32)$$

nas quais as contribuições em δ representam pequenos desvios dos respectivos valores assintóticos $a(r=0) = n$ e $g(r=0) = 0$. Em particular, as condições (2.12), pode-se deduzir condições de contorno também para $\delta a(r)$ e $\delta g(r)$, a saber

$$\delta a(r=0) = 0 \quad \text{e} \quad \delta g(r=0) = 0. \quad (2.33)$$

Neste caso, a partir de (2.32), a equação (2.30) pode ser rescrita como

$$\frac{d}{dr} \delta g(r) = \frac{(n - \delta a(r)) (\delta g(r))}{r} = n \frac{\delta g(r)}{r}, \quad (2.34)$$

na qual foram considerados apenas as contribuições lineares em δ (daí o termo *linearização*).

A equação (2.34) tem por solução:

$$\delta g(r) = G_0 r^n, \quad (2.35)$$

na qual G_0 é uma constante positiva (campos monotônos), e $n > 0$.

De maneira análoga, substituindo (2.32) na equação BPS (2.31), resulta

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \delta a(r) = -e^2 v^2, \quad (2.36)$$

(na qual, novamente, apenas as contribuições lineares em δ foram consideradas) cuja solução é

$$\delta a(r) = \frac{e^2 v^2 r^2}{2}, \quad (2.37)$$

Agora, tendo em mente (2.35) e (2.37), as soluções (2.32) resultam em

$$g(r) \approx G_0 r^n, \quad (2.38)$$

e

$$a(r) \approx n - \frac{e^2 v^2 r^2}{2}, \quad (2.39)$$

plenamente compatíveis com as condições (2.12) (sendo as soluções (2.38) e (2.39) elas próprias compatíveis com as soluções (2.12)).

Conforme a mesma prescrição, no limite $r \rightarrow \infty$, os campos $a(r)$ e $g(r)$ podem ser aproximados por

$$a(r) \approx \delta a(r), \quad \text{e} \quad g(r) \approx 1 - \delta g(r). \quad (2.40)$$

A partir das quais as equações (2.30) e (2.31) podem ser reescritas, reespectivamente, como

$$\frac{d\delta g(r)}{dr} = \frac{\delta a(r)}{r}, \quad (2.41)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(\delta a(r))}{dr} = -2e^2 v^2 \delta g(r), \quad (2.42)$$

estando as funções $\delta a(r)$ e $\delta g(r)$ submetidas às condições

$$\delta a(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \delta g(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (2.43)$$

Aplicando o operador d/dr nas equações (2.41) e (2.42), obtemos as equações diferenciais de segunda ordem

$$\frac{d^2 \delta g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\delta g}{dr} - 2e^2 v^2 \delta g = 0, \quad (2.44)$$

$$\frac{d^2 \delta a}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\delta a}{dr} - 2e^2 v^2 \delta a, \quad (2.45)$$

na qual fornecem as seguintes soluções aproximadas

$$\delta g(r) = C_0 K_0(m_H r), \quad (2.46)$$

e

$$\delta a(r) = C_1 m_a r K_1(m_a r), \quad (2.47)$$

onde C_0 e C_1 são constantes reais positivas, e as funções K_0 e K_1 são as respectivas funções de Bessel modificadas do segundo tipo de ordem zero e um, respectivamente.

Portanto, as soluções aproximadas para os campos $g(r)$ e $a(r)$ são, respectivamente

$$g(r) \approx 1 - \frac{G_\infty}{\sqrt{r}} \exp(-m_H r), \quad (2.48)$$

$$a(r) \approx m_a G_\infty \sqrt{r} \exp(-m_a r), \quad (2.49)$$

na qual G_∞ representam uma constante real positiva (novamente campos monotônicos). Além disso, verificamos que tomando o limite $r \rightarrow \infty$ recuperamos as condições de contorno topológicas, como esperado.

Por fim, vale destacar que os argumentos das exponenciais em (2.48) e (2.49), correspondem as massas dos bósons escalar e vetorial do modelo de Maxwell-Higgs (isto é, os parâmetros a controlarem a velocidade do decaimento exponencial)

$$m_H = m_a = \sqrt{2}ev, \quad (2.50)$$

e a relação

$$\frac{m_H}{m_a} = +1, \quad (2.51)$$

define o limite de Bogomol'nyi.

Após a verificação da validade das condições de contorno via o processo de linearização, apresentamos as soluções para os campos $a(r)$ e $g(r)$, que são obtidas através do tratamento numérico das equações (2.27) e (2.29), tendo em vista as condições de contorno (2.12) e (2.21). Como resultado, além das soluções para $a(r)$ e $g(r)$, mostramos também as soluções para o campo magnético $B(r)$ e a densidade de energia $\varepsilon(r)$, para $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 2$ (curva azul tracejada), $n = 4$ (curva vermelha ponto-tracejada) e $n = 7$ (curva laranja traço-longo).

A figura 2.1 apresenta as soluções para a função $a(r)$, via a qual verifica-se que seu máximo é atingido em $r = 0$ (isto é, na origem), a partir do qual a solução decresce monotonicamente, até anular-se no limite $r \rightarrow \infty$.

As soluções numéricas para a função $g(r)$ são mostradas na figura 2.2. Nota-se que todas as soluções são nulas em $r = 0$, crescendo monotonicamente ao seu valor máximo no limite $r \rightarrow \infty$.

A figura 2.3 mostra as soluções numéricas para o campo magnético $B(r)$ construídas com o auxílio da equação (2.15). Em particular, verifica-se que todas as soluções independente do valor da vorticidade n , converge para $B(r = 0) = ev^2$.

Por fim, as soluções numéricas para a densidade de energia $\varepsilon(r)$ são mostradas na figura 2.4, obtidas a partir da expressão em (2.24). Neste caso, próximo da origem, a solução aproximada para a densidade de energia pode ser reescrita como

$$\varepsilon(r=0) \approx \pm e^2 v^4 \left\{ [1 - (1+n) G_0^2 r^{2n}] + 2n^2 G_0^2 r^{2n-2} \right\}. \quad (2.52)$$

A partir da qual são obtidos os valores

$$\varepsilon_{n=1}(r=0) = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{n \neq 1}(r=0) = 1, \quad (2.53)$$

onde $G_0 = 3/4$ e $e^2 = v^4 = 1$.

De maneira análoga, no limite $r \rightarrow \infty$, a solução analítica aproximada para a densidade de energia resultará

$$\begin{aligned} \varepsilon(r) \approx & \pm \sqrt{2} e v^3 \exp(-m_A r) \left\{ G_\infty \left(\frac{1}{r} - m_A \right) [(1 - G_\infty \exp(-m_H r))^2 - 1] \right\} \\ & + \left\{ \pm 2 G_\infty^2 \sqrt{2} e v^3 \exp(-m_A r) [\exp(-m_H r) - G_\infty \exp(-2m_H r)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

via qual verifica-se a condição

$$\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad (2.55)$$

corroborando, novamente, a condição de energia total finita.

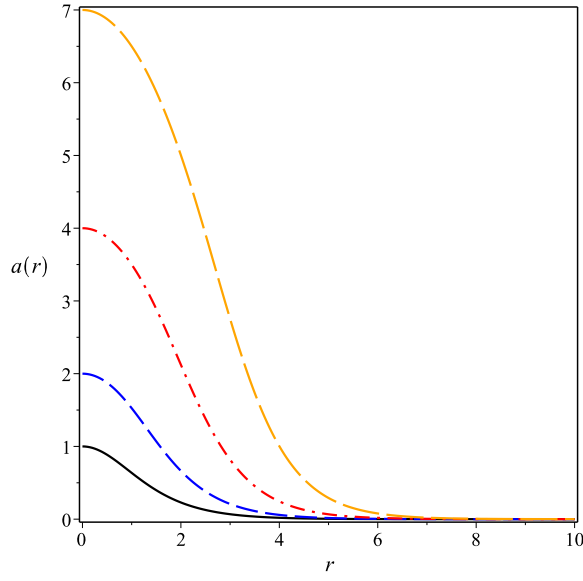


Figura 2.1: Solução numérica para a função $a(r)$ obtida a partir das equações (2.30) e (2.31) via as condições de contorno (2.12) e (2.21). Aqui, utilizou-se $e = v = +1$ e $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 2$ (curva azul tracejada), $n = 4$ (curva vermelha ponto-tracejada), e $n = 7$ (curva laranja traço-longo)

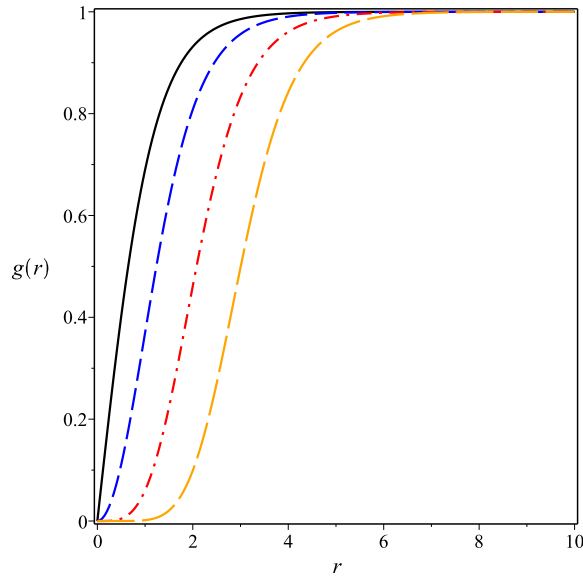


Figura 2.2: Solução numérica para a função $g(r)$ obtida a partir das equações (2.30) e (2.31) via as condições de contorno (2.12) e (2.21). As convenções são as mesmas da figura 2.1.

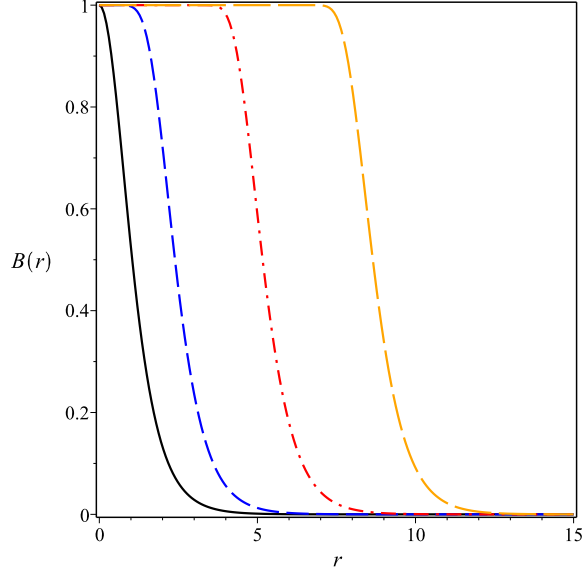


Figura 2.3: Solução numérica para o campo magnético $B(r)$ construída com o auxílio da equação (2.15). As convenções são as mesmas para a figura 2.1. Neste caso, as condições de contorno são $B(r=0) \approx ev^2 = 1$ e $B(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

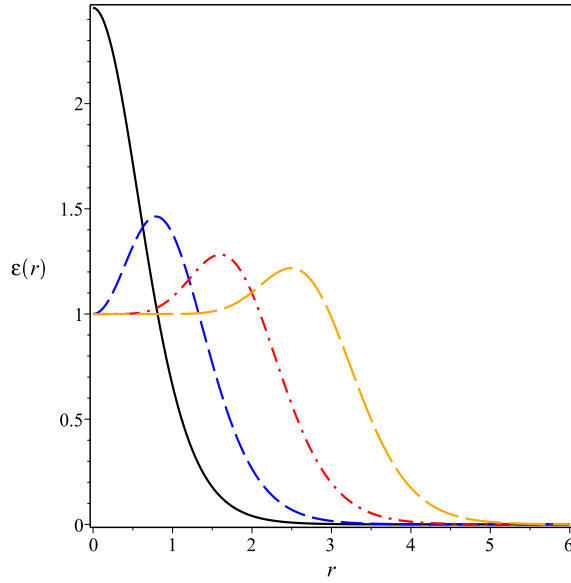


Figura 2.4: Solução numérica para a densidade de energia $\varepsilon(r)$ obtida via expressão (2.24). Em particular, para $n = 1$ e $n \neq 1$ valem, respectivamente, $\varepsilon(r=0) = \frac{5}{2}$ e $\varepsilon(r \neq 0) = 1$ (vide a solução (2.57)). Por outro lado, no limite assintótico, vale $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, independente do valor da vorticidade (conforme a solução aproximada em (2.59)).

Capítulo 3

Vórtices BPS no modelo de Maxwell-CP(2)

Vórtices podem ser obtidos em diversos cenários. No capítulo 2, por exemplo, as soluções para os vórtices resultantes possuem energia total finita e são puramente magnéticas. Além do modelo de Maxwell-Higgs, os vórtices BPS ocorrem em outros cenários distintos, dos quais podemos citar: os vórtices na eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs e Maxwell-Chern-Simons-Higgs, na qual os vórtices obtidos possuem, além do fluxo magnético uma carga elétrica diferente de zero. Tendo em vista a ocorrência de vórtices nos cenários citados acima, é interessante considerar a ocorrência de tais estruturas oriundas de um modelo $CP(N-1)$ de gauge, devido a sua particular conexão fenomenológica com a teoria 4-dimensional de Yang-Mills [20]. Nesse sentido, surge a necessidade de obter soluções de vórtices de primeira ordem em teorias $CP(2)$ planares dotadas de um termo de Maxwell.

Portanto, neste capítulo, apresentamos uma breve revisão acerca da obtenção de vórtices BPS no âmbito da teoria de Maxwell- $CP(2)$.

3.1 O modelo de Maxwell-CP(2)

A densidade de lagrangeana que descreve o modelo projetado $CP(2)$ é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{(P_{ab}D_\mu\phi_b)}(P_{ac}D^\mu\phi_c) - V(|\phi_3|), \quad (3.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor do campo eletromagnético, $P_{ab} = \delta_{ab} - h^{-1}\phi_a\overline{\phi_b}$ é o operador de projeção. O campo $\phi_a(x^\mu)$ é minimamente acoplado ao campo de gauge através da derivada

covariante

$$D_\mu \phi_a = \partial_\mu \phi_a - ie A_\mu Q_{ab} \phi_b, \quad (3.2)$$

com $Q_{ab} = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_N)$ representando a matriz de carga real. Os campos escalares complexos que estão sujeitos a seguinte condição

$$\overline{\phi_a} \phi_a = h. \quad (3.3)$$

O potencial $V(|\phi_3|)$, é o potencial de auto-interação introduzido em [21].

As equações de movimento para o campo vetorial e escalar são

$$\partial_\mu F^{\mu\lambda} = -J^\lambda, \quad (3.4)$$

$$P_{ab} \left\{ 2P_{bc} D_\mu (P_{cd} D^\mu \phi_d) - D^\mu D_\mu \phi_b + \frac{\partial V(|\phi_3|)}{\partial \phi_b} \right\} = 0, \quad (3.5)$$

na qual

$$J^\lambda = ie \left\{ P_{ac} D^\lambda \phi_c \overline{(P_{ab} Q_{bf} \phi_f)} - P_{ab} Q_{cd} \phi_d \overline{(P_{ac} D^\lambda \phi_b)} \right\}, \quad (3.6)$$

representa o 4-vetor densidade de corrente (conservado).

Assim como no modelo de Maxwell-Higgs, fazendo $\lambda = 0$ na equação (3.4), obtemos a Lei de Gauss para o modelo (3.1). Portanto, para o caso de campos estáticos, (3.4) pode ser reescrita como:

$$\partial_i (\partial^i A^0) = J^0, \quad (3.7)$$

na qual a repetição do índice “ i ” representa um somatório apenas sobre as coordenadas espaciais (isto é, $i = 1, 2, 3$), e

$$J^0 = -2e^2 A^0 \overline{(P_{ab} D^0 \phi_b)} P_{ac} Q_{cd} \phi_d. \quad (3.8)$$

A partir da fixação do *gauge temporal* ($A^0 = 0$), a equação (3.7) é identicamente satisfeita. Por tanto, pode-se concluir que a escolha resulta em configurações com campo elétrico nulo.

Temos como objetivo obter vórtices topológicos gerados pelo modelo $CP(2)$, como em [22]. Para isso, vamos considerar $N = 3$, para o modelo $CP(N - 1)$ (3.1), onde N é o número de campos escalares complexos que serão definidos a seguir. As soluções obtidas para o modelo são descritas a partir dos ansatz utilizados em [21]

$$A_i = -A^i = \frac{1}{er} \epsilon^{ij} n^j A(r), \quad (3.9)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = h^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} e^{im_1\theta} \sin(\alpha(r)) \cos(\beta(r)) \\ e^{im_2\theta} \sin(\alpha(r)) \sin(\beta(r)) \\ e^{im_3\theta} \cos(\alpha(r)) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

no qual ϵ^{ij} (com $\epsilon^{12} = +1$) e $n^j = (\cos \theta, \sin \theta)$ são as componentes bidimensionais do tensor de Levi-Civita e do vetor de posição, respectivamente. Os números m_i (com $i = 1, 2, 3$ e $m_i \in \mathbb{Z}$), são os winding numbers do modelo projetado. Devido aos perfis das soluções, o campo magnético é escrito como

$$B(r) = -\frac{1}{er} \frac{dA}{dr}, \quad (3.11)$$

Uma vez que as soluções de vórtices precisam ser regulares na origem, definimos as seguintes condições de contorno

$$A(r \rightarrow 0) \rightarrow 0, \quad \alpha(r \rightarrow 0) \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

Efetivamente, existem somente duas combinações entre as matrizes de carga Q e os winding numbers que geram sólitons topológicos, são elas : (i) $Q_{ab} = \lambda_3/2$, com $m_1 = -m_2 = m$, $m_3 = 0$, e $Q_{ab} = \lambda_8/2$, com $m_1 = m_2 = m$, $m_3 = -2m$; onde λ_3 e λ_8 são as matrizes diagonais de Gell-Mann, dadas por

$$\lambda_3 = \text{diag}(1, -1, 0), \quad \sqrt{3}\lambda_8 = \text{diag}(1, 1, -2). \quad (3.13)$$

Em [21], é demonstrado que essas duas combinações reproduzem as outras, existindo assim somente um quadro efetivo. A título de informação, as matrizes de Gell-Mann são um conjunto de matrizes de oito matrizes hermitianas e de traço nulo, que são as geradoras da algebra $SU(3)$ de Lie.

Neste trabalho, vamos abordar o caso definido para $m_1 = -m_2 = m$, $m_3 = 0$ e

$$Q_{ab} = \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 0). \quad (3.14)$$

Desse modo, considerando essa escolha e usando os ansatz (3.9) e (3.10), obtemos a seguinte equação diferencial para a variável $\beta(r)$

$$\frac{d^2\beta}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + 2 \cot(\alpha) \frac{d\alpha}{dr} \right) \frac{d\beta}{dr} - \frac{\sin^2(\alpha) \sin(4\beta)}{r^2} \left(m - \frac{A}{2} \right)^2 = 0, \quad (3.15)$$

na qual fornece duas soluções constantes, são elas

$$\beta(r) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \quad \text{e} \quad \beta(r) = \frac{\pi}{2}k, \quad (3.16)$$

na qual $k \in \mathbb{Z}$.

3.2 Formalismo BPS aplicado ao modelo CP(2)

Nesta seção, buscamos obter um conjunto de equações de primeira ordem (as equações BPS) para o modelo $CP(2)$. Para isso, seguiremos o mesmo roteiro adotado para o modelo canônico de Maxwell-Higgs, ou seja, a partir da minimização da energia total do sistema. Nosso ponto de partida é o respectivo tensor de energia-momento, o qual é dado por

$$T_{\lambda\rho} = -F_{\mu\lambda}F^\mu{}_\rho + \overline{(P_{ab}D_\lambda\phi_b)}(P_{ac}D_\rho\phi_c) + \overline{(P_{ac}D_\rho\phi_c)}P_{ab}D_\lambda\phi_b - \eta_{\lambda\rho}\mathcal{L}, \quad (3.17)$$

que é obtida através das equações

$$T_{\lambda\rho} = \frac{2}{\sqrt{-\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta^{\lambda\rho}} (-\eta\mathcal{L}), \quad (3.18)$$

e (3.1).

A componente temporal de (3.17), nos fornece a densidade de energia, sendo escrita como

$$\varepsilon = \frac{1}{2}B^2 + h \left[\left(\frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 \sin^2 \alpha \right] + V(\alpha), \quad (3.19)$$

na qual definimos a função auxiliar

$$W = W(\alpha, \beta) = 1 - \sin^2(\alpha) \cos^2(2\beta), \quad (3.20)$$

com $\beta(r)$ sendo dado por (3.16).

A partir da integração de (3.19) sobre todo o espaço, obtemos a energia total do modelo

$$E = \int \varepsilon(r) d^2r,$$

ou

$$E = \int \left[\frac{1}{2}B^2 + h \left[\left(\frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{W}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 \sin^2 \alpha \right] + V \right] d^2r. \quad (3.21)$$

A fim de obter as soluções de energia mínima, vamos aplicar do método de Bogomol'nyi, que consiste em reescrever (3.19) como uma soma de quadrados perfeitos. Desse modo, a equação expressão (3.21) torna-se

$$\begin{aligned} E = & \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{er} \frac{dA}{dr} \right) \mp \sqrt{2V} \right]^2 + h \left[\frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \sin \alpha \right]^2 \right\} d^2r \\ & \mp \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{e} \sqrt{2V} \frac{d}{dr} (A - 2m) + (A - 2m) h \sqrt{W} \frac{d}{dr} \cos \alpha \right] \right\} d^2r. \end{aligned} \quad (3.22)$$

O último termo da expressão acima pode ser convertido em uma derivada total, desde que consideremos a seguinte restrição fundamental.

$$\frac{1}{e} \frac{d}{dr} \left(\sqrt{2V} \right) = h \sqrt{W} \frac{d}{dr} (\cos \alpha). \quad (3.23)$$

Portanto, a energia total (3.22) pode ser reescrita

$$\begin{aligned} E = E_{bps} + \pi \int_0^\infty \left[\left(-\frac{1}{er} \frac{dA}{dr} \right) \mp \sqrt{2V} \right]^2 r dr + \\ + 2\pi h \int_0^\infty \left[\frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \sin \alpha \right]^2 r dr \geq E_{bps}, \end{aligned} \quad (3.24a)$$

no qual, vale

$$E_{bps} = 2\pi \int_0^\infty r \varepsilon(r)_{bps} dr, \quad (3.25)$$

e

$$\varepsilon_{bps} = \mp \frac{1}{er} \frac{d}{dr} \left[(A - 2m) \sqrt{2V} \right]. \quad (3.26)$$

Portanto,

$$E_{bps} = \mp 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{er} \frac{d}{dr} \left[(A - 2m) \sqrt{2V} \right] = \mp \frac{2\pi}{e} \left[(A - 2m) \sqrt{2V} \right]_0^\infty. \quad (3.27)$$

Para obtermos a solução de (3.27), precisamos conhecer os valores de $A(r)$ e do potencial V , tanto na origem quanto no limite assintótico. A expressão (3.12) nos fornece o valor $A(r)$ na origem, já para o limite assintótico temos que

$$A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m. \quad (3.28)$$

Para o potencial, as condições de contorno são:

$$V(r \rightarrow 0) \rightarrow V_0, \quad V(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad (3.29)$$

na qual V_0 é um valor finito e positivo. Desse modo, a equação (3.27) se reduz a

$$E_{bps} = \mp \frac{4\pi}{e} m \sqrt{2V_0}. \quad (3.30)$$

Portanto, concluí-se que (3.30) introduz um limite inferior para o valor da energia total do modelo, sendo quantizada pelos valores de winding number m ($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). Em particular, a energia total será a mínima possível quando $\alpha(r)$ e $A(r)$ satisfazerem

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp e \sqrt{2V}, \quad (3.31)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sqrt{W} \sin \alpha}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right), \quad (3.32)$$

as quais são as equações BPS do modelo, obtidas via o procedimento de Bogomol'nyi. Estas equações, juntamente com (3.23), satisfazem as equações de Euler-Lagrange, sendo portanto soluções legítimas do modelo.

3.3 Soluções BPS

Na seção anterior, obtemos as equações de primeira ordem do modelo $CP(2)$. Agora, daremos prosseguimento investigando as soluções BPS para os dois valores da função $\beta(r)$ dados por (3.16). Em ambos os casos, vamos obter as equações de primeira ordem, o potencial da configuração e as condições de contorno para os campos $\alpha(r)$ e $A(r)$. Por fim, apresentaremos as soluções numéricas para $\alpha(r)$ e $A(r)$, bem como para o campo magnético e a densidade de energia.

3.3.1 Primeiro caso: $\beta(r) = \beta_1$

Partindo da solução de (3.15)

$$\beta(r) = \beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k. \quad (3.33)$$

Para este valor de $\beta(r)$, a função auxiliar $W = W(\alpha, \beta_1) = 1$, desse modo, a equação (3.23) se reduz a

$$\frac{d}{dr}(eh \cos \alpha) = \frac{d}{dr}(\sqrt{2V}), \quad (3.34)$$

cujas soluções são o potencial para a primeira solução de $\beta(r)$

$$V(\alpha) = \frac{e^2 h^2}{2} \cos^2(\alpha), \quad (3.35)$$

corroborando, novamente, a condição de energia total finita. As equações (3.31) e (3.32) são reescritas como

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp e^2 h \cos(\alpha) \quad (3.36)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sin(\alpha)}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right). \quad (3.37)$$

Antes de obtermos as soluções aproximadas para $\alpha(r)$ e $A(r)$, através das equações (3.31) e (3.32), devemos conhecer como tais campos se comportam nos limites assintóticos. Como passo inicial, substituiremos (3.33) e (3.35) na expressão da densidade de energia (3.19), e usando a finitude da energia ($\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$), obtemos

$$\varepsilon = \frac{B^2}{2} + h \left[\left(\frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 \right] + \frac{e^2 h^2}{2} \cos^2 \alpha. \quad (3.38)$$

Para que a condição de finitude da energia seja satisfeita, os campos $\alpha(r)$ e $A(r)$ devem obedecer as seguintes condições

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m. \quad (3.39)$$

A partir da condição assintótica (3.39), da condição na origem (3.12), e do potencial (3.35), obtemos a energia total (3.30) dos vórtices resultantes, dada por

$$E_{bps} = \mp 4\pi h m. \quad (3.40)$$

Agora, através do processo de linearização, vamos obter as soluções aproximadas para os campos $\alpha(r)$ e $A(r)$, a partir das equações BPS (3.36) e (3.37), e das condições de contorno para os campos (3.12) e (3.39). O procedimento é similar ao aplicado no segundo capítulo.

Próximo da origem ($r \rightarrow 0$), as soluções encontradas são

$$\alpha(r) \approx C_1 r^m, \quad A(r) \approx \lambda r^2, \quad (3.41)$$

com $\lambda = \frac{e^2 h}{2}$.

Para o limite assintótico ($r \rightarrow \infty$), temos as seguintes soluções

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{C_2 e^{-\sqrt{\lambda} r}}{\sqrt{r}}, \quad A(r) \approx 2m - 2C_2 \sqrt{\lambda} r e^{(-\sqrt{\lambda} r)}, \quad (3.42)$$

nos quais os parâmetros m_α e m_A representam as massas dos bósons do modelo, sendo dados por

$$m_\alpha = m_A = \sqrt{\lambda}, \quad (3.43)$$

onde a relação $m_\alpha/m_A = +1$ é satisfeita, definindo assim o limite de Bogomol'nyi. As constantes C_1 e C_2 são escolhidas como reais e positivas.

Por fim, levando em conta que $|\phi_3|^3 = \cos^2(\alpha)$, podemos reescrever o potencial dado por (3.35) na forma

$$V(|\phi_3|) = \lambda |\phi_3|^2. \quad (3.44)$$

3.3.2 Segundo caso: $\beta(r) = \beta_2$

Começamos nossa análise a partir de

$$\beta(r) = \beta_2 = \frac{\pi}{2}k. \quad (3.45)$$

Para este valor de β_2 a função auxiliar torna-se $W = W(\alpha, \beta) = 1 - \sin^2(\alpha)$, assim sendo, a equação (3.23) resulta

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{eh}{2} \cos^2(\alpha) \right) = \frac{d}{dr} \left(\sqrt{2V} \right), \quad (3.46)$$

no qual a solução é

$$V(\alpha) = \frac{e^2 h^2}{32} \cos^2(2\alpha). \quad (3.47)$$

As equações (3.31) e (3.32) assumem a seguinte forma

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{e^2 h}{4} \cos(2\alpha), \quad (3.48)$$

e

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sin(2\alpha)}{2r} \left(\frac{A}{2} - m \right). \quad (3.49)$$

Agora, por meio das expressões acima, vamos analisar o comportamento assintótico dos campos $\alpha(r)$ e $A(r)$, para que assim possamos encontrar as soluções aproximadas para essas funções. Primeiramente, vamos inserir as equações (3.45) e (3.47) na equação (3.19), e usamos a condição de finitude da energia ($\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$), para obter

$$\varepsilon = \frac{B^2}{2} + h \left[\left(\frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 2\alpha}{4r^2} \left(\frac{A}{2} - m \right)^2 \right] + \frac{e^2 h^2}{32} \cos^2 2\alpha. \quad (3.50)$$

Para que a energia da configuração seja finita, os campos $\alpha(r)$ e $A(r)$, devem satisfazer

$$\alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\pi}{4}, \quad A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m. \quad (3.51)$$

De posse da condição assintótica (3.51), da condição na origem (3.12), e do potencial (3.47), obtemos a energia total dos vórtices, obtemos a energia total dos vortices resultantes cujo valor é

$$E_{bps} = \mp \pi h m. \quad (3.52)$$

O passo seguinte é, através do *processo de linearização*, obtermos as soluções aproximadas para os campos $\alpha(r)$ e $A(r)$, a partir de (3.48), (3.49) e das condições de contorno para (3.12) e (3.51).

Nas proximidades da origem, temos as seguintes soluções aproximadas

$$\alpha(r) \approx C_1 r^m, \quad A(r) \approx \frac{\lambda}{4} r^2, \quad (3.53)$$

com $\lambda = \frac{e^2 h}{2}$.

Para o limite assintótico ($r \rightarrow \infty$), as soluções são

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{4} - \frac{C_2 e^{-\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)r}}{\sqrt{r}} \quad A(r) \approx 2m - 2C_2 \sqrt{\lambda} r e^{-\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)r} \quad (3.54)$$

nos quais os parâmetros m_a e m_A representam as massas dos bósons associados ao modelo, sendo dados por

$$m_\alpha = m_A = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}, \quad (3.55)$$

na qual, novamente a relação $m_\alpha/m_A = +1$ é satisfeita, definindo o limite de Bogomol'nyi. As constantes C_1 e C_2 são escolhidas como reais e positivas.

Analisando os resultados obtidos para $\beta(r) = \beta_1$ e $\beta(r) = \beta_2$, notamos que existe uma grande semelhança entre ambos. Nesse sentido, torna-se possível obter o potencial (3.47) através das redefinições $\alpha \rightarrow 2\alpha$, $\lambda \rightarrow \lambda/4$ e $h \rightarrow h/4$ no potencial (3.35). Usando as mesmas redefinições, as equações (3.48) e (3.49) são obtidas a partir das equações (3.36) e (3.37). Como consequência, temos que as soluções para a energia e os campos $\alpha(r)$ e $A(r)$ são análogas. Desse modo, pode-se concluir que os resultados obtidos para $\beta(r) = \beta_2$ podem ser obtidos a partir dos resultados de $\beta(r) = \beta_1$, isto é, ambos os casos descrevem a mesma fenomenologia.

A seguir, apresentamos as soluções numéricas para os campos $\alpha(r)$, $A(r)$, $B(r)$ e para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$, obtidas a partir das equações BPS (3.36) e (3.37), tendo em vista as condições de contorno (3.12) e (3.39). Por questão de conveniência, adotamos $e = h = 1$.

As figuras 3.1 e 3.2 mostram, respectivamente, as soluções para os campos $\alpha(r)$ e $A(r)$ para $m = 1$ (linha preta sólida), $m = 2$ (linha azul tracejada), $m = 5$ (linha vermelha ponto-tracejada) e $m = 9$ (curva laranja traço-longo). Nota-se que nos dois casos, as soluções são nulas na origem, crescendo monotonicamente até atingirem seus valores máximos no limite $r \rightarrow \infty$. Tais soluções, comportam-se exatamente de acordo com as obtidas através do processo de linearização das equações de primeira ordem.

Na figura 3.3, apresentamos as soluções para o campo magnético $B(r)$ obtidas a partir da equação (3.11). As convenções são as mesmas das figuras 3.1. Na origem, $B(r \rightarrow 0) = 1$

(consultar as soluções (3.41)). Percebe-se que, para este limite o campo magnético não depende do valor dos winding numbers, de modo que, todas as soluções possuem o mesmo valor máximo.

Por fim, as soluções para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ são mostradas na figura 3.4, onde usamos as mesmas convenções da figura 3.1. Para $m = 1$ a solução alcança seu valor máximo em $r \rightarrow 0$, e vai decaindo monotonicamente, até anular-se no limite $r \rightarrow \infty$. Por outro lado, para $m \neq 1$, as soluções formam anéis centrados na origem, cujos raios (distância em r do valor máximo da solução) e amplitudes (valores máximos das soluções), aumentam e diminuem, respectivamente, em função dos winding numbers m .

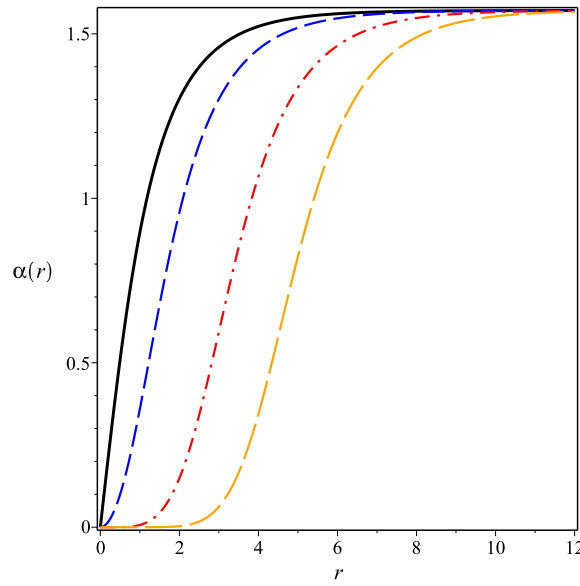


Figura 3.1: Solução numérica para $\alpha(r)$. Aqui, utilizou-se $m = 1$ (curva preta sólida), $m = 2$ (curva azul tracejada), $m = 5$ (curva vermelha ponto-tracejada) e $m = 9$ (curva laranja traço-longo).

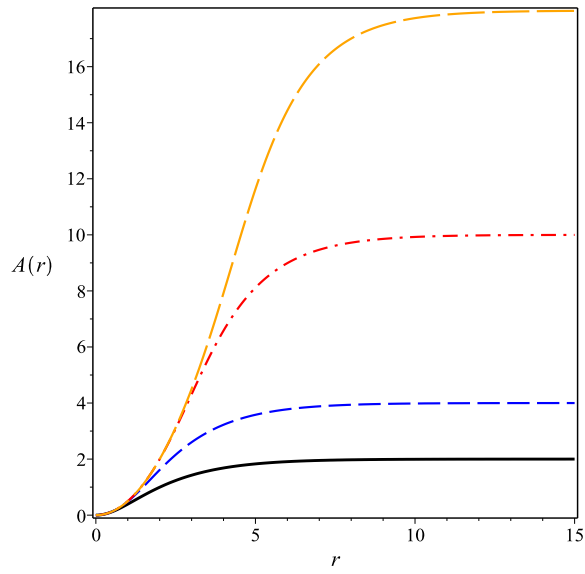


Figura 3.2: Solução numérica para o campo magnético $A(r)$, as convenções são as mesmas da figura 3.1.

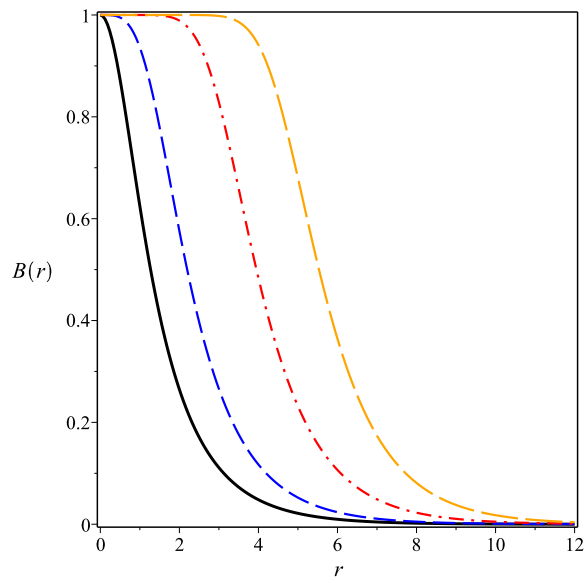


Figura 3.3: Solução numérica para o campo magnético $B(r)$ construída com o auxílio da equação 3.11. Aqui utilizou-se as mesmas convenções são as mesmas da figura 3.1.

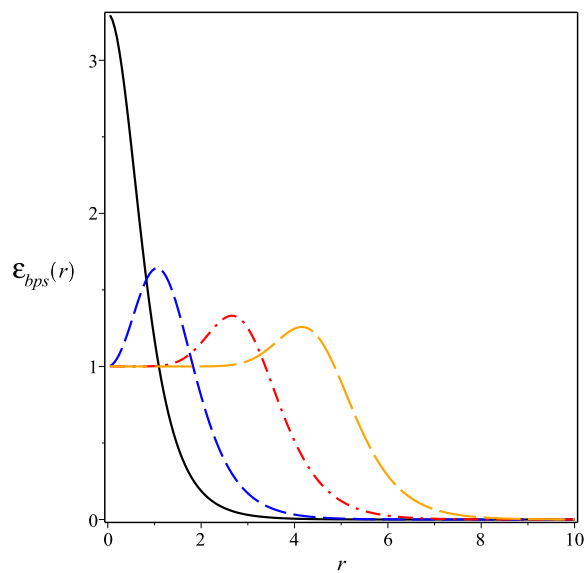


Figura 3.4: Solução numérica para a densidade de energia obtida $\varepsilon(r)$ via a expressão (3.38).
As convenções são as mesmas da figura 3.1.

Capítulo 4

Vórtices BPS no modelo de Maxwell-Higgs com estrutura interna

Como já foi considerado no capítulo 1, a densidade de lagrangeana que descreve o modelo de Maxwell-Higgs é escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\overline{D_\mu\phi})(D^\mu\phi) - V(|\phi|), \quad (4.1)$$

A partir da qual, via inclusão de uma função adimensional $G(|\phi|)$ a multiplicar o termo de Maxwell, obtemos a seguinte densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G(|\phi|)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\overline{D_\mu\phi})(D^\mu\phi) - V(|\phi|). \quad (4.2)$$

Em particular, o modelo definido por (4.2), no qual $G(|\phi|)$ representa uma função dielétrica, foi considerado em [24]. Naquele trabalho, a liberdade associada à escolha da função $G(|\phi|)$ foi utilizada para introduzir um mínimo simétrico ao potencial $V(|\phi|)$, a partir do qual foram construídos vórtices BPS não topológicos e sem carga elétrica. Este algoritmo de generalização pode ainda ser utilizado para ampliar as simetrias presentes em (4.2). No presente caso, através da adição de um campo escalar real χ ao cenário descrito por (4.2), vamos investigar ocorrência de vórtices BPS e analisar as mudanças ocorridas devido a presença do campo adicional.

4.1 O modelo de Maxwell-Higgs com estrutura interna

A densidade de Lagrangeana que descreve o modelo é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G(\chi) F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\overline{D_\mu\phi})(D^\mu\phi) + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V(\chi, |\phi|), \quad (4.3)$$

a qual é invariante não apenas por $U_L(1)$, mas também por Z_2 (havendo, portanto, uma simetria $U_L(1) \times Z_2$ resultante). Em particular, é interessante notar que, em (4.3), a função dielétrica passou a depender do campo escalar real χ , e não mais do campo escalar complexo de Higgs. Para além disso, o potencial do modelo, que agora depende de ambos os campos escalares real χ e complexo de Higgs, é dado por

$$V(\chi, |\phi|) = \frac{e^2(v^2 - |\phi|^2)^2}{2G(\chi)} + \frac{1}{2}\frac{\mathcal{W}_\chi^2}{r^2}, \quad (4.4)$$

no qual o último termo, $\mathcal{W}_\chi = d\mathcal{W}/d\chi$, foi introduzido no intuito de permitir a correta implementação do formalismo de Bogomol'nyi (neste caso, $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\chi)$ representa uma função a ser definida a posteriori).

As equação do movimento para o modelo (4.3) são

$$\partial_\mu(GF^{\mu\beta}) = J^\beta, \quad (4.5)$$

$$D_\mu D^\mu\phi = -\frac{e^2\phi(v^2 - |\phi|^2)}{G(\chi)}, \quad (4.6)$$

$$\partial_\mu\partial^\mu\chi + \frac{1}{4}G_\chi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\frac{\mathcal{W}_\chi^2}{r^2}\right), \quad (4.7)$$

onde: $G_\chi = dG/d\chi$ e

$$J^\beta = ie\left(\overline{\phi}D^\beta\phi - \phi\overline{D^\beta\phi}\right). \quad (4.8)$$

que é o 4-vetor densidade de corrente (conservada) do modelo.

A lei de Gauss é obtida a partir de (4.5),

$$\partial_i(G\partial^i A^0) = -2e^2|\phi|^2 A^0, \quad (4.9)$$

na qual supusemos campos independentes do tempo. Assim, como no modelo canônico de Maxwell-Higgs, o gauge temporal $A^0 = 0$ revela-se válido e, por conseguinte, as configurações resultantes não possuem carga elétrica.

Por outro lado, a lei de Ampère para configurações independentes do tempo resulta:

$$\varepsilon_{ij}\partial_j(GB) = J_i. \quad (4.10)$$

Como antes, estudaremos as configurações de vórtices a partir do Ansatz:

$$\phi(r, \theta) = v g(r) e^{in\theta}, \quad (4.11)$$

$$A(r, \theta) = -\frac{\widehat{\theta}}{er} (a(r) - n), \quad (4.12)$$

nas quais usamos as já conhecidas funções adimensionais $g(r)$ e $a(r)$, e o winding number n ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Neste caso, usaremos, para o setor escalar real, a forma :

$$\chi = \chi(r), \quad (4.13)$$

onde o campo possui uma dependência apenas na variável radial em r .

Como antes, no intuito de evitar divergências em $r = 0$, as funções $g(r), a(r), \chi(r)$ devem cumprir as seguintes condições de contorno

$$\chi(0) = \chi_0 \quad g(0) = 0, \quad a(0) = n, \quad (4.14)$$

na qual χ_0 representa um valor constante.

A partir de (4.11), (4.12) e (4.13), as equações de movimento (4.5), (4.6) e (4.7) podem ser reescritas como

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{G}{er} \frac{da}{dr} \right) = 2eag^2, \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dg}{dr} \right) - \frac{ga^2}{r^2} = \frac{2e^2 |\phi| (v^2 - |\phi|^2)}{G(\chi)}, \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\chi}{dr} \right) - \frac{G_\chi}{2e^2 r^2} \frac{da}{dr} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\mathcal{W}_\chi^2}{r^2} \right), \quad (4.17)$$

nos quais o campo magnético foi escrito como

$$B = -\frac{1}{er} \frac{da}{dr}, \quad (4.18)$$

tal como fizemos no modelo canônico de Maxwell-Higgs.

4.2 Formalismo BPS no modelo de Maxwell com estrutura interna.

Assim como nos casos anteriores, escrevemos a densidade de energia inerente ao modelo (4.3) a partir do seu respectivo tensor de energia e momento. No cenário atual, este pode ser

escrito como

$$T_{\lambda\rho} = -G(\chi) F_{\mu\lambda} F_{\rho}^{\mu} + D_{\lambda}\phi \overline{D_{\rho}\phi} + \overline{D_{\lambda}\phi} D_{\rho}\phi - \eta_{\lambda\rho} \mathcal{L}. \quad (4.19)$$

Agora, tendo em vista $\varepsilon = T_{00}$, podemos escrever, para os campos independentes do tempo:

$$\varepsilon = T_{00} = -\mathcal{L}, \quad (4.20)$$

ou

$$\varepsilon = \frac{G}{2e^2 r^2} \left(\frac{da}{dr} \right)^2 + v^2 \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) \quad (4.21)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 + \frac{e^2 (v^2 - |\phi|^2)^2}{2 G(\chi)} + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{W}_{\chi}^2}{r^2}, \quad (4.22)$$

na qual utilizamos os Ansatz (4.11), (4.12) e (4.13), bem como o potencial definido em (4.4).

A energia total do modelo é obtida ao integrarmos a densidade de energia sobre todo o espaço

$$E = \int_s \varepsilon(r) d^2 r, \quad (4.23)$$

ou

$$E = \int \left[\frac{G}{2e^2 r^2} \left(\frac{da}{dr} \right)^2 + v^2 \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) \right] d^2 r \quad (4.24)$$

$$+ \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 + \frac{e^2 (v^2 - |\phi|^2)^2}{2 G(\chi)} + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{W}_{\chi}^2}{r^2} \right] d^2 r, \quad (4.25)$$

a partir da qual verifica-se que os vórtices possuidores de energia total finita são obtidos via

$$\chi(\infty) = \chi_{\infty}, \quad g(\infty) = v, \quad a(\infty) = 0, \quad (4.26)$$

nas quais χ_{∞} também representa um valor constante.

A partir da implementação do método de Bogomol'nyi, a expressão (4.24) pode ser reescrita como:

$$E = E_{bps} + 2\pi \int_0^{\infty} \left[\frac{G}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp \frac{ev^4(1-g^2)}{G} \right)^2 + v^2 \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} \right)^2 \right] r dr \quad (4.27)$$

$$+ 2\pi \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dr} \mp \frac{\mathcal{W}_{\chi}}{r} \right)^2 \right] \geq E_{bps}, \quad (4.28)$$

na qual definimos $E_{bps} = \int \varepsilon_{bps} d^2 r$

$$\varepsilon_{bps} = \pm \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\mathcal{W} - av^2(1 - g^2)), \quad (4.29)$$

e

$$E_{bps} = \pm 2\pi v^2 \int_0^\infty \frac{d}{dr} [\mathcal{W} - av^2(1 - g^2)] dr, \quad (4.30)$$

por conveniência.

Tendo em mente as condições de contorno (4.14) e (4.26), o valor de (4.30) pode ser calculado explicitamente, isto é

$$E_{bps} = 2\pi \Delta \mathcal{W} + 2\pi |n| v^2, \quad (4.31)$$

na qual $\Delta \mathcal{W} = \mathcal{W}(\chi_\infty) - \mathcal{W}(\chi_0)$. Portanto, conclui-se que existe um limite inferior para os valores da energia total (limite de Bogomol'nyi). Em particular, este limite é saturado quando as funções escalares $g(r)$, $a(r)$ e $\chi(r)$ satisfazem:

$$\frac{dg}{dr} = \pm \frac{ag}{r}, \quad (4.32)$$

$$-\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = \pm \frac{ev^2(1 - g^2)}{G(\chi)}, \quad (4.33)$$

$$\frac{d\chi}{dr} = \pm \frac{\mathcal{W}_\chi}{r}, \quad (4.34)$$

isto é, equações diferenciais de primeira-ordem (equações de Bogomol'nyi).

Em outras palavras, quando as equações de Bogomol'nyi são satisfeitas, a energia total das configurações resultantes vale (4.31).

4.3 As soluções de primeira-ordem

Nessa seção, estudaremos as soluções de primeira-ordem propriamente ditas. Em particular, resolveremos as equações (4.32), (4.33) e (4.34) numericamente. Como resultado, exibiremos as soluções numéricas para os campos $g(r)$ e $a(r)$, e também para o setor magnético $B(r)$ (4.18) e a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ equação (4.29).

É interessante verificar que a equação (4.34) não depende dos campos $g(r)$ e $a(r)$. Assim, a solução para $\chi(r)$ pode ser determinada a partir da escolha da função $\mathcal{W}(\chi)$. Uma escolha interessante para esta função é:

$$\mathcal{W}(\chi) = \chi - \frac{\chi^3}{3}, \quad (4.35)$$

a qual já foi utilizada anteriormente em [25] e mais recentemente em [26] e [27] para modelos planares tipo-skyrmions, e também em [28] no estudo do comportamento de férmions de Dirac sem massa em background de estruturas planares neutras.

Neste caso, a equação de primeira ordem (4.34) torna-se

$$\frac{d\chi}{dr} = \pm \frac{(1 - \chi^2)}{r}, \quad (4.36)$$

cujas soluções exatas são (onde r_0 representa uma constante positiva tal que $\chi(r = r_0) = 0$) [29].

$$\chi(r) = \pm \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2}, \quad (4.37)$$

a partir da qual verifica-se $\chi_0 = -1$ e $\chi_\infty = 1$.

Agora, de posse da solução para $\chi(r)$, é necessário fixar a função dielétrica $G(\chi)$, uma vez que essa função aparece explicitamente na equação BPS (4.33).

Neste trabalho, investigamos duas escolhas possíveis para $G(\chi)$. A primeira é:

$$G(\chi) = G_1(\chi) = \frac{1}{(1 - \chi^2)}, \quad (4.38)$$

A qual é invariante frente a simetria Z_2 . Como podemos ver, em $r = r_0$, o campo escalar desaparece e $G_1(\chi)$ torna-se unitário, levando-nos diretamente a solução de vórtice do tipo Nielsen-Olesen [9]. Entretanto, na origem e no limite assintótico, $G_1(\chi)$ diverge. Como mostraremos adiante, o comportamento de $G_1(\chi)$ na origem será compensado pelo desaparecimento do campo magnético $B(r)$ à medida que $r \rightarrow 0$.

Assim, tendo em mente (4.38) e (4.35), as equações BPS (4.33) e (4.34) podem ser escritas na forma

$$-\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = \pm \frac{4ev^2 r^2 r_0^2 (1 - g^2)}{(r^2 + r_0^2)^2}, \quad (4.39)$$

$$\frac{d\chi}{dr} = \pm \frac{4rr_0^2}{(r^2 + r_0^2)^2}, \quad (4.40)$$

respectivamente.

Antes de resolver numericamente as equações (4.32) e (4.39), faz-se necessário verificar a convergência dos campos $g(r)$ e $a(r)$ para com as condições de contorno (4.14) e (4.26). Nesse sentido, novamente, faremos uso do processo de linearização das equações (4.32) e (4.33) (ao longo do qual, por conveniência, consideraremos apenas os sinais superiores nas expressões (4.32) e (4.39), isto é, apenas os valores positivos de n).

$$\frac{dg}{dr} = \frac{ag}{r}, \quad (4.41)$$

$$\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = \frac{4ev^2 r^2 r_0^2 (g^2 - 1)}{(r^2 + r_0^2)^2}, \quad (4.42)$$

$$\frac{d\chi}{dr} = \frac{\mathcal{W}_\chi}{r}, \quad (4.43)$$

Assim, iniciemos a implementação do processo de linearização. Próximos da origem ($r \rightarrow 0$), os campos $a(r)$ e $g(r)$ podem ser aproximados por

$$a(r) \approx n - \delta a(r) \quad , \quad g(r) \approx \delta g(r). \quad (4.44)$$

Neste caso, a equação (4.41), pode ser reescrita como

$$\frac{d\delta g(r)}{dr} = n \frac{\delta g(r)}{r}, \quad (4.45)$$

cujas soluções são

$$\delta g(r) = C_0 r^n, \quad (4.46)$$

na qual C_0 é uma constante real positiva.

De modo análogo, a equação (4.42) resulta

$$\frac{1}{r} \frac{d\delta a(r)}{dr} = \frac{4ev^2 r^2 r_0^2}{(r^2 + r_0^2)^2}, \quad (4.47)$$

cujas soluções são

$$\delta a(r) = \frac{e^2 v^2 r^4}{r_0^2}. \quad (4.48)$$

Agora, tendo em vista (4.46) e (4.48), as soluções (4.44) resultam em

$$g(r) \approx C_0 r^n, \quad (4.49)$$

e

$$a(r) \approx n - \frac{e^2 v^2 r^4}{r_0^2}, \quad (4.50)$$

as quais são compatíveis com as condições de contorno (4.14) e (4.26).

Por outro lado, no limite $r \rightarrow \infty$, as aproximações para os campos $a(r)$ e $g(r)$ são

$$a(r) \approx \delta a(r) \quad \text{e} \quad g(r) \approx 1 - \delta g(r). \quad (4.51)$$

A partir das quais as equações (4.32) e (4.33) podem ser reescritas, respectivamente como

$$r \frac{d\delta g(r)}{dr} = -\delta a(r) \quad (4.52)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(\delta a(r))}{dr} = -\frac{8e^2 v^2 r^2 r_0^2 \delta g}{(r^2 + r_0^2)^2}, \quad (4.53)$$

ou, reescrevendo

$$\frac{1}{r} \frac{d(\delta a(r))}{dr} = -\frac{8e^2 v^2 r^2 r_0^2 \delta g}{r^4 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)^2}, \quad (4.54)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(\delta a(r))}{dr} = -\frac{8e^2 v^2 r_0^2 \delta g(r)}{r}, \quad (4.55)$$

cujas soluções resultam

$$\delta g(r) \approx \frac{\sqrt{2} C_\infty r^{-2\sqrt{2}evr_0}}{4evr_0}, \quad (4.56)$$

e

$$\delta a(r) \approx C_\infty r^{-2\sqrt{2}evr_0}. \quad (4.57)$$

Por conseguinte, as soluções para os campos $g(r)$ e $a(r)$ podem ser reescritas sob a forma

$$g(r) \approx 1 - \frac{\sqrt{2} C_\infty r^{-2\sqrt{2}evr_0}}{4evr_0}, \quad (4.58)$$

$$a(r) \approx C_\infty r^{-2\sqrt{2}evr_0}. \quad (4.59)$$

Tendo verificado a validade das condições de contorno (4.14) e (4.26), partimos para a resolução numérica das equações de primeira-ordem (4.32) e (4.39). Como resultado, apresentamos as soluções para as funções $g(r)$ e $a(r)$, como também para o campo magnético $B(r)$ e a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$. Para $g(r)$ e $a(r)$ usamos $e = v = 1$ e primeiramente considerando o parâmetro $r_0 = 1$, além de $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 2$ (curva azul tracejada) e $n = 3$ (curva vermelha ponto-tracejada), $n = 5$ (curva laranja traço-longo) e $n = 7$ (curva cinza sólida). Para $B(r)$ e $\varepsilon_{bps}(r)$ além das convenções anteriores, usamos $n = 10$ (curva verde-escuro-sólida).

As figuras 4.1 e 4.2 mostram, respectivamente, as soluções numéricas para as funções escalares $g(r)$ e $a(r)$. De maneira geral, tais soluções se comportam como os perfis canônicos de Nielsen-Olesen.

A solução para o campo magnético $B(r)$ é mostrado na figura 4.3. Neste caso, diferentemente daquele definido por Nielsen-Olesen, o setor magnético atinge seu valor máximo em algum ponto $r = R$, com $R \neq 0$. Por outro lado, para $r = 0$, o campo magnético nulo compensa a divergência da função G_1 , assegurando uma energia total finita.

A figura 4.4 apresenta a solução para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ das configurações de primeira-ordem.

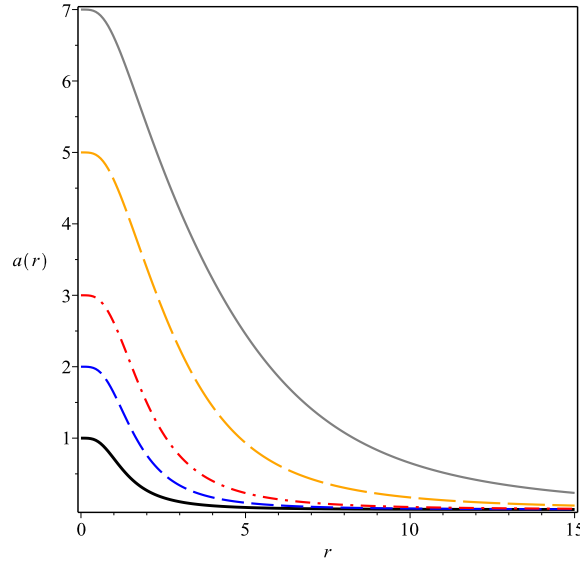


Figura 4.1: Solução numérica $a(r)$ obtida a partir das equações (4.41) e (4.42) via as condições de contorno (4.14) e (4.26). Utilizamos $e = v = 1$ e $r_0 = 1$ e $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 2$ (curva azul tracejada) e $n = 3$ (curva vermelha ponto-tracejada), $n = 5$ (curva laranja traço-longo) e $n = 7$ (curva cinza sólida). De maneira geral, o comportamento é o mesmo daquele definido por Nielsen-Olesen.

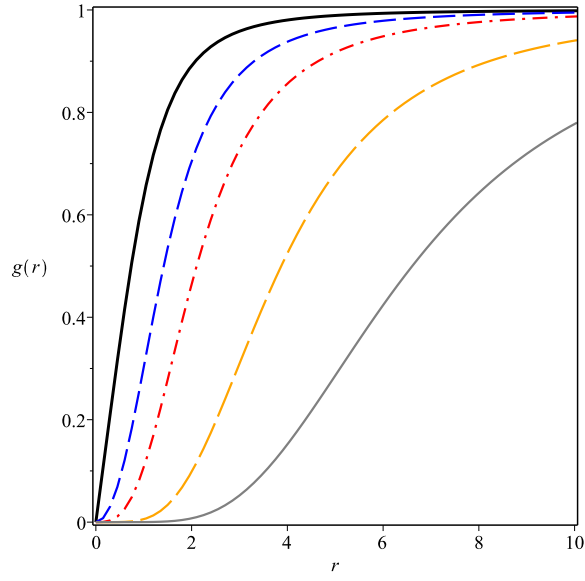


Figura 4.2: Solução numérica $g(r)$. As convenções são as mesmas utilizadas na figura 4.1.

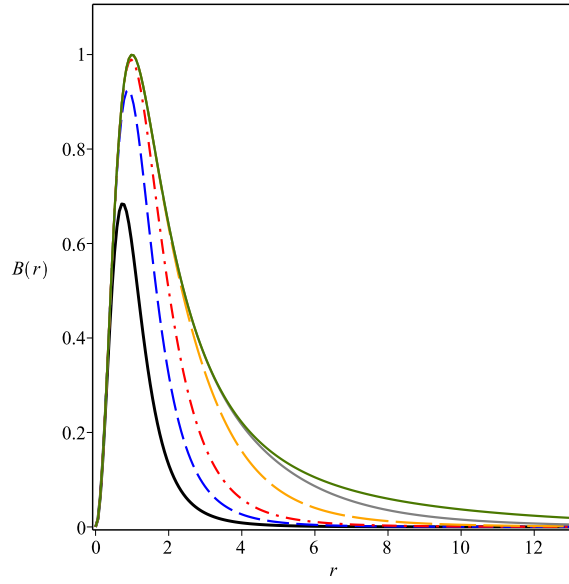


Figura 4.3: Solução numérica para o campo magnético $B(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.1 com a adição de $n = 10$ (curva verde-escuro-sólida). O campo magnético nulo compensa a divergência existente em $G_1(r = 0)$.

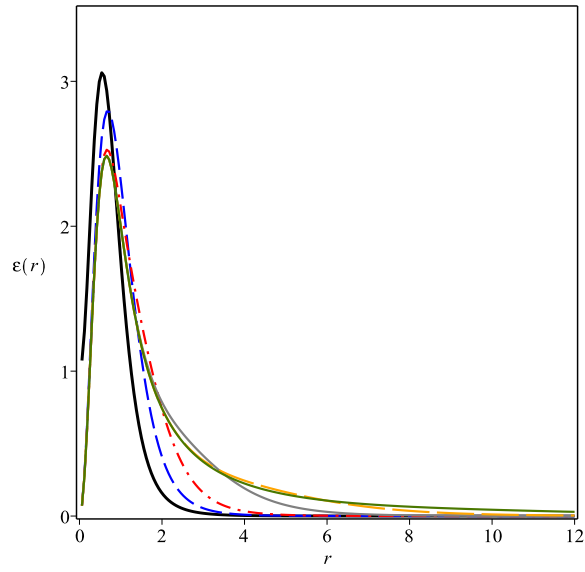


Figura 4.4: Solução numérica para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.3.

Além disso, considerando $r_0 = 2$ e adotando as mesmas convenções das figuras 4.1 e 4.3, obtemos as soluções

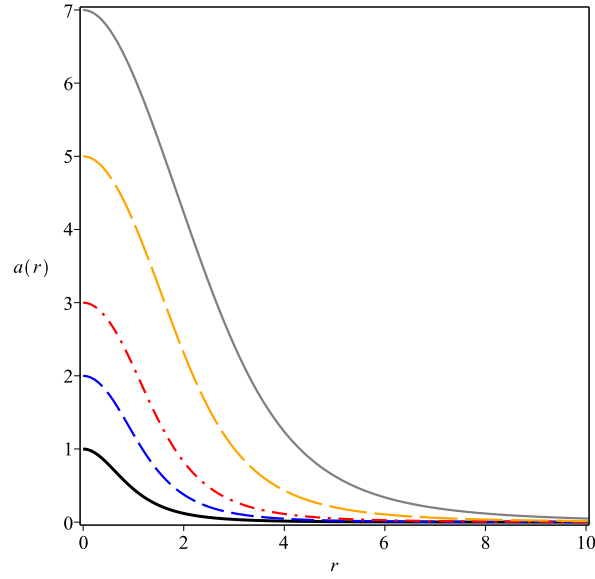


Figura 4.5: Solução numérica $a(r)$ obtida a partir das equações (4.41) e (4.42) via as condições de contorno (4.14) e (4.26). Utilizamos $e = v = 1$ e $r_0 = 2$ e $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 2$ (curva azul tracejada) e $n = 3$ (curva vermelha ponto-tracejada), $n = 5$ (curva laranja traço-longo) e $n = 7$ (curva cinza sólida). De maneira geral, o comportamento é o mesmo daquele definido por Nielsen-Olesen.

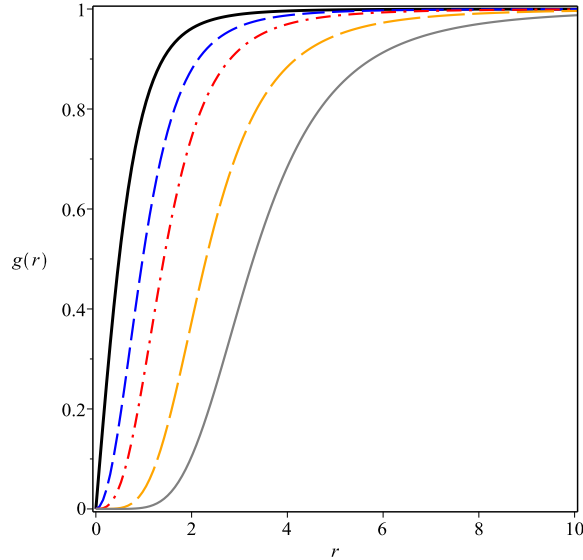


Figura 4.6: Solução numérica $g(r)$. As convenções são as mesmas utilizadas na figura 4.5.

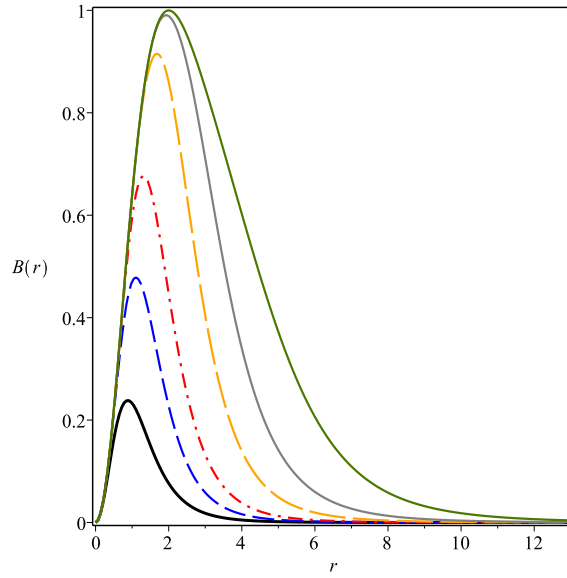


Figura 4.7: Solução numérica para o campo magnético $B(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.3. O campo magnético nulo compensa a divergência existente em $G_1 (r = 0)$.

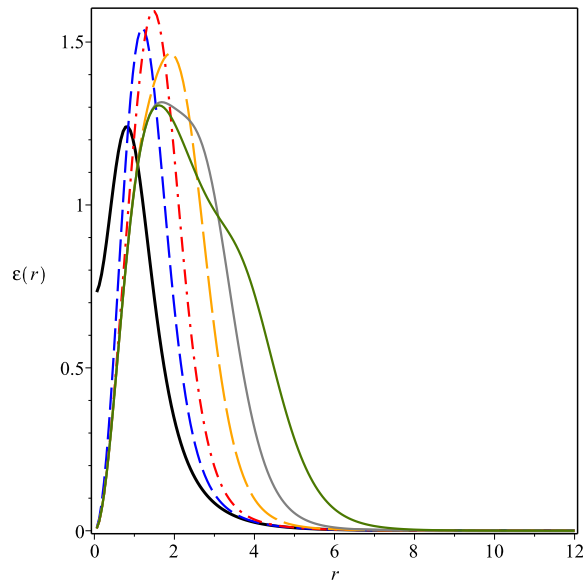


Figura 4.8: Solução numérica para a densidade de energia $\varepsilon_{bps} (r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.3.

Para além disso, uma segunda escolha para a função dielétrica é

$$G_2 (\chi) = \frac{1}{\chi^2}. \quad (4.60)$$

Neste caso, tendo em vista a solução analítica para o campo $\chi(r)$, na origem, temos que $\chi^2 = 1$ e o vórtice resultante deve ser como o de Nielsen-Olesen. Contudo, para $r = r_0$, o campo $\chi(r)$ desaparece e $G_2(\chi)$ diverge. Nesse caso, o campo magnético deve anular-se, introduzindo, por conseguinte, uma estrutura interna ao vórtice resultante.

Agora, tendo em mente (4.60) e (4.35), as equações de primeira ordem (4.33) e (4.34) podem ser reescritas na forma

$$\frac{1}{r} \frac{da}{dr} = \pm \frac{e^2 v^2 (g^2 - 1) (r^2 - r_0^2)^2}{(r^2 + r_0^2)^2}, \quad (4.61)$$

$$\frac{d\chi}{dr} = \pm \frac{4rr_0^2}{(r^2 + r_0^2)^2}, \quad (4.62)$$

respectivamente.

Seguindo o mesmo procedimento adotado anteriormente, antes de obtermos as soluções numéricas para a referida escolha da função $G(\chi)$ faz-se necessário verificar a convergência dos campos $g(r)$ e $a(r)$ para com as condições de contorno (4.14) e (4.26). Para tanto, faremos novamente o uso do processo de linearização das equações (4.32) e (4.61), onde por conveniência, consideramos somente os sinais superiores das respectivas equações

$$\frac{dg}{dr} = \frac{ag}{r}, \quad (4.63)$$

$$\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = \frac{e^2 v^2 (g^2 - 1) (r^2 - r_0^2)^2}{(r^2 + r_0^2)^2}. \quad (4.64)$$

Assim, próximos da origem ($r \rightarrow 0$), os campos $a(r)$ e $g(r)$, podem ser aproximados por

$$a(r) \approx n - \delta a(r) \quad , \quad g(r) \approx \delta g(r). \quad (4.65)$$

Neste caso, a equação (4.63) torna-se

$$\frac{d\delta g(r)}{dr} = n \frac{\delta g(r)}{r}, \quad (4.66)$$

cujas solução é

$$\delta g(r) = C_0 r^n, \quad (4.67)$$

na qual C_0 é uma constante real positiva. Analogamente, a equação (4.64) torna-se

$$\frac{1}{r} \frac{d\delta a(r)}{dr} = e^2 v^2, \quad (4.68)$$

que tem como solução

$$\delta a(r) = \frac{e^2 v^2 r^2}{2}. \quad (4.69)$$

Por fim, tendo em vista (4.67) e (4.69), as soluções (4.65) resultam em

$$g(r) \approx C_0 r^n, \quad (4.70)$$

e

$$a(r) \approx n - \frac{e^2 v^2 r^2}{2}, \quad (4.71)$$

as quais são compatíveis com as condições de contorno (4.14) e (4.26).

Por outro lado, quando $r \rightarrow \infty$, as aproximações para os campos $a(r)$ e $g(r)$ são

$$a(r) \approx \delta a(r) \quad , \quad g(r) \approx 1 - \delta g(r), \quad (4.72)$$

A partir das quais as equações (4.63) e (4.64) são reescritas respectivamente como

$$r \frac{d\delta g(r)}{dr} = -\delta a(r), \quad (4.73)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d\delta a(r)}{dr} = -\frac{2e^2 v^2 \delta g(r) (r^2 - r_0^2)^2}{(r^2 + r_0^2)^2} = -2e^2 v^2 \delta g(r), \quad (4.74)$$

cujas soluções são

$$\delta g(r) \approx \frac{C_\infty}{\sqrt{r}} \exp(-m_H r), \quad (4.75)$$

$$\delta a(r) \approx m_a C_\infty \sqrt{r} \exp(-m_a r). \quad (4.76)$$

Por fim, tendo em vista as soluções (4.75) e (4.76), as soluções (4.72) resultam em

$$g(r) \approx 1 - \frac{C_\infty}{\sqrt{r}} \exp(-m_H r), \quad (4.77)$$

e

$$a(r) \approx m_a C_\infty \sqrt{r} \exp(-m_a r), \quad (4.78)$$

nas quais os parâmetros m_g e m_a representam as massas dos bósons escalar e vetorial, sendo dadas respectivamente por

$$m_g = m_a = \sqrt{2}ev, \quad (4.79)$$

onde a relação $m_g/m_a = +1$ é satisfeita, definindo assim o limite de Bogomol'nyi. Tendo em vista a veracidade das condições de contorno (4.14) e (4.26), buscamos agora obter as soluções

numéricas das equações de primeira ordem (4.32) e (4.61). Como resultado, apresentamos as soluções para os campos $g(r)$ e $a(r)$, como também para o campo magnético $B(r)$ e a densidade de energia $\varepsilon(r)_{bps}$. Para $g(r)$ e $a(r)$ usamos $e = v = 1$ e primeiramente considerando o parâmetro $r_0 = 1$, além de $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 2$ (curva azul tracejada) e $n = 3$ (curva vermelha ponto-tracejada), $n = 5$ (curva laranja traço-longo) e $n = 7$ (curva cinza sólida). Para $B(r)$ e $\varepsilon_{bps}(r)$ além das convenções anteriores, usamos $n = 10$ (curva verde-escuro-sólida).

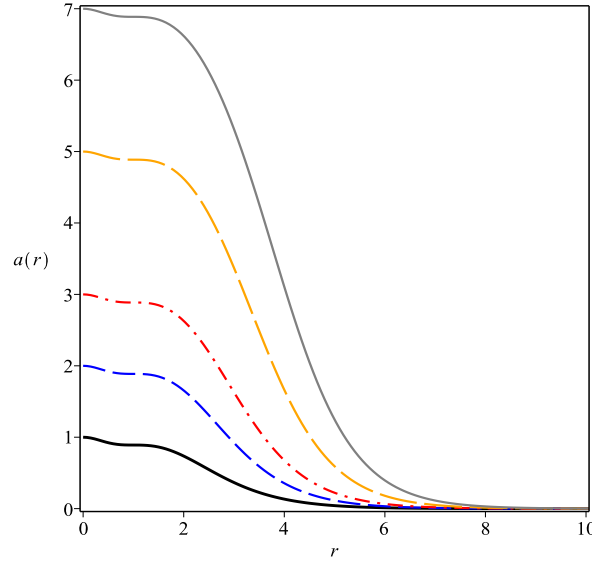


Figura 4.9: Solução numérica para $a(r)$ a partir de (4.61) e (4.62), via as condições de contorno (4.14) e (4.26). Utilizamos $e = v = 1$ e $r_0 = 1$ e $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 2$ (linha azul tracejada) e $n = 3$ (linha vermelha ponto-tracejada), $n = 5$ (curva laranja traço longo) e $n = 7$ (curva cinza-sólida). Devido a escolha da função dielétrica, as soluções diferem drasticamente das soluções usuais (obtidas na ausência do campo adicional).

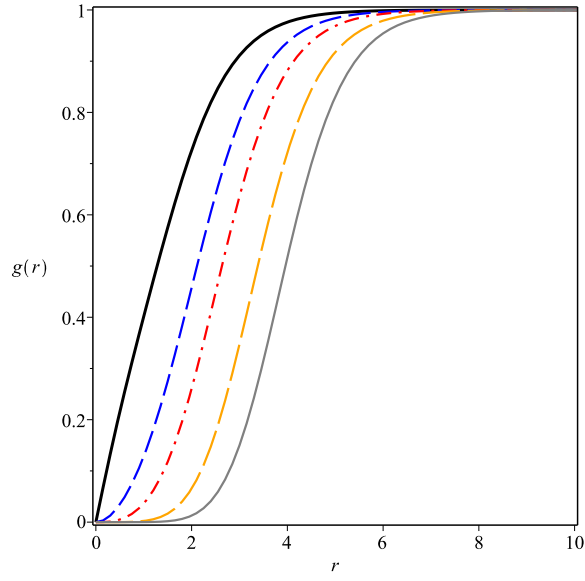


Figura 4.10: Solução numérica para a função $g(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.9

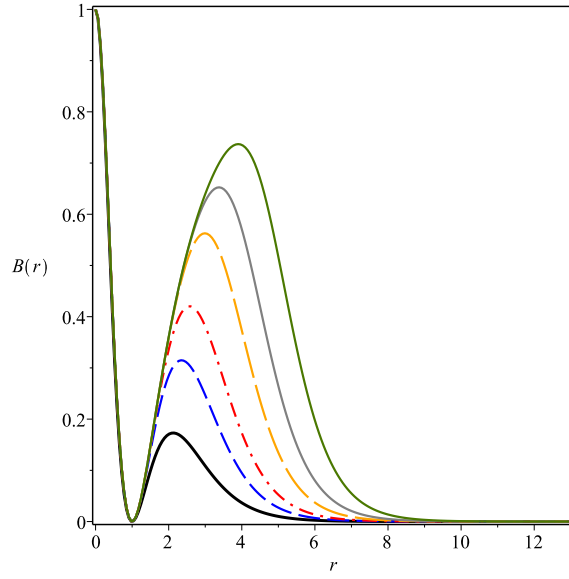


Figura 4.11: Solução numérica para $B(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.9 com a adição de $n = 10$ (curva verde-escuro-sólida). Verifica-se que a função dielétrica modifica o comportamento do campo magnético, que anula-se em $r = r_0$, introduzindo uma estrutura interna ao vórtice.

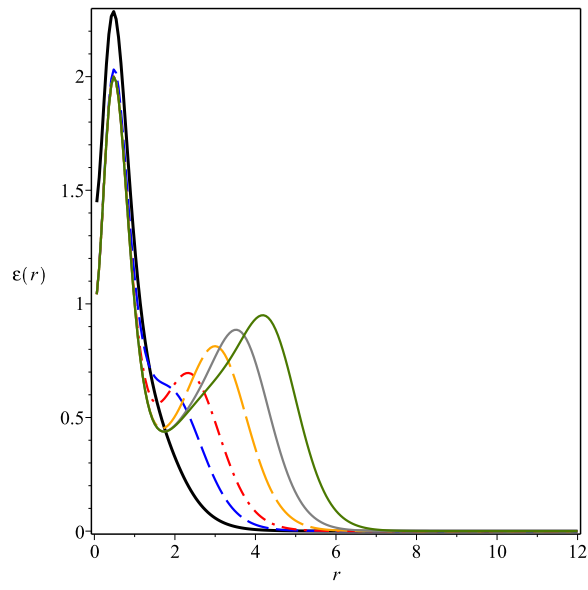


Figura 4.12: Solução numérica para a densidade de energia total. As convenções são as mesmas da figura 4.11

Para além disso, considerando $r_0 = 2$ e adotando as mesmas convenções das figuras, obtemos

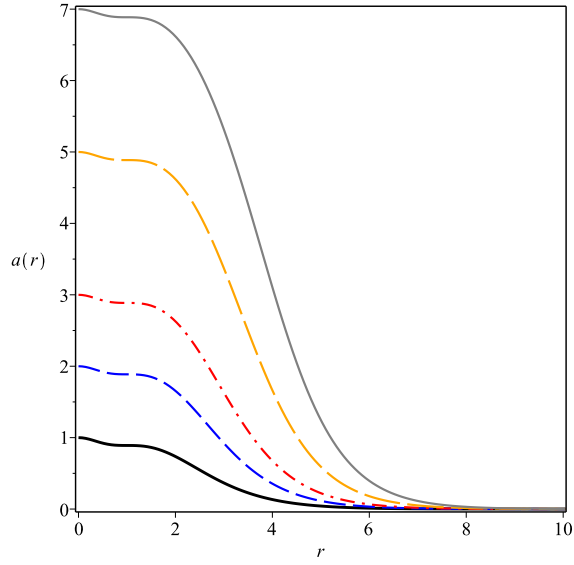


Figura 4.13: Solução numérica $a(r)$ obtida a partir das equações (4.61) e (4.62) via as condições de contorno (4.14) e (4.26). Utilizamos $e = v = 1$ e $r_0 = 2$ e $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 2$ (curva azul tracejada) e $n = 3$ (curva vermelha ponto-tracejada), $n = 5$ (curva laranja traço-longo) e $n = 7$ (curva cinza sólida). De maneira geral, o comportamento é o mesmo daquele definido por Nielsen-Olesen.

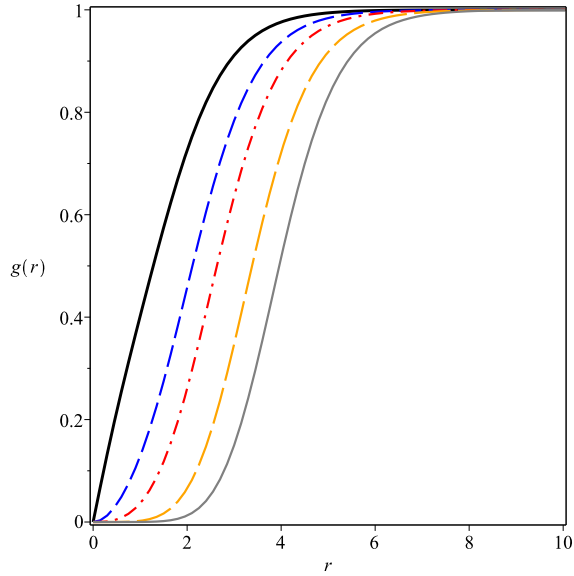


Figura 4.14: Solução numérica $g(r)$. As convenções são as mesmas utilizadas na figura 4.13.

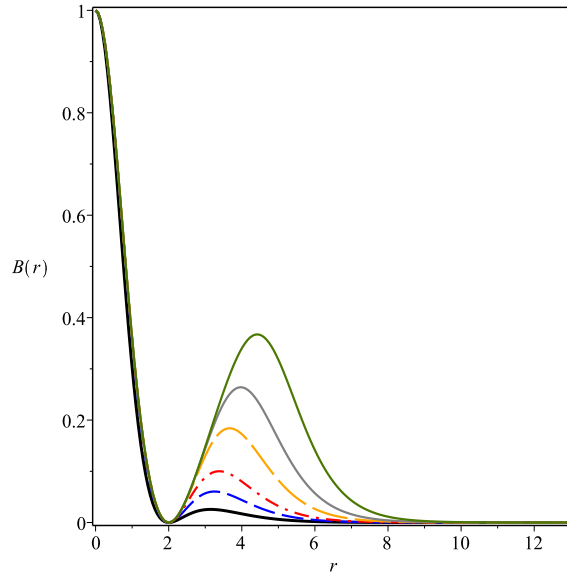


Figura 4.15: Solução numérica para o campo magnético $B(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.13 com a adição de $n = 10$ (curva verde-escuro-sólida). O campo magnético nulo compensa a divergência existente em $G_1(r = 0)$.

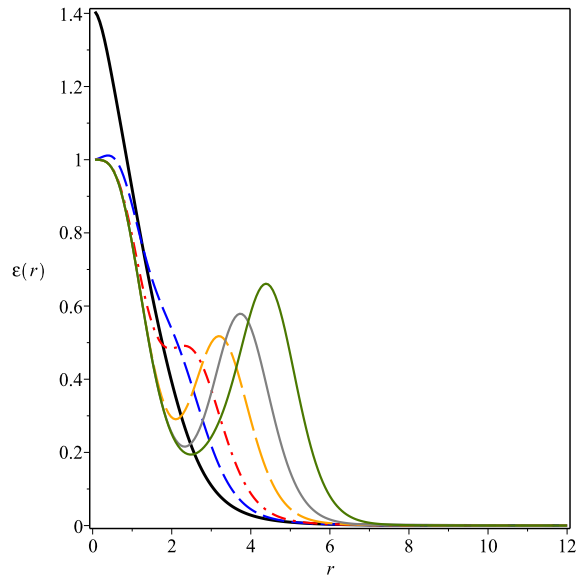


Figura 4.16: Solução numérica para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$. As convenções são as mesmas da figura 4.15.

Capítulo 5

Vórtices BPS no modelo de Maxwell-CP(2) com estrutura interna.

Neste capítulo investigaremos a ocorrência de vórtices no modelo de Maxwell-CP(2) contendo um campo escalar real χ que interage com o campo de gauge via a introdução de uma função dielétrica $G(\chi)$. Nesse contexto, procuramos por vórtices estáticos e radialmente simétricos usando o procedimento de Bogomol'nyi.

5.1 O modelo de Maxwell-CP(2) com estrutura interna

A densidade de Lagrangeana que define a dinâmica do modelo é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G(\chi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{(P_{ab}D_\mu\phi_b)}P_{ac}D^\mu\phi_c + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V(\chi, |\phi_3|), \quad (5.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de força do campo eletromagnético, $P_{ab} = \delta_{ab} - h^{-1}\phi_a\overline{\phi_b}$ é o operador de projeção. O campo $\phi_a(x)$ é acoplado minimamente ao campo A_μ através da derivada covariante

$$D_\mu\phi_a = \partial_\mu\phi_a - ieA_\mu Q_{ab}\phi_b, \quad (5.2)$$

no qual $Q_{ab} = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_N)$ representa a matriz de carga real. Os campos escalares (reais e complexos) estão relacionados de acordo com a condição

$$\overline{\phi_a}\phi_a = h. \quad (5.3)$$

A forma geral do potencial de auto-interação é dada por

$$V(\chi, |\phi_3|) = U(\chi, |\phi_3|) + \frac{\mathcal{W}_\chi^2}{2r^2}. \quad (5.4)$$

É importante destacar a presença de um campo escalar real (neutro) $\chi(x^\mu)$ na expressão da densidade de energia (5.1). Este campo acopla-se ao campo de gauge setor de gauge através de uma *função dielétrica* $G(\chi)$ que multiplica o termo de Maxwell. Também é esperado que ele interaja com o campo original $CP(2)$ através do potencial $V(\chi, |\phi_3|)$ que quebra espontaneamente a simetria original $SU(3)$ em $SU(2)$, como já era de se esperar (dado que as configurações topologicamente não-triviais são conhecidas por serem formadas como consequência de tal transição de fase).

De fato, a presença do campo escalar neutro $\chi(r)$ introduz mudanças significativas na forma das soluções finais dos vórtices de primeira-ordem em comparação com os resultados obtidos em [22].

As equações de movimento para o campo escalar $\phi(x^\mu)$, para o campo vetorial $A(x^\mu)$ e para o campo neutro $\chi(x^\mu)$ são, respectivamente

$$\partial_\beta (GF^{\beta\lambda}) = J^\lambda, \quad (5.5)$$

$$P_{ab} \left\{ 2P_{bc} D_\mu (P_{cd} D^\mu \phi_d) - D^\mu D_\mu \phi_b + \frac{\partial V(|\phi|)}{\partial \phi_b} \right\} = 0, \quad (5.6)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi + \frac{1}{4} G_\chi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = - \frac{\partial V(\chi, |\phi|)}{\partial \chi}, \quad (5.7)$$

na qual

$$J^\lambda = ie \left\{ P_{ac} D^\lambda \phi_c \overline{(P_{ab} Q_{bf} \phi_f)} - P_{ab} Q_{cb} \phi_b \overline{(P_{ac} D^\lambda \phi_b)} \right\}, \quad (5.8)$$

representa o 4-vetor densidade de corrente.

Ao considerar $\lambda = 0$ em (5.8), obtemos a Lei de Gauss para o modelo definido por (5.1). Desse modo, para configurações independentes do tempo, a expressão (5.5) é reescrita como:

$$\partial_i (G \partial^i A^0) = J^0, \quad (5.9)$$

na qual o índice “ i ” representa a soma sobre as coordenadas espaciais ($i = 1, 2, 3$), e

$$J^0 = ie \left\{ P_{ac} D^0 \phi_b \overline{(P_{ac} Q_{cd} \phi_d)} - \overline{(P_{ab} D^0 \phi_b)} P_{ac} Q_{cd} \phi_d \right\}. \quad (5.10)$$

Nosso objetivo é obter soluções BPS estáveis e radialmente simétricas num modelo projetado e que possui um campo (escalar) que pode ser tratado como fonte das configurações de vórtices. As soluções obtidas são descritas pelos seguintes ansatz

$$A_i = -A^i = \frac{1}{er} \epsilon^{ij} n^j A(r), \quad (5.11)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = h^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} e^{im_1\theta} \sin(\alpha(r)) \cos(\beta(r)) \\ e^{im_2\theta} \sin(\alpha(r)) \sin(\beta(r)) \\ e^{im_3\theta} \cos(\alpha(r)) \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

no qual ϵ^{ij} (com $\epsilon^{12} = 1$) e $n^j = (\cos \theta, \sin \theta)$ são as componentes do tensor de Levi-Civita e a do vetor posição bidimensional. Os números m_i (com $i = 1, 2, 3$ e $m_i \in \mathbb{Z}$), são os winding numbers do modelo. Por fim, o campo magnético é escrito como

$$B = -\frac{1}{er} \frac{dA}{dr}. \quad (5.13)$$

Tendo em vista que as soluções devem apresentar regularidade na origem, as seguintes condições de contorno são necessárias

$$A(r \rightarrow 0) \rightarrow 0, \quad \alpha(r \rightarrow 0) \rightarrow 0, \quad \chi(r \rightarrow 0) \rightarrow \chi_0 \quad (5.14)$$

Em relação as combinações entre a matriz de carga Q_{ab} e os winding numbers m_i , sabemos que somente duas combinações geram vórtices topológicos, são elas: (i) $Q_{ab} = \lambda_3/2$, com $m_1 = -m_2 = m$, $m_3 = 0$, (ii) $Q_{ab} = \lambda_8/2$, com $m_1 = m_2 = m$, $m_3 = 0$; onde λ_3 e λ_8 são as matrizes diagonais de Gell-Mann dadas por

$$\lambda_3 = \text{diag}(1, -1, 0), \quad \sqrt{3}\lambda_8 = \text{diag}(1, 1, -2). \quad (5.15)$$

Assim como no capítulo 2 vamos abordar o caso definido por $m_1 = -m_2 = m$, $m_3 = 0$, e

$$Q_{ab} = \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 0). \quad (5.16)$$

A partir dessa escolha e com a auxílio dos ansatz (5.11) e (5.12), obtemos uma equação diferencial para a função $\beta(r)$

$$\frac{d^2\beta}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + 2 \cot(\alpha) \frac{d\alpha}{dr} \right) \frac{d\beta}{dr} - \frac{\sin^2(\alpha) \sin(4\beta)}{r^2} \left(m - \frac{A}{2} \right)^2 = 0, \quad (5.17)$$

do qual resultam as seguintes soluções constantes

$$\beta(r) = \beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \quad \text{e} \quad \beta(r) = \beta_2 = \frac{\pi}{2}k, \quad (5.18)$$

na qual $k \in \mathbb{Z}$. A seguir, para cada escolha de $\beta(r)$, vamos obter as soluções tipo vórtices BPS.

5.2 Formalismo BPS

A partir de agora, buscamos obter equações de primeira ordem (as equações BPS) para o modelo. O procedimento usado na obtenção das soluções será o mesmo empregado nos capítulos anteriores, salvo algumas particularidades do modelo atual. Nosso ponto de partida é o tensor de energia-momento, o qual é dado por

$$T_{\lambda\rho} = -GF_{\mu\lambda}F_{\rho}^{\mu} + \overline{(P_{ab}D_{\lambda}\phi_b)}P_{ac}D_{\rho}\phi_c + \overline{(P_{ac}D_{\rho}\phi_c)}P_{ab}D_{\lambda}\phi_b + \quad (5.19)$$

$$\partial_{\lambda}\chi\partial_{\rho}\chi - \eta_{\lambda\rho}\mathcal{L}. \quad (5.20)$$

Da componente temporal de (5.19), obtem-se a densidade de energia do modelo. Desse modo, para campos estáticos temos

$$\varepsilon = \frac{1}{2}GB^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\chi}{dr}\right)^2 + h\left[\left(\frac{d\alpha}{dr}\right)^2 + \frac{W}{r^2}\left(\frac{A}{2} - m\right)^2\sin^2\alpha\right] + V, \quad (5.21)$$

onde definimos a seguinte função auxiliar

$$W(\alpha, \beta) = 1 - \sin^2\alpha\cos^2(2\beta), \quad (5.22)$$

com dado por (5.18).

E em seguida, definimos o seguinte vínculo

$$\frac{d}{dr}(\sqrt{2GU}) = eh\sqrt{W}\frac{d}{dr}(\cos\alpha). \quad (5.23)$$

do qual obteremos o potencial U .

Nota-se que a equação de vínculo (5.23) envolve as funções G e W explicitamente. Desse modo, o potencial V depende das escolhas feitas para as referidas funções.

Neste contexto, a expressão para a energia total é obtida a partir da integração de (5.21),

$$E = \int \varepsilon(r) d^2r, \quad (5.24)$$

ou

$$E = \int \left[\frac{1}{2}GB^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\chi}{dr}\right)^2 + h\left[\left(\frac{d\alpha}{dr}\right)^2 + \frac{W}{r^2}\left(\frac{A}{2} - m\right)^2\sin^2\alpha\right] + V \right] d^2r. \quad (5.25)$$

As soluções de energia mínima são obtidas através do procedimento de Bogomol'nyi, para isso, vamos reescrever a expressão (5.25) como

$$E = E_{bps} + 2\pi \int \left[\frac{1}{2} G \left(-\frac{1}{er} \frac{dA}{dr} \mp \sqrt{\frac{2v}{G}} \right)^2 + h \left(\frac{d\alpha}{dr} \mp \frac{\sqrt{W}}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \sin \alpha \right)^2 \right] \quad (5.26)$$

$$+ 2\pi \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dr} \mp \frac{1}{r} \mathcal{W}_\chi \right)^2 \right] \geq E_{bps}, \quad (5.27)$$

no qual vale

$$E_{bps} = 2\pi \int_0^\infty r \varepsilon_{bps}(r) dr, \quad (5.28)$$

$$\varepsilon_{bps}(r) = \pm \frac{1}{r} \frac{dH}{dr}, \quad (5.29)$$

onde $H = H(r)$ é uma função auxiliar dada por

$$H(r) = \mathcal{W} - \frac{1}{e} (A - 2m) \sqrt{2Gv}. \quad (5.30)$$

na qual definimos o superpotencial $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\chi)$, uma é uma função escalar que será definida posteriormente. Portanto,

$$E_{bps} = \pm 2\pi \Delta H, \quad (5.31)$$

resultando em um limite inferior para a energia total do sistema. Em particular, a energia só será mínima caso as funções $A(r)$, $\alpha(r)$ e $\chi(r)$, satisfizerem

$$\frac{1}{er} \frac{dA}{dr} = \mp \sqrt{\frac{2U}{G}}, \quad (5.32)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{\sqrt{W}}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \sin \alpha, \quad (5.33)$$

$$\frac{d\chi}{dr} = \pm \frac{\mathcal{W}_\chi}{r}. \quad (5.34)$$

na qual $\mathcal{W}_\chi = d\mathcal{W}/d\chi$. As expressões (5.32), (5.33) e (5.34) são as equações BPS do modelo oriundas do o procedimento de Bogomol'nyi e juntamente com (5.23) satisfazem as equações de Euler-Lagrange, sendo portanto, soluções do sistema.

5.3 Soluções BPS

Nessa seção, daremos seguimento a investigação das soluções de primeira-ordem para os dois valores de $\beta(r)$ dados por (5.18). Em ambos os casos, obteremos as equações BPS, o potencial e as condições de contorno para $A(r)$ e $\alpha(r)$. Por último, a partir da resolução numérica das equações (5.32), (5.33) e (5.34), exibiremos as soluções numéricas para as funções $A(r)$ e $\alpha(r)$, e também para o campo magnético $B(r)$ (5.13) e a densidade de energia (5.29).

5.3.1 Primeiro caso: $\beta(r) = \beta_1$

Partindo da solução de (5.17)

$$\beta(r) = \beta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k. \quad (5.35)$$

Para esta escolha, a função auxiliar $W = W(\alpha, \beta) = 1$, desse modo, a equação de vínculo (5.23) se reduz a

$$\frac{d}{dr}\sqrt{2GU} = eh\frac{d}{dr}\cos\alpha, \quad (5.36)$$

ou

$$\sqrt{2GU} = eh\cos\alpha, \quad (5.37)$$

cujas solução é

$$U(\chi, \alpha) = \frac{e^2h^2\cos^2\alpha}{2G(\chi)}, \quad (5.38)$$

ou, reescrevendo em termos do potencial $|\phi_3|$

$$U(\chi, \alpha) = \frac{e^2h^2|\phi_3|^2}{2G(\chi)}. \quad (5.39)$$

Desse modo, o potencial para essa primeira escolha de $\beta(r)$

$$V(\chi, |\phi_3|) = U(\chi, |\phi_3|) + \frac{\mathcal{W}_\chi^2}{2r^2}, \quad (5.40)$$

torna-se

$$V(\chi, \alpha) = \frac{e^2h^2\cos^2\alpha}{2G} + \frac{1}{2r^2}\mathcal{W}_\chi^2, \quad (5.41)$$

ou

$$V(\chi, |\phi_3|) = \frac{e^2h^2}{2G}|\phi_3|^2 + \frac{1}{2r^2}\mathcal{W}_\chi^2, \quad (5.42)$$

corroborando, novamente, a condição de energia finita.

É importante salientar que, a equação (5.34) não apresenta dependência dos campos $A(r)$ e $\alpha(r)$. Desse modo, a solução para $\chi(r)$ pode ser determinada com base em uma escolha da função $\mathcal{W}(\chi)$. A exemplo do que foi feito no capítulo 4 equação (4.35), escolhemos

$$\mathcal{W}(\chi) = \chi - \frac{\chi^3}{3}. \quad (5.43)$$

Devido a essa escolha, a equação (5.34) torna-se

$$\frac{d\chi}{dr} = \pm (1 - \chi^2), \quad (5.44)$$

que tem como solução

$$\chi(r) = \pm \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2}, \quad (5.45)$$

na qual r_0 representa uma constante positiva tal que $\chi(r = r_0) = 0$. A solução (5.45) satisfaz $\chi(r \rightarrow 0) \rightarrow -1$ e $\chi(r \rightarrow \infty) \rightarrow +1$.

Além disso, dada a expressão (5.37) e do potencial (5.43), a função $H(r)$ pode ser escrita como

$$H(r) = \chi - \frac{\chi^3}{3} - h(A - 2m) \cos \alpha. \quad (5.46)$$

Para determinar o valor de $H(r)$, recorreremos as condições de contorno na origem (5.14) e no infinito, que são dadas por

$$A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 2m, \quad \alpha(r \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \chi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1, \quad (5.47)$$

das quais resultam em

$$H(r \rightarrow 0) = \frac{2}{3} + 2mh, \quad (5.48)$$

$$H(r \rightarrow \infty) = -\frac{2}{3}. \quad (5.49)$$

De posse desse resultado, podemos calcular a energia mínima (5.31) explicitamente, isto é,

$$E_{bps} = 4\pi h |m| + \frac{8\pi}{3}. \quad (5.50)$$

A partir de agora, uma vez que já conhecemos as funções $\mathcal{W}(\chi)$ e $\chi(r)$, é necessário fixar também a função dielétrica $G(\chi)$, visto que ela aparece explicitamente nas equação BPS (5.32).

Neste trabalho, investigamos duas escolhas para a função $G(\chi)$. A primeira é

$$G(\chi) = G_1(\chi) = \frac{1}{(1 - \chi^2)}. \quad (5.51)$$

Quando $r = r_0$ o campo escalar $\chi(r)$ desaparece e a função $G_1(\chi)$ torna-se unitária e as soluções reproduzem aquelas previamente encontradas em [22]. No entanto, para $r \neq r_0$ a presença de $\chi(r)$ altera a forma das soluções dos vórtices. Além disso, nos limite $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$, a função dielétrica $G_1(\chi)$ diverge. Porém, para compensar esse comportamento e garantir que a energia seja finita, o campo magnético $B(r)$ desaparece nos limites fixados.

Assim, tendo em vista as equações (5.35), (5.43), (5.39) e (5.51), podemos reescrever as equações BPS (5.32), (5.33) e (5.34), as quais tornam-se

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{4r_0^2 r^2 e h \cos \alpha}{(r^2 + r_0^2)^2}, \quad (5.52)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{1}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \sin \alpha, \quad (5.53)$$

$$\frac{d\chi}{dr} = \pm \frac{4rr_0^2}{(r^2 + r_0^2)^2}, \quad (5.54)$$

respectivamente.

O passo seguinte é aplicar o *processo de linearização* a fim de obtermos as soluções aproximadas para os campos $A(r)$ e $\alpha(r)$, através das equações (5.52) e (5.53) (por conveniência, consideramos apenas os sinais inferiores das expressões (5.52) e (5.53), isto é, apenas os valores positivos de m).

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = \frac{4r_0^2 r^2 e h \cos \alpha}{(r^2 + r_0^2)^2}, \quad (5.55)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = -\frac{1}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \sin \alpha. \quad (5.56)$$

Próximos da origem ($r \rightarrow 0$), os campos $A(r)$ e $\alpha(r)$ são aproximados por

$$A(r) \approx \delta A(r) \quad \text{e} \quad \alpha(r) \approx \delta \alpha(r). \quad (5.57)$$

Neste caso, reescrevemos (5.55) como

$$\frac{d\delta A(r)}{dr} = \frac{4he^2 r_0^2 r^3}{r_0^2}, \quad (5.58)$$

onde consideramos $\cos \delta\alpha(r) \approx 1$. A solução é dada por

$$\delta A(r) \approx \frac{e^2 r^4}{r_0^2} h. \quad (5.59)$$

De modo análogo, reescrevemos (5.56)

$$\frac{d\delta\alpha(r)}{dr} = \frac{m}{r} \delta\alpha(r), \quad (5.60)$$

onde $\sin \delta\alpha(r) \approx \delta\alpha(r)$, que resulta em

$$\delta\alpha(r) \approx C_0 r^m. \quad (5.61)$$

Agora, uma vez que obtemos (5.59) e (5.61), as soluções (5.57) resultam em

$$A(r) \approx \frac{e^2 r^4}{r_0^2} h, \quad (5.62)$$

$$\alpha(r) \approx C_0 r^m, \quad (5.63)$$

na qual C_0 é uma constante real e positiva determinada numericamente.

Por outro lado, no limite assintótico $r \rightarrow \infty$, os valores aproximados para os campos são

$$A(r) \approx 2m - \delta A(r) \quad \text{e} \quad \alpha(r) \approx \frac{\pi}{2} - \delta\alpha(r). \quad (5.64)$$

A partir das quais reescrevemos (5.55) e (5.56) como

$$\frac{d\delta A(r)}{dr} = -\frac{4r_0^2 e^2 \delta\alpha(r)}{r}, \quad (5.65)$$

e

$$\frac{d\delta\alpha(r)}{dr} = -\frac{\delta A}{2r}, \quad (5.66)$$

cujas soluções são

$$A(r) \approx 2 \left(m - \sqrt{2hr_0} e C_\infty r^{-\sqrt{2hr_0}} \right), \quad (5.67)$$

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{2} - C_\infty r^{-\sqrt{2hr_0}e}, \quad (5.68)$$

onde C_∞ é uma constante real positiva determinada numericamente.

Agora, apresentamos as soluções para os campos $\alpha(r)$ e $A(r)$, obtidas através da resolução numérica das equações (5.52) e (5.53), com auxílio das condições de contorno (5.14) e (5.47). Aqui, fixamos $h = 1$, $e = 2$ e $r_0 = 5$, de modo que temos as soluções para $m = 1$ (curva preta

sólida), $m = 2$ (curva azul tracejada) e $m = 3$ (curva vermelha ponto-tracejada), $m = 7$ (curva laranja-traço-longo) e $m = 10$ (curva cinza sólida).

As figuras 5.1 e 5.2 mostram, respectivamente, as soluções numéricas $CP(2)$ das funções escalar e de gauge, isto é, para $\alpha(r)$ e $A(r)$, que exibem um comportamento monotônico bem definido.

As soluções para o campo magnético $B(r)$ são apresentadas na figura 5.3. Neste caso, nota-se que o perfil não-trivial da função escalar $\chi(r)$ muda a configuração do setor magnético. Mesmo sujeito as condições ((5.14) e (5.47)), o campo magnético resultante representa um anel centrado na origem, imitando o comportamento não-trivial mostrado na figura 3 de [30].

Na figura 5.4, temos as soluções para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$. Aqui, vale a pena ressaltar que, para $m = 1$, a distribuição de energia representa um lump centrado na origem. Em particular, em vista das expressões aproximadas (5.62) e (5.63), perto da origem, obtemos

$$\varepsilon_{bps}(r) \approx 2h(C_0)^2 + \frac{4}{r_0^2} \left(\frac{4}{r_0^2} + g^4 h^2 - \frac{h(C_0)^4}{6} r^2 \right) r^2, \quad (5.69)$$

de onde concluímos que

$$\varepsilon_{bps}(r \rightarrow 0) \approx 2h(C_0)^2. \quad (5.70)$$

Por outro lado, considerando $m \neq 1$, a configuração final corresponde a um anel que, perto da origem, comporta-se como

$$\varepsilon_{bps}(r) \approx \frac{4}{r_0^2} \left(\frac{4}{r_0^2} + g^4 h^2 \right) r^2, \quad (5.71)$$

do que conclui-se que desaparece na origem e sua amplitude aumentando à medida que a vorticidade m aumenta. Neste caso, tendo em mente o perfil padrão das soluções, nota-se uma interessante diferença: na falta de termos adicionais, o anel da densidade de energia não desaparece em $r = 0$, e sua amplitude decresce à medida que m cresce (vê figura 3 em [22]).

Podemos concluir esta parte argumentando que, dada as soluções (5.67) e (5.68), o valor assintótico para a densidade de energia é

$$\varepsilon_{bps}(r) \approx \frac{16r_0^4}{r^6}, \quad (5.72)$$

que para $\varepsilon_{bps}(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, isto é, uma densidade de energia finita.

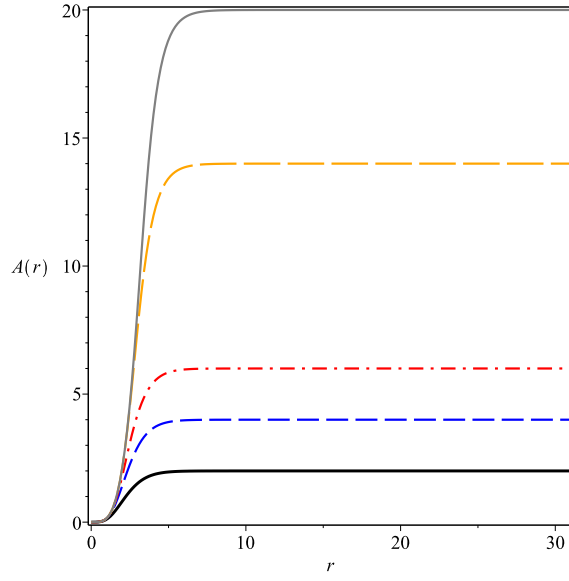


Figura 5.1: Soluções numéricas para $A(r)$ obtidas a partir das equações (5.55) e (5.56) via as condições de contorno (5.14) e (5.47). Aqui utilizou-se $e = 2, h = 1, r_0 = 5$ e $m = 1$ (curva preta sólida), $m = 2$ (curva azul tracejada) e $m = 3$ (curva vermelha ponto-tracejada), $m = 7$ (curva laranja-traço-longo) e $m = 10$ (curva cinza sólida). Como já era de se esperar, as soluções aproximam-se dos valores limites monotonicamente.

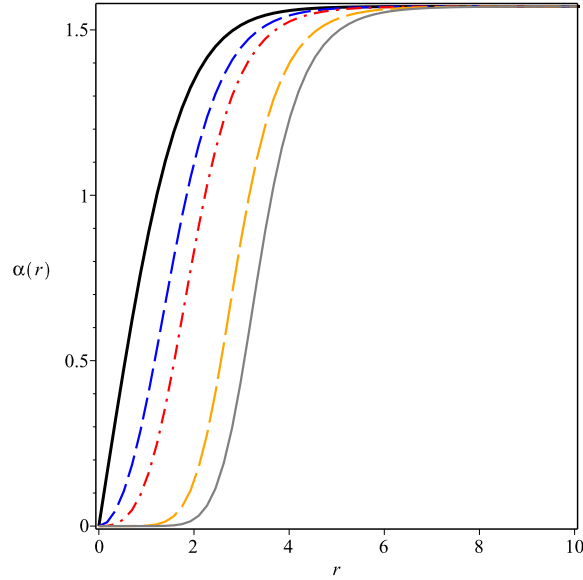


Figura 5.2: Soluções numéricas para o campo $\alpha(r)$, as convenções são as mesmas da figura 5.1, e apresentam comportamento monotônico bem definido.

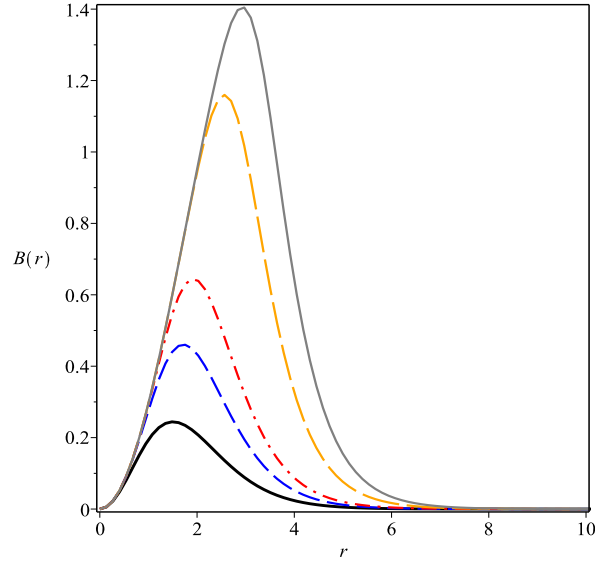


Figura 5.3: Soluções numéricas para o campo magnético $B(r)$. As convenções seguem a figura 5.1. Aqui, mesmo na presença das condições topológicas, o campo magnético imita o comportamento não-topológico devido ao perfil não-trivial do campo escalar $\chi(r)$.

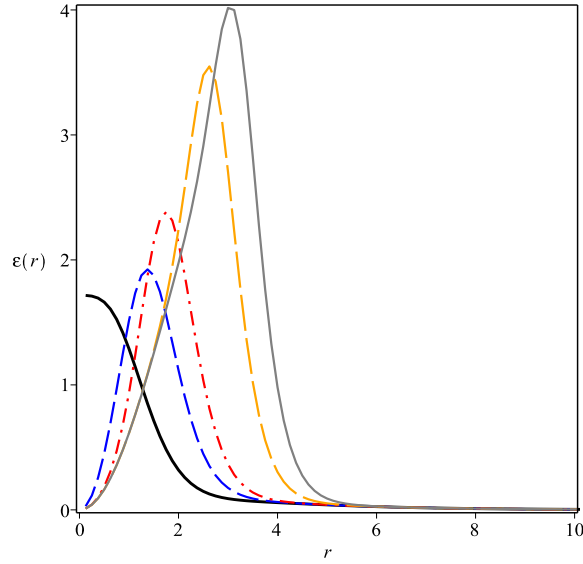


Figura 5.4: Soluções numéricas para a densidade de energia. As convenções seguem a figura 5.1. Neste caso, para $m = 1$, temos $\varepsilon_{bps}(r = 0) = 2h(C_0)^2$.

Para além disso, considerando $r_0 = 7$ e adotando as mesmas convenções das figuras anteri-

ores, obtemos

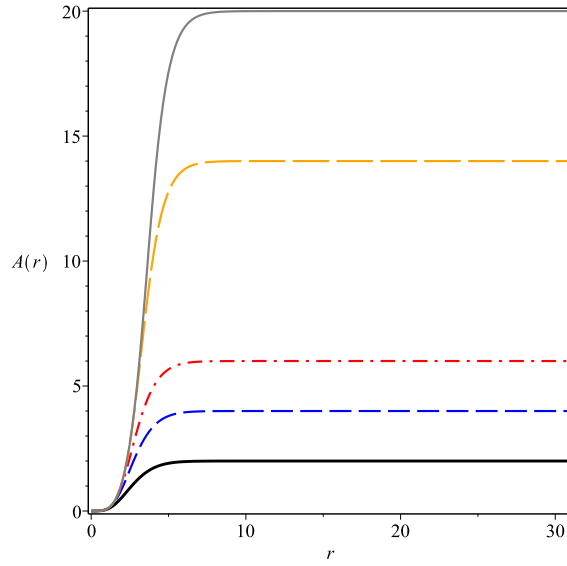


Figura 5.5: Soluções numéricas para $A(r)$ obtidas a partir das equações (5.55) e (5.56) via as condições de contorno (5.14) e (5.47). Aqui utilizou-se $e = 2, h = 1, r_0 = 7$ e $m = 1$ (curva preta sólida), $m = 2$ (curva azul tracejada) e $m = 3$ (curva vermelha ponto-tracejada), $m = 7$ (curva laranja-traço-longo) e $m = 10$ (curva cinza sólida). Como já era de se esperar, as soluções aproximam-se dos valores limites monotonicamente.

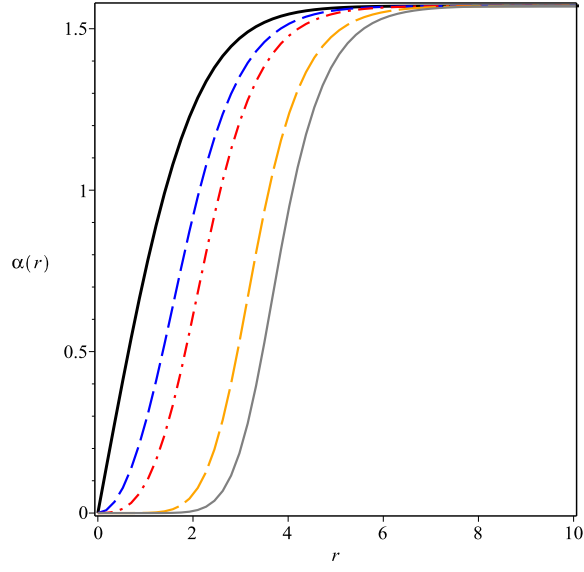


Figura 5.6: Soluções numéricas para o campo $\alpha(r)$, as convenções são as mesmas da figura 5.5, e apresentam comportamento monotônico bem definido.

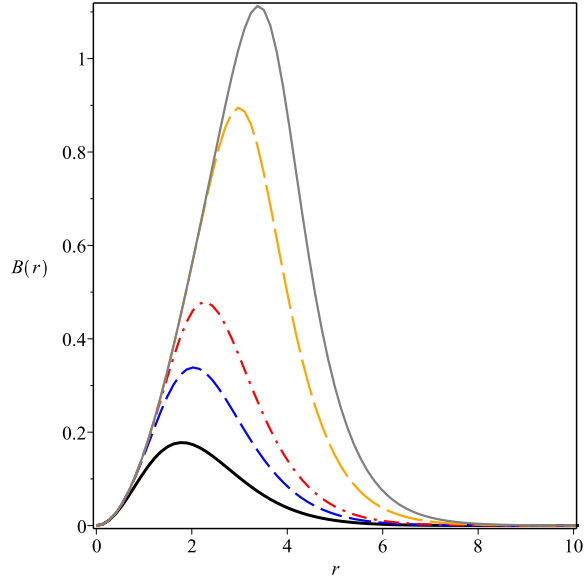


Figura 5.7: Soluções numéricas para o campo magnetico $B(r)$. As convenções seguem a figura 5.5. Aqui, mesmo na presença das condições topológicas, o campo magnético imita o comportamento não-topológico devido ao perfil não-trivial do campo escalar $\chi(r)$.

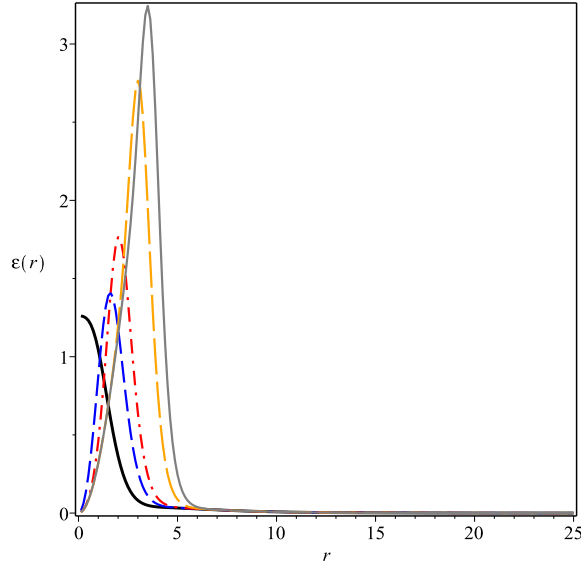


Figura 5.8: Soluções numéricas para a densidade de energia. As convenções seguem a figura 5.5. Neste caso, para $m = 1$, temos $\varepsilon_{bps}(r = 0) = 2h(C_0)^2$.

A segunda escolha para a função dielétrica

$$G_2(\chi) = \frac{1}{\chi^2}, \quad (5.73)$$

Neste caso, usando a expressão para o campo escalar (5.45), obtemos

$$G_2 = \frac{(r^2 + r_0^2)^2}{(r^2 - r_0^2)^2}. \quad (5.74)$$

Considerando os limites $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$, temos os seguintes valores para a função dielétrica

$$G_2(r \rightarrow 0) \rightarrow 1 \quad , \quad G_2(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1. \quad (5.75)$$

Em consequência, devido a esse comportamento na origem e no limite assintótico, os vórtices radialmente simétricos correspondentes comportam-se como os obtidos em um cenário $CP(2)$ mais simples (sem a presença da função dielétrica). Contudo, quando $r = r_0$, o campo $\chi(r)$ desaparece e a função $G_2(\chi)$ diverge. Neste contexto, para compensar tal divergência, o campo magnético torna-se nulo em $r = r_0$, resultando no surgimento de uma estrutura interna ao vórtice, e tornando a energia finita.

Desse modo, tendo em vista (5.35), (5.43), (5.39) e (5.73), as equações BPS (5.32) e (5.33) assumem tornam-se

$$\frac{1}{r} \frac{dA(r)}{dr} = \mp \frac{(r^2 - r_0^2)^2}{(r^2 + r_0^2)^2} e^2 h \cos \alpha, \quad (5.76)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \pm \frac{1}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \sin \alpha, \quad (5.77)$$

respectivamente.

Novamente, antes da resolução numérica, se faz necessário verificar a convergência das funções $A(r)$ e $\alpha(r)$ através do *processo de linearização* das equações (5.76) e (5.77), onde consideramos somente os sinais inferiores das mesmas (os valores positivos de m).

$$\frac{1}{r} \frac{dA(r)}{dr} = \frac{(r^2 - r_0^2)^2}{(r^2 + r_0^2)^2} e^2 h \cos \alpha, \quad (5.78)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = -\frac{1}{r} \left(\frac{A}{2} - m \right) \sin \alpha, \quad (5.79)$$

Em $r \rightarrow 0$, os valores aproximados dos campos são

$$A(r) \approx \delta A(r) \quad \text{e} \quad \alpha(r) \approx \delta \alpha(r). \quad (5.80)$$

Neste caso, as equações (5.78) e (5.79) são reescritas como

$$\frac{d\delta A(r)}{dr} = e^2 h r - \frac{4e^2 g}{r_0^2} r^3, \quad (5.81)$$

e

$$\frac{d\delta \alpha(r)}{dr} = m \frac{\delta \alpha(r)}{r}, \quad (5.82)$$

das quais têm como soluções

$$A(r) \approx \frac{e^2 h}{2} r^2 - \frac{e^2 h}{r_0^2} r^4, \quad (5.83)$$

$$\alpha(r) \approx C_0 r^m, \quad (5.84)$$

onde C_0 é uma constante real positiva determinada numericamente.

Por outro lado, para $r \rightarrow \infty$, temos

$$A(r) \approx 2m - \delta A(r) \quad \text{e} \quad \alpha(r) \approx \frac{\pi}{2} - \delta \alpha(r). \quad (5.85)$$

Para este caso, as equações (5.78) e (5.79) tornam-se

$$\frac{1}{r} \frac{d\delta A(r)}{dr} = -g^2 \delta \alpha(r), \quad (5.86)$$

e

$$\frac{d\delta\alpha(r)}{dr} = -\frac{\delta A(r)}{2r}, \quad (5.87)$$

cujas soluções são respectivamente

$$A(r) \approx 2m - e\sqrt{2h}C_\infty\sqrt{r}\exp(-Mr), \quad (5.88)$$

e

$$\alpha(r) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{C_\infty \exp(-Mr)}{\sqrt{r}}, \quad (5.89)$$

onde C_∞ é uma constante de integração e M é um parâmetro real dado por

$$M = e\sqrt{\frac{h}{2}}. \quad (5.90)$$

Neste caso, o comportamento exponencial das soluções (5.88) e (5.89) mostram que a constante real C_1 , definida em (5.90), representa a massa dos bósons escalares e vetoriais do modelo $CP(2)$, que por sua vez é igual a definida em (3.43) e (3.55), do modelo original.

Por fim, apresentamos as soluções numéricas para os campos $A(r)$ e $\alpha(r)$, através das equações (5.78) e (5.79) e das condições de contorno (5.14) e (5.47). As convenções para e , h e r_0 são as mesmas da figura 1, isto é, $h = 1$, $e = 2$ e $r_0 = 5$, de modo que temos soluções para $m = 1$ (curva preta sólida), $m = 2$ (curva azul tracejada), $m = 3$ (curva vermelha pontilhada), e para $m = 5$ (curva laranja traço-longo), $m = 7$ (curva cinza tracejada) e $m = 10$ (curva verde-escuro-sólida).

As figuras 5.9 e 5.10, mostram as soluções para $A(r)$ e $\alpha(r)$, respectivamente. Aqui, é interessante notar como a forma das soluções dependem dos valores de m . Em particular, quando m cresce, o campo $A(r)$ gera a formação de um platô em torno de $r = r_0$, tal estrutura interna modifica o perfil do campo magnético resultante.

As soluções para o campo magnético $B(r)$ encontram-se na figura 5.11. A configuração resultante tende a um duplo-lump centrado na origem. Aqui, como argumentamos anteriormente, o setor magnético desaparece em $r = r_0$ (tal efeito relacionado diretamente a forma da solução para $A(r)$), impedindo a divergência do primeiro termo em (5.21), e permitindo que a energia total tenda para um valor finito.

Na figura 5.12, encerramos nossa análise apresentando as soluções para a densidade de energia. Neste caso, para $m = 1$, a configuração resultante é um lump regular, cuja solução

aproximada, perto da origem, é dada por

$$\varepsilon_{bps}(r) \approx e^2 h^2 + 2h(C_0)^2 + C_2 r^2, \quad (5.91)$$

onde o parâmetro C_2 sendo dado por

$$C_2 = 2 \left(\frac{8}{r_0^4} - \frac{h}{3} (C_0)^4 - e^2 h^2 \left(\frac{2}{r_0^2} + (C_0)^2 \right) \right), \quad (5.92)$$

de onde concluimos que, para $m = 1$, a densidade de energia é dada por

$$\varepsilon_{bps}(r = 0) = e^2 h^2 + 2h(C_0)^2. \quad (5.93)$$

Vale destacar que, para valores intermediários da vorticidade, as soluções tendem para anéis centrados em na origem ($r = 0$). No entanto, à medida que m cresce, os anéis intermediários transformam-se em duplos-lumps não-singulares que se interceptam em $r = r_0$. É importante pontuar que tal mudança ocorrida nas soluções aparentam ser um fenômeno novo inerente ao modelo $CP(2)$ considerado.

Para $m \neq 1$, e próximo da origem, a expressão para a densidade de energia é

$$\varepsilon_{bps}(r) \approx e^2 h^2 + \frac{4}{r_0^2} \left(\frac{4}{r_0^2} - e^2 h^2 \right) r^2, \quad (5.94)$$

na qual converge para o valor constante

$$\varepsilon_{bps}(r) \approx e^2 h^2, \quad (5.95)$$

quando $r \rightarrow 0$.

Além disso, para qualquer valor da vorticidade m , a solução assintótica para a densidade de energia tende ao mesmo valor (5.72), que satisfaz a condição de energia finita (5.47).

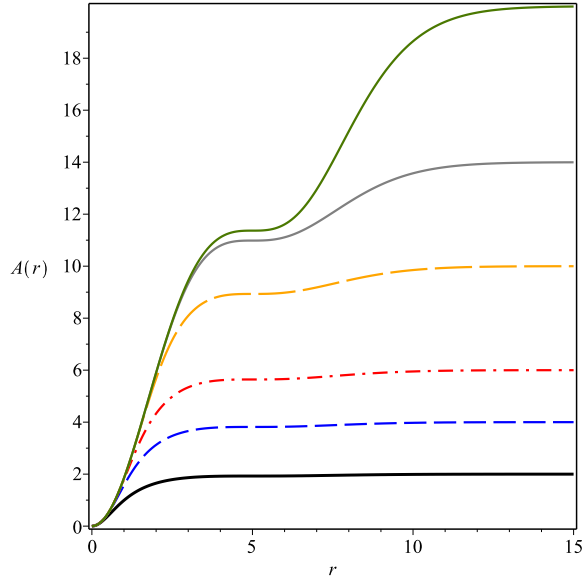


Figura 5.9: Soluções numéricas para $A(r)$ obtidas a partir das equações (5.78) e (5.79) via as condições de contorno (5.14) e (5.47). Aqui utilizou-se $e = 2, h = 1, r_0 = 5$ e para $m = 1$ (curva preta sólida), $m = 2$ (curva azul tracejada), $m = 3$ (curva vermelha pontilhada), e para $m = 5$ (curva laranja traço-longo), $m = 7$ (curva cinza tracejada) e $m = 10$ (curva verde-escuro-sólida). Neste caso, como m cresce, $A(r)$ gera um platô em torno de $r = r_0$.

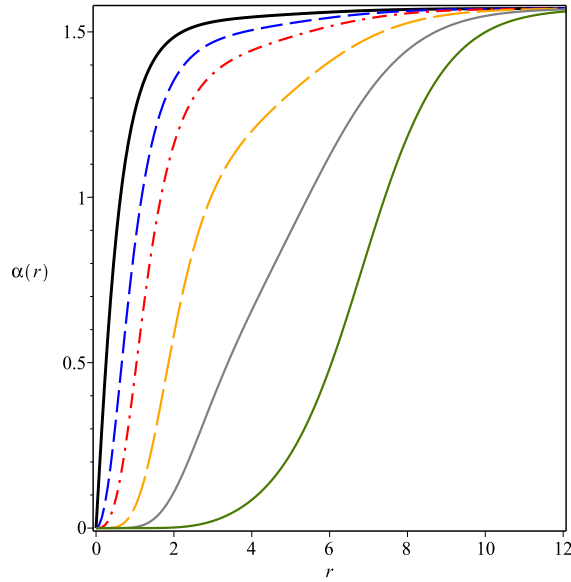


Figura 5.10: Soluções numéricas para o campo $\alpha(r)$. As convenções seguem a figura 5.9, e apresentam comportamento monotônico bem definido.

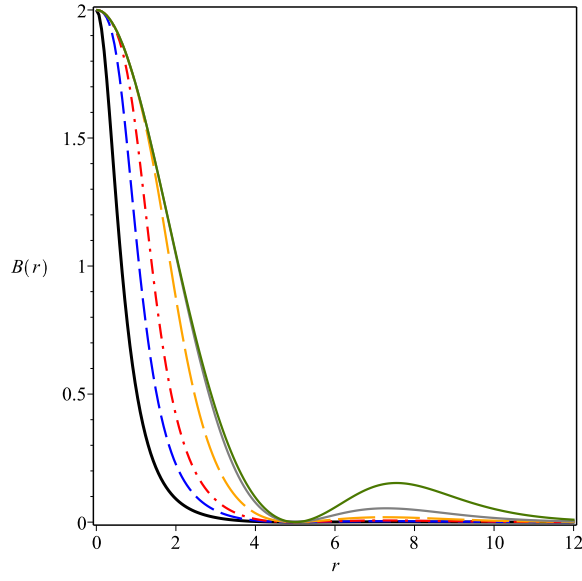


Figura 5.11: Soluções numéricas para o campo magnético. As convenções são as mesmas da figura 5.9. Em $r = r_0$, o campo magnético $B(r)$ desaparece, garantindo que a distribuição de energia tenha um valor finito.

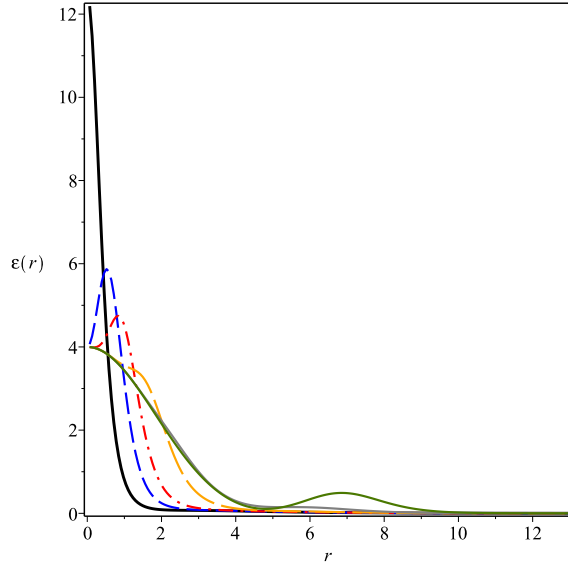


Figura 5.12: Soluções numéricas para a densidade de energia. As convenções são as mesmas da figura 5.9. Neste caso, obtém-se $\varepsilon_{bps}(r=0) = e^2 h^2 + 2h(C_0)^2$, para $m = 1$.

Para além disso, considerando o parâmetro $r_0 = 7$ e adotando as mesmas convenções ante-

riores para as figuras, obtemos

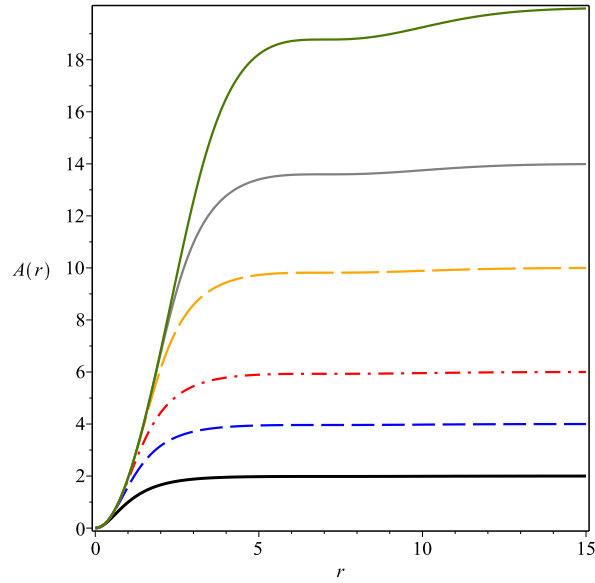


Figura 5.13: Soluções numéricas para $A(r)$ obtidas a partir das equações (5.78) e (5.79) via as condições de contorno (5.14) e (5.47). Aqui utilizou-se $e = 2$, $h = 1$, $r_0 = 7$ e para $m = 1$ (curva preta sólida), $m = 2$ (curva azul tracejada), $m = 3$ (curva vermelha pontilhada), e para $m = 5$ (curva laranja traço-longo), $m = 7$ (curva cinza tracejada) e $m = 10$ (curva verde-escuro-sólida). Neste caso, como m cresce, $A(r)$ gera um platô em torno de $r = r_0$.

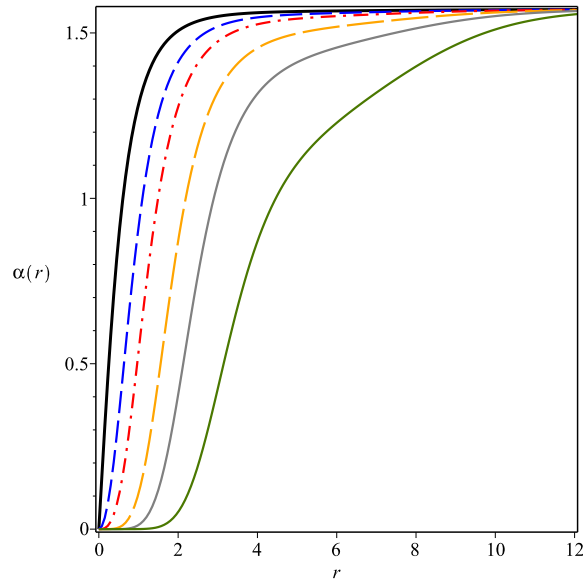


Figura 5.14: Soluções numéricas para o campo $\alpha(r)$. As convenções seguem a figura 5.13, e apresentam comportamento monotônico bem definido.

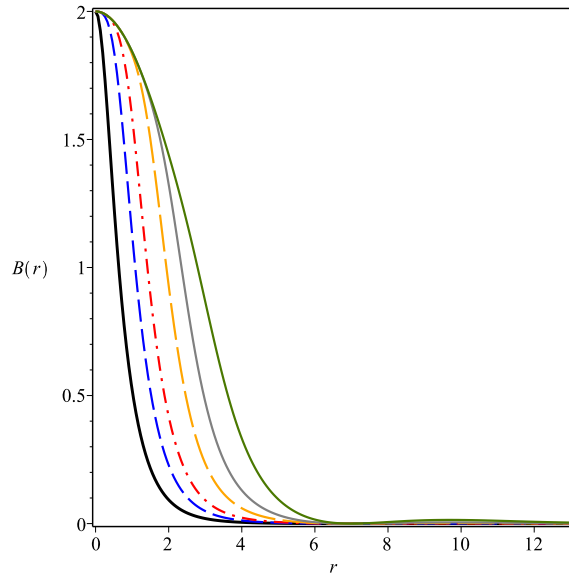


Figura 5.15: Soluções numéricas para o campo magnético. As convenções são as mesmas da figura 5.13. Em $r = r_0$, o campo magnético $B(r)$ desaparece, garantindo que a distribuição de energia tenha um valor finito.

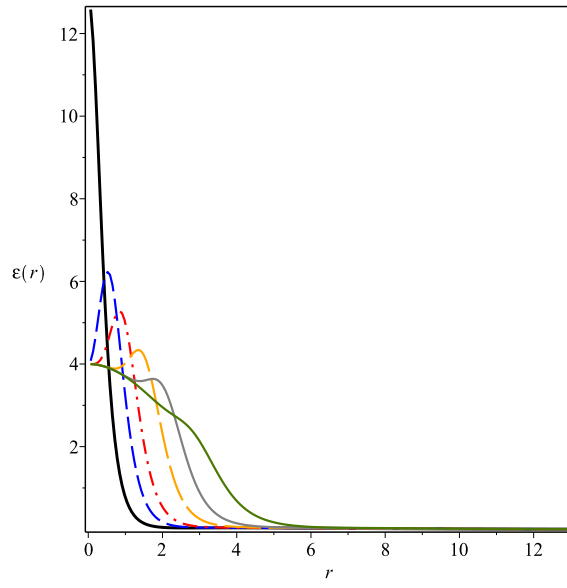


Figura 5.16: Soluções numéricas para a densidade de energia. As convenções são as mesmas da figura 5.13. Neste caso, obtém-se $\varepsilon_{bps}(r=0) = e^2 h^2 + 2h(C_0)^2$, para $m = 1$.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação, estudamos as soluções de vórtices BPS no modelo de Maxwell- $CP(2)$ com estrutura interna. O modelo $CP(2)$, do qual origina-se do modelo geral $CP(N-1)$, possui uma importante característica que justifica nossa investigação: sua estreita relação fenomenológica com a teoria 4-dimensional de Yang-Mills [20].

No segundo capítulo, apresentamos uma revisão sobre a ocorrência de vórtices estáticos no cenário de Maxwell-Higgs. O primeiro passo foi, a partir da densidade de lagrangeana (2.1) (invariante por uma simetria $U(1)$ local), obter a Lei de Gauss do modelo (2.6), onde verificou-se que as soluções são eletricamente neutras e puramente magnéticas. Em seguida, implementamos o formalismo BPS ao modelo. Através da minimização da energia total, obtivemos as equações de primeira-ordem (as equações BPS), as quais fornecem as soluções de vórtices radialmente simétricos. Além disso, a minimização da energia resultou na energia mínima da configuração (E_{bps}), que é finita, bem localizada e quantizada para os valores de $|n|$ (vorticidade).

No terceiro capítulo, introduzimos o modelo de calibre Maxwell- $CP(2)$ definido por (3.1). A exemplo do que foi feito no capítulo anterior, começamos por obter a Lei de Gauss para esse cenário, dada por (3.7). Em seguida, utilizando (3.9), (3.10) e as escolhas convenientes para as matrizes de carga Q_{ab} e para os winding numbers m_i , obtemos as soluções constantes para $\beta(r)$.

Em seguida, aplicamos a método de Bogomol'nyi afim de encontrarmos as soluções BPS. Vale frisar que, precisamos levar em consideração o vínculo (3.23) para o potencial. Desse modo, obtemos a expressão geral para as equações de primeira-ordem e para energia mínima

do modelo dadas por (3.31), (3.32) e (3.30), respectivamente.

As soluções BPS são obtidas levando em consideração cada escolha da função $\beta(r)$. Nesse sentido, desenvolvemos dois tipos de cenários distintos. Em ambos, obtemos as soluções BPS, o potencial de auto-interação e as respectivas energias mínimas. Nota-se que, apesar de serem obtidas em cenários diferentes, os resultados podem ser mapeados uns nos outros através de uma simples redefinição. Logo, podemos afirmar que ambos são equivalentes.

O modelo de Maxwell com estrutura interna foi investigado no capítulo 4, no qual, além dos campos de gauge e de higgs, adiciona-se um campo escalar real $\chi(r)$, que acopla-se ao setor eletromagnético através de uma função dielétrica $G(\chi)$ que multiplica o termo de Maxwell. Seguindo o roteiro estabelecido, obtivemos a respectiva Lei de Gauss (4.9) a partir das equações de Euler-Lagrange oriundas da densidade de lagrangeana (4.3). Em seguida, como nos cenários anteriores, usamos método de Bogomol'nyi para encontrarmos as equações de primeira-ordem e consequentemente as soluções radialmente simétricas. Além disso, a minimização fornece a energia mínima da configuração, a qual depende do superpotencial $\mathcal{W}$ que foi definido posteriormente.

O primeiro passo na busca das soluções de primeira-ordem, consiste em fixar as funções $\mathcal{W}(\chi)$ e $\chi(r)$, e em seguida com auxílio das equações BPS, obtermos as soluções para as duas escolhas possíveis da função dielétrica $G(\chi)$. As soluções obtidas apresentam perfis distintos, porém em ambas o limite de Bogomol'nyi é saturado, ou seja, a energia mínima é finita e bem localizada.

Enfim, no capítulo 5, investigamos a ocorrência de vórtices em um modelo de Maxwell- $CP(2)$ com estrutura interna. Neste caso, a densidade de lagrangeana que define o modelo é (5.1). A Lei de gauss estacionária (5.9), oriunda das equação (5.5), nos revela que a exemplo dos cenários anteriores, o modelo atual não possui carga elétrica (vórtices puramente magnéticos).

A partir do procedimento de Bogomol'nyi, desenvolvemos as estruturas de primeira ordem, e consequentemente obtemos as equações de diferenciais de primeira-ordem para os campos ((5.32),(5.33) e (5.34)), as quais fornecem soluções que saturam um limite inferior da energia do sistema.

Partindo na busca das soluções propriamente ditas, se faz obrigatório definir: escolhas convenientes para as matrizes de carga Q_{ab} e winding numbers m_i nos levam as duas funções

de $\beta(r)$. Ter em mente o vínculo (5.23), oriundo do setor de gauge $CP(2)$, a partir do qual se origina um dos termos do potencial $V(\chi, |\phi_3|)$. A escolha do superpotencial $\mathcal{W}(\chi)$ e do campo escalar $\chi(r)$. Além de considerar todas as escolhas anteriores para cada uma dos valores da função dielétrica $G(\chi)$. Os resultados obtidos saturam o limite de Bogomol'nyi e apresentam perfis distintos, resultado das escolhas apropriadas em cada um dos cenários.

Considerando a escolha G_1 , as soluções para os campos $\alpha(r)$ e $A(r)$ são semelhantes as obtidas no modelo de Maxwell- $CP(2)$. Já para o campo magnético $B(r)$ e para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$, os perfis são modificados devido a presença de G_1 . As soluções para $B(r)$ formam aneis centrados na origem cujas amplitudes dependem do valor do parâmetro r_0 . Além disso, as soluções para a densidade de energia apresentam um perfil interessante: considerando $m = 1$, a solução é um Lump centrado na origem. Para $m \neq 1$, as soluções formam aneis centrados na origem, cujas amplitudes também dependem do parâmetro r_0 .

Para a escolha G_2 , as soluções para $\alpha(r)$ possui comportamento semelhante as obtido no modelo Maxwell- $CP(2)$. Em contrapartida, as soluções para função $A(r)$ são modificadas apresentando um platô em $r = r_0$, para todos os valores de m . As soluções para o campo magnético e densidade de energia também são modificadas devido a presença de G_2 . Para $B(r)$, as soluções formam um Lump centrado na origem que em $r = r_0$ são convertidos em aneis cuja amplitude depende do parâmetro r_0 .

Vale ressaltar que, na solução para o campo magnético $B(r)$, à medida que o parâmetro r_0 aumenta, os aneis formados tornam-se cada vez mais espaçados e o comportamento tende ao apresentado no modelo de Maxwell- $CP(2)$. Portanto, conclui-se que existe um valor limite para r_0 , de modo que acima desse limite, a estrutura interna da solução desaparece.

Já as soluções para a densidade de energia $\varepsilon_{bps}(r)$ possuem o seguinte perfil, para $m = 1$ é um Lump centrado na origem. Porém, para $m \neq 1$, as soluções são inicialmente Lumps centrados na origem e em $r = r_0$ são convertidos em aneis cuja amplitude depende de r_0 (comportamento semelhante ao do campo magnético).

É importante pontuar que, os resultados contidos nesse trabalho são, a priori, obtidos considerando o modelo rotacional e radialmente simétrico definido pelos ansatz (5.11) e (5.12), de modo que não se pode garantir que o formalismo BPS pode ser implementado a teoria original fora desse cenário pré-estabelecido.

Desse trabalho, surgem idéias a respeito de investigações futuras, como a obtenção de vórtices BPS eletricamente carregados com estrutura interna, que surgem tanto nas versões de Chern-Simons quanto de Maxwell-Chern-Simons do modelo original (5.1). Outra linha é considerar a conexão entre estas configurações (com estrutura interna) e a dinâmica dos vórtices de gauge $CP(2)$ na presença de termos que representam efeitos de impurezas magnéticas (estudadas para Maxwell-Higgs em [31]), ambos cenários apresentam uma dependência explícita de r na densidade de lagrangeana. Esses problemas estão atualmente sendo considerados e esperamos resultados positivos para uma contribuição recebida.

Referências Bibliográficas

- [1] Kibble, T .W. B., J. Phys. A: Math. Gen., 9, 1387, 1976.
- [2] N. Manton, P.Sutcliffe, *Topological Solitons* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004).
- [3] A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [4] E. B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solution*, Sov. J. Nucl. Phys. 24,449 (1976).
- [5] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. 35,769 (1975).
- [6] Helmholtz, H.. "Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen.." Journal für die reine und angewandte Mathematik 55 (1858):25-55.
- [7] Saffman, P.G., *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press, 1992.
- [8] A. A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP 5, 1174 (1957).
- [9] H. B. Nielsen and Olesen, "*Vortex-line Models for Dual Strins*", Nucl. Ohys. B 61 (1973) 45.
- [10] R. Jackiw and. E. J. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 64, 2234 (1990).
- [11] R. Jackiw, K. Lee and E. J. Weinberg, Phys. Rev. D 42, 3488 (1990).
- [12] D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos and R. Menezes, Phys. Rev. D81,125014 (2010).
- [13] D Bazeia, R. Casana, M.M. Ferreira Jr and E. da Hora, Europhys. Lett. 109, 21001 (2015).

- [14] R. Casana, E da Hora, D. Rubiera-Garcia and C. dos Santos, Eur. Phys. J. C 75, 380 (2015).
- [15] R. Casana, M.M. Ferreira Jr., E. da Hora and C. Miller, Phys. Lett. B718, 620 (2012).
- [16] R. Casana, M.M. Ferreira Jr., E. da Hora and A. B. F. Neves, Eur. Phys. Rev. J. C 74, 3064 (2014).
- [17] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. Mukhanov, Phys. Lett. B 458, 209 (1999).
- [18] V. Mukhanov and A. Vikman, J. Cosmol. Astropart. Phys. 02 (2005) 004.
- [19] C. Armendariz-Picon and E. A Lim, J. Cosmol. Astropart. phys. 08 (2005) 007.
- [20] A. M. Polyakov, Phys. Lett. B 59, 79 (1975). E. Witten, Nucl. Phys. B 149, 285 (1979). M. Shifman and A. Yung, Rev. Mod. Phys. 79, 1139 (2007).
- [21] A. Yu. Loginov, Phys. Rev. D 93, 065009 (2016).
- [22] R. Casana, M. L. Dias, E. da Hora, Phys. Lett. B 768, 254 (2017).
- [23] H. J. Vega, F. A. Schaposnik, Phys. Rev. Lett. 56,2564 (1986).
- [24] D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos, and R. Menezes, Eur. Phys. J. C71, 1833 (2011).
- [25] D. Bazeia, J. Menezes and R. Menezes, Phys. Rev. Lett. 91, 241601 (2003).
- [26] D. Bazeia, M. M. Doria and E. I. B. Rodrigues, Phys. Lett. A 380, 1947 (2016)
- [27] D. Bazeia, J.G.G.S. Ramos, and E.I.B. Rodrigues, J. Magnetism Magnetic Materials 423, 411 (2017).
- [28] D. Bazeia, and A. Mohammadi, Phys. Lett. B 779, 420 (2018).
- [29] D. Bazeia, M.A. Marques and R. Menezes, Maxwell-Higgs vortices with internal structure, Phys. Lett. B 780 (2018) 485.
- [30] R. Casana, M. L. Dias and E da Hora, Phys. Rev. D. **96**, 076013 (2017).
- [31] A. Cockburn, S. Krusch and A. A. Muhamed, J. Math. Phys. 58,063509 (2017).