



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PPGMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MÁRCIO EDUARDO GONÇALVES SILVA

HIPERSUPERFÍCIES CAPILARES ESTÁVEIS EM UM SEMIESPAÇO OU EM
UM SLAB

São Luís - MA
2018

MÁRCIO EDUARDO GONÇALVES SILVA

HIPERSUPERFÍCIES CAPILARES ESTÁVEIS EM UM SEMIESPAÇO OU EM
UM SLAB

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática
da Universidade Federal do Maranhão como
requisito parcial para obtenção do título de
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes

São Luís - MA
2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Silva, Márcio Eduardo Gonçalves.

Hipersuperfícies Capilares Estáveis em um Semiespaço ou em um Slab / Márcio Eduardo Gonçalves Silva. - 2018.
71 f.

Orientador(a): Ivaldo Paz Nunes.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2018.

1. Estabilidade. 2. Hipersuperfície com Curvatura Média Constante. 3. Hipersuperfícies Capilares. 4. Semiespaço. 5. Slab. I. Nunes, Ivaldo Paz. II. Título.

MÁRCIO EDUARDO GONÇALVES SILVA

Hipersuperfícies Capilares Estáveis em um Semiespaço ou em um Slab

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 21 de novembro de 2018.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Benigno Oliveira Alves
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos
Universidade Federal de Sergipe - UFS

Agradecimentos

A Deus, por me mantém forte nos tempos difíceis e por me ter proporcionado uma família maravilhosa e feliz.

Aos meus pais José Ribamar da Silva e Raimunda Gonçalves Silva, pela alegria que sentem ao me ver realizar um sono, pelas orações e suporte espiritual.

A Joselene Gomes Silva, minha esposa, pelo encorajamento para ultrapassar os obstáculos e tornar minha vontade de vencer maior.

Aos meus filhos Márcio Filho e Márlon, que são a esperança e alegria da minha vida.

Aos meus irmãos Tânia, José Raimundo, Sandra, Vânia, Sebastião, Valmary e Luís Fernando, por estarem sempre me incentivando e presentes na minha vida.

Ao Professor Ivaldo Paz Nunes, meu orientador, pela paciência, confiança, dedicação ao ensino e conhecimentos repassados durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os professores do PPGMAT e, em especial, aos professores Vanessa Ribeiro, Ivaldo Paz e Adecarlos Costa pela excelente didática e pelo esforço e dedicação para elevar a qualidade do programa de pós-graduação em Matemática.

Aos colegas do PPGMAT Felipe Ferreira, Carla Santos, Daylanne Ferreira, Willian Luís, Caio, Marcelo Ribeiro, Adilson Silva, Jadiel e Arnando Nélio pelas conversas interessantes e descontraídas que tivemos.

À Universidade Federal do Maranhão por oferecer à sociedade qualificação em cursos de graduação e pós-graduação excelentes.

"Uma geometria não pode ser mais verdadeira do que outra; poderá ser apenas mais cômoda."

Poincaré

Resumo

Este trabalho apresenta e analisa os resultados obtidos por Abdelhamid Ainouz e Rabah Souam [1]. Eles obtiveram três resultados para hipersuperfícies imersas em domínios como *slab* e semiespaço do espaço Euclidiano. O resultado geral é que hipersuperfícies capilares estáveis imersas em um *slab* ou um semiespaço fechados em $\mathbb{R}^{n+1}$ apresentam simetria rotacional. Mais precisamente, com as hipóteses de capilaridade e estabilidade, eles demonstraram que quando a superfície tem gênero zero e está imersa num *slab* do $\mathbb{R}^3$, ela é de revolução; quando a hipersuperfície é de bordo livre, está imersa num *slab* do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e com componentes de bordo mergulhadas, ela é ou cilindro circular ou um gráfico sobre o bordo do domínio e, por último, quando a hipersuperfície está imersa no semiespaço do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ângulo de contato $0 < \theta \leq \pi/2$ e com componentes de bordo mergulhadas, ela é uma calota esférica.

Palavras-Chave: Hipersuperfícies Capilares, Hipersuperfície com curvatura média constante, estabilidade, Semiespaço, Slab

Abstract

This work presents and analyzes the results obtained by Abdelhamid Ainouz and Rabah Souam [1]. They obtained three results for immersed hypersurfaces in a domains in Euclidean space such as slab and half-space. The general result is that stable immersed capillary hypersurfaces in a closed slab or a closed half-space in $\mathbb{R}^{n+1}$ have a rotational symmetry. More specifically, with the capillarity and stability hypothesis, they have demonstrated that an immersed surfaces of genus zero in a slab of $\mathbb{R}^3$, it is of revolution; When the immersed hypersurface in a slab of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, with free boundary and the boundary components are embedded, it is either a circular vertical cylinder or a graph over boundary domain, lastly, when the immersed hypersurface in the semispace of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, with contact angle $0 < \theta \leq \pi/2$ and the boundary components are embedded, it is spherical cap.

Keywords

Capillary Hypersurfaces, constant mean curvature hypersurfaces, stability, Half-Space, Slab.

Sumário

Introdução	9
Organização	12
1 Preliminares	13
1.1 Variedade Riemanniana	13
1.1.1 Métricas Riemanniana	15
1.1.2 Conexão Afim	16
1.1.3 Curvatura	18
1.1.4 Tensores	19
1.1.5 Imersões Isométricas	20
1.2 Operadores diferenciais	24
1.3 Princípios do Máximo Forte	27
2 Hipersuperfície Capilar Estável	29
2.1 Variação de uma imersão	29
2.2 Energia	30
2.3 Estabilidade	35
2.4 Algumas resultados para hipersuperfícies em espaços Euclidianos	40
3 Hipersuperfície Capilares Estáveis Imersas em um <i>Slab</i> e Semiespaço	47
3.1 Introdução	47
3.2 Superfícies Capilares Estáveis de Gênero Zero em um <i>Slab</i> em $\mathbb{R}^3$	47
3.3 Hipersuperfície Estável com CMC com bordos Livres em um <i>slab</i> em $\mathbb{R}^{n+1}$	53
3.4 Hipersuperfície capilares estáveis em um semi-espaço em $\mathbb{R}^{n+1}$	60
Referências	70

INTRODUÇÃO

Este trabalho é baseado no artigo científico de Abdelhamid Ainouz e Rabah Souam [1] intitulado *Stable capillary hypersurfaces in a half-space or a slab*, no qual eles demonstraram, além de outras características específicas a cada situação, que as hipersuperfícies capilares estáveis imersas em certo domínio do espaço Euclidiano são rotacionalmente invariantes em torno de um eixo ortogonal a um hiperplano fronteira desse domínio. A seguir, detalha-se quais os domínios e o objeto de estudo, além disso, salienta-se a interpretação física e geométrica e, também, mostra-se resultados já obtidos e que inspiraram os autores.

O subespaço no qual os objetos são imersos é um subconjunto aberto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ incluindo seu bordo que é considerado suave e não vazio. Esse subespaço é chamado domínio e representado por $\mathcal{B}$. Mais especificamente, os domínios considerados aqui são o semiespaço e o *slab*, termo em inglês que designa o fecho do espaço entre dois hiperplanos paralelos.

O objeto imerso no domínio é a hipersuperfície capilar que é uma hipersuperfície compacta com curvatura média constante (CMC) com bordo não vazio e a interseção da hipersuperfície com o bordo de $\mathcal{B}$ ($\partial\mathcal{B}$) ocorre em um ângulo constante conhecido como ângulo de contato. Quando o ângulo de contato é $\pi/2$, isto é, quando a hipersuperfície é ortogonal a $\partial\mathcal{B}$, diz-se que é uma hipersuperfície CMC com bordo livre.

Figura 1: semiespaço contendo uma calota esférica.

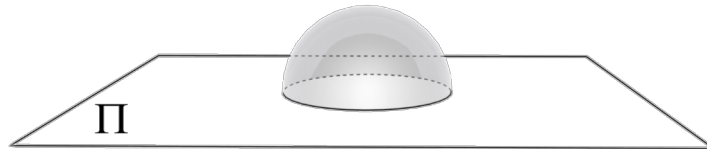
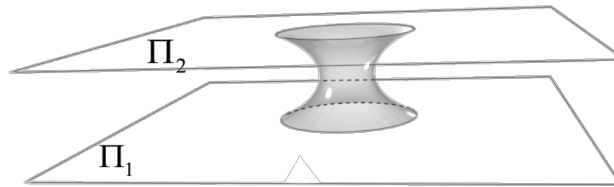


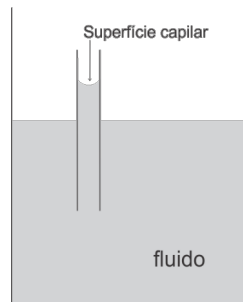
Figura 2: *Slab* contendo um pedaço de catenoide.



Na figura 1 o hiperplano Π é a fronteira do semiespaço $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z \geq 0\}$ e na figura 2 os hiperplanos Π_1 e Π_2 são fronteiras do *slab*. Percebe-se que as hipersuperfícies capilares de interesse aqui têm os bordos contidos em hiperplanos.

A capilaridade é um fenômeno físico observado em fluidos contidos em capilares, tubos estreitos. Este fenômeno está relacionado a forças exercidas entre moléculas do fluido e do capilar de forma que, dependendo do fluido e do tubo, o fluido pode subir ou descer pelo capilar. Próximo às paredes do tubo, o fluido tende a subir ou descer além do seu nível normal. Entre o fluido e o meio exterior gasoso forma uma película que é chamada superfície capilar, consoante figura 3.

Figura 3: Fenômeno da capilaridade.



As superfícies capilares ocorrem na natureza de diversas formas e pode-se vê-las, por exemplo, como a interface entre uma gota d'água posta em uma superfície de contato e o ar exterior que é modelado matematicamente por uma calota esférica contida no semiespaço, outro exemplo bem conhecido é a interface entre o ar e a água quando esta está confinada em um recipiente aberto. O pedaço de catenoide contido entre dois plano paralelos como na figura 2 também é uma superfície capilar.

Uma característica das hipersuperfícies capilares é que elas são pontos críticos de um funcional energia para variações que mantêm constante o volume que elas encerram. Entre as hipersuperfícies capilares, as de interessem neste trabalho, por serem fisicamente realizáveis pelo menos no $\mathbb{R}^3$, são as estáveis, ou seja, as que têm a segunda derivada do funcional energia não negativa para toda variação que preserva volume.

Um problema muito difícil ou mesmo impossível em Geometria Rimanniana é tentar encontrar todas as hipersuperfícies estáveis mesmo restringindo-as a determinada característica ou possuindo certas propriedades sem escolher um domínio específico em um dado espaço, mas mesmo em domínio simples o problema ainda é muito difícil como se pode ver pelas inúmeras questões ainda em aberto, por exemplo, em [2] traz no apêndice B uma lista de tais questões no espaço $\mathbb{R}^3$. Para tornar o problema viável, o que se faz geralmente é escolher um domínio adequado de um ponto de vista físico ou matemático de um determinado espaço e tentar caracterizar ou classificar as hipersuperfícies imersas ou mergulhadas com adição de hipótese de interesse.

Em domínios convexos como semiespaço, *slab* e bolas existem resultados relevantes, por exemplo, Ros em [3] mostrou que, no *slab* do $\mathbb{R}^3$, das superfícies com ângulo de contato $\pi/2$, o cilindro circular reto é a única superfície capilar estável. Pedrosa e Ritoré [4] mostraram que no *slab* de $\mathbb{R}^{n+1}$ as hipersuperfícies mergulhadas com CMC e ângulo de contato também $\pi/2$ tem a característica de serem rotacionalmente simétricas.

Em semiespaço do $\mathbb{R}^{n+1}$, as calotas esféricas são exemplos de imersões capilares estáveis e são as únicas mergulhadas [5]. Marinov [6] caracterizou as calotas esféricas como as únicas superfícies capilares imersas estáveis em um semiespaço do $\mathbb{R}^3$ com bordos mergulhados. Recentemente, Choe e Koiso [7] provaram o mesmo resultado em $\mathbb{R}^{n+1}$, para qualquer $n \geq 2$, assumindo o ângulo de contato $\geq \Pi/2$ e a fronteira da hipersuperfície sendo convexa.

Outros resultados importante para hipersuperfícies estáveis obtidos em domínios convexos encontram-se, por exemplo, no trabalho de Ros e Vergasta [8] complementado pelo trabalho de Nunes [9] que classificaram as hipersuperfícies com CMC, estáveis e com bordo livre contidas na bola unitária fechada do $\mathbb{R}^3$ como sendo ou disco totalmente geodésico ou calota esférica.

Um importante resultado utilizado nas demonstrações dos teoremas principais deste trabalho é um teorema devido a Wentz [5], ele provou que, em um domínio limitado e conexo do $\mathbb{R}^{n+1}$ aderido a um hiperplano horizontal Π , as hipersuperfícies capilares mergulhadas, formadas pela fronteira do domínio que não está contida em Π mais a fronteira da interseção do domínio com Π , possuem simetria rotacional em torno de uma linha vertical, além disso, qualquer interseção não vazia do domínio com um hiperplano paralelo a Π é um disco aberto com centro nessa linha. Na verdade, o teorema é bem mais geral, mas basta aqui nessa especificidade.

Em [1] Abdelhamid Ainouz e Rabah Souam demonstraram que as hipersuperfícies capilares estáveis são rotacionalmente invariante em torno de um eixo ortogonal a $\partial\mathcal{B}$ nos seguintes casos:

- (1) $n = 2$, $\mathcal{B}$ é um *slab* e a superfície tem gênero zero (Teorema 3.2.4);
- (2) $n \geq 2$, $\mathcal{B}$ é um *slab* e a hipersuperfície tem fronteira livre; isto é, o ângulo de contato

é $\pi/2$ e cada componente da fronteira da hipersuperfície é mergulhada. Neste caso, se não for um cilindro circular reto, a hipersuperfície deve ser um gráfico sobre um domínio em $\mathcal{B}$ (Teorema 3.3.3);

- (3) $n \geq 2$, $\mathcal{B}$ é um semiespaço, o ângulo de contato é $\pi/2$ ou é $< \pi/2$, e cada componente de bordo da hipersuperfície é mergulhada. Neste caso, a hipersuperfície é então uma calota esférica (Teorema 3.4.2).

O estudo e análise dos três casos acima são os objetivos principais desta dissertação.

Organização

O primeiro capítulo apresenta uma introdução às variedades Riemannianas com os seus principais conceitos, expõe também conceitos como operadores diferenciais e o princípio do máximo. O segundo capítulo apresenta o problema variacional, mostra as convenções adotadas no trabalho, o conceito de hipersuperfície capilar, estabilidade e mostra ainda alguns resultados importantes para hipersuperfícies em espaço Euclidiano. Por fim, o último capítulo é dedicado ao estudo dos três teoremas principais dessa dissertação demonstrados por Abdelhamid Ainouz e Rabah Souam em [1].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, são recordados os conceitos básicos da Geometria Riemanniana necessários para entendimento do resultado principal do artigo objeto desta dissertação e também são expostos conceitos como operadores diferenciais e o Princípio do Máximo para operadores elípticos. Alguns resultados ou afirmações serão apresentados sem demonstrações, mas as referências serão indicadas para consultas.

1.1 Variedade Riemanniana

Inicia-se esta seção com o conceito de variedade topológica, supondo conhecidos a definição e as propriedades básicas de espaço topológico, seguindo-se pela noção de variedade diferenciável e, por fim, da concepção de Variedade Riemanniana e a conceitos como conexão, métrica, curvatura entre outros.

Definição 1.1.1. *Suponha M um espaço topológico. Diz-se que M é uma variedade topológica de dimensão n se M tem as seguintes propriedades:*

- *M é um espaço de Hausdorff, ou seja, para cada par de pontos distintos $p, q \in M$, existem subconjuntos disjuntos $U, V \subseteq M$ tais que $p \in U$ e $q \in V$.*
- *M tem base enumerável de abertos, isso quer dizer que existe uma coleção enumerável de abertos de M tal que todo aberto é a união de abertos dessa coleção;*
- *M é localmente Euclidiano de dimensão n , isso significa que todo ponto de M tem uma vizinhança que é homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$.*

Essas propriedades são compartilhadas por espaços euclidianos e por todos os objetos geométricos que são localmente parecidos com espaços euclidianos, como curvas e superfícies.

Por propriedade puramente topológica não se consegue distinguir um círculo de um quadrado, pois são homeomorficamente invariantes. Então, propriedade puramente topológica não serve como critério para "suavidade", para isso, deve-se adicionar a uma variedade

topológica uma estrutura diferenciável e, dessa forma, chega-se à definição de variedade diferenciável.

Definição 1.1.2. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:*

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para todo par α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.
3. A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).

O par $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização ou sistema de coordenada de M em p ; $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada vizinhança coordenada em p . Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma estrutura diferenciável.

Em muitas aplicações de variedades, como as que envolvem integração, encontram-se espaços que seriam suaves, exceto por eles terem bordo. Exemplos desses tipos de espaços incluem intervalos fechados em $\mathbb{R}$, bolas fechadas em $\mathbb{R}^n$. Para incluir esses espaços na definição de variedade é preciso estender as definições 1.1.1 e 1.1.2.

Um semiespaço de dimensão n denotado por $\mathbb{H}^n$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ definido como

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}. \quad (1.1)$$

e os conjuntos $\text{int}\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ e $\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ são o interior e a fronteira de $\mathbb{H}^n$.

Um subconjunto aberto A no semiespaço $\mathbb{H}^n$ tem a forma $A = U \cap \mathbb{H}^n$, onde U é aberto em $\mathbb{R}^n$. A interseção $\partial A = A \cap \partial\mathbb{H}^n$, que é um aberto em $\partial\mathbb{H}^n$, chama-se bordo de A . Se $\partial A = \emptyset$, A é um aberto em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.3. *Uma variedade topológica n dimensional com bordo é um espaço de Hausdorff, com base enumerável em que cada ponto tem uma vizinhança homeomórfica ou a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ ou a um subconjunto relativamente aberto de $\mathbb{H}^n$.*

Uma aplicação $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ que é um homeomorfismo entre o subconjunto aberto $U \subseteq M$ e um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$ é chamada uma carta de M . Quando for necessário fazer distinção, (U, ϕ) é chamada carta interior se $\phi(U)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ (que inclui o caso de um subconjunto aberto de $\mathbb{H}^n$ que não intersecta $\partial\mathbb{H}^n$), e carta de bordo se $\phi(U)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{H}^n$ tal que $\phi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$.

Variedades com bordo não são em geral variedades, porque os pontos de bordo não têm vizinhanças locais Euclidianas. Por outro lado, uma variedade também é uma variedade

com bordo, cujo bordo é vazio. Assim, toda variedade é uma variedade com bordo, mas uma variedade com bordo é uma variedade se e somente se seu bordo é vazio [10].

Definição 1.1.4. *Uma variedade diferenciável com bordo M , de dimensão n , é uma variedade topológica com bordo mais uma família de aplicações injetivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{H}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de $\mathbb{H}^n$ em M tais que*

$$\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$$

satisfaz as três condições da definição 1.1.2.

Teorema 1.1.1. *Seja M^n uma variedade com bordo, então ∂M é uma variedade sem bordo de dimensão $n - 1$.*

1.1.1 Métricas Riemanniana

Definição 1.1.5. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M^n é uma correspondência que associa a cada ponto $q \in M^n$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ no espaço tangente $T_q M^n$, que varia diferencialmente no seguinte sentido, se $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ é um sistema de coordenadas local em torno de $q \in M^n$, com $\phi(x) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = p \in \phi(U)$, então*

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle$$

é uma função diferenciável em $\phi(U)$, sendo $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = d\phi(0, \dots, 1, \dots, 0)$.

Nessa definição foi utilizado um sistema de coordenada local, mas a métrica independe do sistema de coordenada local escolhido [11].

Proposição 1.1.1. *A diferenciabilidade das funções g_{ij} não depende da escolha do sistema de coordenadas locais.*

As funções g_{ij} são chamadas coeficientes da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset M^n$.

Definição 1.1.6. *Dá-se o nome de variedade Riemanniana à variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana.*

O espaço Euclidiano é um exemplo de variedade Riemanniana com métrica dada pela métrica Euclidiana e estrutura diferencial dada pela identidade. Um outro exemplo é a variedade produto: Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis com estruturas diferenciáveis (U_α, x_α) e (V_β, y_β) , respectivamente. O produto cartesiano $M_1 \times M_2 = \{(p, q); p \in M \text{ e } q \in M_2\}$ é uma variedade com estrutura diferenciável dada por $\{U_\alpha \times V_\beta, (x_\alpha, y_\beta)\}$. Uma métrica Riemanniana pode ser introduzida da seguinte forma: Sejam as projeções naturais

$$\pi_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \text{ e } \pi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$$

que são aplicações diferenciáveis, considerando g_1 e g_2 as métricas Riemanniana de M_1 e M_2 , respectivamente, então é possível introduzir à variedade $M_1 \times M_2$ a métrica

$$g = g_1(d\pi_1(u), d\pi_1(v)) + g_2(d\pi_2(u), d\pi_2(v)) \quad (1.2)$$

para todo $(p, q) \in M_1 \times M_2, u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$, tal métrica é conhecida como métrica produto e, dessa forma, a variedade produto é uma variedade Riemanniana.

Definição 1.1.7. *Sejam $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ e $(\overline{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}})$ variedades Riemannianas de dimensão n . Um difeomorfismo $f : M^n \rightarrow \overline{M}^n$ é chamado uma isometria se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad (1.3)$$

para todo $p \in M, u, v \in T_p M$.

Definição 1.1.8. *Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow \overline{M}$, M e $\overline{M}$ variedades Riemannianas, é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo 1.3.*

Se para todo $p \in M$ existir uma vizinhança U de p em M e uma isometria local $f : U \rightarrow f(U) \subset \overline{M}$ então é padrão dizer que as variedades Riemannianas M e $\overline{M}$ são localmente isométricas.

1.1.2 Conexão Afim

A ideia de Conexão afim surge da necessidade de comparar valores de campo vetorial de espaços diferentes ou, intuitivamente, de "conectar" espaços tangentes próximos. O interesse em Conexão está no fato de que ela determina univocamente, a partir da escolha de uma métrica, uma forma de derivar campos de vetores em M .

Indica-se por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 1.1.9. *Uma conexão afim Δ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação,*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$$

e que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde X, Y e $Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

A proposição seguinte mostra que uma conexão afim dá origem a uma forma de diferenciar campos de vetores ao longo de curvas, conhecida como derivada covariante, consequentemente, se pode falar em aceleração de uma curva em M .

Proposição 1.1.2. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominada derivada covariante de V ao longo de c , tal que:*

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$
2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$
3. Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Definição 1.1.10. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Definição 1.1.11. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, onde $[X, Y] = XY - YX$ denota o colchete de Lie dos campos X e Y .

O teorema seguinte é importante por mostrar que, para uma dada variedades Riemannianas, existe uma única conexão afim que é compatível com sua métrica e simetria. Isso é um fato fundamental em variedade Riemanniana.

Teorema 1.1.2. *(Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana M existe uma única conexão afim ∇ em M , denominada conexão de Levi-Civita, ou conexão Riemanniana, satisfazendo às condições*

1. ∇ é simétrica;
2. ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Basicamente é utilizada uma importante identidade conhecida como fórmula de Koszul, dada abaixo, para demonstração do teorema 1.1.2.

$$2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle + Y \langle X, Z \rangle - Z \langle X, Y \rangle + \langle [XY], Z \rangle - \langle [XZ], Y \rangle - \langle [YZ], X \rangle, \quad (1.4)$$

em que $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

1.1.3 Curvatura

Definição 1.1.12. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

onde $Z \in \mathcal{X}(M)$ e ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Proposição 1.1.3. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana tem as seguintes propriedades:*

(i) *R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,*

$$R(fX + gY, Z) = fR(X, Z) + gR(Y, Z),$$

$$R(X, fY + gZ) = fR(X, Y) + gR(X, Z),$$

$$f, g \in \mathcal{D}(M), X, Y \text{ e } Z \in \mathcal{X}(M).$$

(ii) *Para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ é linear, isto é,*

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z,$$

Proposição 1.1.4. *(Identidade de Bianchi)*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Adotando a notação (X, Y, Z, T) para $\langle R(X, Y)Z, T \rangle$, ou seja, $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = (X, Y, Z, T)$.

Proposição 1.1.5. *Para quaisquer $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$ as seguintes simetrias são válidas:*

$$(a) \quad (X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0;$$

$$(b) \quad (X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T);$$

$$(c) (X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z);$$

$$(d) (X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y).$$

Expressando o que foi visto anteriormente em um sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$ em torno de um ponto $p \in M$ e denotando $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$. tem-se

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l$$

sendo R_{ijk}^l as componentes da curvatura R em $(U, \mathbf{x})$. Se

$$X = \sum_i u^i X_i, Y = \sum_j v^j Y_j, Z = \sum_k w^k Z_k$$

e por linearidade de R ,

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R_{ijk}^l u^i v^j w^k X_l. \quad (1.5)$$

1.1.4 Tensores

Tensores é uma generalização da ideia de campos de vetores e podem ser derivados covariantemente, analogamente aos campos de vetores. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n . Novamente, $\mathcal{X}(M)$ indica o conjunto dos campos diferenciáveis em M e $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 1.1.13. *Um tensor covariante T de ordem r é uma aplicação multilinear*

$$T : \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$$

Isso significa que dados $Y_1, \dots, Y_r \in \mathcal{X}(M)$, $T(Y_1, \dots, Y_r)$ é uma função diferenciável em M , e T é linear em cada argumento com relação a elementos de $\mathcal{D}(M)$.

Um tensor é um objeto pontual no seguinte sentido: Fixe um ponto $p \in M$ e seja U uma vizinhança de p em M onde é definindo campos $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{X}(M)$, de modo que em cada $q \in U$, os vetores $\{E_i(q)\}$ $i = 1, \dots, n$, formam uma base de $T_q M$. Sejam

$$Y_1 = \sum_{i_1} y_{i_1} E_{i_1}, \dots, Y_r = \sum_{i_r} y_{i_r} E_{i_r}, \quad i_1, \dots, i_r = 1, \dots, n,$$

as restrições a U dos campos $Y_1, \dots, Y_r$, expressas no referencial $\{E_i\}$. Por linearidade,

$$T(Y_1, \dots, Y_r) = \sum_{i_1, \dots, i_r} y_{i_1} \dots y_{i_r} T(E_{i_1}, \dots, E_{i_r}). \quad (1.6)$$

As funções $T(E_{i_1}, \dots, E_{i_r}) = T_{i_1 \dots i_r}$ em U são chamadas as componentes de T no referencial $\{E_i\}$. Portanto, ser pontual significa que $T(Y_1, \dots, Y_r)$ em um ponto p depende

apenas das componentes de T em p e dos valores de $Y_1, \dots, Y_r$ no ponto p , como mostra a expressão 1.6.

Exemplo. A equação 1.5 mostra que o valor de $R(X, Y)Z$ no ponto p depende unicamente dos valores de X, Y, Z em p e dos valores das funções R_{ijk}^l em p . Seja a operação, também denotada por R ,

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$$

definido por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y, Z), W \rangle, \text{ com } X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M),$$

chamada tensor curvatura. Da equação 1.5 verifica-se que o tensor curvatura é de fato um tensor de ordem 4.

A curvatura de uma variedade Riemanniana foi definida em termos das conexões Riemanniana, assim como o tensor curvatura, mas a conexão definida por

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{D}(M) \\ \nabla(X, Y, Z) &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle \end{aligned} \quad (1.7)$$

não é um tensor devido ∇ não ser linear na variável Y .

Definição 1.1.14. *Seja T um tensor de ordem r . A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $r + 1$ dado por*

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) - \dots - T(Y_1, \dots, \nabla_Z Y_r),$$

para todo $Y_1, \dots, Y_r, Z \in \mathcal{X}(M)$. Para cada $Z \in \mathcal{X}(M)$ a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por $\nabla_Z T(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z)$.

Exemplo. A diferencial do tensor métrico $G(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ é dada por

$$\nabla G(X, Y, Z) = Z \langle X, Y \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle = 0,$$

para $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

1.1.5 Imersões Isométricas

Nesta seção mostra-se a relação geométrica existente entre duas variedades Riemanniana quando estão relacionadas por uma aplicação diferenciável chamada imersão, definida como

Definição 1.1.15. Uma aplicação diferenciável $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$, em que M^n e $\overline{M}^{n+k}$ são variedades Riemannianas, é uma imersão se $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disso, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset \overline{M}$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por $\overline{M}$, diz-se que f é um mergulho. A diferença das dimensões de M^n e $\overline{M}^{n+k}$, k , é chamada codimensão da imersão.

Definição 1.1.16. Sejam $M, \overline{M}$ variedades Riemannianas e $f : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão, se vale

$$\langle u, v \rangle = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle \quad (1.8)$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_p M$. f passa a ser uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$.

No que se segue, a conexão Riemanniana de $\overline{M}$ é indicada por $\overline{\nabla}$, X e Y campos locais de vetores em M e $\overline{X}, \overline{Y}$ extensões locais de X, Y a $\overline{M}$ e também é feita a identificação $f(M)$ com M e $T_p M$ com $T_{f(p)} f(M)$.

Definição 1.1.17. Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ uma imersão. Define-se a conexão Riemanniana de M relativamente à métrica induzida por f como sendo a componente tangente da conexão de $\overline{M}$, ou seja,

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} \right)^T. \quad (1.9)$$

A partir dos campos locais X, Y em M pode-se definir um campo

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y \quad (1.10)$$

em $\overline{M}$, normal a M , em que $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões de X, Y . A aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$ definida por 1.10 é bilinear e simétrica, conforme demonstrado em [11], sendo $\mathcal{X}(U)^\perp$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U)$ identificado com U .

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M,$$

é uma forma bilinear e simétrica.

Definição 1.1.18. A forma quadrática II_η definida em $T_p M$ por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η .

A aplicação B , acima definida, também é conhecida com segunda forma fundamental. Uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ fica associada a aplicação bilinear

H_η por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

Proposição 1.1.6. *Seja $p \in M$, $x \in T_p M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M . Então*

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T. \quad (1.11)$$

Demonstração. Seja $y \in T_p M$ e X, Y extensões locais de x, y , respectivamente, e tangentes a M . Então,

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = \langle B(x, y)(p), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle$$

do fato

$$\langle N, Y \rangle = 0 \Rightarrow X \langle N, Y \rangle = 0 \Rightarrow \langle N, \bar{\nabla}_X Y \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle$$

tem-se

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= -\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle \\ &= -\langle \bar{\nabla}_x N, y \rangle \\ &= -\left\langle (\bar{\nabla}_x N)^T, y \right\rangle \end{aligned}$$

□

Um caso particular importante, que é o caso aplicado nesta dissertação, ocorre quando a codimensão da imersão é um. Sejam $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$, $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como o operador $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ é autoadjunto, existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ com autovalores reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Se M e $\bar{M}$ são orientáveis e escolhendo orientações para M e $\bar{M}$ de forma que $\{e_1, \dots, e_n\}$ seja uma base na orientação de M e $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ na de $\bar{M}$, η fica univocamente determinado. Neste caso, os e_i são denominados direções principais e os $\lambda_i = k_i$ são curvaturas principais. As funções simétricas λ_i são invariantes da imersão. Se $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$, $-S_\eta$ corresponde a derivada da aplicação normal de Gauss [11].

Definição 1.1.19. *Sejam $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal para $T_p M$. O vetor normal $\vec{H}$ dado por*

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i)(p) \in (T_p M)^\perp \quad (1.12)$$

é chamado de vetor curvatura média da imersão em p .

No caso em que $k = 1$, $N \in (T_p M)^\perp$, $|N| = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
 \vec{H}(p) &= \langle \vec{H}(p), N \rangle N \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle B(e_i, e_i), N \rangle N \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle S_N(e_i), e_i \rangle N \\
 &= \frac{1}{n} (k_1 + \dots + k_n) N \\
 &= H(p) N,
 \end{aligned}$$

sendo

$$H = \frac{k_1 + \dots + k_n}{n}$$

a curvatura média de f .

Definição 1.1.20. A imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é dita ser mínima se o traço de S_η é identicamente nulo para todo $p \in M$, onde $\eta \in (T_p M)^\perp$.

Definição 1.1.21. Seja $(\overline{M}^{n+1}, g)$ uma variedade com métrica Riemanniana g e seja ∇ a sua conexão Riemanniana. Diz que uma imersão $\psi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ é umbílica se para todo $p \in M$, a segunda forma fundamental B de ψ em p satisfaz

$$\langle B(X, Y), \eta \rangle_g(p) = \lambda(p) \langle X, Y \rangle_{g^*}, \quad \lambda(p) \in \mathbb{R}, \quad (1.13)$$

para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e todo campo unitário η normal a $\psi(N)$ e g^* indica a métrica induzida por ψ em N .

Definição 1.1.22. Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se $B(v, u) = 0$ para todo $v, u \in T_p M$. Se for geodésica em todo $p \in M$, ou seja, $B \equiv 0$, neste caso diz-se que a imersão é totalmente geodésica.

Proposição 1.1.7. Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se, e somente se, toda geodésica de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em $f(p)$.

Exemplo. Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas e considere o produto $M_1 \times M_2$ com a métrica produto. Sejam ∇^1 a conexão Riemanniana de M_1 , ∇^2 a conexão Riemanniana de M_2 e ∇ a de $M_1 \times M_2$. O conjunto M_2 é uma subvariedade totalmente geodésica de $M_1 \times M_2$. De fato, sejam $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M_1 \times M_2)$, $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$, $Z = Z_1 + Z_2$, $X_1, Y_1, Z_1 \in \mathcal{X}(M_1)$ e $X_2, Y_2, Z_2 \in \mathcal{X}(M_2)$ valem

$$\langle X_i, Y_j \rangle = \langle Z_i, Y_j \rangle = \langle X_i, Z_j \rangle = 0,$$

para $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= (X_1 + X_2) \langle Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2 \rangle \\ &= (X_1 + X_2) (\langle Y_1, Z_1 \rangle + \langle Y_2, Z_2 \rangle + \langle Y_1, Z_2 \rangle + \langle Y_2, Z_1 \rangle) \\ &= X_1 \langle Y_1, Z_1 \rangle + X_2 \langle Y_2, Z_2 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [XY] &= XY - YX \\ &= (X_1 + X_2)(Y_1 + Y_2) - (Y_1 + Y_2)(X_1 + X_2) \\ &= X_1Y_1 + X_1Y_2 + X_2Y_1 + X_2Y_2 - Y_1X_1 - Y_2X_2 - X_1Y_2 - X_2Y_1 \\ &= X_1Y_1 - Y_1X_1 + X_2Y_2 - Y_2X_2 \\ &= [X_1Y_1] + [X_2Y_2], \end{aligned}$$

pela formula de Koszul 1.4, pela unicidade de conexão de Levi-Civita e pelas relações acima, tem-se que

$$\nabla_X Y = \nabla_{X_1}^1 Y_1 + \nabla_{X_2}^2 Y_2$$

Sejam uma geodésica γ em M_2 e $X \in \mathcal{X}(M_1 \times M_2)$ uma extensão local do campo γ' tal que $X = (0, X_2)$, ao longo de γ tem-se

$$\nabla_{(0, \gamma')} (0, X_2) = \nabla_{\gamma'}^2 X_2 = 0$$

mostrando que toda geodésica de M_2 é geodésica de $M_1 \times M_2$.

1.2 Operadores diferenciais

Nesta seção são apresentados os operadores Gradiente, de Divergência e Laplaciano relacionados a variedades Riemanniana e suas principais propriedades. As referências bases utilizadas aqui foram [12] e [11].

Definição 1.2.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão n , um ponto $p \in M$ e $\Omega \subset M$ uma vizinhança de p . Uma família $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de campos de vetores em $\mathcal{X}(\Omega)$ é chamada um referencial geodésico se:*

1. *Para cada ponto $q \in \Omega$, tem-se que $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathcal{X}(\Omega)$;*
2. *Para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$, se tem $\nabla_{e_i} e_j = 0$.*

Definição 1.2.2. *Dada uma função $f \in \mathcal{D}(M)$, o gradiente de f , denotado por ∇f , é o único campo vetorial $\nabla f : M \rightarrow T_p M$ tal que*

$$\langle \nabla f(p), X \rangle = df_p(X),$$

$p \in M$, $X \in T_p M$. Ou seja, ∇f é o dual da forma df na métrica Riemanniana.

Considerando um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ em um aberto $U \subset M$ e $\{w_1, \dots, w_n\}$ as n 1-formas duais associadas ao referencial $\{e_1, \dots, e_n\}$, ou seja, $w_i(e_j) = \delta_{ij}$, escreve-se

$$df = \sum_{i=1}^n e_i(f)w_i.$$

Em que $e_i(f)$ é a derivada de f na direção e_i . Sendo $\nabla f = \sum_{k=1}^n u_k e_k$ e, também, $e_i(f) = df(e_i)$, tem-se

$$e_i(f) = \langle \nabla f, e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n u_k e_k, e_i \right\rangle = u_i,$$

logo

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n e_i(f)e_i \quad (1.14)$$

Denotando por $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ e (g^{ij}) a matriz inversa da matriz (g_{ij}) , o gradiente em um sistema de coordenadas locais fica:

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

No caso particular em que $M = \mathbb{R}^n$ e este com a métrica canônica, obtém-se

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

A proposição seguinte mostra duas importantes propriedades do gradiente.

Proposição 1.2.1. *Seja $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves, então*

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.
2. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Demonstração. Tomando um campo diferenciável X em M ,

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f + g), X \rangle &= X(f + g) = Xf + Xg \\ &= \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla g, X \rangle = \langle \nabla f + \nabla g, X \rangle, \end{aligned}$$

logo

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g.$$

De maneira similar prova-se a parte 2. □

Outro conceito importante é o de divergência de um campo.

Definição 1.2.3. (*Divergência*) *Seja M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathcal{X}(M)$ um campo fixado, considerando a aplicação linear $\varphi : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por $\varphi(Y) = \nabla_Y X$. A divergência de X é a função dada por*

$$\operatorname{div}(X) = \operatorname{tr}(\varphi),$$

no qual $\operatorname{tr}(\varphi)$ significa o traço da φ .

Em uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ o operador de divergência fica

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle. \quad (1.15)$$

Proposição 1.2.2. *Se X, Y são campos vetoriais suaves em M e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, então*

1. $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$
2. $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle$

Definição 1.2.4. (*Laplaciano*). *Seja $f \in \mathcal{D}(M)$, o Laplaciano de f é a aplicação $\Delta : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ dada por*

$$\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f).$$

Para quaisquer $f, g \in \mathcal{D}(M)$ o Laplaciano tem as seguintes propriedades

1. $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$;
2. $\Delta(fg) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle$

Proposição 1.2.3. *Seja $f \in \mathcal{D}(M)$ e $e_1, \dots, e_n$ um referencial ortonormal em um aberto de M . Então, nesse aberto vale*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)). \quad (1.16)$$

Demonstração. Da definição do Laplaciano tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(\nabla f), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n (e_i \langle \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla f, \nabla_{e_i} e_i \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(e_i \left\langle \sum_{j=1}^n e_j(f) e_j, e_i \right\rangle - \langle \nabla f, \nabla_{e_i} e_i \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^n (e_i(e_i(f)) - \langle \nabla f, \nabla_{e_i} e_i \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^n (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f))
\end{aligned}$$

e se o referencial for geodésico fica

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f))$$

□

1.3 Princípios do Máximo Forte

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é suficientemente suave e considere a equação diferencial parcial linear

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_{ij}u + \sum_{i=1}^n b_i(x) D_i u + c(x) u \quad (1.17)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, a_{ij}, b_i, c são funções contínuas em Ω , a função $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e $D_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

O operador L é elíptico em $x \in \Omega$ se a matriz de coeficientes $[a_{ij}(x)]$ é positiva. Se $\lambda(x), \Lambda(x)$ denotam, respectivamente, o mínimo e o máximo autovalor da matriz $[a_{ij}(x)]$ e Λ/λ é limitado em Ω , então L é chamada uniformemente elíptica.

O domínio Ω é dito satisfazer uma condição de esfera interior em $x_0 \in \partial\Omega$ se houver uma bola $B \subset \Omega$ com $x_0 \in \partial B$.

Lema 1.3.1. *Suponha que L é uniformemente elíptico, $c = 0$ e $Lu \geq 0$ em Ω . Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que*

(i) *u é contínuo em x_0 ;*

(ii) *$u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$;*

(iii) $\partial\Omega$ satisfaz uma condição de esfera interior em x_0 .

Então a derivada em relação a normal exterior de u em x_0 , se ela existe, satisfaz a desigualdade estrita

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0. \quad (1.18)$$

Se $c \leq 0$ e c/λ é limitado, a conclusão é válida desde que $u(x_0) \geq 0$, e se $u(x_0) = 0$ a mesma conclusão é válida independentemente do sinal de c .

Teorema 1.3.2. *Seja L um operador uniformemente elíptico, $c = 0$ e $Lu \geq 0$ (≤ 0) em um domínio Ω (não necessariamente limitado). Então, se u atinge seu máximo (mínimo) no interior de Ω , u é uma constante. Se $c \leq 0$ e c/λ é limitado, então u não pode alcançar um máximo não negativo (mínimo não positivo) no interior de Ω , a menos que seja constante.*

Para detalhes ver [13].

No contexto de superfícies compactas e para o caso do teorema 3.2.4, o Princípio do Máximo Forte é apresentado das seguintes formas.

Teorema 1.3.3. *Seja L um operador linear uniformemente elíptico. Seja $u \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domínio suave limitado, satisfaz $Lu \geq 0$. Se u alcança seu máximo em $p_0 \in \Omega$, então u é constante.*

Teorema 1.3.4. *Seja L um operador linear uniformemente elíptico. Seja $u \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domínio suave limitado, satisfaz $Lu \geq 0$. Se u alcança seu máximo em $p_0 \in \partial\Omega$ e $\partial u / \partial \nu(p_0) \leq 0$, onde ν é vetor unitário exterior a Ω ao longo de $\partial\Omega$ em p_0 , então u é constante.*

Capítulo 2

Hipersuperfície Capilar Estável

O que se deseja agora é, primeiramente, classificar as hipersuperfícies que são pontos críticos de um certo funcional e, dentre essas, quais são pontos de mínimos. Dessa forma, um ponto importante nesses problemas é definir esse funcional. O que se faz nesse caso é escolher um funcional que tenha uma fundamentação física ou matemática, por exemplo, uma pergunta que se pode fazer é "dado a curva fechada γ no $\mathbb{R}^3$, encontrar as superfícies com bordo nessa curva que tem área mínima" ou "dado a curva fechada γ no $\mathbb{R}^3$, encontrar as superfícies com bordo nessa curva que tem área mínima e encerram um volume V constante". Em ambos os casos o funcional está relacionado a área da superfície, mas o segundo problema traz uma restrição de volume. As superfícies soluções dos problemas geralmente são diferentes.

Tem-se o objetivo neste capítulo de definir o que vem a ser uma hipersuperfície capilar estável, mas para isso se mostra antes o que se entende por variação de uma imersão, o conceito de energia ou de um funcional energia e, por fim, se chega ao conceito de estabilidade. Os resultados e definições aqui expostos são baseados principalmente nos artigos [14], [15] e [16].

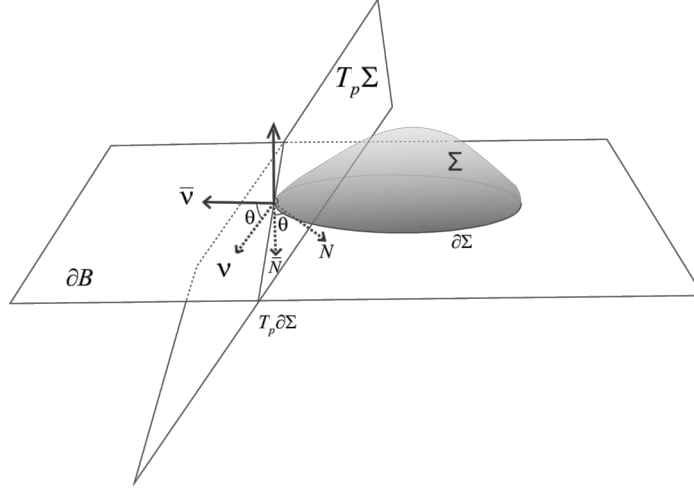
2.1 Variação de uma imersão

Passa-se a adotar ao longo do texto as seguintes nomenclaturas e convenções. Considere um domínio $\mathcal{B}$ com fronteira suave em uma variedade Riemanniana orientada $(M, \langle, \rangle)$ de dimensão $n + 1$. Seja $\bar{N}$ o vetor normal unitário a $\partial\mathcal{B}$ apontando para fora de $\mathcal{B}$. O bordo $\partial\mathcal{B}$ é orientado a partir da orientação de M , ou seja, um referencial ortonormal local $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ em $\partial\mathcal{B}$ é orientado positivamente se o referencial local ordenado $\{\bar{N}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ tem orientação positiva em M .

No que se segue, Σ representará uma variedade compacta suave e orientável de dimensão n com bordo não vazio $\partial\Sigma$ e $\psi : \Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ significa uma imersão suave no interior de Σ e de classe C^2 no bordo e própria, ou seja, $\psi(\text{int}\Sigma) \subset \text{int}\mathcal{B}$ e $\psi(\partial\Sigma) \subset \partial\mathcal{B}$.

Fixando um campo normal unitário global N a Σ ao longo ψ estabelece-se uma orientação a Σ e uma orientação $\partial\Sigma$ é estabelecida pelo vetor ν que é o vetor unitário normal exterior a $\partial\Sigma$ em Σ . Seja ainda $\bar{\nu}$ o vetor normal unitário a $\partial\Sigma$ em $\partial\mathcal{B}$ tal que as bases $\{N, \nu\}$ e $\{\bar{N}, \bar{\nu}\}$ tenham a mesma orientação em $(T\partial\Sigma)^\perp$.

Figura 2.1: Convenção e orientação adotada onde $\mathcal{B}$ é um semiespaço.



Adotadas essas convenções, certas relações podem ser deduzidas ao longo do bordo da imersão (figura 2.1).

$$\nu = \cos \theta \bar{\nu} + \sin \theta \bar{N} \quad (2.1)$$

$$N = -\sin \theta \bar{\nu} + \cos \theta \bar{N} \quad (2.2)$$

Uma variação da imersão ψ é uma aplicação diferenciável que é definida da seguinte forma.

Definição 2.1.1. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão. Uma variação de ψ é uma aplicação diferenciável $\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \rightarrow M$ tal que $\psi_t : \Sigma \rightarrow M$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ sendo $\psi_t(p) = \Psi(t, p)$, $p \in \Sigma$ uma imersão para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $\psi_0 = \psi$.*

Definição 2.1.2. *A variação Ψ de uma imersão própria ψ em $\mathcal{B}$ é chamada admissível se ψ_t é uma imersão própria em $\mathcal{B}$ para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.*

Definição 2.1.3. *O campo variacional de Ψ é o campo denotado por ξ dado por $\xi(p) = (\partial\Psi/\partial t)(0, p)$, $p \in \Sigma$.*

2.2 Energia

O conceito de energia, neste trabalho, se dá a partir da definição de função área e função área molhada. Área molhada é a área em $\partial\mathcal{B}$ que é varrida por $\partial\Sigma$ quando se

considera uma variação admissível. Considera-se a seguir somente variações admissíveis como na definição 2.1.2.

Definição 2.2.1. A função área $A : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$A(t) = \int_{\Sigma} d\Sigma_t \quad (2.3)$$

onde $d\Sigma_t$ é a forma de área de Σ em relação a métrica induzido por ψ_t .

Definição 2.2.2. A função área molhada $W(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$W(t) = \int_{[0,t] \times \partial\Sigma} \Psi^* dA_w \quad (2.4)$$

onde dA_w é o elemento de área de $\partial\mathcal{B}$ induzido pela métrica de $\mathcal{B}$.

Definição 2.2.3. Seja $\theta \in (0, \pi)$ um número dado, o funcional energia $E : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$E(t) = A(t) - \cos \theta W(t) \quad (2.5)$$

Definição 2.2.4. A função volume $V : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$V(t) = \int_{[0,t] \times \Sigma} \Psi^* \Omega \quad (2.6)$$

onde Ω é a forma de volume de M .

A variação preserva volume se $V'(t) = 0$ para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

As fórmulas da primeira variação para as funções energia e volume são as seguintes (cf. [14]):

$$E'(0) = -n \int_{\Sigma} H f d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \langle \xi, \nu - \cos \theta \bar{\nu} \rangle d(\partial\Sigma) \quad (2.7)$$

é a partir dessa primeira variação do funcional energia se caracteriza as hipersuperfícies capilaridade.

$$V'(0) = \int_{\Sigma} f d\Sigma \quad (2.8)$$

Aqui, $d\Sigma$ (respectivamente, $d(\partial\Sigma)$) denota o elemento n -volume em Σ (respectivamente, o elemento $(n-1)$ -volume em $\partial\Sigma$), H é a curvatura média da imersão ψ calculada em relação ao vetor normal unitário N e $f = \langle \xi, N \rangle$.

Definição 2.2.5. Uma hipersuperfície é dita ser capilar se é um ponto crítico do funcional energia E para variações admissíveis que preservam volume.

Dessa definição e das fórmulas 2.7 e 2.8 conclui-se que a hipersuperfície é capilar se e somente se tem curvatura média constante e o ângulo formado por ν e $\bar{\nu}$ é constante ao

longo de $\partial\Sigma$ e pertencente ao intervalo $[0, \pi]$ (chamado ângulo de contato de Σ com $\partial\mathcal{B}$) e é igual a θ . Vê-se na literatura caracterizando as hipersuperfícies estacionárias como ponto crítico do funcional área, a classe de hipersuperfícies que são pontos críticos do funcional energia é maior e contém as anteriores. Se o ângulo de contato, como definido acima, for limitado a $\pi/2$ os problemas coincidem.

Barbosa e doCarmo, em [15], mostraram que dado uma função suave $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ com $f|_{\partial\Sigma} = 0$ e $\int_{\Sigma} f d\Sigma = 0$, existe uma variação normal que preserva volume cujo vetor variacional é fN . A proposição 2.2.1 abaixo amplia esse resultado para funções que não necessariamente se anulam no bordo e variação não necessariamente normal.

Proposição 2.2.1. *Suponha que a imersão própria ψ em $\mathcal{B}$ é transversal a $\partial\mathcal{B}$. Seja f uma função suave em Σ satisfazendo $\int_{\Sigma} f d\Sigma = 0$. Então, existe uma variação admissível Ψ de ψ em $\mathcal{B}$ que preserva volume tal que $f = \langle (\partial\Psi/\partial t)|_0, N \rangle$.*

Demonstração. Uma variação admissível $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{B}$, $\varepsilon > 0$, da imersão ψ tal que F seja um difeomorfismo local sempre pode ser construída. Como se vê a seguir.

Considerando uma vizinhança W de $\psi(\partial\Sigma)$ aberta em M que é difeomórfica ao produto $(-\delta, \delta) \times U$, onde $U \subset \partial\mathcal{B}$ é relativamente aberto e é uma vizinhança compacta de $\psi(\partial\Sigma)$. Atribuindo a métrica produto a W , U se torna totalmente geodésico, e estendendo-a a uma métrica Riemanniana em M . Tomando a aplicação $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow M$ definida pela aplicação exponencial $F(t, p) = \exp_{\psi(p)}(tN(p))$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $(t, p) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$, em que N um campo normal unitário a Σ para a métrica produto. Dessa forma, essa variação deixa $\partial\Sigma \subset \partial\mathcal{B}$ e $\text{int}(\Sigma) \subset \text{int}(\mathcal{B})$.

Adotando $\langle, \rangle$ como a métrica original de M e definindo a variedade $\tilde{\Sigma} := (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ com a métrica *pull-back* de $\langle, \rangle$, $F^*\langle, \rangle$, que denota-se também por $\langle, \rangle$, nesse caso F é uma isometria.

Observando que se Φ é uma variação de $\{o\} \times \Sigma$ em $\tilde{\Sigma}$ admissível e que preserva volume, então a variação $F \circ \Phi$ de ψ em $\mathcal{B}$ também é admissível e, além disso, se N é um campo normal unitário a $\{o\} \times \Sigma$ em $\tilde{\Sigma}$, então $dF(N)$ é um campo normal unitário a Σ em M e

$$\left\langle \frac{\partial(F \circ \Phi)}{\partial t} \Big|_0, dF(N) \right\rangle = \left\langle dF \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \Big|_0 \right), dF(N) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial t} \Big|_0, N \right\rangle.$$

Além disso,

$$\int_{[0,t] \times \Sigma} (F \circ \Phi)^* \Omega = \int_{[0,t] \times \Sigma} \Phi^*(F^* \Omega) = \int_{[0,t] \times \Sigma} \Phi^* d\tilde{\Sigma}$$

de forma que as funções volume das deformações $F \circ \Phi$ e Φ são iguais e, assim, $F \circ \Phi$ também preserva volume. Portanto, provando-se o resultado para $\{o\} \times \Sigma$ no domínio $\tilde{\Sigma}$ na métrica $F^*\langle, \rangle$ implica que o resultado também é verdadeiro para ψ em $\mathcal{B}$ na variação $F \circ \Phi$.

Passa-se agora a provar o resultado em $\tilde{\Sigma}$. Para cada ponto $p \in \partial\Sigma$, a projeção de

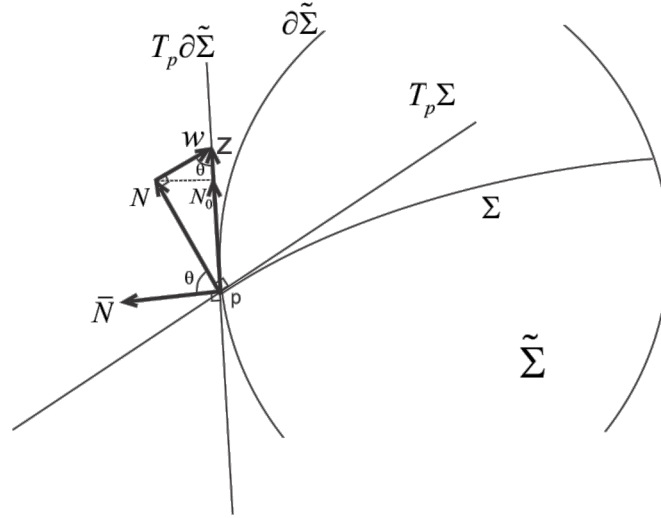
$N(p)$ sobre $T_p(\partial\tilde{\Sigma})$ é dada por

$$N_0(p) = N(p) - \langle N(p), \bar{N}(p) \rangle \bar{N}(p),$$

sendo $\partial\tilde{\Sigma} = (-\varepsilon, \varepsilon) \times \partial\Sigma$. Considerando que $\langle N_0(p), N(p) \rangle \neq 0$ pela hipótese de transversalidade, pode-se construir o vetor, ver figura 2.2,

$$\begin{aligned} w(p) &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{N_0(p)}{\|N_0(p)\|} - N(p) \\ &= \frac{\|N_0(p)\|}{\langle N_0(p), N(p) \rangle} \frac{N_0(p)}{\|N_0(p)\|} - N(p) \\ &= \frac{1}{\langle N_0(p), N(p) \rangle} N_0(p) - N(p) \in T_p(\{0\} \times \Sigma). \end{aligned}$$

Figura 2.2: Construção dos vetores.



Tomando uma extensão de w em $\{0\} \times \Sigma$, ainda denotado w . Definindo-se $z = w + N$, vê-se que z está definido sobre $\{0\} \times \Sigma$, seja $\mathcal{Z}$ uma extensão de z a $\tilde{\Sigma}$ que pode ser construída utilizando a estrutura produto. Vê-se que, ao longo de $\partial\tilde{\Sigma}$, $\mathcal{Z}$ é tangente a $\partial\tilde{\Sigma}$ e que, por construção, $\mathcal{Z}$ satisfaz

$$\langle \mathcal{Z}, N \rangle = \langle w + N, N \rangle = \langle N, N \rangle = 1 \text{ em } \{0\} \times \Sigma.$$

O campo $\mathcal{Z}$ gera um fluxo local $(\phi_t)_{|t| < \delta}$, $\delta > 0$, que satisfaz $\left. \frac{\partial \phi_t}{\partial t}(q) \right|_{t=a} = \mathcal{Z}(\phi_a(q))$. Considere a aplicação $\Phi : (-\delta, \delta) \times \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$, definida por

$$\Phi(t, p) = \phi_t(p), \text{ para } (t, p) \in (-\delta, \delta) \times \Sigma.$$

Seja $u : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$, uma função diferenciável e define-se a variação

$X : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ como

$$(t, p) \rightarrow X(t, p) = \Phi(u(t, p), p), \quad t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \quad p \in \Sigma.$$

Tem-se

$$\left. \frac{\partial X}{\partial t} \right|_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0 = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0 \mathcal{Z},$$

e então

$$\left\langle \left. \frac{\partial X}{\partial t} \right|_0, N \right\rangle = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_0. \quad (2.9)$$

A variação $X(t, q)$ foi construída de forma a ser admissível.

Para que a variação X preserve volume é necessário escolher uma função u adequada e isso é feito da seguinte forma: seja $X = \Phi \circ \mathbb{U}$ onde $\mathbb{U} : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ é tal que $\mathbb{U}(t, p) = (u(t, p), p)$, a função volume associada a X é

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{[0, t] \times \Sigma} X^* \Omega \\ &= \int_{[0, t] \times \Sigma} (\Phi \circ \mathbb{U})^* \Omega \\ &= \int_{[0, t] \times \Sigma} \mathbb{U}^* (\Phi^* \Omega). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Definindo $\Phi^* \Omega = E dt \wedge d\Sigma$ onde $E : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ é uma função suave, tem-se

$$\mathbb{U}^* (\Phi^* \Omega)(t, p) = E(u(t, p), p) (\partial u / \partial t)(t, p) dt \wedge d\Sigma, \quad (2.11)$$

após substituir 2.11 em 2.10 e aplicar o teorema de Fubini, obtém-se

$$V(t) = \int_{\Sigma} \left(\int_0^t E(u(t, p), p) \frac{\partial u}{\partial t}(t, p) dt \right) d\Sigma \quad (2.12)$$

Agora, como por hipótese $\int_{\Sigma} f d\Sigma = 0$ e à vista disso, escolhe-se a função u de forma que seja solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, p) = \frac{f(p)}{E(u(t, p), p)}, \quad u(0, p) = 0, \quad \text{para cada } p \in \Sigma. \quad (2.13)$$

Como essa escolha $V'(t) = 0$ para todo $t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, portanto, a variação X mantém o volume constante.

Só falta mostrar que $f = \langle (\partial X / \partial t)|_0, N \rangle$, para isso, toma-se um sistema de coordenada

ortonormal local $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ em uma vizinhança de $p \in \Sigma$, então

$$\begin{aligned}
E(0, p) &= (\Phi^* \Omega)_{(0, p)} \cdot (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, Z(p)) \\
&= \Omega(\Phi(0, p)) \cdot (d\Phi_{(0, p)}(\varepsilon_1), \dots, d\Phi_{(0, p)}(\varepsilon_n), d\Phi_{(0, p)}(Z(p))) \\
&= \Omega\left(d\Phi_{(0, p)}(\varepsilon_1), \dots, d\Phi_{(0, p)}(\varepsilon_n), \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, p)\right) \\
&= \Omega(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, Z(p)) \\
&= \Omega(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, w(p) + N(p)) \\
&= \Omega(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, N(p)) = 1
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde foi usado que $\Phi(0, q) = q$ para todo $q \in \Sigma$ e que $w(p)$ é tangente a Σ . Logo, das equações 2.13 e 2.14, tem-se

$$(\partial u / \partial t)(0, p) = f(p), \tag{2.15}$$

e assim, das equações 2.9 e 2.15, chega-se

$$f = \langle (\partial X / \partial t)|_0, N \rangle.$$

□

2.3 Estabilidade

Na literatura muitas vezes se chama hipersuperfície estável àquela que são ponto de mínima para um funcional área para variações que preservam bordo, como na teoria das superfícies mínimas, ou para variações que preservam volume e tenham bordos livres, ângulo de contato $\Pi/2$. A definição de estabilidade adotada aqui é relacionada ao funcional energia e abrange o caso das hipersuperfícies de bordo livre.

Convenciona-se, na sequência, que N designa o vetor normal unitário tomado de forma que a curvatura média (constante) H seja ≥ 0 . Assim, quando $H \neq 0$, a hipersuperfície é orientada pelo seu vetor de curvatura média $\vec{H}$, e o ângulo de contato é aquele entre $\vec{H}$ e o vetor normal unitário exterior $\bar{N}$ a $\partial \mathcal{B}$.

Proposição 2.3.1. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ uma imersão capilar, dada a função $f \in C^\infty(\Sigma)$ satisfazendo $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$ e variação admissível que preserva volume Ψ com $f = \langle (\partial \Psi / \partial t)|_0, N \rangle$, tem-se*

$$E''(0) = - \int_\Sigma f(\Delta f + (|\sigma|^2 + \text{Ric}(N))f) d\Sigma + \int_{\partial \Sigma} f\left(\frac{df}{d\nu} - qf\right) d(\partial \Sigma) \tag{2.16}$$

onde Δ é o Laplaciano para a métrica induzida por ψ em Σ , e σ é a segunda forma

fundamental de ψ ; além disso, Ric é a curvatura de Ricci de M e

$$q = \frac{1}{\sin \theta} II(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + \cot \theta \sigma(\nu, \nu)$$

Aqui, II denota a segunda forma fundamental de ∂B associada ao vetor normal unitário $-\bar{N}$.

Demonstração. Encontra-se em [16]. □

Definição 2.3.1. Uma imersão capilar ψ é chamada estável se $E''(0) \geq 0$ para todas as variações admissíveis que preservam volume.

Seja $\mathcal{F} = \left\{ f \in H^1(\Sigma) \mid \int_{\Sigma} f d\Sigma = 0 \right\}$ onde $H^1(\Sigma)$ é o primeiro espaço de Sobolev de Σ .

Definição 2.3.2. A forma do índice de ψ é definida como a forma bilinear simétrica $\mathcal{I}$ dada em $H^1(\Sigma)$ por

$$\mathcal{I}(f, g) = \int_{\Sigma} (\langle \nabla f, \nabla g \rangle - (|\sigma|^2 + Ric(N))fg) d\Sigma - \int_{\partial\Sigma} qfg d(\partial\Sigma) \quad (2.17)$$

onde ∇ é o operador gradiente para a métrica induzida por ψ .

Como se verá no capítulo seguinte, a desigualdade $\mathcal{I}(f, f) \geq 0$ pode trazer informações interessantes sobre a geometria e topologia da Hipersuperfície quando uma função f adequada é avaliada. A função f , chamada função teste, geralmente contém informações sobre o ambiente de forma que, em conexão com alguma restrição imposta à hipersuperfície, se possa tirar novas informações desta.

Do exposto acima, ψ é uma variedade capilar estável se e somente se $\mathcal{I}(f, f) \geq 0$ para todos $f \in \mathcal{F}$, de fato, considerando $\mathcal{I}(f, f) \geq 0$ para toda $f \in \mathcal{F}$, pela proposição 2.2.1, existe uma variação admissível Ψ de ψ que preserva volume de forma que $f = \langle (\partial\Psi/\partial t)|_0, N \rangle$, então

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{I}(f, f) &= \int_{\Sigma} (\langle \nabla f, \nabla f \rangle - (|\sigma|^2 + Ric(N))f^2) d\Sigma - \int_{\partial\Sigma} qf^2 d(\partial\Sigma) \\ &= \int_{\Sigma} \left(\operatorname{div}(f \nabla f) - f \Delta f - (|\sigma|^2 + Ric(N))f^2 \right) d\Sigma - \int_{\partial\Sigma} qf^2 d(\partial\Sigma) \\ &= - \int_{\Sigma} \left(f \Delta f + (|\sigma|^2 + Ric(N))f^2 \right) d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial f}{\partial \nu} f d(\partial\Sigma) - \int_{\partial\Sigma} qf^2 d(\partial\Sigma) \\ &= E''(0). \end{aligned}$$

Inversamente, se a variedade é capilar estável, então $E''(0) \geq 0$ para toda variação admissível que preserva volume, ou seja, existe f suave com $\int_{\Sigma} f d\Sigma = 0$, então

$$E''(0) = - \int_{\Sigma} f(\Delta f + (|\sigma|^2 + Ric(N))f) d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} f \left(\frac{df}{d\nu} - qf \right) d(\partial\Sigma) = \mathcal{I}(f, f) \geq 0$$

Uma função $f \in \mathcal{F}$ é dita ser uma função de Jacobi de ψ se pertence ao núcleo de $\mathcal{I}$, ou seja, se $\mathcal{I}(f, g) = 0$ para todo $g \in \mathcal{F}$.

Proposição 2.3.2. *Seja $f \in \mathcal{F}$, então f é uma função de Jacobi se e somente se $f \in C^\infty(\Sigma)$ e satisfaz*

$$\Delta f + (|\sigma|^2 + Ric(N))f = \text{constante em } \Sigma, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = qf \quad \text{em } \partial\Sigma. \quad (2.19)$$

Demonstração. Supondo válidas as relações 2.18 e 2.19, então substituindo-as na forma do índice 2.17, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f, g) &= \int_{\Sigma} (\langle \nabla f, \nabla g \rangle - (|\sigma|^2 + Ric(N))fg) d\Sigma - \int_{\partial\Sigma} qfg d(\partial\Sigma) \\ &= \int_{\Sigma} (div(g\nabla f) - g\Delta f - (|\sigma|^2 + Ric(N))fg) d\Sigma - \int_{\partial\Sigma} qfg d(\partial\Sigma) \\ &= - \int_{\Sigma} g (\Delta f + (|\sigma|^2 + Ric(N))f) d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} g \left(\frac{df}{d\nu} - qf \right) d(\partial\Sigma) \\ &= - (\Delta f + (|\sigma|^2 + Ric(N))f) \int_{\Sigma} g d\Sigma = 0, \end{aligned}$$

Inversamente, supondo-se $\mathcal{I}(f, g) = 0$ para todo $g \in \mathcal{F}$. Seja F_0 o valor médio de $F = (\Delta f + (|\sigma|^2 + Ric(N))f)$ em Σ . O objetivo é mostrar que $F \equiv F_0$, supondo-se, por contradição, que $F - F_0 > 0$ em um ponto $p \in \Sigma$ e como

$$\int_{\Sigma} g (F - F_0) d\Sigma = 0, \quad \forall g \in \mathcal{F}$$

e

$$\int_{\Sigma} (F - F_0) d\Sigma = 0$$

definindo

$$\Sigma^+ = \{q \in \Sigma; F - F_0 > 0\} \text{ e } \Sigma^- = \{q \in \Sigma; F - F_0 < 0\},$$

como $p \in \Sigma^+ \neq \emptyset$, isso implica que $\Sigma^- \neq \emptyset$, pois, caso contrário, $\int_{\Sigma} (F - F_0) d\Sigma > 0$ pela continuidade de F .

Sejam ϕ^+ e ϕ^- funções suaves não negativas definidas em Σ que satisfazem

$$p \in \text{supp } \phi^+ \subset \Sigma^+, \text{ supp } \phi^- \subset \Sigma^-, \quad \int_{\Sigma} (\phi^+ + \phi^-) (F - F_0) d\Sigma = 0,$$

essas funções existem. Por exemplo, para h^+ e h^- funções suaves não negativas definidas

em vizinhanças $V_p \subset \text{supp } \phi^+$ de $p \in \Sigma^+$ e $V_q \subset \text{supp } \phi^-$ de $q \in \Sigma^-$ tem-se

$$\int_{V_p} h^+ (F - F_0) d\Sigma > 0,$$

$$\int_{V_q} h^- (F - F_0) d\Sigma < 0,$$

então pode-se escolher, por exemplo, $\phi^+ = h^+$ e $\phi^- = kh^-$ em que k é um real adequado de forma que

$$\int_{\Sigma} (h^+ + kh^-) (F - F_0) d\Sigma = 0.$$

Tomando-se $g = (\phi^+ + \phi^-) (F - F_0)$, pela proposição 2.2.1, pode-se obter uma variação que preserva volume e deixa o bordo fixo, cuja a componente normal do campo variacional é gN . Nesse caso,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} g (F - F_0) d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} (\phi^+ + \phi^-) (F - F_0) (F - F_0) d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} (\phi^+ + \phi^-) (F - F_0)^2 d\Sigma > 0, \end{aligned}$$

contradição, logo $F \equiv F_0$ e o $\int_{\Sigma} g (\Delta f + (|\sigma|^2 + \text{Ric}(N))f) d\Sigma = 0$.

Agora, para mostrar a equação 2.19, escolhe-se uma função $g \in \mathcal{F}$ dada por $g = 0$ em $\text{int}(\Sigma)$ e $g = \frac{\partial f}{\partial \nu} - qf$ em $\partial\Sigma$ e da condição $\mathcal{I}(f, g) = 0$, tem-se

$$\int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - qf \right)^2 d(\partial\Sigma) = 0,$$

daí segue o resultado. □

Uma forma mais geral de definir funcional energia para uma hipersuperfície Σ com $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ sendo as componentes conexas de $\partial\Sigma$ é dada por

$$E(t) = A(t) - \sum_{i=1}^k \cos \theta_i W_i(t),$$

onde $\theta_1, \dots, \theta_k$ são ângulos de contatos constantes ao longo de cada componente de $\partial\Sigma$ com valores entre $(0, \pi)$, $W_i(t)$ é a função área molhada correspondente a Γ_i , $i = 1, \dots, k$

Neste cenário, as hipersuperfícies capilares em $\mathcal{B}$ também são pontos críticos do funcional energia para variações admissível que preservam volume e a primeira e segunda formula da variação de energia continuam válidas com simples modificações.

O lema seguinte vai ser usado repetidas vez ao longo do texto, pois os domínios utilizados neste trabalho tem a característica de serem totalmente umbílicos em seu bordo.

Lema 2.3.1. *Suponha que o bordo do domínio $\mathcal{B}$ seja totalmente umbílico. Seja ψ uma imersão capilar em $\mathcal{B}$. Então, o vetor normal unitário exterior ν ao longo de $\partial\Sigma$ em Σ é uma direção principal de ψ .*

Denotando $\bar{\nabla}$ como a conexão Levi-Civita na variedade ambiente, tem-se

$$\bar{\nabla}_\nu N = -\sigma(\nu, \nu)\nu,$$

Demonstração. Pela definição 1.1.21 de ponto umbílico e para $x \in T(\partial\Sigma)$, a segunda forma fundamental de $\partial\Sigma$ associada a $-\bar{N}$ é dada por

$$\langle B(x, x), -\bar{N} \rangle = II(x, x)$$

como

$$\langle x, \bar{N} \rangle = 0$$

chega-se a

$$\langle \bar{\nabla}_x \bar{N}, x \rangle = \langle \bar{\nabla}_x x, -\bar{N} \rangle = \langle B(x, x), -\bar{N} \rangle,$$

logo, se $\partial\mathcal{B}$ é totalmente umbílica, vale

$$\bar{\nabla}_x \bar{N} = II(x, x)x \tag{2.20}$$

Se ν for uma direção principal de ψ em $\partial\Sigma$, tem-se, por definição,

$$S_N(\nu) = \lambda\nu,$$

logo, para qualquer $x \in T(\partial\Sigma)$, obtém-se

$$\sigma(\nu, x) = \langle S_N(\nu), x \rangle = \langle \lambda\nu, x \rangle = 0$$

Portanto, basta mostrar que $\sigma(\nu, x) = 0$ para qualquer $x \in T(\partial\Sigma)$ para provar que ν é uma direção principal. Com as convenções introduzidas acima, a conexão em relação a x da equação 2.2 ao longo de $\partial\Sigma$ dá

$$\bar{\nabla}_x N = \cos \theta \bar{\nabla}_x \bar{N} - \sin \theta \bar{\nabla}_x \bar{\nu}.$$

Por hipótese, $\bar{\nabla}_x \bar{N} = II(x, x)x$ é ortogonal a ν , logo

$$\langle \bar{\nabla}_x N, \nu \rangle = -\sin \theta \langle \bar{\nabla}_x \bar{\nu}, \nu \rangle. \tag{2.21}$$

Além disso, denotando por ∇ a conexão de Levi-Civita em $\partial\mathcal{B}$, e como $\partial\mathcal{B}$ é totalmente umbílica e $x \perp \bar{\nu}$ isso implica que $II(x, \bar{\nu}) = 0$, portanto,

$$\bar{\nabla}_x \bar{\nu} = -II(x, \bar{\nu})\bar{N} + \nabla_x \bar{\nu} = \nabla_x \bar{\nu} \quad (2.22)$$

é tangente a $\partial\Sigma$. Segue das equações 2.21 e 2.22 que

$$\sigma(\nu, x) = -\langle \bar{\nabla}_x N, \nu \rangle = 0$$

□

De agora em diante, a variedade ambiente M será tomada como sendo o espaço Euclidiano R^{n+1} , e $\mathcal{B}$ será ou um semiespaço ou um *slab*. Nestes casos, $Ric \equiv 0$ e $II \equiv 0$.

2.4 Algumas resultados para hipersuperfícies em espaços Euclidianos

Reúnem-se aqui alguns fatos gerais sobre hipersuperfícies em espaços Euclidianos que serão usados ao longo do trabalho. A primeira proposição contém resultados bem conhecidas (ver [14]).

Lema 2.4.1. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow R^{n+1}$ uma imersão. Se N é um campo unitário normal a Σ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal, então*

$$(i) \quad |\sigma|^2 = -\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle.$$

Assumindo a curvatura média H de ψ constante e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico em uma vizinhança $p \in \Sigma$, então

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle(p) = 0, \text{ para todo } k = 1, 2, \dots, n.$$

Demonstração. Prova do item (i).

Uma vez que $\langle N, N \rangle = 1$, $\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = 0$ e $\bar{\nabla}_{e_i} N \perp N$, pode-se escrever $\bar{\nabla}_{e_i} N = \sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle e_j$, logo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle &= -\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle e_j, \sum_{k=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle e_k \right\rangle \\ &= -\sum_{i,j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle^2 \\ &= -\sum_{i=1}^n k_i^2 = -|\sigma|^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Prova do item (ii).

Como o referencial é geodésico em p tem-se

$$\left(\bar{\nabla}_{e_i} e_k\right)^T = \nabla_{e_i} e_k = 0, \quad (2.24)$$

além disso, valem

$$\langle N, e_k \rangle = 0 \Rightarrow \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle = -\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle, \quad (2.25)$$

$$\langle N, N \rangle = 1 \Rightarrow \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = 0 \Rightarrow \bar{\nabla}_{e_k} N \in T_p \Sigma. \quad (2.26)$$

Usando abaixo os resultados 2.24 e 2.26, tem-se

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_k, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = \left\langle \left(\bar{\nabla}_{e_i} e_k\right)^T + \left(\bar{\nabla}_{e_i} e_k\right)^\perp, \bar{\nabla}_{e_i} N \right\rangle = 0. \quad (2.27)$$

Derivando $\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle$ em relação a e_i e usando 2.25 e 2.27, obtém-se

$$\begin{aligned} e_i \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k, N \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_k, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ &= -\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_k, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle - \langle e_k, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k, N \rangle &= -\langle e_k, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Num sistema de coordenada do $\mathbb{R}^{n+1}$ valem $\bar{\nabla}_{e_i} e_k = \bar{\nabla}_{e_k} e_i$ e $\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_k = \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i$.
Disso e de 2.28, tem-se

$$\langle e_k, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i, N \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle. \quad (2.29)$$

Por fim, usando os resultados 2.27 e 2.29, chega-se a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle &= -\sum_{i=1}^n \langle N, \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^n \left(\bar{\nabla}_{e_k} \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_k} N, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle \right) \\ &= -\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_k} \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle \\ &= -\bar{\nabla}_{e_k} \sum_{i=1}^n \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por definição, a curvatura média é dada por

$$\begin{aligned}
 nH = \text{tr}(S_N) &= \sum_{i=1}^n \langle S_N(e_i), e_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i - \nabla_{e_i} e_i, N \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Substituindo-se 2.31 em 2.30 e pela hipótese de curvatura média constante, obtém-se

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle = -\bar{\nabla}_{e_k}(nH) = 0$$

□

Proposição 2.4.1. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow R^{n+1}$, $n \geq 2$, seja uma imersão C^2 no espaço euclidiano R^{n+1} de uma variedade n -dimensional suave e orientável Σ , possivelmente com bordo, $N : \Sigma \rightarrow \mathcal{S}^n \subset R^{n+1}$ um vetor normal unitário global de ψ , H sua curvatura média e σ sua segunda forma fundamental. Denotar por ∇ e div , respectivamente, os operadores Laplaciano e de divergência para a métrica induzida por ψ . Então, são verdades as seguintes equações em Σ :*

$$(i) \quad \Delta \psi = nHN.$$

$$(ii) \quad \text{div}(\psi - \langle \psi, N \rangle N) = n + nH \langle \psi, N \rangle.$$

$$(iii) \quad \text{Para qualquer campo de vetor constante } \vec{a} \text{ em } R^{n+1}, \text{div}(\vec{a} - \langle \vec{a}, N \rangle N) = nH \langle \vec{a}, N \rangle.$$

Além disso, se a curvatura média H é constante, então

$$(iv) \quad \Delta \langle \psi, N \rangle + |\sigma|^2 \langle \psi, N \rangle = -nH.$$

$$(v) \quad \Delta N + |\sigma|^2 N = 0.$$

Demonstração. Prova do item (i) e (iii), Derivando $\langle \psi, \vec{a} \rangle$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixo, na direção de um vetor $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$, tem-se

$$X \langle \psi, \vec{a} \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \psi, \vec{a} \rangle = \langle X, \vec{a} \rangle.$$

A partir dessa relação, pode-se ver que a componente de $\vec{a}$ que se projeta no espaço tangente de Σ corresponde ao gradiente da função $\langle \psi, \vec{a} \rangle$, logo

$$\bar{\nabla} \langle \psi, \vec{a} \rangle = \vec{a} - \langle \vec{a}, N \rangle N \tag{2.32}$$

Tomando um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ e calculando a divergência de 2.32, conforme equação 1.15, chega-se

$$\begin{aligned}
\langle \Delta \psi, \vec{a} \rangle &= \Delta \langle \psi, \vec{a} \rangle = \text{div} \left(\bar{\nabla} \langle \psi, \vec{a} \rangle \right) \\
&= \text{div} \left(\vec{a} - \langle \vec{a}, N \rangle N \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} \langle \vec{a} - \langle \vec{a}, N \rangle N, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} \left(\vec{a} - \langle \vec{a}, N \rangle N \right), e_i \right\rangle \\
&= - \sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} \left(\langle \vec{a}, N \rangle N \right), e_i \right\rangle \\
&= - \sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} \left(\langle \vec{a}, N \rangle \right) N + \langle \vec{a}, N \rangle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \right\rangle \\
&= - \sum_{i=1}^n \langle \vec{a}, N \rangle \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \right\rangle \\
&= \langle \vec{a}, N \rangle \sum_{i=1}^n \left\langle -\bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \right\rangle \\
&= \langle \vec{a}, N \rangle nH \\
&= \langle \vec{a}, nHN \rangle \Rightarrow \Delta \psi = nHN
\end{aligned}$$

Prova do item (ii):

Sendo $\psi = \psi^T + \langle \psi, N \rangle N$, $\psi^T \in T_\psi M$, e como

$$\begin{aligned}
\text{div} \psi &= \sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} \psi, e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i \rangle = n
\end{aligned} \tag{2.33}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{div} \langle \psi, N \rangle N &= \sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} \left(\langle \psi, N \rangle N \right), e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \langle \psi, N \rangle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \right\rangle \\
&= \langle \psi, N \rangle \sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \right\rangle \\
&= - \langle \psi, N \rangle nH,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

logo de 2.33 de 2.34 obtém-se o resultado.

Prova do item (iv):

Seja o referencial geodésico $\{e_1, \dots, e_n\}$ em torno de um ponto $p \in \Sigma$, ψ pode ser escrito

como

$$\psi = \sum_{j=1}^n \langle \psi, e_j \rangle e_j + \langle \psi, N \rangle N \quad (2.35)$$

Calculando o Laplaciano $\langle \psi, N \rangle$, obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta \langle \psi, N \rangle &= \sum_{i=1}^n e_i e_i \langle \psi, N \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \left(\langle \bar{\nabla}_{e_i} \psi, N \rangle + \langle \psi, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \left(\langle e_i, N \rangle + \langle \psi, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \langle \psi, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + \langle \psi, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \right), \end{aligned} \quad (2.36)$$

substituindo-se 2.35 em 2.36, tem-se

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n \langle \psi, e_j \rangle e_j + \langle \psi, N \rangle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \right\rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle + \sum_{j=1}^n \langle \psi, e_j \rangle \left(\sum_{i=1}^n \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \langle \psi, N \rangle. \end{aligned}$$

Agora, do lema 2.4.1 e da definição de H , chega-se ao resultado.

Prova do item (v):

Sejam o referencial geodésico $\{e_1, \dots, e_n\}$ em torno de um ponto $p \in \Sigma$, $N \in (\mathcal{X}(M))^\perp$ e $\vec{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ um vetor unitário fixo, então

$$\begin{aligned} \Delta \langle N, \vec{a} \rangle &= \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \vec{a} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, \vec{a} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_j \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle e_j + \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle N, \vec{a} \right\rangle, \end{aligned}$$

pelo lema 2.4.1 item (ii), fica

$$\begin{aligned}\Delta \langle N, \vec{a} \rangle &= \sum_{i=1}^n \left\langle \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle, \vec{a} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle, \vec{a} \right\rangle\end{aligned}$$

novamente pelo lema 2.4.1 parte (i), tem-se

$$\Delta \langle N, \vec{a} \rangle = \left\langle -|\sigma|^2 N, \vec{a} \right\rangle$$

Portanto,

$$\Delta N + |\sigma|^2 N = 0$$

□

Um outro resultado importante utilizado na demonstração dos teoremas principais deste trabalho é o seguinte fato:

Proposição 2.4.2. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de classe C^1 no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ de uma variedade diferenciável compacta orientável n -dimensional Σ , possivelmente com bordo. Seja $N : \Sigma \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma aplicação normal unitário global de ψ , e ν o vetor conormal unitário a $\partial\Sigma$ em Σ direcionado para fora. Então,*

$$n \int_{\Sigma} N d\Sigma = \int_{\partial\Sigma} \{ \langle \psi, \nu \rangle N - \langle \psi, N \rangle \nu \} d(\partial\Sigma) \quad (2.37)$$

onde $d\Sigma$ e $d\partial\Sigma$ denotam os elementos de volume de Σ e $\partial\Sigma$, respectivamente. Em particular, se Σ não tem bordo, então

$$\int_{\Sigma} N d\Sigma = \vec{0}$$

Demonstração. Como ψ pode ser aproximada por uma função de classe C^∞ (Teorema de Aproximação de Whitney), então demonstra-se o resultado para imersões suaves e o caso geral segue por aproximação. Seja $\vec{a}$ um campo vetorial constante em $\mathbb{R}^{n+1}$. Considere o seguinte campo vetorial em Σ :

$$X = \langle \vec{a}, N \rangle \psi^T - \langle \psi, N \rangle \vec{a}^T,$$

onde $\psi^T = \psi - \langle \psi, N \rangle N$ é a projeção de ψ em $T\Sigma$ e $\vec{a}^T = \vec{a} - \langle \psi, \vec{a} \rangle N$ é a projeção de $\vec{a}$ em $T\Sigma$. Denotando por D a diferenciação usual em $\mathbb{R}^{n+1}$, a divergência de X é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\langle \vec{a}, N \rangle \psi^T) &= \langle \vec{a}, N \rangle \operatorname{div}(\psi^T) + \langle \psi^T, \nabla \langle \vec{a}, N \rangle \rangle \\
&= \langle \vec{a}, N \rangle \operatorname{div}(\psi^T) + D_{\psi^T} \langle \vec{a}, N \rangle \\
&= \langle \vec{a}, N \rangle \operatorname{div}(\psi^T) + \langle \vec{a}, D_{\psi^T} N \rangle
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\langle \psi, N \rangle \vec{a}^T) &= \langle \psi, N \rangle \operatorname{div}(\vec{a}^T) + \langle \vec{a}^T, \nabla \langle \psi, N \rangle \rangle \\
&= \langle \psi, N \rangle \operatorname{div}(\vec{a}^T) + D_{\vec{a}^T} \langle \psi, N \rangle \\
&= \langle \psi, N \rangle \operatorname{div}(\vec{a}^T) + \langle D_{\vec{a}^T} \psi, N \rangle + \langle \vec{a}^T, D_{\vec{a}^T} N \rangle \\
&= \langle \psi, N \rangle \operatorname{div}(\vec{a}^T) + \langle \vec{a}^T, N \rangle + \langle \psi, D_{\vec{a}^T} N \rangle
\end{aligned} \tag{2.39}$$

De 2.38, 2.39 e da proposição 2.4.1 itens (ii) e (iii), tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \langle \vec{a}, N \rangle \operatorname{div}(\psi^T) + \langle \vec{a}, D_{\psi^T} N \rangle - \langle \psi, N \rangle \operatorname{div}(\vec{a}^T) - \langle \vec{a}^T, N \rangle - \langle \psi, D_{\vec{a}^T} N \rangle \\
&= n \langle \vec{a}, N \rangle + nH \langle \psi, N \rangle \langle \vec{a}, N \rangle + \langle \vec{a}^T, D_{\psi^T} N \rangle - nH \langle \vec{a}, N \rangle \langle \psi, N \rangle - \langle \psi^T, D_{\vec{a}^T} N \rangle \\
&= n \langle \vec{a}, N \rangle
\end{aligned}$$

onde foi usado $\langle \vec{a}^T, D_{\psi^T} N \rangle = \langle \psi^T, D_{\vec{a}^T} N \rangle = -\sigma(\vec{a}^T, \psi^T)$, com σ sendo a segunda forma fundamental da imersão.

Agora, usando o teorema da divergência e que $N \perp \nu$, chega-se

$$\begin{aligned}
n \int_{\Sigma} \langle \vec{a}, N \rangle d\Sigma &= \int_{\Sigma} \operatorname{div} X d\Sigma \\
&= \int_{\partial \Sigma} \langle X, \nu \rangle d(\partial \Sigma) \\
&= \int_{\partial \Sigma} \{ \langle \vec{a}, N \rangle \langle \psi, \nu \rangle - \langle \psi, N \rangle \langle \vec{a}, \nu \rangle \} d(\partial \Sigma)
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{a}, n \int_{\Sigma} N d\Sigma \right\rangle &= \int_{\partial \Sigma} \{ \langle \vec{a}, \langle \psi, \nu \rangle N \rangle - \langle \vec{a}, \langle \psi, N \rangle \nu \rangle \} d(\partial \Sigma) \\
&= \left\langle \vec{a}, \int_{\partial \Sigma} \langle \psi, \nu \rangle N - \langle \psi, N \rangle \nu d(\partial \Sigma) \right\rangle
\end{aligned}$$

Como essa última expressão é válida para qualquer $\vec{a}$, então 2.37 segue.

□

Capítulo 3

Hipersuperfície Capilares Estáveis Imer- sas em um *Slab* e Semiespaço

3.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os três teoremas principais desta dissertação cujas demonstrações foram obtidas por Abdelhamid Ainouz e Rabah Souam em [1]. Eles demonstraram que as hipersuperfícies capilares imersas em um domínio $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, que pode ser um *slab* fechado ou um semiespaço fechado em $\mathbb{R}^{n+1}$, são rotacionalmente invariantes em torno de um eixo ortogonal a $\partial\mathcal{B}$ sob algumas restrições e dependendo do ambiente que estão imersas.

3.2 Superfícies Capilares Estáveis de Gênero Zero em um *Slab* em $\mathbb{R}^3$

É mostrado, nesta seção, que superfícies capilares estáveis de gênero zero e imersas num *slab* contido no $\mathbb{R}^3$ devem ser de revolução. No caso de bordo livre, Ros [3] provou que tal superfície deve ser um cilindro circular reto. O caso de capilaridade mergulhada e estável ligando dois planos paralelos foi estudo por Vogel [17] e por Zhou [18].

Antes do teorema principal desta seção 3.2.4 ser apresentado, anuncia-se alguns resultados e definições utilizados na sua demonstração.

Teorema 3.2.1. *(da Continuação Única de Aronszajn) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado conexo. Se u é uma solução em Ω de*

$$-\Delta u = \lambda u$$

que se anula em um aberto não vazio de Ω , então $u \equiv 0$.

A demonstração pode ser encontrada em [19].

Definição 3.2.1. *Sejam Σ uma variedade Riemanniana e uma função $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \in C^0$, o conjunto $u^{-1}(0)$ é chamado conjunto nodal de u e uma componente conexa de $\Sigma \setminus u^{-1}(0)$ é chamada de domínio nodal. Se a dimensão de Σ é dois, $u^{-1}(0)$ é chamado de linha nodal.*

Definição 3.2.2. *Seja Σ uma variedade Riemanniana, caso exista uma função $u \in C^\infty(\Sigma)$ não nula tal que*

$$\Delta u + |\sigma|^2 u = 0$$

diz-se que u é uma autofunção do operador de Jacobi $(\Delta + |\sigma|^2)$ associada ao autovalor 0.

Para variedade Riemanniana de dimensão 2, é demonstrado em [20], além de varias outras propriedades, que cada linha nodal do operador $(\Delta + |\sigma|^2)$ é, por imersão, a imagem de um círculo ou segmento de $\mathbb{R}$. Por isso, para superfície de gênero zero as linhas nodais no interior de Σ tem a estrutura de grafo.

Lema 3.2.2. *Seja ψ uma imersão de uma superfície capilar Σ de gênero zero em um slab de $\mathbb{R}^3$ e seja a função $u \in C^\infty(\Sigma)$ não identicamente nula que satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta u + |\sigma|^2 u = 0 & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = qu & \text{em } \partial \Sigma. \end{cases} \quad (3.1)$$

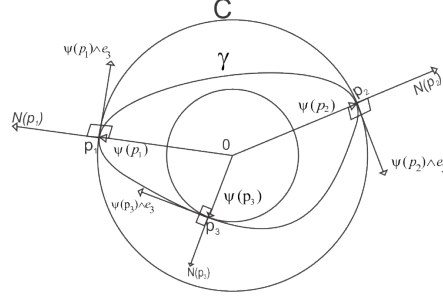
então o conjunto $\Sigma \setminus u^{-1}(0)$ tem pelo menos três domínios nodais.

Demonstração. Seja γ uma componente conexa de $\partial \Sigma$ tal que $\psi(\gamma)$ esteja no bordo do slab. Pela condição de contorno, se $p \in u^{-1}(0) \cap \partial \Sigma$, então $(\partial u / \partial \nu)(p) = 0$. Como $\Delta u + \lambda u = 0$, u deve mudar de sinal em uma vizinhança de $p \in u^{-1}(0) \cap \partial \Sigma$, pois, se u não mudar de sinal, pelo princípio do máximo forte, nesse ponto p , $(\partial u / \partial \nu)(p) \neq 0$ contradizendo $(\partial u / \partial \nu)(p) = 0$, logo u deve ser identicamente zero em uma vizinhança de p e, então, pelo teorema 3.2.1 u deve ser identicamente zero em todo Σ contradizendo a hipótese. Assim, todo ponto $p \in u^{-1}(0) \cap \partial \Sigma$ está na fronteira de pelo menos duas componentes conexas do conjunto $\{u \neq 0\}$.

Se $p \in \partial \Sigma$ é um ponto crítico da função $|\psi|^2$ restrito a γ , então $\langle \psi'(p), \psi(p) \rangle = 0$ e consequentemente $\psi'(p)$ é paralelo a $\psi(p) \wedge e_3$ e ortogonal a N , logo $u(p) = 0$.

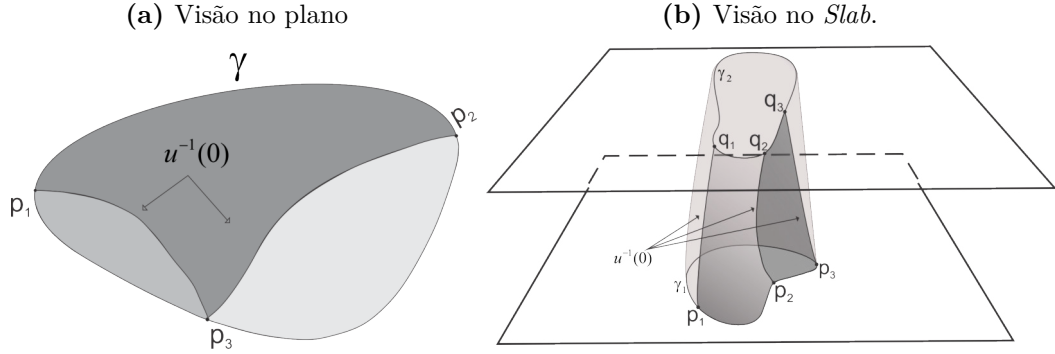
Agora, pela escolha de C , o conjunto $u^{-1}(0) \cap \gamma$ tem pelo menos três pontos, conforme mostra a figura 3.1. Dois são devidos ao resultado conhecido de que C e $\psi(\gamma)$ são tangentes em no mínimo dois pontos (p_1 e p_2), conforme [21], e o terceiro, é um ponto de γ cuja imagem por ψ é a mais próxima da origem (p_3).

Figura 3.1: Pontos $p_1, p_2, p_3 \in u^{-1}(0) \cap \gamma$.



Como, por hipótese, Σ é de gênero zero, ou seja, topologicamente um domínio planar, toda curva de Jordan separa Σ em duas componentes conexas (teorema da curva de Jordan) e como existem no mínimo três pontos no conjunto $u^{-1}(0) \cap \partial\Sigma$ e cada ponto está na fronteira de pelo menos dois domínios nodais, então as curvas de Jordan formadas pela $u^{-1}(0)$ e γ definem pelo menos três domínios nodais.

Figura 3.2: Cenários possíveis, cada cor representa um domínio.



□

Lema 3.2.3. *Seja ψ uma imersão de uma superfície capilar Σ em um slab do $\mathbb{R}^3$ e seja a função $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u = \langle \psi \wedge e_3, N \rangle$ então vale*

$$\begin{cases} \Delta u + |\sigma|^2 u = 0 & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = qu & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (3.2)$$

onde e_3 é um vetor unitário ortogonal aos planos do slab, N é um vetor unitário normal a superfície, ν é o vetor unitário normal exterior a $\partial\Sigma$, $q = \sigma(\nu, \nu) \cot \theta$ e θ é o ângulo de contato da superfície com um dos planos do slab.

Demonstração. Seja $\{E_1, E_2\}$ um referencial geodésico em torno de $p \in T_p\Sigma$ com $E_1(p), E_2(p)$ ortonormais e são direções principais. Neste referencial o Laplaciano em p é dado por $\sum_i E_i E_i (\langle \psi \wedge e_3, N \rangle)$ e, além disso, $\bar{\nabla}_{E_i} \psi = E_i$, $\bar{\nabla}_{E_i} E_i = (\bar{\nabla}_{E_i} E_i)^N$, pois a componente tangente é nula ($\nabla_{E_i} E_i = 0$).

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \Delta \langle \psi \wedge e_3, N \rangle \\
&= \sum_i E_i E_i (\langle \psi \wedge e_3, N \rangle) = \sum_i E_i \left(\langle \bar{\nabla}_{E_i} \psi \wedge e_3, N \rangle + \langle \psi \wedge e_3, \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle \right) \\
&= \sum_i E_i \left(\langle E_i \wedge e_3, N \rangle + \langle \psi \wedge e_3, \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle \right) \\
&= \sum_i \left(\langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i \wedge e_3, N \rangle + \langle E_i \wedge e_3, \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle + \langle E_i \wedge e_3, \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle + \langle \psi \wedge e_3, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle \right) \\
&= \sum_i \left(2 \langle E_i \wedge e_3, \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle + \langle \psi \wedge e_3, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle \right) \\
&= \sum_i \left(2 \langle E_i \wedge e_3, \lambda_i E_i \rangle + \langle \psi \wedge e_3, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle \right) \\
&= \left\langle \psi \wedge e_3, \sum_i \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \right\rangle = \left\langle \psi \wedge e_3, -|\sigma|^2 N \right\rangle = -|\sigma|^2 u
\end{aligned}$$

Para provar a segunda igualdade, seja $p \in \phi(\gamma)$ no plano Π_1 e considerando que

$$e_3 = -\cos \theta N + \sin \theta \nu \Rightarrow \nu = \frac{1}{\sin \theta} e_3 + \cot \theta N,$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \nu}(p) &= \frac{\partial \langle \psi \wedge e_3, N \rangle}{\partial \nu} = -\frac{\partial \langle \psi \wedge N, e_3 \rangle}{\partial \nu} \\
&= -(\langle \nu(p) \wedge N(p), e_3 \rangle + \langle \psi(p) \wedge (-\sigma(\nu, \nu))\nu(p), e_3 \rangle)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

como $\nu(p) \wedge N(p)$ é normal a e_3 tem-se

$$\langle \nu(p) \wedge N(p), e_3 \rangle = 0 \tag{3.4}$$

e também

$$\begin{aligned}
\langle \psi(p) \wedge -\sigma(\nu, \nu)\nu(p), e_3 \rangle &= -\sigma(\nu, \nu) \left\langle \psi(p) \wedge \left(\frac{1}{\sin \theta} e_3 + \cot \theta N(p) \right), e_3 \right\rangle \\
&= -\sigma(\nu, \nu) \left(\frac{1}{\sin \theta} \langle \psi(p) \wedge e_3, e_3 \rangle + \cot \theta \langle \psi(p) \wedge N(p), e_3 \rangle \right) \\
&= \sigma(\nu, \nu) \cot \theta \langle \psi(p) \wedge e_3, N(p) \rangle
\end{aligned} \tag{3.5}$$

substituindo 3.4 e 3.5 em 3.3 chega-se a

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(p) = qu.$$

□

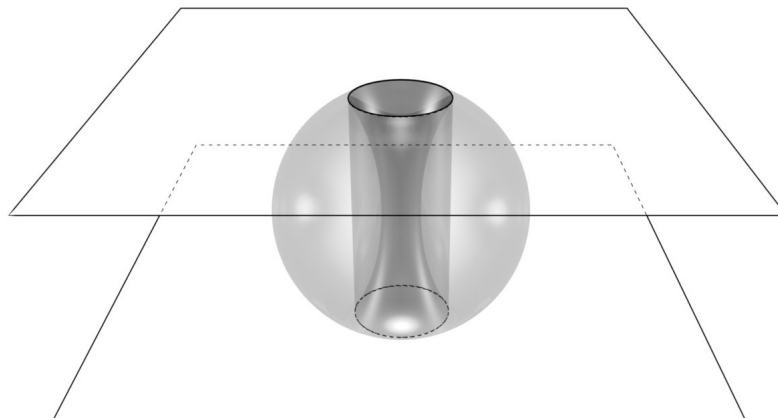
Quais seriam as sequencias de superfícies capilares de gênero zero mergulhadas no *slab* de $\mathbb{R}^3$ ou que características teriam se elas possuíssem bordos circulares coaxial γ_1 e

γ_2 e cada um deles contidos em bordos diferentes do *slab* quando se varia lentamente e continuamente o volume que encerram de forma a permanecerem sempre estável, como a figura 3.3 exemplifica?. É certo que existe uma relação entre a distância dos planos do *slab* e o raio do círculo para que as superfícies sejam estáveis. Um resultado encontrado em [2] de enunciado:

Considere dois círculos coaxiais γ_1 e γ_2 em planos paralelos P_1 e P_2 , com $\gamma_i \subset P_i$. Suponha que Σ seja uma superfície cmc, compacta e mergulhada no $\mathbb{R}^3$ tendo $\gamma_1 \cup \gamma_2$ como bordo. Se $\text{int}(\Sigma)$ estiver no *slab* determinado por P_1 e P_2 , então Σ é uma superfície de revolução ([2], p. 64).

diz que as superfícies devem ser de revolução, incluindo as não fisicamente realizáveis ou não estáveis em seu conjunto solução e podendo excluir do conjunto solução superfície estável mergulhada no $\mathbb{R}^3$ como o nodoide.

Figura 3.3: Pedaco de Catenoide, de uma esfera e de um cilindro contidos no *slab*.



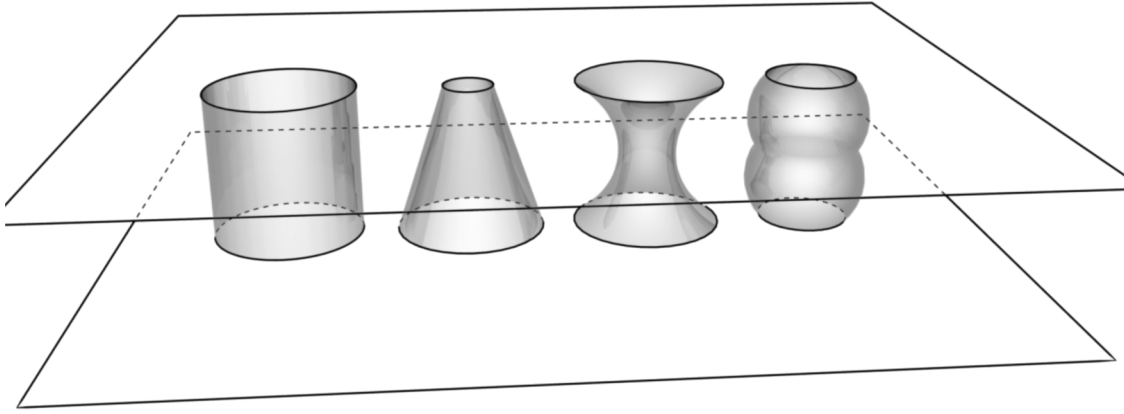
O teorema seguinte, o primeiro sob exame neste trabalho, diz quais são as possíveis superfícies fisicamente realizáveis sendo mais geral em relação às hipóteses do resultado anterior, pois, a princípio, não restringe os bordos a círculos, apenas supõe que estão imersos no *slab*, e nem mesmo assume que as superfícies estejam contidas no *slab*.

Teorema 3.2.4. *Seja ψ uma imersão de uma superfície capilar Σ de gênero zero em um slab de $\mathbb{R}^3$ delimitada por dois planos paralelos Π_1 e Π_2 e com ângulos de contato constantes θ_1 e θ_2 com Π_1 e Π_2 , respectivamente. Se ψ é estável, então $\psi(\Sigma)$ é uma superfície de revolução em torno de um eixo ortogonal a Π_1 .*

Observando inicialmente que, das superfícies mostradas na figura 3.4, o cilindro e o catenoide são soluções do problema acima, mas o pedaço de cone e a superfície formada pela rotação de dois arco de círculo de mesmo raio justapostos não são. O cone não tem cmc e não é estável e a outra, mesmo sendo de revolução, tendo os ângulos de contato

constante e cmc, não é estável e nem é suave. São exemplos também de superfícies no conjunto de solução deste teorema o onduloide e o nodoide.

Figura 3.4: Pedacos de cilindro, cone, catenoide e junção de duas esferas de mesmo raio contidos no *slab*.



Demonstração. Pode-se escolher, sem perda de generalidade, o *slab* limitado pelos planos horizontais $\Pi_1 = \{x_3 = 0\}$ e $\Pi_2 = \{x_3 = 1\}$. Seja γ uma componente conexa de $\partial\Sigma$ tal que $\psi(\gamma)$ esteja no plano $\{x_3 = 0\}$, e considere neste plano o círculo circunscrito C a $\psi(\gamma)$. O objetivo é mostrar que $\psi(\Sigma)$ é uma superfície de revolução em torno do eixo vertical que passa pelo centro de C que supõe-se coincide com a origem do sistema.

Para isso, constrói-se uma função $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ que é identicamente nula caso a superfície seja rotacionalmente invariante. Tal função pode ser definida, para todo $p \in \Sigma$, como $u(p) = \langle \psi(p) \wedge e_3, N(p) \rangle$, onde $\wedge$ denota o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$. Portanto, o objetivo agora é provar que $u \equiv 0$ em Σ .

Pelo lema 3.2.3 e como a função $u \in C^\infty$, conclui-se que u é uma função de Jacobi.

Agora, para provar que $u \equiv 0$ em Σ , supõe-se, por contradição, que u não seja identicamente zero.

Pelo lema 3.2.2, o conjunto $u^{-1}(0) \cap \partial\Sigma$ tem pelo menos três domínios nodais. Denotando-se por Σ_1 e Σ_2 dois desses domínios e considerando a função no espaço Sobolev $H^1(\Sigma)$:

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{em } \Sigma_1, \\ \alpha u & \text{em } \Sigma_2, \\ 0 & \text{em } \Sigma \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2), \end{cases} \quad (3.6)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é escolhido de forma que $\int_{\Sigma} \tilde{u} dA = 0$.

Agora, de 3.2 e da expressão $\operatorname{div}(\tilde{u} \nabla u) = \tilde{u} \Delta u + \langle \nabla u, \nabla \tilde{u} \rangle$ pode-se calcular a forma

do índice de estabilidade, como segue

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} \{ \langle \nabla \tilde{u}, \nabla \tilde{u} \rangle - |\sigma|^2 \tilde{u}^2 \} dA &= \int_{\Sigma_1} \{ \langle \nabla u, \nabla \tilde{u} \rangle - |\sigma|^2 u \tilde{u} \} dA \\ &= \int_{\Sigma_1} \{ \operatorname{div}(\tilde{u} \nabla u) - \tilde{u} \Delta u - |\sigma|^2 u \tilde{u} \} dA \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{\Sigma_1} \{ \tilde{u} \Delta u + |\sigma|^2 u \tilde{u} \} dA + \int_{\Sigma_1} \operatorname{div}(\tilde{u} \nabla u) dA \\ &= \int_{\Sigma_1} \{ \Delta u + |\sigma|^2 u \} \tilde{u} dA + \int_{\partial \Sigma_1} \tilde{u} \langle \nabla u, \nu \rangle ds \\ &= \int_{\Sigma_1} \{ \Delta u + |\sigma|^2 u \} \tilde{u} dA + \int_{\partial \Sigma_1} \tilde{u} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \\ &= \int_{\partial \Sigma_1 \cap \partial \Sigma} q \tilde{u}^2 ds \end{aligned} \quad (3.8)$$

Usando um cálculo semelhante em Σ_2 , deduz-se que $\mathcal{I}(\tilde{u}, \tilde{u}) = 0$.

A função $\tilde{u}$ é uma função de Jacobi, pois $\tilde{u}$ é um mínimo da forma quadrática em $\mathcal{F}$ associada a $\mathcal{I}$ que é maior ou igual zero pela hipótese de estabilidade de Σ , logo $\tilde{u}$ está no núcleo de $\mathcal{I}$ e vale $\Delta \tilde{u} + |\sigma|^2 u = 0$. No entanto, $\tilde{u}$ é nula em um conjunto aberto não-vazio $\Sigma \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ e, pelo teorema 3.2.1, $\tilde{u}$ deve ser nula em todos Σ o mesmo acontecendo com u , o que é uma contradição.

Portanto, $\psi(\Sigma)$ é uma superfície de revolução em torno do eixo x_3 .

□

3.3 Hipersuperfície Estável com CMC com bordos Livres em um *slab* em $\mathbb{R}^{n+1}$

O estudo de hipersuperfícies estável com CMC mergulhadas em *slab* do $\mathbb{R}^{n+1}$ e que interligam os hiperplanos do bordo desse domínio surgiu inicialmente com os trabalhos de Athanassenas [22] e Vogel [23] em dimensão três e por Pedrosa e Ritoré para qualquer $n \geq 2$ [4]. Esses trabalhos caracterizaram tais hipersuperfícies como rotacionalmente invariantes e que para $2 \leq n \leq 7$ são cilindros circulares e para $n \geq 9$ surgem também pedaços de onduloide fechados, o caso $n = 8$ está em aberto.

Um importante resultado relacionado a hipersuperfície mergulhada em um *slab* do $\mathbb{R}^{n+1}$, devido a Pedrosa e Ritoré [4], obtido com a aplicação do princípio de reflexão de Alexandrov é o seguinte

Lema 3.3.1. *Seja Σ um hipersuperfície com CMC, compacta, mergulhada em um slab do $\mathbb{R}^{n+1}$ com ângulo de contato $\theta = \Pi/2$. Então, Σ é rotacionalmente simétrica com relação a uma linha perpendicular ao bordo do slab.*

devido a condição de bordos livres e da classificação de hipersuperfície de revolução dada por Delaunay, este lema revela três possibilidades para as hipersuperfícies, uma semiesfera, um cilindro ou um pedaço de onduloide.

Diferentemente desse lema, o teorema 3.3.3 principal desta seção supõe Σ imersa com bordos mergulhados e a restringe à classe de hipersuperfícies estáveis que ligam os dois hiperplanos paralelos. A inspiração da demonstração do teorema 3.3.3 foi dada por algumas ideias usadas em [8].

Antes, porém, da demonstração do teorema 3.3.3, dá-se alguns resultados e definições fundamentais para o entendimento e que foram utilizados na prova do teorema 3.3.3.

Definição 3.3.1. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ chama-se um homeomorfismo se f é bijetiva, contínua e f^{-1} é contínua.*

Definição 3.3.2. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ chama-se um homeomorfismo local quando cada ponto de $x \in X$ está contido num aberto U tal que $V = f(U)$ é aberto em Y e $f|U$ é um homeomorfismo de U sobre V .*

Definição 3.3.3. *Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ chama-se própria quando é fechada e, para todo $y \in Y$, a imagem inversa $f^{-1}(y)$ é compacta.*

Proposição 3.3.1. *Sejam X um espaço de Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ um homomorfismo local. Então cada uma das afirmações seguintes implica a seguinte:*

- *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que cada imagem inversa $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, possui n elementos.*
- *f é própria e sobrejetiva.*
- *f é uma aplicação de recobrimento cujas fibras $f^{-1}(y)$ são finitas. Se Y for conexo, então as 3 afirmações são equivalentes.*

A demonstração é encontra em [24].

O próximo teorema, devido a Wente [5] e baseado no método de reflexão de Alexandrov, mostrar, em particular, que sob condições adequadas uma hipersuperfície capilar mergulhada é axialmente simétrica e que qualquer interseção não vazia da hipersuperfície com um hiperplano horizontal é um disco cujo o centro está no eixo. Esse teorema é descrito abaixo em toda sua generalidade.

Teorema 3.3.2. *Seja $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ um sistema de coordenada Euclidiana de $\mathbb{R}^{n+1}$ e seja X um subconjunto limitado, aberto e conexo de $\mathbb{R}^{n+1}$ que esteja aderindo ao hiperplano $\Pi : \{x_{n+1} = 0\}$. Suponha que o bordo de X , $\partial X = (\Pi \cap \bar{X}) \cup \Sigma$, onde Σ é uma hipersuperfície com bordo $\partial \Sigma = \Sigma \cap \Pi$ de classe C^2 mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$ que corresponde a interface líquido-ar. Suponha que a curvatura média de Σ , H , medida em relação à normal exterior seja a restrição a Σ de uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^{n+1}$ que depende*

somente da coordenada x_{n+1} . Finalmente, suponha que o ângulo de contato, θ , de Σ com Π medido em relação ao interior de X seja constante ao longo de $\partial\Sigma$ em que $0 \leq \theta \leq \pi$. Então, existe uma linha vertical em torno da qual X é axialmente simétrica, de modo que qualquer interseção não vazia de X com um hiperplano horizontal seja um disco aberto com centro no eixo.

A demonstração encontra-se em [5].

Por fim, passa-se a analisar o segundo teorema objeto de exame nesse trabalho.

Teorema 3.3.3. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, seja uma hipersuperfície capilar imersa ligando dois hiperplanos horizontais em $\mathbb{R}^{n+1}$ com ângulo de contato $\theta = \Pi/2$. Suponha que a restrição de ψ a cada componente de $\partial\Sigma$ seja mergulhada.*

Se ψ é estável, então $\psi(\Sigma)$ é um cilindro circular vertical ou um gráfico vertical que é rotacionalmente invariante em torno de um eixo vertical.

Demonstração. Inicialmente observa-se que como cada componente conexa do bordo de Σ são hipersuperfícies de CMC, fechadas e mergulhadas em $\mathbb{R}^n$, então, pelo teorema de unicidade de Alexandrov, essas hipersuperfícies são esferas redondas. Caso a hipersuperfície Σ seja um gráfico vertical, então, significa que ela é mergulhada e, segue do lema 3.3.1, que ela é rotacionalmente invariante.

Sejam Π_1 e Π_2 os hiperplanos de bordos do *slab* com Π_1 abaixo de Π_2 . Seja $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ a base canônica de vetores de $\mathbb{R}^{n+1}$, sendo e_{n+1} ortogonal a Π_1 e Π_2 .

Como o interesse é saber se as hipersuperfícies são rotacionalmente invariantes, então constrói-se uma função com base nesse aspecto. Seja a função

$$v = \langle N, e_{n+1} \rangle \quad (3.9)$$

sendo N vetor unitário normal a Σ , ou seja, v corresponde à $(n+1)$ -coordenada de N .

Inicialmente, tem-se dois casos a analisar:

- v é identicamente nula;
- v não é identicamente nula e, nesse caso, v não muda de sinal.

Primeiro caso:

Se $v \equiv 0$ significa que N e e_{n+1} são ortogonais e então Σ é um cilindro vertical com base circular como observado acima.

No segundo caso:

Se v não for identicamente zero, então, neste caso, v não muda de sinal no interior de Σ .

Supondo que v muda de sinal e definindo a função

$$v_+ = \max\{v, 0\}$$

como sendo a parte não negativa de v e a função

$$v_- = \min\{v, 0\}$$

como a parte não positiva de v que estão no espaço Sobolev $H^1(\Sigma)$ (Lema 7.6 de [13]).

Define-se a função

$$\tilde{v} := v_+ + av_-$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é escolhido de forma que

$$\int_{\Sigma} (v_+ + av_-) d\Sigma = 0, \quad (3.10)$$

Esse número real a sempre existe devido a suposição de que v muda de sinal e $\tilde{v} \in H^1(\Sigma)$.

Como a função $\tilde{v}$ tem média zero e envolve informações geométrica do ambiente e da hipersuperfície, aplicando-se à $\tilde{v}$ a forma do índice como teste para a estabilidade, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\tilde{v}, \tilde{v}) &= \int_{\Sigma} \left\{ \langle \nabla \tilde{v}, \nabla \tilde{v} \rangle - |\sigma|^2 \tilde{v}^2 \right\} d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} \left\{ \langle \nabla(v_+ + av_-), \nabla(v_+ + av_-) \rangle - |\sigma|^2 (v_+ + av_-)^2 \right\} d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} \left\{ \langle \nabla v_+, \nabla v_+ \rangle + a^2 \langle \nabla v_-, \nabla v_- \rangle + 2a \langle \nabla v_+, \nabla v_- \rangle - |\sigma|^2 (v_+^2 + a^2 v_-^2 + 2av_- v_+) \right\} d\Sigma \\ &= \mathcal{I}(v_+, v_+) + 2a\mathcal{I}(v_+, v_-) + a^2\mathcal{I}(v_-, v_-). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sabendo que $v = 0$ em $\partial\Sigma$ a parte da integral da forma do índice referente ao bordo é zero, dessa maneira, a forma do índice aplicado a (v_+, v_+) , (v_-, v_-) e a (v_+, v_-) resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(v_+, v_+) &= \int_{\Sigma} \left\{ \langle \nabla v_+, \nabla v_+ \rangle - |\sigma|^2 (v_+)^2 \right\} d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} \left\{ \langle \nabla v, \nabla v_+ \rangle - |\sigma|^2 v v_+ \right\} d\Sigma \end{aligned} \quad (3.12)$$

substituindo $\operatorname{div}(v_+ \nabla v) = v_+ \Delta v + \langle \nabla v, \nabla v_+ \rangle$ (propriedade de divergência) em 3.12 e, em seguida, aplicando o teorema da divergência, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(v_+, v_+) &= \int_{\Sigma} \left(\operatorname{div}(v_+ \nabla v) - v_+ \Delta v - |\sigma|^2 v v_+ \right) d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} \left(-v_+ \Delta v - |\sigma|^2 v v_+ \right) d\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma} \{ (\Delta v + |\sigma|^2 v) v_+ \} d\Sigma, \end{aligned}$$

da proposição 2.4.1, parte (v), obtém-se

$$\mathcal{I}(v_+, v_+) = 0 \quad (3.13)$$

e similarmente $\mathcal{I}(v_-, v_-) = 0$. Além disso, como v_+ e v_- são alternadamente nulas $\mathcal{I}(v_+, v_-) = 0$, logo $\mathcal{I}(\tilde{v}, \tilde{v}) = 0$.

Como Σ é estável e $\mathcal{I}(\tilde{v}, \tilde{v}) = 0$ segue que $\tilde{v}$ é uma função de Jacobi e, conforme 2.19, satisfaz

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu} = 0 \quad \forall p \in \partial \Sigma \quad (3.14)$$

Pelo método de reflexão por hiperplanos paralelos a Π_1 e a Π_2 , pode-se estender $\psi(\Sigma)$ analiticamente para além de Π_1 e a Π_2 , pela condição 3.14 e como $\tilde{v} = 0$ em $\partial \Sigma$, o teorema de Cauchy-Kowalevski garante a existência de solução analítica na vizinhança de $\partial \Sigma$ e que ela é única na classe de funções analíticas, logo $\tilde{v} = 0$ é nula em uma vizinhança de $\partial \Sigma$ isso implica que v também é nula nessa vizinhança. Isso significa que $\psi(\Sigma)$ é um cilindro em uma vizinhança de $\psi(\partial \Sigma)$ e, pelo princípio da continuação analítica para hipersuperfície com CMC, $v = 0$ em toda hipersuperfícies, que é uma contradição. Portanto, a função v não muda de sinal em Σ .

Escolhendo $v \geq 0$, o caso $v \leq 0$ é análogo. A função v satisfaz

$$\begin{cases} v \geq 0, \\ \Delta v = -|\sigma|^2 v \leq 0, \\ v = 0 \text{ em } \partial \Sigma. \end{cases} \quad (3.15)$$

Como v é suposta não identicamente zero, pelo princípio do máximo v não pode ter um ponto com valor zero no interior de Σ , logo $v = \langle N, e_{n+1} \rangle > 0$ no interior de Σ , ou seja, N nunca é "horizontal". Assim, o interior de $\psi(\Sigma)$ é localmente um gráfico vertical, mas não se pode concluir ainda que no bordo $\psi(\Sigma)$ tenha esse comportamento.

Para concluir que $\psi(\Sigma)$ é de fato globalmente um gráfico vertical, tem-se que analisar seu comportamento próximo a seu bordo.

Sejam $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ as componentes conexas de $\partial \Sigma$. Por hipótese, ψ restrito a Γ_i é um mergulho, assim, $\psi(\Gamma_i)$ separa o hiperplano que o contém em duas componentes conexas, para cada $i = 1, \dots, k$.

Denotando por $P : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \Pi_1$ a projeção ortogonal, e definindo $F = P \circ \psi$. Fixando $i = 1, \dots, k$, e considerando um ponto $p \in \Gamma_i$, e uma curva $\gamma : (-\epsilon, 0] \rightarrow \Sigma$ parametrizada por comprimento de arco com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = \nu(p)$. Seja

$$F(\gamma(t)) = P \circ \psi(\gamma(t)) = \psi(\gamma(t)) - \langle \psi(\gamma(t)), e_{n+1} \rangle e_{n+1}$$

então,

$$\begin{aligned} dF(\gamma'(t)) &= \frac{d(F \circ \gamma(t))}{dt} = \overline{\nabla}_{\gamma'(t)} \psi - \langle \overline{\nabla}_{\gamma'(t)} \psi, e_{n+1} \rangle e_{n+1} \\ &= \gamma'(t) - \langle \gamma'(t), e_{n+1} \rangle e_{n+1}, \end{aligned}$$

seja $w(t) = \langle F(\gamma(t)) - F(\gamma(0)), N(p) \rangle$, logo

$$\begin{aligned} \left. \frac{d(w(t))}{dt} \right|_{t=0} &= \langle dF(\gamma'(t)), N(p) \rangle|_{t=0} \\ &= \langle \gamma'(t) - \langle \gamma'(t), e_{n+1} \rangle e_{n+1}, N(p) \rangle|_{t=0} \\ &= \langle \gamma'(t), N(p) \rangle|_{t=0} \\ &= \langle \nu, N(p) \rangle = 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

e

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2(w(t))}{dt^2} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d \langle \gamma'(t), N(p) \rangle}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \langle \overline{\nabla}_{\gamma' \gamma'(t)}|_{t=0}, N(p) \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{\nu} \nu, N(p) \rangle = \sigma(\nu, \nu). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Utilizando o lema 2.3.1, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \nu} &= \langle \overline{\nabla}_{\nu} N, e_{n+1} \rangle \\ &= \langle -\sigma(\nu, \nu) \nu, e_{n+1} \rangle \\ &= -\sigma(\nu, \nu) \langle \nu, e_{n+1} \rangle \\ &= \begin{cases} +\sigma(\nu, \nu) & \text{se } \psi(\Gamma_i) \subset \Pi_1 \\ -\sigma(\nu, \nu) & \text{se } \psi(\Gamma_i) \subset \Pi_2 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Pelo princípio do máximo forte, $\partial v / \partial \nu < 0$ em $\partial \Sigma$, logo de 3.16, 3.17, 3.18 segue que $w(t)$ tem um máximo em $t = 0$ quando $\psi(\Gamma_i) \subset \Pi_1$. Logo, para t pequeno, $F(\gamma(t))$ está na componente de $\Pi_1 \setminus F(\Gamma_i)$ que tem $N(p)$ como uma direção normal apontando para fora em $F(p)$ se $\psi(\Gamma_i) \subset \Pi_1$ ou tem $N(p)$ como uma direção normal apontando para dentro se $\psi(\Gamma_i) \subset \Pi_2$. Portanto, existe uma estreita faixa no interior de Σ em volta de Γ_i que se projeta nesta componente.

Figura 3.5: Projeção de γ sobre Π_1 e D_i a parte cinza.

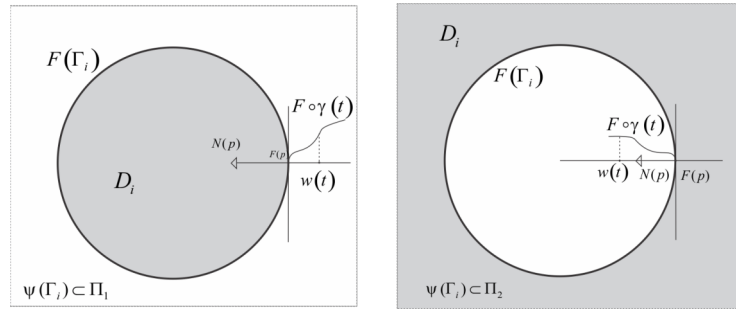
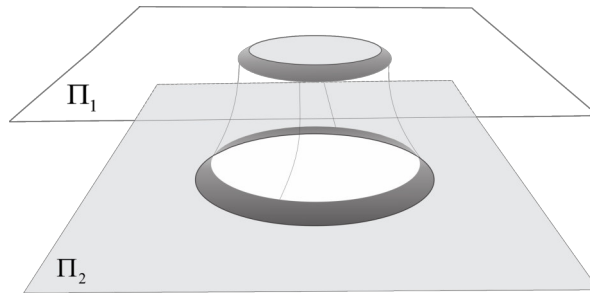


Figura 3.6: Estreita faixa em Σ formada pelas curvas γ e D_i a parte cinza.



Chama-se D_i a componente de $\Pi_1 \setminus F(\Gamma_i)$ que não intercepta essa projeção, conforme ilustrar a figura 3.6. Define-se $\tilde{\Sigma}$ como sendo a união de Σ com a união disjunta de todos os domínios D_i , e $\tilde{F} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Pi_1$ por

$$\tilde{F} = \begin{cases} F & \text{em } \Sigma, \\ \text{projeção de } D_i \text{ sobre } \Pi_1, & i = 1, \dots, k. \end{cases}$$

A estreita faixa acima definida garante que a aplicação $\tilde{F}$ é homeomorfismo local, pois para pontos de D_i e pontos do interior de Σ , $\tilde{F}$ é um gráfico vertical local. Ela também é uma aplicação própria devido o número de elementos de $\tilde{F}^{-1}(y)$ com $y = F(p) \in \Pi_1$ ser constante e igual a quantidade de componentes conexas contidas em Π_1 . Portanto, segue de 3.3.1 que $\tilde{F}$ é uma aplicação de recobrimento.

Como Σ está colada a todos os D_i , o domínio de $\tilde{F}$ é conexo e como sua imagem, Π_1 , é simplesmente conexa, resulta que $\tilde{F}$ é um homeomorfismo global. Portanto, $\psi(\Sigma)$ é um gráfico sobre um domínio em Π_1 e, como tal, é mergulhado e então $\psi(\Sigma)$ é uma hipersuperfície de revolução em torno de um eixo vertical, conforme o teorema 3.3.2.

□

3.4 Hipersuperfície capilares estáveis em um semi-espaço em $\mathbb{R}^{n+1}$

É de conhecimento que as calotas esféricas são as únicas hipersuperfícies capilares mergulhadas em um semiespaço do $\mathbb{R}^{n+1}$ [5], além disso, elas são estáveis e minimizam o funcional energia [25]. No $\mathbb{R}^3$ e enfraquecendo a hipótese de mergulhada para imersa, Marinov [6] caracterizou-as como as únicas superfícies capilares estáveis em um semiespaço em com bordos mergulhadas.

Ele usou uma variação admissível infinitesimal que é a versão no cenário de capilaridade usado, no caso fechado, por Barbosa e do Carmo [14]. Recentemente, Choe e Koiso [7] provaram o mesmo resultado em $\mathbb{R}^{n+1}$, para qualquer $n \geq 2$, assumindo o ângulo de contato $\geq \Pi/2$ e o bordo da hipersuperfície convexa.

É usado aqui o caso em que o ângulo de contato é $\leq \Pi/2$, tendo a convenção da orientação da imersões dada pelo seu vetor de curvatura média $\vec{H}$, e o ângulo de contato sendo aquele entre $\vec{H}$ e o vetor normal unitário exterior à fronteira do semiespaço (isto é pelo princípio do máximo $H \neq 0$). Duas variações infinitesimais são empregadas, sendo a primeira usada por Marinov, Choe e Koiso. No entanto, contrariamente aos autores anteriores, graças à Proposição 2.4.2, para estabelecer que esta variação preserva volume, não é preciso assumir bordos mergulhados. A segunda variação infinitesimal é uma combinação adequada das partes negativa e positiva da última coordenada da aplicação de Gauss. O resultado é o seguinte.

Antes do teorema principal desta seção ser apresentado, tem-se o lema

Lema 3.4.1. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$ uma hipersuperfície com curvatura média constante H imersa em um semiespaço em $\mathbb{R}^{n+1}$ e ângulo de contato $0 < \theta \leq \Pi/2$, então*

$$\int_{\Sigma} \{1 + H \langle \psi, N \rangle + \cos \theta \langle N, e_{n+1} \rangle\} d\Sigma = 0 \quad (3.19)$$

sendo e_{n+1} é o $(n+1)$ -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração. Integrando a relação $\operatorname{div}(\psi - \langle \psi, N \rangle N) = n + nH \langle \psi, N \rangle$, proposição 2.4.1 item (ii), e aplicando-se o teorema da divergência, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \operatorname{div}(\psi - \langle \psi, N \rangle N) d\Sigma &= n \int_{\Sigma} \{1 + H \langle \psi, N \rangle\} d\Sigma, \\ \int_{\partial\Sigma} \langle \psi - \langle \psi, N \rangle N, \nu \rangle d(\partial\Sigma) &= n \int_{\Sigma} \{1 + H \langle \psi, N \rangle\} d\Sigma \\ \int_{\partial\Sigma} \langle \psi, \nu \rangle d(\partial\Sigma) &= n \int_{\Sigma} \{1 + H \langle \psi, N \rangle\} d\Sigma \end{aligned} \quad (3.20)$$

No bordo de Σ tem-se a seguinte relação, figura 2.1,

$$\cos \theta N + \sin \theta \nu = \bar{N} = -e_{n+1} \Rightarrow N = -\frac{1}{\cos \theta} e_{n+1} - tg\theta \nu$$

e da Proposição 2.4.2, obtém-se

$$\begin{aligned} n \int_{\Sigma} N d\Sigma &= \int_{\partial\Sigma} \{ \langle \psi, \nu \rangle N - \langle \psi, N \rangle \nu \} d(\partial\Sigma) \\ &= \int_{\partial\Sigma} \left\{ \langle \psi, \nu \rangle \left(-\frac{1}{\cos \theta} e_{n+1} - tg\theta \nu \right) - \left\langle \psi, -\frac{1}{\cos \theta} e_{n+1} - tg\theta \nu \right\rangle \nu \right\} d(\partial\Sigma) \\ &= \int_{\partial\Sigma} \left\{ -\frac{1}{\cos \theta} \langle \psi, \nu \rangle e_{n+1} - tg\theta \langle \psi, \nu \rangle \nu + \frac{1}{\cos \theta} \langle \psi, e_{n+1} \rangle \nu + tg\theta \langle \psi, \nu \rangle \nu \right\} d(\partial\Sigma) \\ &= \int_{\partial\Sigma} \left\{ -\frac{1}{\cos \theta} \langle \psi, \nu \rangle e_{n+1} \right\} d(\partial\Sigma) \\ &= -\frac{1}{\cos \theta} \left(\int_{\partial\Sigma} \langle \psi, \nu \rangle d(\partial\Sigma) \right) e_{n+1} \end{aligned} \quad (3.21)$$

De 3.20 e 3.21, chega-se ao resultado

$$\begin{aligned} n \int_{\Sigma} N d\Sigma &= -\frac{1}{\cos \theta} \left(n \int_{\Sigma} \{1 + H \langle \psi, N \rangle\} d\Sigma \right) e_{n+1} \\ \int_{\Sigma} \cos \theta \langle N, e_{n+1} \rangle d\Sigma &= - \int_{\Sigma} \{1 + H \langle \psi, N \rangle\} d\Sigma \\ \int_{\Sigma} \{1 + H \langle \psi, N \rangle + \cos \theta \langle N, e_{n+1} \rangle\} d\Sigma &= 0 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4.2. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$ uma hipersuperfície capilar estável imersa em um semiespaço em $\mathbb{R}^{n+1}$ com ângulo de contato $0 < \theta \leq \Pi/2$.*

- (i) *Se $\theta = \Pi/2$, então $\psi(\Sigma)$ é um hemisfério.*
- (ii) *Se $\theta < \Pi/2$ e a restrição de ψ a cada componente de $\partial\Sigma$ é um mergulho, então $\psi(\Sigma)$ é uma calota esférica.*

Demonstração. O objetivo aqui é aplicar a forma do índice a uma função teste adequada para que se possa extrair informação sobre a geometria da hipersuperfície capilar levando em conta a estabilidade e de como ela é posta no semiespaço.

Considerando que a hipersuperfície está imersa no semiespaço cuja a coordenada $x_{n+1} \geq 0$ e bordo sendo $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus x_{n+1} = 0\}$.

Aplicando-se a forma do índice à função

$$\varphi := 1 + H \langle \psi, N \rangle + \cos \theta \langle N, e_{n+1} \rangle \quad (3.22)$$

a qual tem média zero, conforme lema 3.19, e definindo $u = \langle \psi, N \rangle$ e $v = \langle N, e_{n+1} \rangle$, da proposição 2.4.1, tem-se

$$\Delta u + |\sigma|^2 u = -nH, \quad (3.23)$$

e

$$\Delta v + |\sigma|^2 v = 0. \quad (3.24)$$

com essas equações, tem-se

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= H\Delta u + \cos \theta \Delta v \\ &= H(-nH - |\sigma|^2 u) - \cos \theta |\sigma|^2 v \\ &= -nH^2 - |\sigma|^2 (Hu + \cos \theta v) \\ &= -nH^2 - |\sigma|^2 (\varphi - 1), \end{aligned}$$

logo,

$$\varphi \Delta \varphi + |\sigma|^2 \varphi^2 = (|\sigma|^2 - nH^2) \varphi. \quad (3.25)$$

Sendo ν direção principal, tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nu, N \rangle + \langle \psi, \bar{\nabla}_\nu N \rangle = -\sigma(\nu, \nu) \langle \psi, \nu \rangle \quad (3.26)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \langle \bar{\nabla}_\nu N, e_{n+1} \rangle = -\sigma(\nu, \nu) \langle \nu, e_{n+1} \rangle = \sigma(\nu, \nu) \sin \theta. \quad (3.27)$$

além disso,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = H \frac{\partial u}{\partial \nu} + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial \nu} \quad (3.28)$$

e da relação $-e_{n+1} = \cos \theta N + \sin \theta \nu$, tem-se

$$0 = \cos \theta \langle N, \psi \rangle + \sin \theta \langle \nu, \psi \rangle \Rightarrow \langle \nu, \psi \rangle = -\cot \theta \langle N, \psi \rangle \quad (3.29)$$

$$-1 = \cos \theta \langle N, e_{n+1} \rangle + \sin \theta \langle \nu, e_{n+1} \rangle \Rightarrow \langle \nu, e_{n+1} \rangle = -\frac{1}{\sin \theta} - \cot \theta \langle N, e_{n+1} \rangle \quad (3.30)$$

substituindo-se 3.29 e 3.30 em 3.28, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= -\sigma(\nu, \nu) \langle \psi, \nu \rangle H + \sigma(\nu, \nu) \cos \theta \sin \theta \\
&= \sigma(\nu, \nu) \cot \theta \langle N, \psi \rangle H + \sigma(\nu, \nu) (\cot \theta + \cos \theta \cot \theta \langle N, \psi \rangle) \\
&= \sigma(\nu, \nu) \cot \theta (\langle N, \psi \rangle H + 1 + \cos \theta \langle N, \psi \rangle) \\
&= \sigma(\nu, \nu) \cot \theta \varphi
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Aplicando a forma do índice em φ e usando os resultados 3.25 e 3.31, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\varphi, \varphi) &= - \int_{\Sigma} \varphi (\Delta \varphi + |\sigma|^2 \varphi) d\Sigma + \int_{\partial \Sigma} \varphi \left(\frac{d\varphi}{d\nu} - \cot \theta \sigma(\nu, \nu) \varphi \right) d(\partial \Sigma) \\
&= - \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH^2) \varphi d\Sigma + \int_{\partial \Sigma} \varphi (\cot \theta \sigma(\nu, \nu) \varphi - \cot \theta \sigma(\nu, \nu) \varphi) d(\partial \Sigma) \\
&= - \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH^2) \varphi d\Sigma
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Integrando 3.23 e usando o teorema da Divergência, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} \Delta u d\Sigma + \int_{\Sigma} |\sigma|^2 u d\Sigma &= -nH \int_{\Sigma} 1 d\Sigma \\
\int_{\Sigma} \operatorname{div}(\nabla u) d\Sigma + \int_{\Sigma} |\sigma|^2 u d\Sigma &= -nH \int_{\Sigma} 1 d\Sigma \\
\int_{\partial \Sigma} \langle \nabla u, \nu \rangle d(\partial \Sigma) + \int_{\Sigma} |\sigma|^2 u d\Sigma &= -nH \int_{\Sigma} 1 d\Sigma \\
\int_{\partial \Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d(\partial \Sigma) + \int_{\Sigma} |\sigma|^2 u d\Sigma &= -nH \int_{\Sigma} 1 d\Sigma
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Seja $W = - \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH^2) d\Sigma$ e substituindo-se a expressão de φ na forma do índice tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\varphi, \varphi) &= - \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH^2) \varphi d\Sigma \\
&= - \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH^2) (1 + Hu + \cos \theta v) d\Sigma \\
&= - \int_{\Sigma} \left((|\sigma|^2 - nH^2) + (|\sigma|^2 - nH^2) Hu + \cos \theta (|\sigma|^2 - nH^2) v \right) d\Sigma \\
&= W - H \int_{\Sigma} |\sigma|^2 u d\Sigma + nH^2 \int_{\Sigma} Hu d\Sigma - \cos \theta \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH^2) v d\Sigma
\end{aligned} \tag{3.34}$$

usando a relação 3.33 em 3.34, obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\varphi, \varphi) &= W + nH^2 \int_{\Sigma} (1 + Hu) d\Sigma + H \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d(\partial\Sigma) - \cos \theta \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH^2) v d\Sigma \\
&= W + nH^2 \cos \theta \int_{\Sigma} v d\Sigma + H \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d(\partial\Sigma) - \cos \theta \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH^2) v d\Sigma \\
&= W - \cos \theta \int_{\Sigma} |\sigma|^2 v d\Sigma + H \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d(\partial\Sigma)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Fazendo a integração da equação 3.24 chega-se a

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} |\sigma|^2 v d\Sigma &= - \int_{\Sigma} \Delta v d\Sigma \\
&= - \int_{\Sigma} \operatorname{div}(\nabla v) d\Sigma \\
&= - \int_{\partial\Sigma} \langle \nabla v, \nu \rangle d(\partial\Sigma) \\
&= - \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial v}{\partial \nu} d(\partial\Sigma)
\end{aligned}$$

usando essa última igualdade na relação 3.35,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\varphi, \varphi) &= W + \cos \theta \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial v}{\partial \nu} d(\partial\Sigma) + H \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d(\partial\Sigma) \\
&= W + \int_{\partial\Sigma} \left(\cos \theta \frac{\partial v}{\partial \nu} + H \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d(\partial\Sigma) \\
&= W + \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} (1 + Hu + \cos \theta v) d(\partial\Sigma) \\
&= W + \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d(\partial\Sigma)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

O objetivo agora é encontrar uma expressão para $\int_{\partial\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d(\partial\Sigma)$ de forma que seja possível obter informações sobre a geometria de $\phi(\Sigma)$.

Seja $i \in \{1, \dots, k\}$, $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_k$ para cada Γ_i conexo e $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ um referencial ortogonal em $\partial\Sigma$. Então, a segunda forma fundamental em $\partial\Sigma$ calculada em relação ao vetor normal unitário ν é dada por

$$\sigma(\nu, \nu) = nH - \sum_{j=1}^{n-1} \sigma(v_j, v_j). \tag{3.37}$$

A curvatura média calculada em relação ao vetor unitário $\bar{\nu}$ contido em $\mathbb{R}^n \times 0$ normal

a $\partial\Sigma$ ao longo de ψ é dada por

$$H_{\partial\Sigma} = -\frac{\sum_{j=1}^{n-1} \langle \nabla_{v_j} \bar{\nu}, v_j \rangle}{n-1}. \quad (3.38)$$

sendo o vetor $\bar{\nu}$ como convencionado acima, ou seja, é tal que as bases $\{N, \nu\}$ e $\{\bar{N}, \bar{\nu}\}$ têm a mesma orientação em $(T\partial\Sigma)^\perp$. Também, a seguinte expressão é válida $\partial\Sigma$, ver figura 2.1,

$$N = -\sin\theta\bar{\nu} - \cos\theta e_{n+1}. \quad (3.39)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sigma(v_j, v_j) &= -\langle \nabla_{v_j} N, v_j \rangle \\ &= \langle \nabla_{v_j} (\sin\theta\bar{\nu} + \cos\theta e_{n+1}), v_j \rangle \\ &= \sin\theta \langle \nabla_{v_j} \bar{\nu}, v_j \rangle \end{aligned} \quad (3.40)$$

Portanto, das equações 3.37, 3.38 e 3.40, a seguinte relação é válida em $\partial\Sigma$:

$$\sigma(\nu, \nu) = nH - (n-1) \sin\theta H_{\partial\Sigma} \quad (3.41)$$

Sabendo que em $\partial\Sigma$ valem

$$-e_{n+1} = \cos\theta N + \sin\theta\nu \quad (3.42)$$

$$\nu = \cos\theta\bar{\nu} - \sin\theta e_{n+1}, \quad (3.43)$$

calculando-se o produto escalar de 3.42 com ψ , 3.43 com e_{n+1} e 3.42 com N , chega-se às relações seguintes

$$\langle N, \psi \rangle = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \langle \nu, \psi \rangle = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \langle \cos\theta\bar{\nu} - \sin\theta e_{n+1}, \psi \rangle = -\sin\theta \langle \bar{\nu}, \psi \rangle \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \langle \nu, e_{n+1} \rangle &= \langle \cos\theta\bar{\nu} - \sin\theta e_{n+1}, e_{n+1} \rangle = -\sin\theta \\ \langle e_{n+1}, N \rangle &= -1 - \sin\theta \langle \nu, e_{n+1} \rangle = -1 + \sin^2\theta = -\cos^2\theta \end{aligned} \quad (3.45)$$

logo, substituindo as equações 3.44 e 3.45 na expressão da função φ , 3.22, obtém-se

$$\varphi = 1 - \sin\theta H \langle \psi, \bar{\nu} \rangle - \cos^2\theta = \sin^2\theta - \sin\theta H \langle \psi, \bar{\nu} \rangle \quad (3.46)$$

Substituindo 3.41 e 3.46 em 3.31, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= \cot \theta (nH - (n-1) \sin \theta H_{\partial \Sigma}) (\sin^2 \theta - \sin \theta H \langle \psi, \bar{\nu} \rangle) \\
&= \cos \theta (nH - (n-1) \sin \theta H_{\partial \Sigma}) (\sin \theta - H \langle \psi, \bar{\nu} \rangle) \\
&= nH \cos \theta (\sin \theta - H \langle \psi, \bar{\nu} \rangle) + (n-1) \sin \theta (\sin \theta H_{\partial \Sigma} - H_{\partial \Sigma} H \langle \psi, \bar{\nu} \rangle), \quad (3.47)
\end{aligned}$$

aplicando-se à imersão $\psi|_{\partial \Sigma} : \partial \Sigma \rightarrow R^n \times \{0\}$ o resultado do item (ii) da Proposição 2.4.1, tem-se

$$(n-1) + (n-1)H_{\partial \Sigma} \langle \psi, \bar{\nu} \rangle = \operatorname{div} (\psi - \langle \psi, \bar{\nu} \rangle \bar{\nu}) \quad (3.48)$$

integrando essa última equação em relação a $\partial \Sigma$ e aplicando o teorema da divergência, lembrando que $\partial \Sigma$ não tem bordo, resulta

$$\begin{aligned}
(n-1) \int_{\partial \Sigma} H_{\partial \Sigma} \langle \psi, \bar{\nu} \rangle d(\partial \Sigma) &= \int_{\partial \Sigma} (\operatorname{div} (\psi - \langle \psi, \bar{\nu} \rangle \bar{\nu}) - (n-1)) d(\partial \Sigma) \\
(n-1) \int_{\partial \Sigma} H_{\partial \Sigma} \langle \psi, \bar{\nu} \rangle d(\partial \Sigma) &= -(n-1) \int_{\partial \Sigma} d(\partial \Sigma) \\
\int_{\partial \Sigma} H_{\partial \Sigma} \langle \psi, \bar{\nu} \rangle d(\partial \Sigma) &= -\operatorname{Vol}_{n-1} \partial \Sigma \quad (3.49)
\end{aligned}$$

integrando o resultado em 3.47 e usando a equação 3.49, chega-se a

$$\begin{aligned}
\int_{\partial \Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d(\partial \Sigma) &= nH \cos \theta \left[\sin \theta \operatorname{vol}_{n-1}(\partial \Sigma) - H \int_{\partial \Sigma} \langle \psi, \bar{\nu} \rangle d(\partial \Sigma) \right] + \\
&+ (n-1) \cos \theta \sin \theta \left[H \operatorname{vol}_{n-1}(\partial \Sigma) + \sin \theta \int_{\partial \Sigma} H_{\partial \Sigma} d(\partial \Sigma) \right] \quad (3.50)
\end{aligned}$$

Integrando a equação do item (i) da Proposição 2.4.1,

$$\int_{\partial \Sigma} \nu d(\partial \Sigma) = nH \int_{\Sigma} N d\Sigma. \quad (3.51)$$

Então, tomando o produto interno de ambos os lados da equação 3.51 por e_{n+1} , tem-se,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial \Sigma} \langle \nu, e_{n+1} \rangle d(\partial \Sigma) &= nH \int_{\Sigma} \langle N, e_{n+1} \rangle d\Sigma \\
\int_{\partial \Sigma} -\sin \theta d(\partial \Sigma) &= nH \int_{\Sigma} \langle N, e_{n+1} \rangle d\Sigma \\
-\sin \theta \operatorname{vol}_{n-1}(\partial \Sigma) &= nH \int_{\Sigma} \langle N, e_{n+1} \rangle d\Sigma \quad (3.52)
\end{aligned}$$

Combinando 3.52 e 3.21, e levando em conta $\langle \psi, \nu \rangle = \cos \theta \langle \psi, \bar{\nu} \rangle$, chega-se que

$$\begin{aligned}
 \sin \theta \text{vol}_{n-1}(\partial \Sigma) &= -H \left\langle n \int_{\Sigma} N d\Sigma, e_{n+1} \right\rangle \\
 &= H \frac{1}{\cos \theta} \int_{\partial \Sigma} \langle \psi, \nu \rangle d(\partial \Sigma) \\
 &= H \int_{\partial \Sigma} \langle \psi, \bar{\nu} \rangle d(\partial \Sigma)
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Portanto, usando a equação 3.53, a equação 3.50 torna-se

$$\int_{\partial \Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d(\partial \Sigma) = (n-1) \sin \theta \cos \theta \left[H \text{vol}_{n-1}(\partial \Sigma) + \sin \theta \int_{\partial \Sigma} H_{\partial \Sigma} d(\partial \Sigma) \right]. \tag{3.54}$$

Combinando a forma do índice, equação 3.33, com 3.54 se obtém

$$\mathcal{I}(\varphi, \varphi) = - \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH^2) d\Sigma + (n-1) \sin \theta \cos \theta \left[H \text{vol}_{n-1}(\partial \Sigma) + \sin \theta \int_{\partial \Sigma} H_{\partial \Sigma} d(\partial \Sigma) \right] \tag{3.55}$$

A partir da equação 3.55 se pode concluir sobre a geometria de $\psi(\Sigma)$ para o caso de $\theta = \pi/2$. Sabe-se que, por estabilidade, $\mathcal{I}(\varphi, \varphi) \geq 0$ e como vale a desigualdade $|\sigma|^2 \geq nH^2$, conforme se ver em [14], então necessariamente $|\sigma|^2 = nH^2$ em todos Σ . Tal resultado diz que a imersão é totalmente umbílica o que significa que $\psi(\Sigma)$ é um hemisfério, provando o item (i) do teorema.

Para provar o item (ii) do teorema, constrói-se uma nova função teste para a estabilidade a partir das partes não negativa, v_+ , e não positiva, v_- , da função $v = \langle N, e_{n+1} \rangle$ e, como isso, mostra-se que $v < 0$ em Σ seguindo da conclusão que $\psi(\Sigma)$ é uma calota esférica.

Suponha, por contradição, que v muda de sinal em Σ . Então, existe o número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que a função $w := v_- + \alpha v_+$, satisfaz

$$\int_{\Sigma} w d\Sigma = 0. \tag{3.56}$$

No bordo de Σ , como $\theta < \pi/2$, vale a igualdade $w = v_- = -\cos \theta$.

Utilizando a função w de média zero como função teste, procedendo como na prova do teorema 3.3.3 e usando a relação

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = -\sigma(\nu, \nu) \langle \nu, e_{n+1} \rangle \tag{3.57}$$

$$= \sin \theta \sigma(\nu, \nu), \tag{3.58}$$

e como $v_+ = 0$ em $\partial\Sigma$ e por 3.13, mostra-se que

$$\mathcal{I}(v_+, v_+) = \mathcal{I}(v_-, v_+) = 0, \quad (3.59)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(v_-, v_-) &= \int_{\Sigma} \left(\operatorname{div} (v_- \nabla v) - v_- \Delta v - |\sigma|^2 v_- \right) d\Sigma - \cot \theta \int_{\partial\Sigma} \sigma(\nu, \nu) v_-^2 d(\partial\Sigma) \\ &= \int_{\partial\Sigma} \langle v_- \nabla v, \nu \rangle d(\partial\Sigma) - \cot \theta \int_{\partial\Sigma} \sigma(\nu, \nu) v_-^2 d(\partial\Sigma) \\ &= \int_{\partial\Sigma} v_- \frac{\partial v}{\partial \nu} d(\partial\Sigma) - \cot \theta \int_{\partial\Sigma} \sigma(\nu, \nu) v_-^2 d(\partial\Sigma) \\ &= \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} - \cot \theta \sigma(\nu, \nu) v_- \right) v_- d(\partial\Sigma) \\ &= \int_{\partial\Sigma} (\sin \theta \sigma(\nu, \nu) - \cot \theta \sigma(\nu, \nu) (-\cos \theta)) (-\cos \theta) d(\partial\Sigma) \\ &= -\cot \theta \int_{\partial\Sigma} \sigma(\nu, \nu) d(\partial\Sigma). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Como em 3.11 e levando em conta 3.41, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(w, w) &= \mathcal{I}(v_-, v_-) + 2\alpha \mathcal{I}(v_-, v_+) + \alpha^2 \mathcal{I}(v_+, v_+) \\ &= -nH \cot \theta \operatorname{vol}_{n-1}(\partial\Sigma) - (n-1) \cos \theta \int_{\partial\Sigma} H_{\partial\Sigma} d(\partial\Sigma). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Pela estabilidade de $\psi(\Sigma)$,

$$\mathcal{I}(\varphi, \varphi) + \sin^2 \theta \mathcal{I}(w, w) \geq 0. \quad (3.62)$$

Das equações 3.55 e 3.62, conclui-se que

$$-\int_{\Sigma} [|\sigma|^2 - nH^2] d\Sigma - \sin \theta \cos \theta H \operatorname{vol}_{n-1}(\partial\Sigma) \geq 0. \quad (3.63)$$

Se v mudasse de sinal, a desigualdade 3.63 seria sempre verdadeira, mas isso não ocorre pois como $|\sigma|^2 \geq nH^2$, $\theta < \pi/2$ e $H > 0$, pela orientação adotada, a desigualdade é falsa. Então a função v não muda de sinal em Σ .

Como $v = -\cos \theta < 0$ em $\partial\Sigma$, tem-se $v \leq 0$ em todos Σ . Pelo princípio do máximo $v < 0$ em todos Σ já que $\Delta v = -|\sigma|^2 v \geq 0$. Dessa forma, $\psi(\Sigma)$ é localmente gráfico vertical em torno de cada um dos seus pontos, incluindo a fronteira.

Sejam $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ as componentes conexas de $\partial\Sigma$. Por hipótese, ψ restrito a Γ_i é um mergulho, assim, $\psi(\Gamma_i)$ separa $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ em duas componentes conexas, para cada

$i = 1, \dots, k$.

Denotando por $P : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\}$ a projeção ortogonal, e definindo $F = P \circ \psi$. Como no teorema 3.3.3, existe uma estreita faixa de $\psi(\Sigma)$ próximo a Γ_i que é projetada em uma das componente de $\mathbb{R}^n \times \{0\} \setminus F(\Gamma_i)$.

Chama-se D_i a componente de $\mathbb{R}^n \times \{0\} \setminus F(\Gamma_i)$ que não intercepta essa projeção. Define-se $\tilde{\Sigma}$ como sendo a união de Σ com a união disjunta de todos os conjuntos D_i , e $\tilde{F} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\}$ por

$$\tilde{F} = \begin{cases} F & \text{em } \Sigma, \\ \text{identidade em } D_i & i = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Finalmente conclui-se, como na prova do Teorema 3.3.3, que $\psi(\Sigma)$ é globalmente um gráfico sobre um domínio em $\mathbb{R}^n \times 0$ e isso significa que $\psi(\Sigma)$ está mergulhada e por [5] é uma calota esférica. $\square$

Referências

- [1] AINOUIZ, A.; SOUAM, R. Stable capillary hypersurfaces in a half-space or a slab. *Indiana University Mathematics Journal*, 2016. Disponível em: <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0092067>.
- [2] LÓPEZ, R. *Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. (Springer Monographs in Mathematics). ISBN 978-3-662-51256-2.
- [3] ROS, A. Stable periodic constant mean curvature surfaces and mesoscopic phase separation. *Interfaces Free Bound*, 2007. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.4171/IFB/168>.
- [4] PEDROSA, R. H. L.; RITORÉ, M. Isoperimetric domains in the riemannian product of a circle with a simply connected space form and applications to free boundary problems. *Indiana Univ. Math J.*, 1999. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1512/iumj.1999.48.1614>.
- [5] WENTE, H. C. The symmetry of sessile and pendent drops. *Pacific J. Math.*, Pacific Journal of Mathematics, A Non-profit Corporation, v. 88, n. 2, p. 387–397, 1980. Disponível em: <https://projecteuclid.org:443/euclid.pjm/1102779522>.
- [6] MARINOV, P. I. Stability of capillary surfaces with planar boundary in the absence of gravity. *Pacific J. Math*, 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2140/pjm.2012.255.177>.
- [7] CHOE, J.; KOISO, M. Stable capillary hypersurfaces in a wedge. *Pacific J. Math*, 2016. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/arXiv:1405.5407>.
- [8] ROS, A.; VERGASTA, E. Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary. *Geom. Dedicata*, 1995. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01263611>.
- [9] NUNES, I. P. On stable constant mean curvature surfaces with free boundary. *math.DG*, 2016. Disponível em: [arXiv:1605.09625](https://arxiv.org/abs/1605.09625).

- [10] LEE, J. *Introduction to Smooth Manifolds*. [S.l.]: Springer, 2003. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9780387954486.
- [11] CARMO, M. do. *Geometria Riemanniana*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988. (Projeto Euclides). ISBN 9788524400360.
- [12] CHAVEL, I.; RANDOL, B.; DODZIUK, J. *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. [S.l.]: Elsevier Science, 1984. (Pure and Applied Mathematics). ISBN 9780080874340.
- [13] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. *Elliptic partial differential equations of second order*. [S.l.]: Springer, 1998. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften). ISBN 9783540130253.
- [14] BARBOSA, J. L.; CARMO, M. D. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. *Math. Z*, 1984. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01215045>.
- [15] BARBOSA, M. D. C. J. L.; ESCHENBURG, J. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in riemannian manifolds. *Math. Z*, 1988. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01161634>.
- [16] ROS, A.; SOUAM, R. On stability of capillary surfaces in a ball. *Pacific J. Math*, p. 345–361, 1997.
- [17] VOGEL, T. I. Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes ii: General contact angles. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1989. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1137/0149061>.
- [18] ZHOU, L. On stability of a catenoidal liquid bridge. *Pacific J. Math*, 1997. Disponível em: <https://msp.org/pjm/1997/178-1/p09.xhtml>.
- [19] ARONSZAJN, N. A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. *J. Math. Pures Appl*, 1957. Disponível em: <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0092067>.
- [20] CHENG, S. Y. Eigenfunctions and nodal sets. *Comment. Math. Helv*, 1976. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02568142>.
- [21] OSSERMAN, R. Circumscribed circles. *Amer. Math.*, 1991. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2307/2323859>.
- [22] ATHANASSENAS, M. A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary. *J. Reine Angew. Math*, 1987. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1515/crll.1987.377.97>.

- [23] VOGEL, T. I. Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1987. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1137/0147034>.
- [24] E.LIMA, L.; (BRAZIL), I. de Matemática Pura e A. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada do C.N.Pq., 1977.
- [25] GONZALEZ, U. M. E.; TAMANINI, I. Existence and regularity for the problem of a pendent liquid drop. *Pacific J.Math*, 1980. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2140/pjm.1980.88.399>.