

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Tese de Doutorado

Aspectos Clássicos do MPE não-mínimo

João Alfíeres Andrade de Simões dos Reis

Orientador: Marco Schreck

Coorientador: Manoel Messias Ferreira Jr.

São Luís, Novembro de 2021

João Alfíeres Andrade de Simões dos Reis

Aspectos Clássicos do MPE não-mínimo

São Luís - Ma

11 de Novembro de 2021

João Alfíeres Andrade de Simões dos Reis

Aspectos Clássicos do MPE não-mínimo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Marco Schreck
Coorientador: Manoel Messias Ferreira Jr.

São Luís - Ma
11 de Novembro de 2021

João Alfíeres Andrade de Simões dos Reis

Aspectos Clássicos do MPE não-mínimo/ João Alfíeres Andrade de Simões dos Reis. – São Luís - Ma, 11 de Novembro de 2021
224 p.

Orientador: Marco Schreck

Coorientador: Manoel Messias Ferreira Jr.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Maranhão

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Física, 11 de Novembro de 2021.

1. Modelo Padrão Estendido. 2. Violação de Lorentz e CPT. 3. Equação de Dispersão. 4. Eletrodinâmica Planar. 5. Lagrangeanas Clássicas. 6. Operadores não-mínimos.. I. Marco Schreck (Orientador) II. Manoel Messias Ferreira Jr. (Coorientador) III. Universidade Federal do Maranhão IV. Programa de Pós-Graduação em Física V. Aspectos Clássicos do MPE não-mínimo

João Alfíeres Andrade de Simões dos Reis

Aspectos Clássicos do MPE não-mínimo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Marco Schreck
Orientador (UFMA)

Dr. Manoel Messias Ferreira Jr.
Coorientador (UFMA)

Dr. Rodolfo Alvan Casana Sifuentes
(UFMA)

Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro
(UFF)

Dr. Humberto Belich Junior
(UFES)

São Luís - Ma
11 de Novembro de 2021

A todos os Brasileiros e Brasileiras.

AGRADECIMENTOS

Após um ciclo que durou 11 anos ($4,5 + 2 + 4,5$), chegamos ao fim de uma longa jornada. Observe que conjuguei o verbo na primeira pessoa do plural. Nesta jornada não estive em momento algum sozinho. Um conjunto de pessoas muito importantes me deram e ainda me dão muito suporte e estiveram ao meu lado desde o início desta longa jornada. Deste grande conjunto, os meus pais, sem nenhuma dúvida, foram e ainda são os protagonistas. Sem eles nada do que eu conquistei até hoje seria possível. O que é mais engraçado é que, mesmo não entendendo muito as pesquisas que eu realizo, eles nunca deixaram de apoiar os meus sonhos e incentivar a buscar o melhor para a minha carreira. Serei eternamente grato aos meus pais. Estudar Física também me proporcionou muitas coisas maravilhosas, dentre elas, tive a sorte grande de conhecer a minha noiva, Letícia. Muitas pessoas contribuíram para a minha formação tanto como profissional quanto como pessoa. A seguir, irei destacar algumas delas.

Inicialmente, agradeço a Deus pela saúde e por proporcionar a mim, e a minha família, bons momentos;

Aos meus pais, que mesmo distantes, continuam me apoiando incondicionalmente. Serei eternamente grato por todo o incentivo, pela grande paciência, amizade e dedicação que sempre tiveram por mim e pelas minhas irmãs;

À minha linda noiva, Letícia Lisboa, pelo grande apoio durante todos estes anos e por estar presente em mais uma grande etapa da minha vida. Que venham os nossos próximos desafios!!

Às minhas irmãs, Emanuela e Hiasmyn, pela paciência, compreensão, grande incentivo durante todos esses anos e pelos lindos sobrinhos que me deram;

Aos meus padrinhos que sempre me incentivaram e acreditaram no meu potencial.

Ao meu orientador, Prof. Marco Schreck, pela grande amizade, por todo o apoio e por me ajudar a dar mais esse grande passo na minha carreira científica. Desde o início, lá em 2016, o senhor sempre me incentivou e me ensinou a ser independente. Sempre buscou o melhor para os seus alunos. Sem sombra de dúvidas o senhor é um excelente orientador. Não posso deixar de destacar aqui o excelente professor que o senhor é. Tive o privilégio de fazer algumas disciplinas e pude aprender muita coisa nova. Também sou grato pela paciência e pelas notáveis contribuições que o senhor deu à minha Tese. *Vielen Dank!!*

Ao meu coorientador, Prof. Manoel Messias, por todo o suporte, pela amizade e por sempre acreditar no meu trabalho. Ao longo da minha trajetória na UFMA tive o privilégio de aprender muita Física com o senhor. Muito obrigado!

Ao Prof. Rodolfo Casana, por contribuir imensamente na minha formação, seja pelas boas discussões na hora do café ou mesmo pelas ótimas disciplinas ministradas, as quais tive o privilégio de cursar (e consegui sobreviver!!). Sou grato também por aceitar fazer parte da banca examinadora e pelas sugestões que tornaram esta tese mais completa.

Agradecer aos professores Humberto Belich e Rodrigo Sobreiro pelas correções e inúmeras sugestões que, sem dúvidas, enriqueceram ainda mais esta tese.

Ao Prof. Antônio Pinto Neto, pela grande amizade, pelos ensinamentos e por continuar sendo um grande amigo;

Ao meu grande amigo, Marcos Lima Dias, pela grande amizade, pelas longas discussões sobre os mais variados temas, pelos ensinamentos e por estar presente em mais uma conquista;

À todos os professores que fazem parte do GFTPC, pois contribuíram de maneira significativa para a minha formação através das boas disciplinas ministradas. Tive a honra de aprender muito com os professores Edilberto, Benito, Adalto e Sergey Pavluchenko. Fica aqui os meus sinceros agradecimentos;

Ao meu amigo Adailton (PPG Física UFC) que além de um amigo, tornou-se um grande colaborador;

À todos os amigos que conquistei durante a minha jornada na UFMA, em especial: Vinícius (Vini), Daniel (Dandan), Daniel (índio), João Luís (Tenório), Saulo, Welligton, Zaqueu (Sândalos), Ulisses (gordinho), Luiz Fernando, Fred Jorge, Elvis Johel, David, Giovando, Pedro Diego, Jonas, Cesar, Neyver, Andres, Joel Felix ...

À todos os professores do Departamento de Física da UFMA pelos ensinamentos ao longo da minha graduação.

À todos os membros do Departamento de Física da UEMA, em especial aos Professores Edvan Moreira, Fernando Moucherek e Marcio Tavares. Os senhores contribuíram muito para a minha carreira profissional.

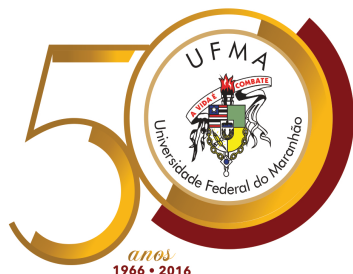
À todos os alunos do grupo GFTPC;

À minha família, que sempre me incentivou durante toda esta longa jornada;

À todos do PPG Física UFMA, em especial a Lucy e Angra por darem grande assistência na coordenação;

À Capes, a FAPEMA e ao CNPq pelo suporte financeiro;

Por fim, a todos aqueles que contribuíram de alguma maneira para a minha formação e que, porventura, tenha esquecido de mencionar.





“O estudo da Física também é uma aventura. Ela poderá ser desafiadora, algumas vezes frustrante, ocasionalmente dolorosa e, com frequência, significativamente gratificante.”

Sears and Zemansky

Resumo

A possibilidade da violação da simetria de Lorentz e CPT se manifestarem na natureza têm atraído um interesse crescente nos últimos anos. Estudos teóricos abordando a inclusão de termos que violam a simetria de Lorentz tanto no Modelo Padrão (MP) quanto na Relatividade Geral (GR) e estudos experimentais procurando por tais efeitos têm sido exaustivamente investigados. Estes estudos levaram ao desenvolvimento do Modelo Padrão Estendido (MPE), cuja versão mínima é uma estrutura contendo modificações que são renormalizáveis por contagem de potência e consistentes com a estrutura de calibre do MP. Mais recentemente, uma versão não-mínima do MPE foi desenvolvida para o setor de fótons, neutrinos e férmions, incluindo termos de derivadas superiores.

Nesta tese, pretendemos estudar os principais aspectos clássicos dos setores não-mínimos do MPE. Começamos com o setor de neutrinos, onde calculamos o propagador completo da teoria de Dirac modificada por operadores que violam a simetria de Lorentz. Em seguida, estudamos a equação de dispersão para uma teoria com N neutrinos de Dirac e N neutrinos Majorana, onde empregamos métodos sofisticados da álgebra linear para atingir nossos objetivos.

Outro resultado interessante diz respeito à chamada eletrodinâmica planar. Aqui, construímos uma eletrodinâmica que contempla a violação da simetria de Lorentz em $(1 + 2)$ -dimensões a partir do setor eletromagnético do MPE não-mínimo em $(1 + 3)$ -dimensões. Deste modelo, estudamos as propriedades básicas, tais como: as equações de campo, as funções de Green, as regras perturbativas de Feynman e, por fim, as relações de dispersão modificadas do setor eletromagnético.

Finalmente, derivamos a Lagrangeana Clássica no regime perturbativo. Este resultado contempla todos os operadores do setor fermiônico do MPE não-mínimo. Também derivamos a Lagrangeana Clássica para os operadores $\hat{b}_\mu$ e $\hat{H}_{\mu\nu}$ como expansões perturbativas nos coeficientes de controle. Tais Lagrangeanas são de fundamental importância para a descrição de uma partícula pontual relativística.

Palavras-chave: Modelo Padrão Estendido. Violação de Lorentz e CPT. Equação de Dispersão. Eletrodinâmica Planar. Lagrangeanas Clássicas. Operadores não-mínimos.

Abstract

The possibility of Lorentz and CPT violation being manifest in nature, has attracted a growing interest on such theories in the recent years. Both theoretical and experimental studies have been carried out addressing the inclusion of Lorentz-violating terms into and looking for experimental deviation of the Standard-Model (SM) and General Relativity (GR). This has led to the development of the Standard Model Extension (SME), which is a framework containing modifications that are power-counting renormalizable and consistent with the gauge structure of the SM. More recently, a nonminimal version of the SME was developed for the photon, neutrino, and fermion sector additionally including higher-derivative terms.

In this thesis we intend to study the main classical aspects of the nonminimal sectors of the SME. We start with the neutrino sector, where we develop the full propagator of the single-fermion Dirac theory modified by Lorentz violation. Then we study the dispersion equation for a theory of N Dirac neutrino and N Majorana neutrino flavors, where we employ sophisticated methods of linear algebra to achieve our objectives.

Another interesting result concerns the so-called planar electrodynamics. Here, we construct a Lorentz-violating electrodynamics in $(1+2)$ spacetime dimensions from the electromagnetic sector of the nonminimal Standard-Model Extension (SME) in $(1+3)$ dimensions. From the theory, we study the basic properties such as: field equations, the Green's functions, the perturbative Feynman rules, and, finally, the modified dispersion relations of the electromagnetic field.

Finally, we derive the general leading-order classical Lagrangian covering all fermion operators of the nonminimal Standard-Model Extension (SME). We also derive classical Lagrangians for the operators $\hat{b}_\mu$ and $\hat{H}_{\mu\nu}$ as perturbative expansions in Lorentz violation. Such Lagrangian are of fundamental importance for the description of a relativistic point particle.

Keywords: Standard-Model Extension. Lorentz and CPT violation. Dispersion Equation. Planar Electrodynamics. Classical Lagrangians. Nonminimal Operators.

Lista de ilustrações

1	Representação pictórica das flutuações que ocorrem na estrutura do espaço-tempo na escala de Planck [5].	2
2	Representação pictórica de partículas se propagando no espaço-tempo. As partículas ao se propagarem “sentem” a presença das flutuações do espaço-tempo. Como as flutuações são “aleatórias”, as partículas exibirão propriedades diferentes ao se propagarem em direções diferentes.	3
3	Diferença entre as transformações de Lorentz. Figuras adaptadas da Referência [81].	11
4	Diferença entre os campos de fundo em um espaço-tempo plano e um espaço-tempo curvo.	12
5	Diagrama das partículas elementares. A diferença fundamental entre estes dois diagramas reside no fato das partículas elementares no MPE apresentarem algumas propriedades diferentes, tais como relações de dispersão modificadas (designamos isso com um $\hat{}$ sobre as partículas).	14
6	Na figura acima cada círculo presente no diagrama corresponde a uma nova correção à física conhecida. Tais correções são introduzidas a partir de novos operadores, cuja dimensão de massa d torna-se cada vez maior – estudaremos a forma destes operadores para cada setor nas subseções a seguir. Observamos que as novas contribuições tornam-se pequenas na medida em que d aumenta. Posto isso, em escalas de energias pequenas, podemos tratar tais contribuições de maneira perturbativa. Por outro lado, estas correções passam a ser relevantes conforme a escala de energia levada em consideração aumenta. Diagrama disponível em [82].	18
7	A figura à esquerda corresponde a uma onda plana propagando-se com vetor de onda k , enquanto que na figura à direita a partícula clássica propaga-se com velocidade u . Em ambos os casos, a partícula propaga-se em um campo de fundo constante.	44
8	Representação pictórica de dois espaços de Finsler onde podemos notar às direções privilegiadas.	50

9	Na figura acima vemos o esboço da trajetória descrita pelo peixe a fim de alcançar o ponto na superfície da água no menor tempo. Figura extraída da referência [187].	51
---	---	----

Lista de tabelas

1	Classificação dos operadores definidos na equação (2.38) sob transformações de Lorentz e CPT [42]. A dimensão de cada operador, bem como os coeficientes de controle que os definem também são mostrados.	26
2	Na tabela acima compilamos alguns resultados perturbativos calculados na referência [67] e a correspondência existente entre algumas dessas soluções. Voltaremos a este mapeamento no capítulo 5, onde iremos generalizá-los para o caso não-mínimo. Ressaltamos ainda a utilização da definição para a componente axial do tensor $g^{\alpha\beta\nu}$, ou seja, $A_\mu = -\frac{1}{6}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\mu}g^{\alpha\beta\nu}$. Outra característica notória presente na tabela acima reside na semelhança entre as estruturas das relações de dispersão e as Lagrangeanas Clássicas em primeira ordem. Veremos no capítulo 5 que é possível propor um mapeamento direto entre as relações de dispersão perturbativas e as Lagrangeanas Clássicas em primeira ordem. .	48
3	Parâmetros da Lagrangeana Clássica genérica dada pela equação (5.26). A primeira coluna indica os escalares de Lorentz empregados nas Lagrangeanas. Já a segunda coluna fornece as expressões explícitas correspondentes. Os fatores de consistência são listados na terceira coluna. A quarta coluna mostra o teorema de Euler para cada um dos escalares de Lorentz definidos nas duas primeiras colunas. A quinta coluna nos mostra os resultados perturbativos obtidos para cada um dos operadores que violam a simetria de Lorentz. Este último resultado é obtido substituindo os 4-momentos pelas 4-velocidades.	112

4	Ingredientes necessários para formular a Lagrangeana Clássica mostrada em (5.37) para um operador de spin não-degenerado específico. A primeira coluna da tabela 4a nos fornece a base dos escalares de Lorentz e dos vetores usados, onde a estrutura explícita deles são mostradas na segunda coluna. A terceira coluna lista os fatores de consistência e a quarta nos mostra o teorema de Euler para as quantidades definidas anteriormente. Na quinta coluna, encontramos as correspondências em primeira ordem entre os operadores que violam a simetria de Lorentz transformados do espaço de momento para o espaço das velocidades. Como sabemos, tal transformação é obtida substituindo os 4-momentos pelas 4-velocidades. Já a primeira coluna da tabela 4b caracteriza as funções $\hat{\mathcal{X}}_*$, presente na equação (5.37), compõem as Lagrangeanas e guardam as contribuições advindas da violação da simetria. Na segunda coluna, encontramos os escalares de Lorentz e vetores necessários para construir tais funções. A terceira coluna nos mostra o teorema de Euler para cada $\hat{\mathcal{X}}_*$ e na quarta coluna listamos as matrizes explícitas que compõem as estruturas bipartite generalizadas das Lagrangeanas (5.38).	117
5	Classificação dos covariantes bilineares.	155
6	Covariantes bilineares sob a ação da transformação de conjugação de carga $\mathcal{C}$	169
7	Covariantes bilineares sob a ação da transformação de paridade $\mathcal{P}$	170
8	Covariantes bilineares sob a ação da transformação de reversão temporal $\mathcal{T}$	170
9	Covariantes bilineares sob a ação da transformação de conjugação de carga $\mathcal{CPT}$	170
10	Covariantes bilineares sob a ação da transformação de Lorentz	171

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	O MODELO PADRÃO ESTENDIDO	9
2.1	O MPE Mínimo	9
2.2	O MPE Não-Mínimo	18
2.2.1	Setor dos Fótons	18
2.2.2	Setor dos Fermions	23
2.2.3	Setor dos Neutrinos	34
2.3	Violação da Simetria de Lorentz em outros cenários	38
2.3.1	Redução Dimensional	38
2.3.2	Cinemática Clássica: uma breve revisão	43
2.3.3	Cinemática Clássica: o setor fermiônico não-mínimo	52
3	EQUAÇÃO DE DISPERSÃO DO SETOR DE NEUTRINOS	57
3.1	O propagador de Dirac modificado	57
3.2	Equação de dispersão modificada	59
3.3	Relações de dispersão: expansão perturbativa	67
3.3.1	Primeiro caso: $N = 1$	69
3.3.2	Segundo caso: $\hat{S} \neq 0, N = \frac{3}{2}$	71
4	ELETRODINÂMICA PLANAR NÃO-MÍNIMA	75
4.1	Redução dimensional do setor eletromagnético	75
4.2	Conexão com os campos físicos	79
4.3	Equações de campo	80
4.4	Funções de Green e expansão perturbativa	84
4.5	Propagador em $(1 + D)$-dimensões	88
4.6	As relações de dispersão modificadas	93
4.7	Soluções das equações de campo	98
5	LAGRANGEANAS CLÁSSICAS	103
5.1	<i>Ansatz</i>	103
5.1.1	Operadores de spin-degenerado	104
5.1.2	Operadores de Spin não-degenerado	113

5.1.3	Conexão entre os coeficientes c e f	118
5.2	Demonstração para $L^{\hat{A}^{(d)}}$	119
5.2.1	Equação de dispersão	120
5.2.2	Correspondência entre as velocidades	121
5.3	Demonstração para $L^{\hat{T}^{(d)}}$	125
5.3.1	Equação de dispersão	125
5.3.2	Correspondência entre as velocidades	126
5.4	Proposição: Mapeamento Geral	129
5.5	Coeficientes efetivos	132
5.6	A Lagrangeana do setor fermiônico do MPE	134
5.7	A Lagrangeana do setor de neutrinos do MPE	137
5.8	Expansão perturbativa: spin não-degenerado	139
5.9	Correções perturbativas	141

6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	145
----------	--	------------

APÊNDICES 151

	A – FERRAMENTAS MATEMÁTICAS	153
A.1	Matrizes gama	153
A.2	Os produtos tensorial, de Wedge e o dual de Hodge	158
A.3	Determinante de matrizes em blocos	162
	B – CÁLCULO DAS 4-VELOCIDADES	165
B.1	Operador pseudovetorial	165
B.2	Operador tensorial	166

	C – CLASSIFICAÇÃO DOS COVARIANTES BILINEARES	169
--	---	------------

	REFERÊNCIAS	173
--	------------------------------	------------

ANEXOS 193

	A – TRABALHOS PUBLICADOS	195
--	---	------------

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Com o advento da Teoria Quântica de Campos (TQC) foi possível compreender fenômenos quânticos em diversas escalas de energias. A TQC também permitiu uma compreensão mais profunda das interações fundamentais. As teorias bem sucedidas em explicar os fenômenos associados às interações fundamentais são: a Eletrodinâmica Quântica (QED), a Cromodinâmica Quântica (QCD) e a Teoria Eletrofraca. Estas teorias juntas formam um grande arcabouço teórico conhecido como Modelo Padrão (MP) [1, 2, 3, 4]. O MP é uma TQC invariante perante transformações de Lorentz e do grupo de calibre $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$. O grupo $SU_c(3)$ de cor corresponde à simetria das interações fortes, enquanto que o grupo $SU_L(2) \times U_Y(1)$ é responsável pela interação eletrofraca. Esta última simetria é espontaneamente quebrada pelo mecanismo de Higgs, dando origem às forças eletromagnética e nuclear fraca. Além de induzir a quebra espontânea da simetria, o campo de Higgs também é o responsável pela geração da massa das partículas elementares.

Outro aspecto da TQC está relacionado à descrição das partículas. Nestas teorias, as partículas são descritas a partir das excitações dos campos quânticos, que por sua vez são operadores no espaço de Hilbert. Estes campos quânticos agem como operadores de criação e aniquilação de partículas e antipartículas. No MP, por exemplo, partículas de spin-0 são descritas por campos escalares, enquanto que os campos vetoriais são responsáveis pelas partículas de spin-1. As partículas

de spin-1/2, por sua vez, são representadas por campos espinoriais. Todos esses ingredientes compõem o MP e o torna o arcabouço teórico perfeito para descrever a fenomenologia das interações fundamentais.

Um outro ingrediente muito importante é o espaço-tempo e suas simetrias. A TQC, por exemplo, deve ser invariante perante transformações de Poincaré. Estas transformações compõem a simetria mais fundamental do espaço-tempo. Vale ressaltar que a invariância por translações no espaço-tempo está conectada à conservação do tensor energia-momento. Dessa forma, podemos compreender o espaço-tempo como o palco onde tudo acontece. Portanto, entendemos que a estrutura do espaço-tempo e suas simetrias são os pilares que sustentam a Teoria da Relatividade Restrita (TRR), Relatividade Geral (TRG) e a própria Física das partículas elementares.

Por outro lado, o estudo das possíveis violações das simetrias do espaço-tempo também nos oferecem uma oportunidade de explorar aspectos fundamentais da natureza. Nesse sentido, podemos buscar modelos que forneçam informações sobre como estas possíveis violações poderiam se manifestar. Dessa forma, podemos confrontar as novas teorias com experimentos existentes na tentativa de validar ou não a existência da violação da simetria. No que concerne a estrutura do espaço-tempo, acredita-se que na escala de Planck pequenas violações da invariância da simetria de Lorentz podem de fato ocorrer. Isto é conjecturado, pois considera-se que nesta escala a estrutura do espaço-tempo deixa de ser um contínuo (*smooth space-time*) e passa a apresentar flutuações na geometria (ou até mesmo na topologia), vide ilustração 1. Além disso, existem indicações teóricas que corroboram essa suposição. Por exemplo, violações da simetria de Lorentz podem ocorrer em teorias de cordas [6, 7, 8, 9, 10] e em *loop quantum gravity* [11, 12]. Em contrapartida, partindo-se da hipótese que tais violações podem ocorrer na natureza, uma série de modelos

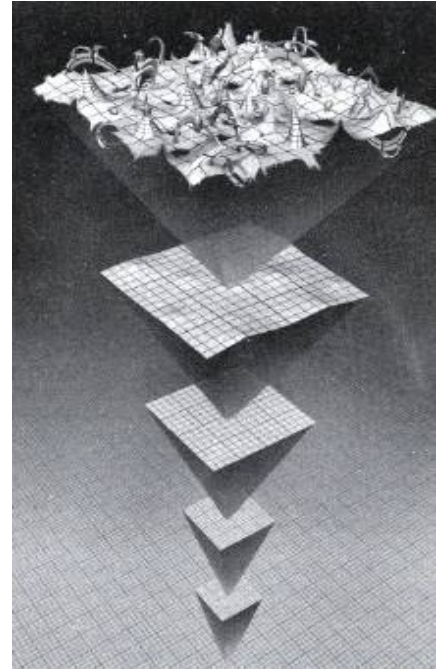


Figura 1 – Representação pictórica das flutuações que ocorrem na estrutura do espaço-tempo na escala de Planck [5].

teóricos foram construídos para explorar este novo cenário. A título de exemplo, destacamos os modelos baseados em espaços-tempo não-comutativos [13, 14]. A ideia por trás destas teorias é que as coordenadas do espaço-tempo de Minkowski x^μ não são apenas números reais. Elas agora são promovidas a operadores que satisfazem uma relação de comutação da forma $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$. A presença do tensor não-dinâmico $\theta^{\mu\nu}$ normalmente acarreta efeitos associados à violação da simetria de Lorentz como, por exemplo, anisotropia em modos de propagação de campos e partículas no vácuo.

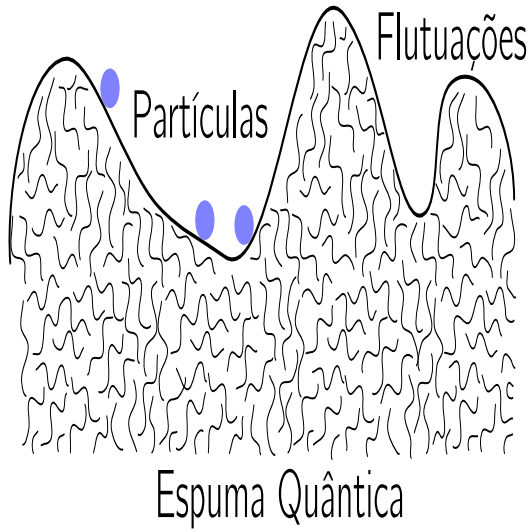


Figura 2 – Representação pictórica de partículas se propagando no espaço-tempo. As partículas ao se propagarem “sentem” a presença das flutuações do espaço-tempo. Como as flutuações são “aleatórias”, as partículas exibirão propriedades diferentes ao se propagarem em direções diferentes.

Outro modelo capaz de produzir efeitos ligados à violação da simetria de Lorentz fundamenta-se nos chamados *spacetime foam* [15, 16, 17]. O conceito destas teorias é que as flutuações de energia na escala de Planck podem resultar em um “mar” de flutuações da geometria do espaço-tempo. Consequentemente, partículas que se propagam nestas estruturas “caóticas” poderiam interagir com tais flutuações e, como resultado, adquirir propriedades que dependam da direção de propagação. A Figura 2 ilustra partículas propagando-se através das flutuações do espaço-tempo. Podemos destacar ainda teorias de campos definidas em espaços-tempo com topologias não-triviais [18, 19, 20, 21, 22] e a gravidade de *Hořava-Lifshitz* [23] que tem como base a violação da simetria de Lorentz.

Ainda no contexto da TQC podemos destacar inúmeros trabalhos na área da supersimetria. Na referência

[24], por exemplo, teorias supersimétricas que violam tanto a simetria de Lorentz e quanto CPT foram construídas a partir do modelo original de Wess-Zumino [25]. Já na referência [26], uma extensão supersimétrica mínima do modelo de Maxwell-Chern-Simons em $(1 + 3)$ -dimensões foi obtida. Em [27], foram apre-

sentadas extensões que violam a simetria de Lorentz explicitamente no modelo Wess-Zumino através de supercampos. Estes modelos caracterizam-se por preservar a parte supersimétrica da super-álgebra de Poincaré, além de preservar a simetria CPT. Muitos outros trabalhos envolvendo supersimetria, supercampos, extensões supersimétricas da QED e supercampos vetoriais, todos no contexto da violação da simetria de Lorentz e CPT, podem ser encontrados nas referências [28, 29, 30, 31].

Outras abordagens na busca por implementar a violação da simetria de Lorentz fora do cenário da teoria clássica e quântica de campos também foram propostas. Por exemplo, modelos que adotam um tratamento baseado em uma cinemática modificada ou até mesmo modificações nas transformações de Lorentz foram amplamente estudados. O tratamento cinemático lida, dentre outras coisas, com modificações feitas diretamente nas relações de dispersão. Um modelo bastante conhecido é o formalismo de Robertson, Mansouri, e Sexl (RMS) [32, 33]. Este formalismo pressupõe a existência de um referencial inercial universal preferencial U no qual a luz propaga-se de modo convencional. Porém, em outros referenciais inerciais, a luz pode apresentar propriedades anisotrópicas, tais como birrefringência. Um outro formalismo cinemático muito conhecido envolve modificações das transformações de Lorentz. Neste cenário exige-se que as leis Físicas sejam invariantes perante as novas transformações de Lorentz. Teorias que seguem esta abordagem são genericamente chamadas de Relatividade Especial Deformada (DSR) [34, 35].

Por várias décadas os estudos relacionados à violação da simetria de Lorentz foram realizados de uma forma bastante assistemática. Isto deve-se, basicamente, a grande diversidade de modelos relatados na literatura. Esta disparidade torna a comparação entre os modelos uma tarefa bastante árdua e complexa. Além disso, faz-se necessário o confronto entre os resultados teóricos previstos e os diferentes experimentos realizados. Só assim é possível confirmar as previsões teóricas de possíveis sinais da violação da simetria de Lorentz.

Por estes motivos que, em 1997, Kostelecký e Colladay estabeleceram o Modelo Padrão Estendido (MPE) [36, 37]. O MPE é uma arcabouço teórico que parametriza todas as contribuições que induzem a violação da simetria de Lorentz. Estas contribuições são renormalizáveis por contagem de potência, são consistentes com as transformações de coordenadas e a estrutura de calibre do MP é preservada. Cada contribuição é decomposta em um conjunto de coeficientes de controle e um operador de campo adequadamente contraído. O MPE também congrega as modificações no setor gravitacional [38]. É importante lembrar ainda que, em teorias de campos efetivas descritas no espaço-tempo de Minkowski, a violação da simetria

discreta CPT implica, necessariamente, na violação da simetria de Lorentz. Vale lembrar que a violação da simetria de Lorentz não implica em violação CPT. Este resultado é conhecido na literatura como Teorema anti-CPT [39]. Em face deste resultado, operadores que violam CPT também estão contidos no MPE. Isto torna o MPE um arcabouço teórico bastante completo que nos permite investigar também pequenos desvios da simetria discreta CPT.

O MPE não-mínimo [40, 41, 42, 43, 44, 45] foi proposto com a finalidade de incluir operadores com dimensões de massa maiores que $d = 3$ e $d = 4$, ou seja, operadores não-renormalizáveis. Os operadores não-mínimos são construídos a partir da inclusão de 4-derivadas contraídas aos coeficientes de controle. Contribuições do MPE não-mínimo podem ser obtidas a partir de teorias de campo não-comutativas após a aplicação do mapeamento de Seiberg-Witten [14], por exemplo. A tentativa de melhorar a nossa compreensão sobre os termos não-mínimos proporcionou uma série de trabalhos muito interessantes. Por exemplo, certos operadores que fazem parte do setor eletromagnético não-mínimo do MPE foram propostos e estudados em [46, 47, 48, 49, 50, 51, 52]. Além disso, modelos que incorporam derivadas superiores foram objeto de investigações recentes [53, 54, 55].

Um setor muito importante e que também tem sido objeto de estudos intensos nos últimos anos é o setor dos neutrinos. De acordo com o MP existem três neutrinos, são eles: o neutrino do elétron ν_e , o neutrino do múon ν_μ , e o neutrino do tau ν_τ . Neutrinos não possuem carga elétrica e são produzidos apenas em processos mediados pela interação fraca [56]. Quando os neutrinos propagam-se a uma dada distância, a probabilidade de detectar um certo sabor muda com o tempo. Esse efeito denomina-se oscilação de neutrinos. As oscilações dos neutrinos são fenômenos de natureza quântica. Esse efeito tem sua origem no fato dos autoestados da hamiltoniana cinemática e os autoestados de sabor produzidos nas interações não serem os mesmos. Na verdade, essas duas bases distintas estão relacionadas pela matriz unitária conhecida como matriz PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata) [57]. As oscilações de neutrinos também são indícios de que estas partículas possuem massa, embora sejam pequenas demais para serem medidas diretamente.

Outro ponto importante é a simetria discreta CP. Medir a fase de violação de CP que está contida na matriz PMNS é atualmente um dos tópicos mais estudados na Física dos neutrinos. Além da violação de CP, os neutrinos podem estar sujeitos à violação da simetria CPT devido à Física na escala de Planck, como já apresentado. Como a violação de CPT implica na violação da invariância de Lorentz, faz todo sentido usar a fenomenologia dos neutrinos para sondar a simetria de Lorentz. Para

tanto, uma estrutura abrangente que parametrize todas as possibilidades de violar a simetria de Lorentz é desejável. Felizmente, tanto a versão do MPE contendo operadores renormalizáveis, quanto não-renormalizáveis já existem na literatura [37, 41].

Um outro tópico de bastante destaque nos últimos anos está relacionado à descrição de sistemas de matéria condensada baseados no MPE. Muitos fenômenos proeminentes na Física da matéria condensada, tais como o efeito Hall quântico [58] ou “efeitos relativísticos” no grafeno [59] ocorrem em sistemas planares. Nesse sentido, estudar e aplicar uma eletrodinâmica planar a sistemas físicos reais pode ser visto como uma proposta de investigação interessante. Uma maneira de construir teorias planas a partir de modelos já consolidados e definidos em $(1 + 3)$ -dimensões é obtida por meio de uma técnica conhecida como redução dimensional. Este método já foi usado para derivar uma versão planar da Lagrangeana de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw [60, 61, 62]. Foi empregada também na obtenção da versão planar do setor eletromagnético CPT-par do MPE [63].

Além dos modelos da matéria condensada, por exemplo, é possível também usar a gravitação como um grande laboratório para se investigar a violação da invariância de Lorentz (local). A maioria dos testes experimentais em gravitação são realizados com corpos de teste clássicos [64]. Isso é uma consequência direta da relatividade geral ser uma teoria clássica. No entanto, a descrição do MPE não é inteiramente adequada para prever os efeitos da violação da simetria de Lorentz no cenário da Física clássica, razão pela qual seria altamente desejável ter um mapeamento entre a densidade de Lagrange da teoria de campos do MPE e uma Lagrangeana Clássica que descrevesse uma partícula pontual relativística. Felizmente, existe na literatura uma técnica que mapeia a equação de dispersão, obtida a partir da teoria de campos, em Lagrangeanas Clássicas [65]. Com base nessa construção, as primeiras Lagrangeanas Clássicas para um amplo conjunto de coeficientes de controle do MPE mínimo foram obtidas em [65, 66, 67]. Fazendo uso dessas Lagrangeanas, uma série de estudos foram desenvolvidos. A título de exemplo, o movimento de uma partícula clássica carregada sob a influência de um campo de fundo (*background field*) e de um campo eletromagnético foi analisada em [68]. Além disso, a evolução temporal modificada de um análogo semiclássico de spin foi examinada com o auxílio da equação BMT [69].

Uma conexão intrigante entre as Lagrangeanas Clássicas e a geometria de Finsler foi constatada. Observou-se que as Lagrangeanas Clássicas do MPE podem ser promovidas a estruturas de Finsler [70] por um procedimento que tem paralelo

com a rotação de Wick [71]. As Lagrangeanas para os coeficientes a , c , e e f , por exemplo, estão relacionadas com o que é conhecido na Literatura como estrutura de Randers [72], enquanto que a Lagrangeana para o coeficiente b está ligado a um espaço de Finsler até então desconhecido e que não é do tipo Randers. As propriedades desse espaço de Finsler, conhecido como espaço- b , foram amplamente investigadas em [71]. Além disso, as estruturas de Finsler associadas aos coeficientes do MPE não-mínimo foram catalogadas em [73]. Na Literatura encontramos tanto aplicações Físicas quanto análises dos aspectos geométricos das Lagrangeanas Clássicas do MPE [74, 75, 76, 77, 78, 79].

A estrutura desta Tese é apresentada a seguir. No capítulo 2 iniciamos um estudo detalhado dos setores do MPE. Começamos pelo MPE mínimo, onde apresentamos como cada setor do MP é modificado. Esse estudo é sucedido pela apresentação das versões não-mínimas dos setores dos fótons, férmions e neutrinos, respectivamente. As subseções dedicadas a estes setores retratam a maneira como é possível incluir operadores, cuja dimensão de massa torna-se arbitrária. Finalizamos este capítulo apresentando outros cenários onde a violação da simetria de Lorentz é levada em consideração. O primeiro cenário consiste de uma Eletrodinâmica Quântica Planar obtida a partir do setor eletromagnético do MPE. Essa nova eletrodinâmica é obtida através da redução dimensional. O segundo cenário, por sua vez, corresponde ao estudo da cinemática clássica de uma partícula pontual e relativística na presença de um campo de fundo constante.

Iniciamos o Capítulo 3 calculando o propagador de Dirac modificado para o conjunto completo de operadores do setor fermiônico do MPE. Calculamos a equação de dispersão para o setor não-mínimo dos neutrinos e apresentamos uma solução perturbativa para as relações de dispersão. Por fim, exploramos dois casos particulares interessantes.

No Capítulo 4, estudamos com mais detalhes como obter a eletrodinâmica planar não-mínima a partir da redução dimensional do setor eletromagnético não-mínimo do MPE. Após a obtenção da eletrodinâmica em $(1 + 2)$ -dimensões, estudamos as equações de campo, as funções de Green, as relações de dispersão, além, é claro, das soluções das equações de campo.

O Capítulo 5, por sua vez, dedica-se ao estudo das Lagrangeanas Clássicas. Iniciamos a investigação da cinemática obtendo o conjunto de Lagrangeanas em primeira ordem nos coeficientes de controle. Estes resultados são inicialmente obtidos através de um *Ansatz* construído a partir de soluções conhecidas na Literatura.

Continuamos o nosso estudo demonstrando formalmente que os resultados obtidos para os operadores de spin degenerado e não-degenerado de fato satisfazem as cinco condições estabelecidas em [65]. Um resultado de destaque neste capítulo é a proposição de um mapeamento geral entre as relações de dispersão e as Lagrangeanas Clássicas. Este resultado nos permite generalizar ainda mais os *Ansätze* propostos inicialmente. Fazendo uso dos coeficientes efetivos definidos em [42], é possível encontrar uma Lagrangeana Clássica *master* que congrega todos os operadores do setor fermiônico do MPE em uma única equação. Com base no mapeamento geral estabelecido, é possível ainda mapear as relações de dispersão do setor dos neutrinos nas Lagrangeanas Clássicas que descrevem a cinemática dessas partículas. Finalizamos este capítulo apresentando algumas correções perturbativas de segunda ordem obtidas através de um método iterativo desenvolvido na referência [80].

As conclusões e perspectivas são apresentadas no Capítulo 6. No Apêndice A apresentamos uma série de ferramentas matemáticas necessárias para a compreensão dos resultados obtidos no Capítulo 3. No Apêndice B encontramos algumas demonstrações úteis das 4-velocidades calculadas no Capítulo 5. Já no Apêndice C, mostramos como os covariantes bilineares que aparecem na teoria de Dirac classificam-se sob transformações de Lorentz. A menos que seja dito o contrário, unidades naturais serão usadas ao longo do texto, ou seja, faremos $\hbar = c = 1$.

CAPÍTULO 2

O MODELO PADRÃO ESTENDIDO

Este capítulo tem como objetivo fazer uma revisão das principais propriedades do MPE mínimo [36, 37] e do MPE não-mínimo [40, 41, 42], em particular, daremos ênfase aos setores dos fótons, férmions e dos neutrinos. Apresentaremos também uma breve revisão de alguns modelos planares que incorporam tanto a violação da simetria de Lorentz quanto CPT em seu arcabouço teórico. Finalmente, descreveremos a cinemática clássica de uma partícula pontual relativística na presença de campos de fundo.

2.1 O MPE Mínimo

Como já apontado no Capítulo 1, o MPE é um *framework* que incorpora tanto a possibilidade da violação da simetria de Lorentz quanto a violação da simetria discreta CPT na estrutura do MP e da GR¹. Contudo, precisamos entender melhor como as violações destas simetrias são incorporadas neste arcabouço teórico. É necessário, no entanto, compreender primeiro os tipos de transformações de Lorentz.

Em geral, existem dois tipos de transformações de Lorentz que podem ser aplicadas a um sistema, são elas: transformações de observador (*Observer Lorentz*

¹ Iremos nos ater apenas à descrição das modificações do MP.

transformations) e transformações de partículas (*Particle Lorentz transformations*). A primeira transformação consiste simplesmente em uma transformação de coordenadas, que pode ser realizada através de uma rotação ou mesmo um *boost*. A segunda, entretanto, consiste em transformar os campos (ou partículas), isto é, fazemos uma rotação ou um *boost* no próprio sistema (aparato experimental). Na situação Lorentz-invariante, as duas transformações são equivalentes.

No MPE existem, basicamente, duas maneiras de incorporar a violação das simetrias. A primeira, e mais simples, decorre da quebra explícita da simetria. Esta técnica consiste essencialmente em contrair campos tensoriais não-dinâmicos aos campos físicos. Estes campos tensoriais possuem uma particularidade bastante interessante: eles permanecem intactos sob transformações de partículas. Uma consequência direta desta propriedade é que os escalares de Lorentz, construídos a partir destes campos tensoriais, não serão mais invariante e, portanto, violarão a simetria de Lorentz.

Podemos compreender melhor o papel que estes campos de fundo desempenham através de um exemplo bem simples. Na Figura 3 mostramos um sistema composto por um capacitor carregado e um elétron, que é lançado entre as placas do capacitor. O campo elétrico gerado pelas placas carregadas faz o papel do *background*. Na Figura 3a lançamos o elétron com velocidade $\mathbf{u}$ perpendicular ao campo elétrico. Sabemos que ao adentrar neste campo, o elétron será defletido e seguirá uma trajetória parabólica para cima. Ambos os referenciais S e S' , que estão conectados por alguma transformação de observador, concordarão com este resultado. Portanto, o sistema é invariante por uma transformação de observador.

Vamos agora aplicar uma transformação de partícula no elétron, isto é, rotacionamos a direção de propagação do elétron dentro do campo elétrico, como mostra a Figura 3b. Nesta situação, supomos que o campo de fundo (campo elétrico) é, por alguma razão inacessível, ou seja, não podemos mexer no capacitor. Observamos, por sua vez, que a descrição física da propagação do elétron será totalmente diferente da situação anterior. Em outras palavras, a fenomenologia passa a depender da direção. Essa é uma consequência direta do campo elétrico permanecer fixo². No MPE, os campos tensoriais fazem o papel do campo elétrico no capacitor. Não temos acesso a tais campos, eles simplesmente existem, permeiam todo o universo e não temos controle algum sobre eles, vide Figura 4a.

² Na situação Lorentz-invariante, a transformação de partícula requer que o capacitor rotacione de modo que o sistema permaneça invariante. Porém, como o campo elétrico faz o papel de um campo de fundo, este não se transforma.

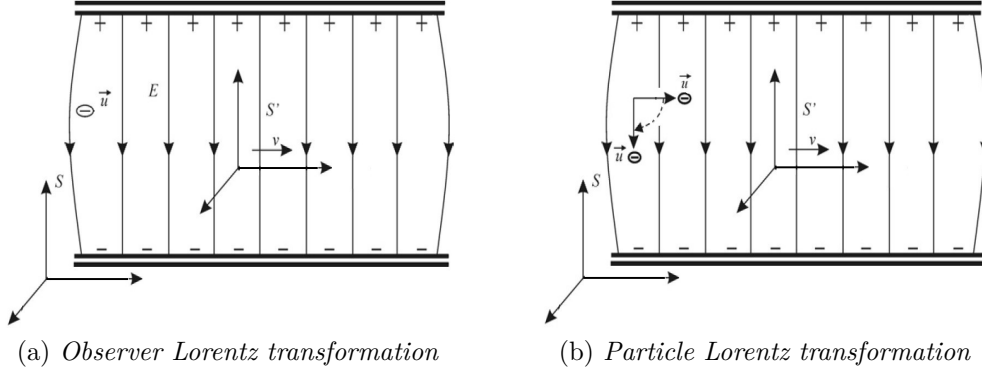


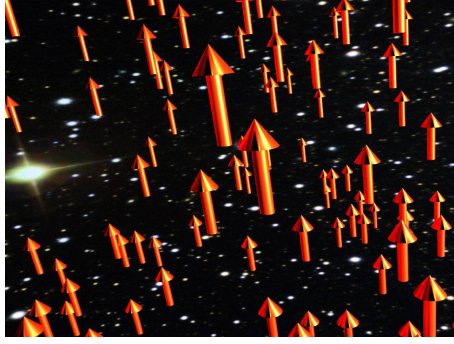
Figura 3 – Diferença entre as transformações de Lorentz. Figuras adaptadas da Referência [81].

Muito embora a prescrição para a violação da simetria explícita seja muito simples, ela é consistente apenas em teorias descritas em um espaço-tempo plano. Por outro lado, esta prescrição é incompatível com a maioria das geometrias Riemannianas e, portanto, incompatível com a GR. Em GR este método viola explicitamente a simetria de difeomorfismo, além das equações de movimento serem incompatíveis com a identidade de Bianchi. Uma maneira de contornar este problema consiste em tornar os campos tensoriais dinâmicos. Nesta situação, podemos quebrar a simetria de Lorentz espontaneamente. Quando a simetria é quebrada, os campos de fundo adquirem um valor esperado não-nulo no vácuo e, como consequência, surgem direções privilegiadas no espaço-tempo. A quebra espontânea aqui mencionada é inteiramente análoga ao mecanismo de Higgs do MP.

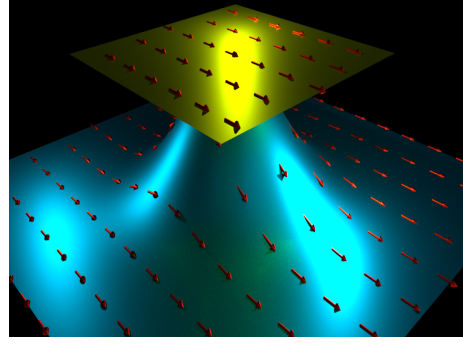
Uma vez compreendido como surgem os campos de fundo e como eles acoplam-se aos campos físicos, podemos estudar suas possíveis implicações. Começamos, inicialmente, apresentando a densidade de Lagrange do MPE composta pelos seguintes termos:

$$\mathcal{L}_{\text{MPE}} = \mathcal{L}_{\text{MP}} + \mathcal{L}_{\text{GR}} + \delta\mathcal{L}_{\text{LV}}, \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{L}_{\text{MP}}$ é a densidade de Lagrange que descreve o MP, cuja simetria de calibre é $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$, $\mathcal{L}_{\text{GR}}$ é a densidade de Lagrange que descreve a gravitação usual e, finalmente, $\delta\mathcal{L}_{\text{LV}}$ (*Lorentz Violation* - LV) congrega todas as contribuições resultantes da violação de Lorentz e CPT. Cada densidade de Lagrange apresentada na equação (2.1) pode ser escrita explicitamente em função dos setores que a compõe.



(a) Campo de fundo no espaço de Minkowski



(b) Campo de fundo em uma variedade curva

Figura 4 – Diferença entre os campos de fundo em um espaço-tempo plano e um espaço-tempo curvo.

A densidade de Lagrange do MP possui a seguinte estrutura:

$$\mathcal{L}_{\text{MP}} = \mathcal{L}_{\text{Lépton}}^{\text{MP}} + \mathcal{L}_{\text{Quark}}^{\text{MP}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{MP}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}}^{\text{MP}} + \mathcal{L}_{\text{Calibre}}^{\text{MP}}, \quad (2.2)$$

onde $\mathcal{L}_{\text{Lepton}}^{\text{MP}}$ descreve o setor dos léptons, $\mathcal{L}_{\text{Quark}}^{\text{MP}}$ o setor dos quarks, $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{MP}}$ o setor de Yukawa, $\mathcal{L}_{\text{Higgs}}^{\text{MP}}$ o setor de Higgs e $\mathcal{L}_{\text{Calibre}}^{\text{MP}}$ o setor de calibre.

As contribuições oriundas da Lagrangeana $\delta\mathcal{L}_{\text{LV}}$ são construídas de modo que a natureza CPT de cada setor seja evidente, isto é, se o setor viola ou não a simetria discreta CPT. Designamos por CPT-par as densidades de Lagrange que não violam esta simetria e CPT-ímpar aquelas que violam. A estrutura $\delta\mathcal{L}_{\text{LV}}$ pode ser então decomposta da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{\text{LV}} = & \mathcal{L}_{\text{Lépton}}^{\text{CPT-par}} + \mathcal{L}_{\text{Lépton}}^{\text{CPT-ímpar}} + \mathcal{L}_{\text{Quark}}^{\text{CPT-par}} + \mathcal{L}_{\text{Quark}}^{\text{CPT-ímpar}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{CPT-par}} \\ & + \mathcal{L}_{\text{Higgs}}^{\text{CPT-par}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}}^{\text{CPT-ímpar}} + \mathcal{L}_{\text{Calibre}}^{\text{CPT-par}} + \mathcal{L}_{\text{Calibre}}^{\text{CPT-ímpar}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Precisamos agora conhecer a forma explícita de cada termo como função dos campos. Antes, porém, é necessário introduzir algumas notações e conceitos básicos para que seja possível compreender as densidades de Lagrange que iremos apresentar. Começemos com os léptons. Os léptons são férmions e, portanto, são descritos por espinores. No MP estas partículas apresentam-se com quiralidades esquerda (E) e direita (D). Cada quiralidade transforma-se de maneira diferente perante o grupo de simetria do modelo. A seguir apresentamos as estruturas leptônicas

$$L_A = \begin{pmatrix} \nu_A \\ l_A \end{pmatrix}_L, \quad R_A = (l_A)_R, \quad (2.4)$$

onde L_A descreve os léptons de quiralidade esquerda que se transformam como singletos sob a ação do grupo $SU_c(3)$, como dubletos sob a ação do grupo $SU_L(2)$ e possuem hipercarga fraca Y igual a $-\frac{1}{2}$. Por outro lado, R_A representa os léptons de quiralidade direita que se transformam como singletos sob a ação dos grupos $SU_c(3)$ e $SU_L(2)$ e possuem hipercarga fraca $Y = +\frac{1}{2}$. De maneira inteiramente análoga, temos os quarks

$$Q_A = \begin{pmatrix} u_A \\ d_A \end{pmatrix}_L, \quad U_A = (u_A)_R, \quad D_A = (d_A)_R, \quad (2.5)$$

onde Q_A representa os quarks de quiralidade esquerda, que se transformam como tripletos sob a ação do grupo $SU_c(3)$, como dubletos sob a ação do grupo $SU_L(2)$ e possuem hipercarga fraca $Y = +\frac{1}{6}$. Os quarks U_A e D_A possuem quiralidade direita e transformam-se como tripletos sob a ação do grupo $SU_c(3)$, como singletos sob a ação do grupo $SU_L(2)$ e possuem hipercarga fraca $Y = +\frac{1}{3}$ e $Y = -\frac{1}{3}$, respectivamente.

O índice “ A ” que aparece nas estruturas definidas acima assumem os valores 1, 2 e 3. Este rótulo serve para designar as gerações dos quarks e dos léptons que estamos descrevendo. No MP as gerações são:

$$l_A \equiv (e, \mu, \tau), \quad \nu_A \equiv (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau), \quad u_A \equiv (u, c, t), \quad d_A \equiv (d, s, b). \quad (2.6)$$

Devemos ressaltar que no MPE apenas as propriedades das partículas modificam-se, ou seja, nenhuma nova partícula é introduzida. Na Figura 5 mostramos o diagrama das partículas elementares no MP e no MPE. Observamos que as partículas estão organizadas da mesma forma, porém, é esperado elas exibam uma nova fenomenologia.

Os componentes que completam a descrição do MP são os campos de calibre. A estes campos associam-se as partículas responsáveis por mediar as interações fundamentais. Estes objetos estão associados aos geradores da álgebra do grupo de simetria $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$. A seguir, designamos cada campo ao seu respectivo grupo:

$$\begin{array}{ccccc} SU_c(3) & \times & SU_L(2) & \times & U_Y(1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G_\mu^\alpha & & W_\mu^a & & B_\mu \\ \alpha = 1, \dots, 8 & & a = 1, \dots, 3 & & \end{array}$$

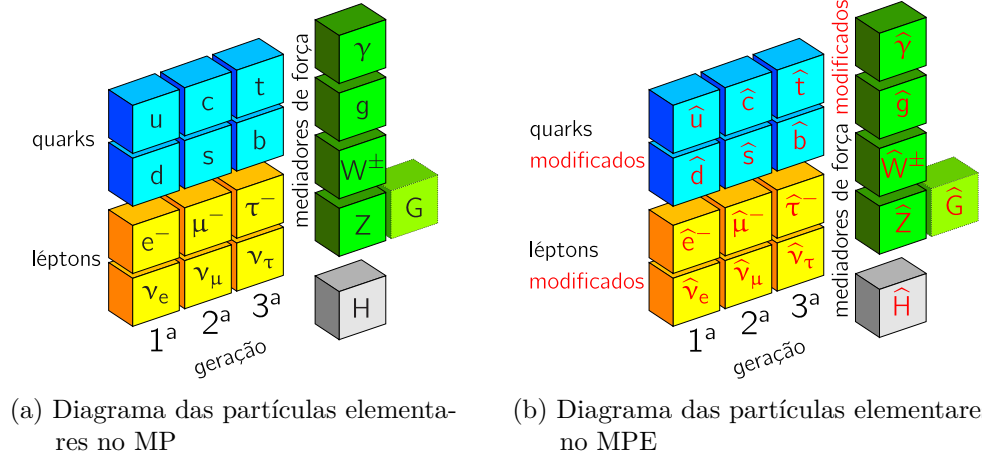


Figura 5 – Diagrama das partículas elementares. A diferença fundamental entre estes dois diagramas reside no fato das partículas elementares no MPE apresentarem algumas propriedades diferentes, tais como relações de dispersão modificadas (designamos isso com um ^ sobre as partículas).

O grupo $SU_c(3)$ possui oito geradores, enquanto que os grupos $SU_L(2)$ e $U_Y(1)$ possuem, respectivamente, três e um. Por serem campos vetoriais, G_μ^α , W_μ^a e B_μ são chamados de bosons vetoriais - campos vetoriais carregam spin 1. As partículas G_μ^α são chamadas de *gluons* e são responsáveis por mediar a força forte. As quatro partículas que surgem após a quebra espontânea da simetria $SU_L(2) \times U_Y(1)$ são: $W^\pm$ e Z^0 e γ . Estas partículas são responsáveis por mediar as interações fracas e eletromagnéticas. Os *field strengths* referentes aos campos de calibre são mostrados a seguir:

$$G_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu G_\nu^\alpha - \partial_\nu G_\mu^\alpha + g_3 f_{\beta\gamma}^\alpha G_\mu^\beta G_\nu^\gamma, \quad (2.7a)$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (2.7b)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (2.7c)$$

onde g_2 e g_3 são constantes de acoplamento, $f_{\beta\gamma}^\alpha$ e ϵ_{abc} são as constantes de estrutura dos grupos de simetria $SU_c(3)$ e $SU_L(2)$, respectivamente.

Por fim, apresentamos o último ingrediente: o campo de Higgs. Denotaremos o dubleto de Higgs no calibre unitário da seguinte forma:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ r_\phi \end{pmatrix}.$$

O campo de Higgs após uma transformação de conjugação de carga será representado por ϕ^c .

Precisamos agora juntar todos os ingredientes de maneira consistente. A seguir, escrevemos explicitamente as densidades Lagrange de cada setor do MP, a saber:

$$\mathcal{L}_{\text{Lépton}}^{\text{MP}} = \frac{i}{2} \bar{L}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu L_A + \frac{i}{2} \bar{R}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu R_A, \quad (2.8a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Quark}}^{\text{MP}} = \frac{i}{2} \bar{Q}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu Q_A + \frac{i}{2} \bar{U}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu U_A + \frac{i}{2} \bar{D}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu D_A, \quad (2.8b)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{MP}} = - (G_L)_{AB} \bar{L}_A \phi R_B - (G_U)_{AB} \bar{Q}_A \phi^c U_B - (G_D)_{AB} \bar{Q}_A \phi D_B + \text{H.c.}, \quad (2.8c)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}}^{\text{MP}} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{3!} (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (2.8d)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Calibre}}^{\text{MP}} = -\frac{1}{2} \text{tr} (G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \text{tr} (W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (2.8e)$$

onde as derivadas covariantes D_μ possuem as seguintes estruturas:

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + \frac{i}{2} g_2 W_\mu^a \tau_a + i g_1 Y_{\text{L-L}} B_\mu && \leftrightarrow \text{Léptons de quiralidade E} \\ D_\mu &= \partial_\mu + i g_1 Y_{\text{L-R}} B_\mu && \leftrightarrow \text{Léptons de quiralidade D} \\ D_\mu &= \partial_\mu + \frac{i}{2} g_2 W_\mu^a \tau_a + \frac{i}{2} g_3 G_\mu^\alpha \lambda_\alpha + i g_1 Y_{\text{Q-L}} B_\mu && \leftrightarrow \text{Quarks de quiralidade E} \\ D_\mu &= \partial_\mu + \frac{i}{2} g_3 G_\mu^\alpha \lambda_\alpha + i g_1 Y_{\text{Q-R}} B_\mu && \leftrightarrow \text{Quarks de quiralidade D} \\ D_\mu &= \partial_\mu - \frac{i}{2} g_2 W_\mu^a \tau_a + i g_1 B_\mu && \leftrightarrow \text{Campo escalar} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Os coeficientes $Y_{\text{L-L,R}}$ e $Y_{\text{Q-L,R}}$ designam as hipercarga fraca de cada um dos campos em que a derivada covariante irá atuar. Os termos τ_a e λ_α são os geradores dos grupos de simetria $SU_L(2)$ e $SU_c(3)$, respectivamente.

Agora que conhecemos com detalhes a densidade de Lagrange do MP, temos condições de apresentar a sua extensão. Como já discutido, o MPE introduz a violação da simetria de Lorentz no MP por meio de campos de fundo constantes³. Estes *backgrounds* precisam se acoplar de maneira consistente aos campos físicos. A seguir, escrevemos as densidades de Lagrange modificadas para o setor dos léptons e dos quarks que são consistentes com a quebra explícita de simetria:

³ Ressaltamos que estes campos de fundo não precisam ser constantes, eles podem depender das coordenadas do espaço-tempo. Esta simplificação é requerida, pois queremos preservar a invariância perante translações (conservação do tensor energia-momento.)

$$\mathcal{L}_{\text{Lépton}}^{\text{CPT-par}} = \frac{i}{2} (c_L)_{\mu\nu AB} \bar{L}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu L_B + \frac{i}{2} (c_R)_{\mu\nu AB} \bar{R}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu R_B, \quad (2.10a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Lépton}}^{\text{CPT-ímpar}} = - (a_L)_{\mu AB} \bar{L}_A \gamma^\mu L_B - (a_R)_{\mu AB} \bar{R}_A \gamma^\mu R_B, \quad (2.10b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Quark}}^{\text{CPT-par}} &= \frac{i}{2} (c_Q)_{\mu\nu AB} \bar{Q}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu Q_B + \frac{i}{2} (c_U)_{\mu\nu AB} \bar{U}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu U_B \\ &\quad + \frac{i}{2} (c_D)_{\mu\nu AB} \bar{D}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu D_B, \end{aligned} \quad (2.10c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Quark}}^{\text{CPT-ímpar}} &= \frac{i}{2} (a_Q)_{\mu AB} \bar{Q}_A \gamma^\mu Q_B + \frac{i}{2} (a_U)_{\mu AB} \bar{U}_A \gamma^\mu U_B \\ &\quad + \frac{i}{2} (a_D)_{\mu AB} \bar{D}_A \gamma^\mu D_B, \end{aligned} \quad (2.10d)$$

onde os coeficientes $c_{\mu\nu}$ e a_μ devem ser hermitianos no espaço de sabor. O coeficiente a_μ têm dimensão de massa 1, enquanto que o coeficiente $c_{\mu\nu}$ é adimensional. Ressaltamos que os coeficientes $c_{\mu\nu}$ e a_μ , tanto para o setor dos léptons quanto dos quarks, podem acoplar partículas de sabores distintos.

O acoplamento dos léptons e dos quarks com o campo de Higgs é mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{CPT-par}} &= -\frac{1}{2} (H_L)_{\mu\nu AB} \bar{L}_A \phi \sigma^{\mu\nu} R_B - \frac{1}{2} (H_U)_{\mu\nu AB} \bar{Q}_A \phi^c \sigma^{\mu\nu} U_B \\ &\quad - \frac{1}{2} (H_D)_{\mu\nu AB} \bar{Q}_A \phi \sigma^{\mu\nu} D_B + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde os coeficientes $H_{\mu\nu}$ são adimensionais e antissimétricos.

As duas contribuições possíveis para o setor de Higgs que respeitam a simetria de calibre $SU_L(2) \times U_Y(1)$ são

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs}}^{\text{CPT-par}} &= \frac{1}{2} (k_{\phi\phi})^{\mu\nu} (D_\mu \phi)^\dagger D_\nu \phi + \text{H.c} - \frac{1}{2} (k_{\phi B})^{\mu\nu} \phi^\dagger \phi B_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2} (k_{\phi W})^{\mu\nu} \phi^\dagger W_{\mu\nu} \phi, \end{aligned} \quad (2.12a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}}^{\text{CPT-ímpar}} = i (k_\phi)^\mu \phi^\dagger D_\mu \phi + \text{H.c.} \quad (2.12b)$$

Na equação (2.12a), o coeficiente $k_{\phi\phi}$ é adimensional e pode ter uma parte simétrica real e uma parte antissimétrica imaginária. Já os coeficientes $k_{\phi B}$ e $k_{\phi W}$ são adimensionais, reais e antissimétricos. A constante k_ϕ presente na equação (2.12b) possui dimensão de massa 1 e pode ser um número complexo arbitrário.

Finalmente, o setor de calibre $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ estendido possui a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Calibre}}^{\text{CPT-par}} = & -\frac{1}{2} (k_G)_{\kappa\lambda\mu\nu} \text{tr} \left(G^{\kappa\lambda} G^{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} (k_W)_{\kappa\lambda\mu\nu} \text{tr} \left(W^{\kappa\lambda} W^{\mu\nu} \right) \\ & - \frac{1}{4} (k_B)_{\kappa\lambda\mu\nu} B^{\kappa\lambda} B^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.13a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Calibre}}^{\text{CPT-ímpar}} = & \frac{1}{2} (k_3)_\kappa \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \text{tr} \left(G_\lambda G_{\mu\nu} + \frac{2}{3} i g_3 G_\lambda G_\mu G_\nu \right) \\ & + \frac{1}{2} (k_2)_\kappa \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \text{tr} \left(W_\lambda W_{\mu\nu} + \frac{2}{3} i g_2 W_\lambda W_\mu W_\nu \right) \\ & + \frac{1}{4} (k_1)_\kappa \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} B_\lambda B_{\mu\nu} + (k_0)_\kappa B^\kappa, \end{aligned} \quad (2.13b)$$

onde tr corresponde a operação matemática “traço” e atua sobre os geradores do grupo de simetria $SU(3)$ dos quarks e $SU_L(2)$ dos léptons. Os coeficientes $k_{G,W,B}$ são adimensionais e reais. Além disso, estes tensores de *rank*-4 possuem a simetria do tensor de Riemann⁴ e o duplo-traço nulo. Esta última propriedade é requerida, pois os termos do duplo-traço podem ser absorvidos através de uma redefinição dos campos.

Como nosso interesse reside nos setores puros dos fótons, férmions e neutrinos, faremos um estudo mais detalhado deles na próxima seção. Daremos ênfase a generalização não-mínima destes setores.

⁴ O tensor de curvatura de Riemann possui as seguintes propriedades:

- 1) $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta},$
- 2) $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha},$
- 3) $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}.$

leading-order (renormalizable?) remnants

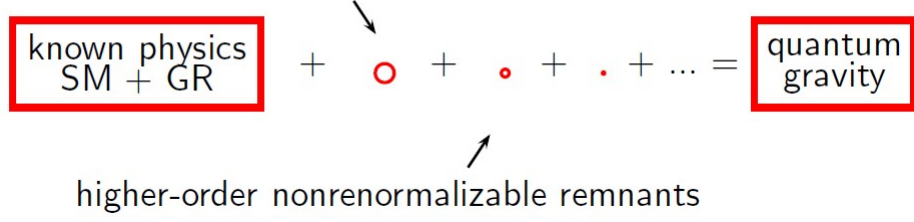


Figura 6 – Na figura acima cada círculo presente no diagrama corresponde a uma nova correção à física conhecida. Tais correções são introduzidas a partir de novos operadores, cuja dimensão de massa d torna-se cada vez maior – estudaremos a forma destes operadores para cada setor nas subseções a seguir. Observamos que as novas contribuições tornam-se pequenas na medida em que d aumenta. Posto isso, em escalas de energias pequenas, podemos tratar tais contribuições de maneira perturbativa. Por outro lado, estas correções passam a ser relevantes conforme a escala de energia levada em consideração aumenta. Diagrama disponível em [82].

2.2 O MPE Não-Mínimo

Nesta seção iremos apresentar uma extensão natural dos setores dos fótons, férmions e dos neutrinos baseada nas referências [40, 41, 42]. Esta extensão consiste na inclusão de operadores de dimensão de massa arbitrária. Tais operadores podem ser compreendidos como correções advindas de uma teoria mais fundamental e, como tal, podem nos proporcionar novos efeitos. A Figura 6 apresenta de maneira pictórica como podemos compreender tais correções. Extensões dessa mesma natureza também foram propostas para a eletrodinâmica quântica [43], para o setor de calibre [44] e para a gravitação [45]. Iremos abordar de maneira individual cada um dos setores mencionados.

2.2.1 Setor dos Fótons

A densidade de Lagrange que satisfaz a invariância de calibre U(1) e contém em sua estrutura os operadores de dimensão de massa arbitrária possui a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}A_{\lambda}\left(\hat{k}_{AF}\right)_{\kappa}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}\left(\hat{k}_F\right)^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

onde

$$\left(\hat{k}_{AF}\right)_\kappa = \sum_{d=\text{ímpar}} \left(k_{AF}^{(d)}\right)_\kappa^{\alpha_1 \dots \alpha_{(d-3)}} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{(d-3)}}, \quad (2.15a)$$

$$\left(\hat{k}_F\right)^{\kappa\lambda\mu\nu} = \sum_{d=\text{par}} \left(k_F^{(d)}\right)^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1 \dots \alpha_{(d-3)}} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{(d-3)}}, \quad (2.15b)$$

são operadores de dimensões de massa mais altas. O operador $\hat{k}_{AF}$ é CPT-ímpar, enquanto que $\hat{k}_F$ é CPT-par. Os operadores acima são construídos de tal forma que as versões mínimas estão inclusas, isto é, os operadores renormalizáveis $d = 3$ e $d = 4$ estão presentes. Os coeficientes de controle $k_{AF}^{(d)}$ e $k_F^{(d)}$ possuem dimensão de massa $[m]^{4-d}$. Dessa forma, para $d > 4$, vemos que estes operadores possuem dimensão de massa negativas, o que confere a estes operadores o título de não-renormalizáveis. Observamos que $d - 3$ índices $\{\alpha_1 \dots \alpha_{(d-3)}\}$ são simétricos e estão todos contraídos com 4-derivadas. Os quatro primeiros índices do operador $\hat{k}_F$ possuem a mesma simetria do tensor de Riemann.

A partir da densidade de Lagrange (2.14), podemos obter as equações de movimento. A equação de campo para este modelo é mostrada a seguir:

$$\left[\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \partial_\nu + \left(\hat{k}_{AF}\right)_\nu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} + \left(\hat{k}_F\right)^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \right] F_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.16)$$

Podemos ainda conectar o resultado acima com os campos físicos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Explicitamente, obtemos as seguintes equações

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} - \partial_0 \mathbf{D} = 0, \quad (2.17)$$

onde foram usadas as definições

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 2\hat{\mathbf{k}}_{AF} \times \mathbf{A} + \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{DE} \cdot \mathbf{E} + \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{DB} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 2\left(\hat{k}_{AF}\right)_0 \mathbf{A} + 2\hat{\mathbf{k}}_{AF} A_0 + \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{HB} \cdot \mathbf{B} + \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{HE} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.18b)$$

Os novos coeficientes que carregam as informações da violação da simetria são mostrados a seguir

$$(\hat{\boldsymbol{\kappa}}_{DE})^{jk} = -2\left(\hat{k}_F\right)^{0j0k}, \quad (\hat{\boldsymbol{\kappa}}_{HB})^{jk} = \frac{1}{2}\left(\hat{k}_F\right)^{lmrs} \varepsilon^{jlm} \varepsilon^{krs}, \quad (2.19a)$$

$$(\hat{\boldsymbol{\kappa}}_{DB})^{jk} = -(\hat{\boldsymbol{\kappa}}_{HE})^{jk} = \left(\hat{k}_F\right)^{0jlm} \varepsilon^{klm}. \quad (2.19b)$$

Com estas definições, podemos reescrever a equação (2.18b) da seguinte forma⁵ [83]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_3 + \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{DE} & \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{DB} \\ \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{HE} & \mathbb{1}_3 + \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{HB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

A partir da equação (2.16), podemos obter as relações de dispersão do modelo em questão. Adotando soluções tipo onda plana, isto é,

$$A_\mu(x) = A_\mu(p) e^{-ix \cdot p}, \quad (2.21)$$

é possível reescrever a equação (2.16) na forma

$$M^{\mu\nu} A_\nu = 0, \quad (2.22)$$

onde o operador M é definido a seguir

$$M^{\mu\nu} = \left[\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + 2 \left(\hat{k}_F \right)^{\mu\alpha\nu\beta} \right] p_\alpha p_\beta - 2i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\hat{k}_{AF} \right)_\alpha p_\beta. \quad (2.23)$$

Podemos reescrever o operador acima de forma compacta

$$M^{\mu\nu} = 2\hat{\chi}^{\mu\alpha\nu\beta} p_\alpha p_\beta + 2i\hat{X}^{\mu\nu\alpha} p_\alpha, \quad (2.24)$$

em que

$$\hat{\chi}^{\mu\alpha\nu\beta} = \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \right) + \left(\hat{k}_F \right)^{\mu\alpha\nu\beta}, \quad (2.25a)$$

$$\hat{X}^{\mu\nu\alpha} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\hat{k}_{AF} \right)_\beta. \quad (2.25b)$$

A equação de dispersão está relacionada às soluções não-triviais da equação (2.22). Em outras palavras, a equação de dispersão está conectada a seguinte condição: $\det M = 0$. Ao resolver esta equação, obteremos os modos de propagação desejados. No entanto, o operador M é singular, uma consequência direta da liberdade de calibre. Podemos contornar este problema fixando o calibre, porém, esta metodologia nos fornece, em geral, relações de dispersão dependentes do calibre escolhido.

Via de regra, a fixação de calibre também quebra a invariância de observador, isto é, as relações de dispersão passam a depender do sistema de coordenadas escolhido. Por exemplo, o calibre temporal $A_0 = 0$, o calibre axial $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0$ ou

⁵ Note que esta equação é válida apenas na situação em que $(\hat{k}_{AF})_\kappa = 0$. Voltaremos a esta relação no capítulo 4. As decomposições apresentadas na equação (2.19) também serão de grande valor no capítulo mencionado.

mesmo o calibre de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, uma vez fixados, estes termos possuem a estrutura designada no referencial de observador inicialmente escolhido, digamos que seja no referencial S . Porém, ao efetuar um *boost* para um referencial S' , por exemplo, a estrutura do calibre fixado será diferente. Vejamos o que acontece com o campo de calibre quando efetuamos uma transformação de Lorentz ao longo do eixo Ox :

$$A^1 = \gamma \left(A'^1 + \frac{v}{c} A'^0 \right), \quad (2.26a)$$

$$A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3, \quad (2.26b)$$

$$A^0 = \gamma \left(A'^0 + \frac{v}{c} A'^1 \right). \quad (2.26c)$$

É possível constatar, através das transformações acima, que a fixação por meio de calibres não-covariantes possui uma dependência com o referencial previamente escolhido. Por exemplo, no caso do calibre temporal, enquanto que no referencial S devemos impor $A^0 = 0$, no referencial S' obtemos que $\gamma(A'^0 + \frac{v}{c} A'^1) = 0$, o que, sem dúvidas, possui uma estrutura bastante diferente. No entanto, para calibres covariantes, como é o caso do calibre de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, isto não acontece.

Na tentativa de contornar os problemas mencionados, Mewes e Kostelecký [40] desenvolveram uma alternativa baseada no teorema do núcleo e da imagem (*Rank-nullity theorem*). A seguir, mostramos o resultado obtido em [40]

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{1}{3} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} p_{\rho_1} p_{\rho_2} p_{\rho_3} p_{\rho_4} \hat{\chi}^{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \rho_1} \hat{\chi}^{\nu_2 \rho_2 \rho_3 \mu_3} \hat{\chi}^{\rho_4 \mu_4 \nu_3 \nu_4} \\ & + 8 p_\alpha p_\beta \left(\hat{k}_{AF} \right)_\mu \left(\hat{k}_{AF} \right)_\nu \hat{\chi}^{\alpha \mu \beta \nu}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como podemos observar, a equação de dispersão acima não depende da escolha do calibre e nem do referencial escolhido. Iremos elencar a seguir algumas das consequências que os coeficientes de controle causam às relações de dispersão. Diferentemente do que ocorre na teoria usual de Maxwell no vácuo, as relações de dispersão modificadas obtidas a partir da equação (2.27) assemelham-se a modos de propagação de fótons em meios materiais. Por exemplo, na teoria de Maxwell no vácuo não é observado o fenômeno da birrefringência na propagação dos fótons nem o efeito conhecido como radiação de Cherenkov. Porém, as modificações advindas da violação da simetria de Lorentz tornam possíveis, mesmo que no vácuo, a existência desses efeitos. Os efeitos de birrefringência são observados para todos os coeficientes CPT-ímpares [40]. Algumas combinações dos coeficientes CPT-pares também podem induzir este fenômeno. Os termos CPT-pares que causam este

efeito podem ser obtidos a partir da seguinte decomposição de Weyl para o tensor $\hat{\chi}^{\mu\nu\rho\sigma}$, a saber:

$$\begin{aligned}\hat{\chi}^{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}\eta^{\mu\sigma}) + \frac{1}{2}[\eta^{\mu\rho}(\hat{c}_F)^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}(\hat{c}_F)^{\mu\sigma} \\ &\quad + \eta^{\nu\sigma}(\hat{c}_F)^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma}(\hat{c}_F)^{\nu\rho}] + \hat{C}^{\mu\nu\rho\sigma},\end{aligned}\quad (2.28)$$

em que foram usadas as seguintes definições

$$(\hat{c}_F)^{\alpha\beta} = \left(\hat{k}_F\right)_{\mu}^{\alpha\mu\beta} - \frac{1}{6}\left(\hat{k}_F\right)_{\mu\nu}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}, \quad (2.29a)$$

$$\hat{C}^{0j0k} = -\frac{1}{4}(\hat{k}_{DE} - \hat{k}_{HB})^{jk} + \frac{1}{12}(\mathbb{I}_3)^{jk}\text{Tr}(\hat{k}_{DE} - \hat{k}_{HB}), \quad (2.29b)$$

$$\hat{C}^{jklm} = \left[\frac{1}{4}(\hat{k}_{DE} - \hat{k}_{HB})^{np} - \frac{1}{12}(\mathbb{I}_3)^{np}\text{Tr}(\hat{k}_{DE} - \hat{k}_{HB})\right]\varepsilon^{jkn}\varepsilon^{lmp}, \quad (2.29c)$$

$$\hat{C}^{0jkl} = \frac{1}{4}(\hat{k}_{DB} - \hat{k}_{HE})^{jm}\varepsilon^{klm}, \quad (2.29d)$$

onde $\mathbb{I}_3$ e Tr correspondem, respectivamente, a matriz identidade 3×3 e a operação matemática “traço”. As componentes que causam birrefringência são aquelas associadas ao equivalente tensor de Weyl $\hat{C}^{\mu\nu\rho\sigma}$ [83].

Finalmente, é importante apresentar algumas aplicações do modelo em questão. A versão mínima do setor eletromagnético foi amplamente estudada em diversas frentes. Por exemplo, em [84, 85] foram obtidos os propagadores para configurações birrefringentes e não-birrefringentes de uma parametrização CPT-par. Além disso, a causalidade, a estabilidade e a unitariedade também foram estudadas para estes modelos. A microcausalidade e a unitariedade do setor isotrópico mínimo CPT-par foram estudadas em [86]. Já a consistência do setor P-ímpar não-birrefringente foi estudada em [87]. O estudo da quantização covariante foi apresentado em [88]. Já na referência [89], todos os operadores quadráticos e invariantes de calibre que violam a simetria de Lorentz foram incluídos em uma densidade de Lagrange tipo-Stückelberg para se estudar fótons massivos. Neste último trabalho, a relação de dispersão e o propagador em nível de árvore foram determinados de maneira exata. A referência [90] estudou as propriedades do setor CPT-par birrefringente.

No que concerne ao modelo não-mínimo, foi observado que teorias de campos não-comutativas geram contribuições que são mapeadas no setor eletromagnético do MPE não-mínimo. Sabemos que em espaços não-comutativos vale a seguinte relação: $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$, onde $\theta^{\mu\nu}$ é um tensor de *rank*-2 real e antissimétrico. O método por trás da conexão entre a teoria não-comutativa e o MPE baseia-se

no conhecido mapeamento de Seiberg-Witten [14]. Os operadores não-mínimos também podem surgir de correções quânticas [91]. Esta situação pode ocorrer quando acoplamentos entre férmions e fótons são levados em consideração. Em cenários supersimétricos, tais contribuições também surgem naturalmente [92, 93]. Algumas configurações envolvendo operadores não-renormalizáveis foram propostas e estudadas nas referências [94, 95]. Além disso, modelos que incorporam derivadas superiores também foram objetos de investigações recentes [96, 97, 98, 99, 100].

2.2.2 Setor dos Fermions

Apresentaremos agora o setor fermiônico não-mínimo do MPE. A ação efetiva que descreve o campo de Dirac na presença de operadores de dimensão de massa arbitrária e que violam a simetria de Lorentz é mostrada a seguir

$$S = \int \mathcal{L} \, d^4x, \quad (2.30)$$

onde $\mathcal{L}$ possui a seguinte estrutura

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \left(\gamma^\mu i \partial_\mu - m_\psi \mathbb{I}_4 + \hat{\mathcal{Q}} \right) \psi + \text{H.c.} \quad (2.31)$$

Aqui ψ representa o espinor de Dirac, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ o seu conjugado e $\mathbb{I}_4$ a matriz identidade 4-dimensional. Os dois primeiros termos da densidade de Lagrange são os mesmos encontrados na teoria de Dirac e γ^μ representa as matrizes gama. Observe que restringimos o nosso estudo incluindo apenas termos quadráticos nos campos. Essa restrição nos permitirá obter uma teoria linear. Extensões não-lineares podem ser encontradas em [44, 101]. O operador $\hat{\mathcal{Q}}$ congrega todas as contribuições oriundas da violação da simetria de Lorentz e, em geral, pode ser tratado como uma contribuição perturbativa. Isto justifica-se, pois este operador representa pequenos desvios da situação usual. Sem perda de generalidade, assumimos que $\hat{\mathcal{Q}}$ obedece a condição de hermiticidade, isto é, $\hat{\mathcal{Q}} = \gamma^0 \hat{\mathcal{Q}}^\dagger \gamma^0$. No que concerne a sua estrutura, o operador $\hat{\mathcal{Q}}$ não depende das coordenadas do espaço-tempo. Isto nos garante que tensor energia-momento da teoria é conservado. Além disso, este objeto é construído de tal forma que os coeficientes que controlam a violação da simetria estão acoplados a 4-derivadas, ou seja:

$$\hat{\mathcal{Q}}^I = \sum_{d=3}^{\infty} \hat{\mathcal{Q}}^{I(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}} (i\partial_{\alpha_1})(i\partial_{\alpha_2}) \ldots (i\partial_{\alpha_{d-3}}), \quad (2.32)$$

onde o índice I designa a natureza espinorial do operador. Os coeficientes de controle $\hat{\mathcal{Q}}^{I(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$ possuem dimensão de massa $(4-d)$, são reais pelo critério de hermiticidade e estão contraídos a $(d-3)$ derivadas.

Após todas as considerações acima, podemos definir a estrutura geral do operador $\hat{\mathcal{Q}}$ explicitando agora a sua natureza espinorial. Em termos das 16 matrizes gama⁶, que são $\{\mathbb{I}_4, \gamma_\mu, \gamma_5, \gamma_5\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}\}$, poderemos identificar e classificar cada contribuição. Sendo assim, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{Q}} &= \sum_I \hat{\mathcal{Q}}^I \gamma_I, \\ &= \hat{\mathcal{S}} + i\hat{\mathcal{P}}\gamma_5 + \hat{\mathcal{V}}^\mu \gamma_\mu + \hat{\mathcal{A}}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (2.33)$$

Os operadores designados na equação acima são classificados como escalar, pseudo-escalar, vetorial, pseudovetorial e tensorial, respectivamente. Tal classificação reflete a maneira com a qual o bilinear $\bar{\psi} \hat{\mathcal{Q}}^I \psi$ comporta-se perante uma transformação de Lorentz. Assim como o operador $\hat{\mathcal{Q}}^I$, os 16 operadores designados pelo conjunto $\{\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{V}}^\mu, \hat{\mathcal{A}}^\mu, \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\}$ também são funções das derivadas $i\partial_\mu$ e possuem dimensão de massa 1. É conveniente ainda decompor o operador $\hat{\mathcal{Q}}$ de uma maneira mais sugestiva onde possamos também identificar os coeficientes que violam a simetria discreta CPT. Iniciaremos reescrevendo o operador de Dirac da seguinte forma:

$$\gamma^\mu p_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}} = \hat{\Gamma}^\mu p_\mu - \hat{M}, \quad (2.34)$$

onde $\hat{\Gamma}^\mu$ e $\hat{M}$ possuem a seguinte estrutura, a saber:

$$\hat{\Gamma}^\mu = \gamma^\mu + \hat{c}^{\nu\mu} \gamma_\nu + \hat{d}^{\nu\mu} \gamma_5 \gamma_\nu + \hat{e}^\mu + i\hat{f}^\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} \hat{g}^{\kappa\lambda\mu} \sigma_{\kappa\lambda}, \quad (2.35a)$$

$$\hat{M} = m_\psi + \hat{m} + i\hat{m}_5 \gamma_5 + \hat{a}^\mu \gamma_\mu + \hat{b}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{H}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}. \quad (2.35b)$$

Todos os operadores que congregam $\hat{\Gamma}^\mu$ são adimensionais, enquanto que aqueles que compõem $\hat{M}$ possuem dimensão de massa 1. De maneira geral, os operadores não-mínimos classificam-se da seguinte forma sob uma transformação CPT: os operadores $\hat{c}^{\mu\nu}$ e $\hat{d}^{\mu\nu}$ são CPT – pares, enquanto $\hat{e}^\mu$, $\hat{f}^\mu$ e $\hat{g}^{\kappa\lambda\mu}$ são CPT-ímpares, já os operadores $\hat{m}$, $\hat{m}_5$ e $\hat{H}^{\mu\nu}$ são CPT-pares, ao passo que $\hat{a}^\mu$ e $\hat{b}^\mu$ são CPT-ímpares.

Observando atentamente o comportamento dos covariantes bilineares sob a transformação $\mathcal{CPT}$, é possível constatar as seguintes regras gerais:

⁶ Uma apresentação mais detalhada sobre as matrizes gama é mostrada na seção A.1.

- Um bilinear fermiônico com n índices de Lorentz pares será CPT-par;
- Um bilinear fermiônico com n índices de Lorentz ímpares será CPT-ímpar;
- O mesmo aplica-se as 4-derivadas ∂_μ .

Esta regra geral é de grande utilidade na hora de classificar os novos operadores que modificam a equação de Dirac no contexto de altas derivadas, vide Apêndice C para mais detalhes.

Vemos, a partir da equação (2.34), que o operador $\hat{\Gamma}^\mu$ aparece contraído com o momento p_μ . Dessa forma, os operadores $\hat{c}^{\nu\mu}$, $\hat{d}^{\nu\mu}$, $\hat{e}^\mu$, $\hat{f}^\mu$ e $\hat{g}^{\kappa\lambda\mu}$ que o compõe também estão. Isso nos permite redefinir os operadores citados da seguinte maneira:

$$\hat{c}^\nu \equiv \hat{c}^{\nu\mu} p_\mu, \quad \hat{d}^\nu \equiv \hat{d}^{\nu\mu} p_\mu, \quad \hat{e} \equiv \hat{e}^\mu p_\mu, \quad \hat{f} \equiv \hat{f}^\mu p_\mu, \quad \hat{g}^{\kappa\lambda} \equiv \hat{g}^{\kappa\lambda\mu} p_\mu. \quad (2.36)$$

Reescrevendo o operador (2.34) em função das novas definições, obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^\mu p_\mu - \hat{M} &= \gamma^\mu p_\mu - m_\psi + (\hat{c}^\mu - \hat{a}^\mu) \gamma_\mu + (\hat{d}^\mu - \hat{b}^\mu) \gamma_5 \gamma_\mu \\ &\quad + (\hat{e} - \hat{m}) + i (\hat{f} - \hat{m}_5) \gamma_5 + \frac{1}{2} (\hat{g}^{\mu\nu} - \hat{H}^{\mu\nu}) \sigma_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Podemos agora comparar as contribuições da estrutura acima com a decomposição espinorial do operador $\hat{\mathcal{Q}}$. Fazendo isso, somos levados às seguintes definições:

$$\hat{\mathcal{S}} = \hat{e} - \hat{m}, \quad \hat{\mathcal{P}} = \hat{f} - \hat{m}_5, \quad \hat{\mathcal{V}}^\mu = \hat{c}^\mu - \hat{a}^\mu, \quad \hat{\mathcal{A}}^\mu = \hat{d}^\mu - \hat{b}^\mu, \quad \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} - \hat{H}^{\mu\nu}. \quad (2.38)$$

As definições acima tornam-se convenientes, por exemplo, no mapeamento observado entre soluções espinoriais perturbativas [55], ou seja, podemos obter novas soluções a partir de outras existentes através das relações abaixo:

$$\begin{aligned} \hat{e} &\mapsto -\hat{m}. \\ \hat{f} &\mapsto -\hat{m}_5. \\ &\vdots \\ \hat{g}^{\mu\nu} &\mapsto -\hat{H}^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

O mapeamento citado também será explorado de maneira detalhada no capítulo 5. Na tabela 1 resumimos as principais propriedades dos 10 operadores.

Uma vez definida a densidade de Lagrange para o setor de férmions modificado, precisamos agora caracterizar com mais profundidade as suas propriedades.

Operador	Tipo	d	CPT	Coeficientes
$\hat{m}$	Escalar	Ímpar ≥ 5	Par	$m^{(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{m}_5$	Pseudoescalar	Ímpar ≥ 5	Par	$m_5^{(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{a}^\mu$	Vetor	Ímpar ≥ 3	Ímpar	$a^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{b}^\mu$	Pseudovetor	Ímpar ≥ 3	Ímpar	$b^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{c}^\mu$	Vetor	Par ≥ 4	Par	$c^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{d}^\mu$	Pseudovetor	Par ≥ 4	Par	$d^{(d)\mu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{e}$	Escalar	Par ≥ 4	Ímpar	$e^{(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{f}$	Pseudoescalar	Par ≥ 4	Ímpar	$f^{(d)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{g}^{\mu\nu}$	Tensor	Par ≥ 4	Ímpar	$g^{(d)\mu\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$
$\hat{H}^{\mu\nu}$	Tensor	Ímpar ≥ 3	Par	$H^{(d)\mu\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}$

Tabela 1 – Classificação dos operadores definidos na equação (2.38) sob transformações de Lorentz e CPT [42]. A dimensão de cada operador, bem como os coeficientes de controle que os definem também são mostrados.

Tal descrição inicia-se com o cálculo das equações de Euler-Lagrange. As equações de campo, como são conhecidas, guardam informações a respeito da dinâmica dos campos. A equação de Dirac modificada obtida a partir da densidade de Lagrange (2.31) é mostrada a seguir:

$$\mathcal{D}\psi = (\gamma^\mu i\partial_\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}})\psi = 0. \quad (2.39)$$

É através da equação (2.39) que poderemos calcular tanto a relação de dispersão quanto os espinores. Estes objetos são essenciais para a descrição correta dos campos.

Iremos agora calcular um outro ingrediente muito importante, a saber: a equação de dispersão. A equação de dispersão está associada ao operador de campo modificado $\mathcal{D}$. Ela é obtida por meio da condição $\det \mathcal{D} = 0$. Ressaltamos que o operador de campo deve ser reescrito no espaço dos momentos, isto é, precisamos efetuar a seguinte substituição: $i\partial_\mu \mapsto p_\mu$. Antes de proceder com o cálculo explícito do determinante, precisamos reorganizar o operador de campo $\mathcal{D}$ de uma forma que nos possibilite encontrar o resultado desejado na forma covariante. Uma das etapas desta reorganização consiste em reescrever o operador de Dirac modificado em forma de bloco, isto é:

$$\mathcal{D} = \gamma_\mu p^\mu - m_\psi + \hat{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Cada entrada da matriz acima possui dimensão 2×2 . Para facilitar os cálculos, introduzimos a seguinte notação

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i), \quad (2.41)$$

onde σ^0 representa a matriz identidade em duas dimensões e σ^i corresponde a i -ésima matriz de Pauli. A matriz adjunta correspondente é representada por $\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i)$, e ambas satisfazem as seguintes identidades:

$$\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = \eta_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \bar{\sigma}^\kappa \sigma^\lambda, \quad (2.42)$$

$$\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu = \eta_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \sigma^\kappa \bar{\sigma}^\lambda. \quad (2.43)$$

Com essas definições, podemos reescrever a equação (2.40) na forma compacta

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_- & \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \\ \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu & \hat{\mathcal{S}}_+ \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \begin{pmatrix} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

onde fizemos uso das definições:

$$\hat{\mathcal{S}}_\pm = -m_\psi + \hat{\mathcal{S}} \pm i\hat{\mathcal{P}}, \quad \hat{\mathcal{V}}_\pm^\mu = p^\mu + \hat{\mathcal{V}}^\mu \pm \hat{\mathcal{A}}^\mu. \quad (2.45)$$

Podemos ainda reescrever a última parcela da equação (2.44) usando a relação $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu})$ juntamente com a identidade (2.42). Dessa maneira, obtemos:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_- & \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \\ \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu & \hat{\mathcal{S}}_+ \end{pmatrix} + \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \mathbb{G}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbb{G}_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

em que

$$\mathbb{G}_{11} = \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \sigma^\kappa \bar{\sigma}^\lambda = (\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} - i\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}) \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu, \quad (2.47)$$

$$\mathbb{G}_{22} = \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \bar{\sigma}^\kappa \sigma^\lambda = (\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} + i\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}) \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu, \quad (2.48)$$

onde usamos os resultados $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = 0$ e $\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda} = \tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$. Definindo agora os operadores

$$\hat{\mathcal{T}}_\pm^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \pm i\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}), \quad (2.49)$$

obtemos a seguinte versão compacta para o operador de campo $\mathcal{D}$, a saber:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu & \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \\ \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu & \hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Precisamos agora calcular o determinante do operador acima. Para tanto, usaremos a seguinte identidade [42]:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix} = \det(\mathbb{A}\mathbb{D}) + \det(\mathbb{B}\mathbb{C}) - \text{tr}(\bar{\mathbb{B}}\mathbb{A}\bar{\mathbb{C}}\mathbb{D}). \quad (2.51)$$

Substituindo os elementos presentes na equação (2.50), obtemos:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix} &= \det(\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu) \\ &+ \det \left[\left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu \right) \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) \right] \\ &- \text{tr} \left[\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \bar{\sigma}_\mu \left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu \right) \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \sigma_\mu \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Calcularemos separadamente cada um dos termos acima. A primeira parcela pode ser reescrita como

$$\det(\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu) = \det(\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu) \det(\hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu), \quad (2.53)$$

de onde obtemos o seguinte resultado

$$\det(\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu) = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{V}}_-^0 - \hat{\mathcal{V}}_-^3 & i\hat{\mathcal{V}}_-^2 - \hat{\mathcal{V}}_-^1 \\ -\hat{\mathcal{V}}_-^1 - i\hat{\mathcal{V}}_-^2 & \hat{\mathcal{V}}_-^0 + \hat{\mathcal{V}}_-^3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{V}}_+^0 - \hat{\mathcal{V}}_+^3 & i\hat{\mathcal{V}}_+^2 - \hat{\mathcal{V}}_+^1 \\ -\hat{\mathcal{V}}_+^1 - i\hat{\mathcal{V}}_+^2 & \hat{\mathcal{V}}_+^0 + \hat{\mathcal{V}}_+^3 \end{pmatrix}.$$

O cálculo do determinante nos fornece

$$\begin{aligned} \det(\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu) &= \left[(\hat{\mathcal{V}}_-^0)^2 - (\hat{\mathcal{V}}_-^1)^2 - (\hat{\mathcal{V}}_-^2)^2 - (\hat{\mathcal{V}}_-^3)^2 \right] \times \\ &\quad \left[(\hat{\mathcal{V}}_+^0)^2 - (\hat{\mathcal{V}}_+^1)^2 - (\hat{\mathcal{V}}_+^2)^2 - (\hat{\mathcal{V}}_+^3)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

O lado esquerdo pode ser reescrito de maneira mais compacta, isto é:

$$\det(\hat{\mathcal{V}}_-^\mu \sigma_\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\mu \bar{\sigma}_\mu) = \hat{\mathcal{V}}_-^2 \hat{\mathcal{V}}_+^2. \quad (2.55)$$

O segundo termo assume a forma

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{D}) = \det \left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu \right) \det \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right). \quad (2.56)$$

Calcularemos inicialmente o $\det \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu \right)$. Analisando separadamente o segundo termo entre parênteses, observamos que

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu. \quad (2.57)$$

Substituindo $\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = (\eta_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \bar{\sigma}^\kappa \sigma^\lambda)$ na segunda parcela, temos:

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda} \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\sigma}^\alpha \sigma^\beta \right). \quad (2.58)$$

Como $\eta_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda} = 0$, observamos que o termo em questão se reduz a

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{8} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda} \bar{\sigma}^\alpha \sigma^\beta, \quad (2.59a)$$

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{8} (\delta_{\alpha\lambda} \delta_{\kappa\beta} - \delta_{\alpha\kappa} \delta_{\beta\lambda}) \hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda} \bar{\sigma}^\alpha \sigma^\beta, \quad (2.59b)$$

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{8} \hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda} \bar{\sigma}^\lambda \sigma^\kappa + \frac{1}{8} \hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda} \bar{\sigma}^\kappa \sigma^\lambda, \quad (2.59c)$$

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{4} \hat{\mathcal{T}}_{\kappa\lambda} \bar{\sigma}^\lambda \sigma^\kappa, \quad (2.59d)$$

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = \frac{1}{4} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu. \quad (2.59e)$$

Efetando a soma de Einstein nos índices $\{\mu, \nu\}$, encontramos

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = \hat{\mathcal{T}}^{0i} \sigma_0 \sigma_i - \hat{\mathcal{T}}^{i0} \sigma_i \sigma_0 - \hat{\mathcal{T}}^{ij} \sigma_i \sigma_j. \quad (2.60)$$

Usando agora a identidade $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$, chegamos ao seguinte resultado:

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = 2 \hat{\mathcal{T}}^{0i} \sigma_0 \sigma_i - \hat{\mathcal{T}}^{ij} (\delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k), \quad (2.61)$$

$$\hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = 2 \left(\hat{\mathcal{T}}^{0k} - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \hat{\mathcal{T}}^{ij} \right) \sigma_k. \quad (2.62)$$

Somando sobre os índices $\{i, j, k\}$ e substituindo as matrizes de Pauli

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu &= 2 \left(\hat{\mathcal{T}}^{01} - i\hat{\mathcal{T}}^{23} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \left(\hat{\mathcal{T}}^{02} - i\hat{\mathcal{T}}^{31} \right) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + 2 \left(\hat{\mathcal{T}}^{03} - i\hat{\mathcal{T}}^{12} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{i}{2}$ e adicionando o operador $\hat{\mathcal{S}}_+$, temos:

$$\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_+ + i\hat{\mathcal{T}}^{03} + \hat{\mathcal{T}}^{12} & i\hat{\mathcal{T}}^{01} + \hat{\mathcal{T}}^{23} + \hat{\mathcal{T}}^{02} - i\hat{\mathcal{T}}^{31} \\ i\hat{\mathcal{T}}^{01} + \hat{\mathcal{T}}^{23} - \hat{\mathcal{T}}^{02} + i\hat{\mathcal{T}}^{31} & \hat{\mathcal{S}}_+ - i\hat{\mathcal{T}}^{03} - \hat{\mathcal{T}}^{12} \end{pmatrix}.$$

O determinante da expressão acima é calculado a seguir

$$\begin{aligned} \det \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) &= \hat{\mathcal{S}}_+^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{01} \right)^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{02} \right)^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{03} \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{T}}^{12} \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{T}}^{31} \right)^2 \\ &\quad - \left(\hat{\mathcal{T}}^{23} \right)^2 + 2i\hat{\mathcal{T}}^{01}\hat{\mathcal{T}}^{23} + 2i\hat{\mathcal{T}}^{02}\hat{\mathcal{T}}^{31} + 2i\hat{\mathcal{T}}^{03}\hat{\mathcal{T}}^{12}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

ou ainda

$$\det \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) = \hat{\mathcal{S}}_+^2 - \hat{\mathcal{T}}_+^2. \quad (2.66)$$

Procedendo de maneira inteiramente análoga, o primeiro termo da equação (2.56) tem a seguinte estrutura

$$\begin{aligned} \det \left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) &= \hat{\mathcal{S}}_-^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{01} \right)^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{02} \right)^2 + \left(\hat{\mathcal{T}}^{03} \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{T}}^{12} \right)^2 - \left(\hat{\mathcal{T}}^{31} \right)^2 \\ &\quad - \left(\hat{\mathcal{T}}^{23} \right)^2 - 2i\hat{\mathcal{T}}^{01}\hat{\mathcal{T}}^{23} - 2i\hat{\mathcal{T}}^{02}\hat{\mathcal{T}}^{31} - 2i\hat{\mathcal{T}}^{03}\hat{\mathcal{T}}^{12}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

ou de forma compacta

$$\det \left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) = \hat{\mathcal{S}}_-^2 - \hat{\mathcal{T}}_-^2. \quad (2.68)$$

Substituindo os resultados (2.66) e (2.68) em (2.56), obtemos que

$$\det \left[\left(\hat{\mathcal{S}}_- + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_-^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) \left(\hat{\mathcal{S}}_+ + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{T}}_+^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \right) \right] = \left(\hat{\mathcal{S}}_-^2 - \hat{\mathcal{T}}_-^2 \right) \left(\hat{\mathcal{S}}_+^2 - \hat{\mathcal{T}}_+^2 \right). \quad (2.69)$$

O termo remanescente pode ser reescrito como

$$\text{tr} \left(\bar{\mathbb{B}} \mathbb{A} \bar{\mathbb{C}} \mathbb{D} \right) = \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \hat{\mathcal{S}}_- \hat{\mathcal{S}}_+ \text{tr} \left(\bar{\sigma}_\mu \sigma_\lambda \right) + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{V}}_-^\mu \hat{\mathcal{V}}_+^\lambda \hat{\mathcal{S}}_+ \hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa} \text{tr} \left(\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \bar{\sigma}_\kappa \sigma_\lambda \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\hat{\mathcal{V}}_-^\mu\hat{\mathcal{V}}_+^\lambda\hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa}\hat{\mathcal{T}}_+^{\rho\sigma}\text{tr}(\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\kappa\sigma_\lambda\bar{\sigma}_\rho\sigma_\sigma) \\
& +\frac{i}{2}\hat{\mathcal{V}}_-^\mu\hat{\mathcal{V}}_+^\lambda\hat{\mathcal{S}}_-\hat{\mathcal{T}}_+^{\rho\sigma}\text{tr}(\bar{\sigma}_\mu\sigma_\lambda\bar{\sigma}_\rho\sigma_\sigma).
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Fazendo uso das identidades

$$\text{tr}(\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu) = 2\eta_{\mu\nu} \tag{2.71a}$$

$$\text{tr}(\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\kappa\sigma_\lambda) = 2\eta_{\mu\nu\kappa\lambda}, \tag{2.71b}$$

$$\text{tr}(\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\kappa\sigma_\lambda\bar{\sigma}_\rho\sigma_\sigma) = 2\eta_{\mu\nu\kappa}{}^\tau\eta_{\tau\lambda\rho\sigma}, \tag{2.71c}$$

$$\eta_{\mu\nu\kappa\lambda}\hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa} = 4\hat{\mathcal{T}}_{-\mu\lambda}, \quad \eta_{\mu\nu\kappa\lambda}\hat{\mathcal{T}}_+^{\kappa\lambda} = -4\hat{\mathcal{T}}_{+\mu\nu}, \tag{2.71d}$$

$$\eta_{\mu\nu\kappa\lambda} = \eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda} - \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa} - i\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}, \tag{2.71e}$$

a equação (2.70) assume a seguinte forma

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\bar{\mathbb{B}}\mathbb{A}\bar{\mathbb{C}}\mathbb{D}) &= 2\hat{\mathcal{V}}_-^\mu\hat{\mathcal{V}}_+^\lambda\hat{\mathcal{S}}_-\hat{\mathcal{S}}_+\eta_{\mu\lambda} + i\hat{\mathcal{V}}_-^\mu\hat{\mathcal{V}}_+^\lambda\hat{\mathcal{S}}_+\hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa}\eta_{\mu\nu\kappa\lambda} + i\hat{\mathcal{V}}_-^\mu\hat{\mathcal{V}}_+^\lambda\hat{\mathcal{S}}_-\hat{\mathcal{T}}_+^{\rho\sigma}\eta_{\mu\lambda\rho\sigma} \\
& -\frac{1}{2}\hat{\mathcal{V}}_-^\mu\hat{\mathcal{V}}_+^\lambda\hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa}\hat{\mathcal{T}}_+^{\rho\sigma}\eta_{\mu\nu\kappa}{}^\tau\eta_{\tau\lambda\rho\sigma}.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Por fim, usando as relações $\eta_{\mu\nu\kappa\lambda}\hat{\mathcal{T}}_-^{\nu\kappa} = 4\hat{\mathcal{T}}_{-\mu\lambda}$ e $\eta_{\mu\nu\kappa\lambda}\hat{\mathcal{T}}_+^{\kappa\lambda} = -4\hat{\mathcal{T}}_{+\mu\nu}$, obtemos

$$\text{tr}(\bar{\mathbb{B}}\mathbb{A}\bar{\mathbb{C}}\mathbb{D}) = 2\hat{\mathcal{V}}_-^\mu\hat{\mathcal{V}}_+^\lambda\hat{\mathcal{S}}_-\hat{\mathcal{S}}_+\eta_{\mu\lambda} + 4i\hat{\mathcal{V}}_-^\mu\hat{\mathcal{V}}_+^\lambda\hat{\mathcal{S}}_+\hat{\mathcal{T}}_{-\mu\lambda} - 4i\hat{\mathcal{V}}_-^\mu\hat{\mathcal{V}}_+^\lambda\hat{\mathcal{S}}_-\hat{\mathcal{T}}_{+\mu\lambda} + 8\hat{\mathcal{V}}_-^\mu\hat{\mathcal{V}}_+^\lambda\hat{\mathcal{T}}_{-\mu\alpha}\hat{\mathcal{T}}_+^{\alpha\lambda}. \tag{2.73}$$

O resultado acima pode ser posto em uma forma mais compacta, a saber:

$$\text{tr}(\bar{\mathbb{B}}\mathbb{A}\bar{\mathbb{C}}\mathbb{D}) = 2\hat{\mathcal{V}}_- \cdot (\hat{\mathcal{S}}_- + 2i\hat{\mathcal{T}}_-) \cdot (\hat{\mathcal{S}}_+ - 2i\hat{\mathcal{T}}_+) \cdot \hat{\mathcal{V}}_+. \tag{2.74}$$

Juntando agora os resultados das equações (2.55), (2.69) e (2.74), encontramos a forma final para o determinante do operador de campo:

$$\mathcal{R} = (\hat{\mathcal{S}}_-^2 - \hat{\mathcal{T}}_-^2)(\hat{\mathcal{S}}_+^2 - \hat{\mathcal{T}}_+^2) + \hat{\mathcal{V}}_-^2\hat{\mathcal{V}}_+^2 - 2\hat{\mathcal{V}}_- \cdot (\hat{\mathcal{S}}_- + 2i\hat{\mathcal{T}}_-) \cdot (\hat{\mathcal{S}}_+ - 2i\hat{\mathcal{T}}_+) \cdot \hat{\mathcal{V}}_+ = 0. \tag{2.75}$$

Agora que conhecemos a equação de dispersão, somos capazes de calcular as relações de dispersão. No entanto, como a equação de dispersão (2.75) é um polinômio de ordem arbitrária na variável p_0 , não é possível obter uma solução exata para uma dimensão de massa d arbitrária. Porém, como já mencionado, os operadores que controlam a violação da simetria de Lorentz podem ser tratados de

maneira perturbativa. Neste regime é possível obter quatro soluções modificadas. Nosso objetivo agora é expandir a equação de dispersão (2.75) mantendo apenas as primeiras correções não-nulas dos operadores $\{\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{V}}^\mu, \hat{\mathcal{A}}^\mu, \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\}$ que nos permitam obter correções em primeira ordem. Procedendo desta forma, obtemos a seguinte expansão

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \approx & m_\psi^4 + p^4 + 4p^2 p \cdot \hat{\mathcal{V}} - 4m_\psi^3 \hat{\mathcal{S}} + 2m_\psi^2 \hat{\mathcal{P}}^2 - m_\psi^2 \hat{\mathcal{T}}_+^2 - m_\psi^2 \hat{\mathcal{T}}_-^2 + 2p^2 \hat{\mathcal{A}}^2 \\ & - 4(p \cdot \hat{\mathcal{A}})^2 - 2m_\psi^2 p^2 + 4m_\psi p^2 \hat{\mathcal{S}} - 4m_\psi p \cdot \hat{\mathcal{V}} - 2p^2 \hat{\mathcal{P}}^2 + 2m_\psi^2 \hat{\mathcal{A}}^2 \\ & - 8m_\psi i p \cdot \hat{\mathcal{T}}_+ \cdot \hat{\mathcal{A}} + 8m_\psi i p \cdot \hat{\mathcal{T}}_- \cdot \hat{\mathcal{A}} - 8p \cdot \hat{\mathcal{T}}_- \cdot \hat{\mathcal{T}}_+ \cdot p. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Simplificando o resultado acima, encontramos que

$$\mathcal{R} \approx \left(p^2 - m_\psi^2 + 2m_\psi \hat{\mathcal{S}}_{i,j} + 2p \cdot \hat{\mathcal{V}} \right)^2 - 4\mathcal{Y}^2, \quad (2.77)$$

onde foi definida a grandeza

$$\mathcal{Y}^2 = (p \cdot \hat{\mathcal{A}})^2 - m_\psi^2 \hat{\mathcal{A}}^2 - 2m_\psi p \cdot \tilde{\mathcal{T}} \cdot \hat{\mathcal{A}} + p \cdot \tilde{\mathcal{T}} \cdot p. \quad (2.78)$$

Além disso, fizemos uso das seguintes identidades

$$p \cdot \hat{\mathcal{T}}_- \cdot \hat{\mathcal{T}}_+ \cdot p = \frac{1}{4} p \cdot \hat{\mathcal{T}} \cdot \hat{\mathcal{T}} \cdot p + \frac{1}{4} p \cdot \tilde{\mathcal{T}} \cdot \tilde{\mathcal{T}} \cdot p, \quad (2.79a)$$

$$p \cdot \hat{\mathcal{T}} \cdot \hat{\mathcal{T}} \cdot p = p \cdot \tilde{\mathcal{T}} \cdot \tilde{\mathcal{T}} \cdot p + \frac{1}{2} p^2 \tilde{\mathcal{T}}^2, \quad (2.79b)$$

$$p \cdot \hat{\mathcal{T}}_- \cdot \hat{\mathcal{T}}_+ \cdot p = \frac{1}{2} p \cdot \tilde{\mathcal{T}} \cdot \tilde{\mathcal{T}} \cdot p + \frac{1}{8} p^2 \tilde{\mathcal{T}}^2. \quad (2.79c)$$

Em primeira ordem, a equação de dispersão (2.77) pode ser reescrita como

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m_\psi^2 \approx 2 \left(m_\psi \hat{\mathcal{S}} - p \cdot \hat{\mathcal{V}} \pm \mathcal{Y} \right). \quad (2.80)$$

Resolvendo a equação (2.80) para $p_0 \equiv E$, obtemos as relações de dispersão desejadas⁷:

$$E \approx E_0 - \frac{m_\psi \hat{\mathcal{S}} - p \cdot \hat{\mathcal{V}}}{E_0} \pm \frac{\mathcal{Y}}{E_0}, \quad (2.81)$$

onde empregamos a notação $E_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_\psi^2}$. Deve-se observar que no resultado acima usamos a aproximação $p^\mu \approx (E_0, \mathbf{p})$. Sendo assim, todos os 4-momentos

⁷ Destacamos que toda essa análise detalhada, e exaustiva, será relevante para o desenvolvimento e compreensão dos resultados apresentados no capítulo 3.

que aparecem contraídos aos coeficientes de controle devem ser substituídos por essa aproximação. No limite em que os operadores que violam a simetria de Lorentz anulam-se, recuperamos as soluções usuais da equação de Dirac livre. Uma notória peculiaridade que surge nas relações de dispersão, consiste na quebra da degenerescência de spin. Essa dependência no spin é causada pela presença dos operadores pseudovetorial e tensorial. Como podemos observar na equação (2.81), esse efeito caracteriza-se pela presença de duas relações de dispersão distintas, uma para partículas com *spin-up* e outra para partículas com *spin-down*. Por outro lado, observamos que os operadores escalar e vetorial são responsáveis apenas por deslocar os níveis de energia, porém, preservam a degenerescência de spin presente nas soluções da teoria livre. Uma outra propriedade importante a destacar é a quebra da degenerescência entre partículas e antipartículas na presença de operadores CPT-ímpares. Por fim, vemos que o operador $\hat{\mathcal{P}}$ não contribui em primeira ordem.

Até o momento, tratamos de todas as possíveis modificações na equação de Dirac sem nos preocupar, no entanto, se tais coeficientes que controlam a violação da simetria são fisicamente observáveis. Para entender melhor quais coeficientes são realmente factíveis, devemos efetuar uma redefinição no campo ψ e verificar quais operadores podem ser eliminados. A redefinição procurada é mostrada a seguir:

$$\psi = \exp(ix^\mu v_\mu) \psi'. \quad (2.82)$$

Vemos que os campos diferem apenas por uma fase dependente da posição x^μ , ao passo que v_μ é um 4-vetor constante arbitrário que pode ser escolhido de modo a eliminar constantes indesejáveis. Procedendo com a redefinição, podemos definir um conjunto de operadores efetivos que representam os observáveis físicos da teoria quadrática [42]. Estes operadores efetivos possuem a seguinte forma

$$\hat{\mathcal{S}}_{\text{eff}} = 0, \quad \hat{\mathcal{P}}_{\text{eff}} = 0, \quad \hat{\mathcal{A}}_{\text{eff}}^\mu = 0, \quad (2.83)$$

$$\hat{\mathcal{V}}_{\text{eff}}^\mu = \left(\hat{\mathcal{V}}^\mu + \frac{1}{m_\psi} p^\mu \hat{\mathcal{S}} \right), \quad (2.84)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\text{eff}}^{\mu\nu} = \left(\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} + \frac{1}{m_\psi} p^{[\mu} \hat{\mathcal{A}}^{\nu]} \right). \quad (2.85)$$

Como podemos notar a partir dos resultados acima, a fenomenologia dos operadores escalares é absorvida em uma contribuição vetorial, ao passo que as contribuições pseudovetoriais emergem dos operadores tensoriais. Essas redefinições também serão importantes na apresentação dos resultados do capítulo 5. Vale a pena mencionar

ainda que uma outra redefinição de campos mapeia o operador mínimo $f^\mu f^\nu$ ao operador mínimo $c^{\mu\nu}$ [102]. Esta equivalência significa que o operador f não se diferencia do operador c .

Por fim, gostaríamos de destacar alguns trabalhos desenvolvidos no setor fermiônico. Na referência [103], por exemplo, estudou-se a influência dos coeficientes a^μ e b^μ na equação de Dirac e no seu limite não-relativístico. Já na referência [104], os autores investigaram como a estabilidade e a causalidade se comportam em teorias que violam tanto a simetria de Lorentz quanto CPT. Este trabalho aborda sob quais circunstâncias o setor fermiônico mínimo do MPE preserva a estabilidade e a causalidade. Outro resultado interessante estudado em [105] diz respeito à indução de fases geométricas e correntes de spin pelo coeficiente de spin não-degenerado $d^{\mu\nu}$. Testes envolvendo muons, átomos de hidrogênio e anti-hidrogênio também são encontrados na literatura. Por exemplo, na referência [106] os momentos magnéticos anômalos de elétrons e pósitrons foram usados para testar a simetria CPT impondo, assim, limites aos coeficientes de controle. Em [107, 108] os autores estudaram a influência da violação da simetria de Lorentz e CPT em átomos de hidrogênio e anti-hidrogênio e em outros sistemas similares. Testes com muons também foram analisados em [109, 110]. Testes com polarização de spin em sólidos também foram estudados [111]. Destacamos ainda os testes envolvendo comparações de relógios em [112]. Em [55] foram calculadas as soluções espinoriais perturbativas para a equação de Dirac modificada. Neste trabalho, um estudo minucioso com o intuito de catalogar todas as soluções para os coeficientes do MPE-fermiônico foi realizado. Um trabalho complementar foi desenvolvido em [113], onde foi possível investigar a radiação de Cherenkov⁸ produzida pelos coeficientes de spin degenerados e não-degenerados. Como pode-se observar, a literatura reportando estudos do setor de férmions é bastante vasta. No entanto, um compilado dos *bounds* mais restritivos para os coeficientes mínimos e não-mínimos pode ser encontrado em [64].

2.2.3 Setor dos Neutrinos

Queremos agora apresentar os conceitos essenciais do setor dos neutrinos. Neutrinos são partículas de spin $\frac{1}{2}$ e, portanto, sua dinâmica é descrita pela equação de Dirac. É sabido que, até o momento, existem três neutrinos, são eles: neutrino do elétron, neutrino do tau e o neutrino do muon. Assim como estudado nas subseções

⁸ Uma partícula carregada movendo-se com velocidade constante em um meio macroscópico emite radiação Cherenkov se sua velocidade v exceder a velocidade de fase v_{ph} da luz no meio material.

anteriores, também podemos implementar a quebra da simetria de Lorentz neste setor. Por serem descritos por um campo espinorial, a construção deste modelo é bastante similar ao encontrado na subseção 2.2.2.

A fim de tornar a nossa descrição mais geral possível, vamos considerar um conjunto de campos espinoriais designados por ψ_a , onde $a = 1, 2, \dots, N$. Como a natureza dos neutrinos ainda não é conhecida, isto é, não sabemos se eles são neutrinos de Dirac ou de Majorana⁹, levaremos em consideração ambos os casos, sendo inclusive possível uma mistura entre os dois tipos de neutrinos. Para incluir as duas naturezas possíveis em uma única estrutura, é conveniente combinar os N espinores ψ_a junto com os espinores conjugados de carga $\psi_a^C = C\bar{\psi}_a^T$. Dessa maneira, introduzimos um multiplete espinorial $2N$ -dimensional dado por

$$\Psi_A = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_a^C \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

onde A cobre o intervalo $1, 2, \dots, 2N$. Como os acoplamentos de Majorana são permitidos, existe uma redundância em Ψ que obedece a seguinte relação:

$$\Psi^C = \mathcal{C}\Psi, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_N \\ \mathbf{1}_N & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

A matriz $\mathcal{C}$ de dimensão $2N \times 2N$ é definida em blocos de dimensão $N \times N$ no espaço dos sabores.

Com todas as informações prestadas, podemos agora apresentar a densidade de Lagrange que incorpora a violação de Lorentz e CPT no setor de neutrinos, a saber

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_A \left(\gamma^\mu i \partial_\mu \delta_{AB} - M_{AB} + \hat{\mathcal{Q}}_{AB} \right) \Psi_B + \text{H.c.} \quad (2.88)$$

A primeira parcela corresponde ao termo cinético usual, enquanto que a segunda leva em consideração a massa dos neutrinos. O último termo congrega os operadores encarregados por controlar a forma com a qual a violação da simetria de Lorentz é introduzida no modelo. Gostaríamos de ressaltar ainda que o operador de campo é uma matriz de dimensão 4×4 no espaço dos espinores e uma matriz de dimensão $2N \times 2N$ no espaço dos sabores, portanto, a equação para o setor dos neutrinos é uma matriz de dimensão $8N \times 8N$.

⁹ Uma propriedade peculiar que caracteriza os neutrinos de Majorana reside no fato de que partículas e antipartículas são iguais. A descrição de tais campos fermiônicos foi iniciada por Majorana em 1937 [114].

A equação de Euler-Lagrange da teoria é mostrada a seguir:

$$\left(\gamma^\mu i\partial_\mu \delta_{AB} - M_{AB} + \hat{\mathcal{Q}}_{AB}\right) \Psi_B = 0. \quad (2.89)$$

O operador $\hat{\mathcal{Q}}_{AB}$ tem uma decomposição muito semelhante àquela apresentada na equação (2.33), isto é,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Q}}_{AB} &= \sum_I \hat{\mathcal{Q}}_{AB}^I \gamma_I, \\ &= \hat{\mathcal{S}}_{AB} + i\hat{\mathcal{P}}_{AB} \gamma_5 + \hat{\mathcal{V}}_{AB}^\mu \gamma_\mu + \hat{\mathcal{A}}_{AB}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}_{AB}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Assim como no setor dos férmions, podemos reescrever a equação de campo explicitando a natureza CPT de cada operador. Para tanto, vamos reformular o operador de campo da seguinte forma

$$\gamma^\mu p_\mu \delta_{AB} - M_{AB} + \hat{\mathcal{Q}}_{AB} = \hat{\Gamma}_{AB}^\mu p_\mu - \hat{M}_{AB}, \quad (2.91)$$

onde $\hat{\Gamma}_{AB}^\mu$ e $\hat{M}_{AB}$ possuem a estrutura abaixo:

$$\hat{\Gamma}^\mu = \gamma^\mu \delta_{AB} + \hat{c}_{AB}^{\nu\mu} \gamma_\nu + \hat{d}_{AB}^{\nu\mu} \gamma_5 \gamma_\nu + \hat{e}_{AB}^\mu + i\hat{f}_{AB}^\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} \hat{g}_{AB}^{\kappa\lambda\mu} \sigma_{\kappa\lambda}, \quad (2.92a)$$

$$\hat{M} = M_{AB} + \hat{m}_{AB} + i\hat{m}_{5AB} \gamma_5 + \hat{a}_{AB}^\mu \gamma_\mu + \hat{b}_{AB}^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{H}_{AB}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}. \quad (2.92b)$$

A classificação dos operadores acima segue as mesmas regras daqueles apresentados na subseção 2.2.2.

Podemos aproveitar a propriedade (2.87) para explicitar também a natureza “Dirac” e “Majorana” de cada componente dos operadores $\{\hat{\mathcal{S}}_{AB}, \hat{\mathcal{P}}_{AB}, \hat{\mathcal{V}}_{AB}^\mu, \hat{\mathcal{A}}_{AB}^\mu, \hat{\mathcal{T}}_{AB}^{\mu\nu}\}$. Aplicando essa propriedade, temos

$$\hat{\mathcal{Q}} = (-1)^{d-3} \mathcal{C} \hat{\mathcal{Q}}^T \mathcal{C}^{-1}, \quad (2.93)$$

onde a operação de transposição age em ambos os espaços. Esta condição nos fornece o seguinte resultado

$$\hat{\mathcal{S}} = (-1)^{d+1} \mathcal{C} \hat{\mathcal{S}}^T \mathcal{C}, \quad \hat{\mathcal{P}} = (-1)^{d+1} \mathcal{C} \hat{\mathcal{P}}^T \mathcal{C}, \quad (2.94a)$$

$$\hat{\mathcal{V}}^\mu = (-1)^{d+1} \mathcal{C} \left(\hat{\mathcal{V}}^\mu\right)^T \mathcal{C}, \quad \hat{\mathcal{A}}^\mu = (-1)^{d+1} \mathcal{C} \left(\hat{\mathcal{A}}^\mu\right)^T \mathcal{C}, \quad (2.94b)$$

$$\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = (-1)^{d+1} \mathcal{C} \left(\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\right)^T \mathcal{C}, \quad (2.94c)$$

onde a transposição agora é efetuada apenas no espaço dos sabores. Calculando cada contribuição acima, obtemos a seguinte estrutura

$$\hat{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_D & \hat{\mathcal{S}}_M \\ \hat{\mathcal{S}}_M^\dagger & (-1)^{d+1} \hat{\mathcal{S}}_D^T \end{pmatrix}, \quad (2.95a)$$

$$\hat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{P}}_D & \hat{\mathcal{P}}_M \\ \hat{\mathcal{P}}_M^\dagger & (-1)^{d+1} \hat{\mathcal{P}}_D^T \end{pmatrix}, \quad (2.95b)$$

$$\hat{\mathcal{V}}^\mu = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{V}}_D^\mu & \hat{\mathcal{V}}_M^\mu \\ (\hat{\mathcal{V}}_M^\mu)^\dagger & (-1)^{d+1} (\hat{\mathcal{V}}_D^\mu)^T \end{pmatrix}, \quad (2.95c)$$

$$\hat{\mathcal{A}}^\mu = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{A}}_D^\mu & \hat{\mathcal{A}}_M^\mu \\ (\hat{\mathcal{A}}_M^\mu)^\dagger & (-1)^{d+1} (\hat{\mathcal{A}}_D^\mu)^T \end{pmatrix}, \quad (2.95d)$$

$$\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{T}}_D^{\mu\nu} & \hat{\mathcal{T}}_M^{\mu\nu} \\ (\hat{\mathcal{T}}_M^{\mu\nu})^\dagger & (-1)^{d+1} (\hat{\mathcal{T}}_D^{\mu\nu})^T \end{pmatrix}, \quad (2.95e)$$

em que cada elemento representa um bloco de dimensão $N \times N$ e os subscritos “D” e “M” designam Dirac e Majorana, respectivamente. Como podemos observar a partir das decomposições acima, os operadores de Majorana são os únicos responsáveis pela mistura entre neutrinos de Dirac e neutrinos de Majorana. Portanto, se fizermos tais contribuições identicamente nulas, é possível desacoplar e estudar separadamente os dois tipos de neutrinos.

O modelo geral descrito acima tem sido largamente empregado na tentativa de se estabelecer limites para os coeficientes que controlam a intensidade da violação da simetria de Lorentz e CPT. Por exemplo, muitos resultados interessantes foram observados na fenomenologia das oscilações dos neutrinos¹⁰. Este fenômeno tão intrigante foi observado em modelos de neutrinos não-massivos [41]. Os resultados reportados nesta referência seriam um indício de que a violação da simetria de Lorentz pode causar tais efeitos. Na referência [116], os autores estudaram uma alternativa para as oscilações de neutrinos baseadas no setor renormalizável do MPE e consistente com dados experimentais. Já na referência [117], os efeitos de oscilações considerados foram entre neutrino-antineutrino. Na referência [118, 119] foi analisado um modelo consistente com dados experimentais que reproduz

¹⁰ Oscilação de neutrinos é um fenômeno da mecânica quântica predito teoricamente por Bruno Pontecorvo em 1957 [115], segundo o qual um neutrino com um sabor leptônico específico (elétron, múon ou tau) pode ser detectado posteriormente com um sabor diferente. A probabilidade de medir um sabor particular de um neutrino varia à medida que este se propaga.

naturalmente em sua estrutura as anomalias de baixa energia, além das oscilações neutrino-antineutrino do tipo MiniBooNE. Muito mais pode ser encontrado na vasta literatura sobre neutrinos e o MPE [120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137]. Todos os *bounds* obtidos para os coeficientes do setor de neutrinos até o presente momento estão compilados no *data tables* [64].

Muito embora a referência [41] tenha feito um estudo minucioso do setor dos neutrinos, este trabalho não fornece uma análise detalhada sobre as relações de dispersão. Iremos apresentar no capítulo 3 uma proposta sistemática que nos permite obter a equação de dispersão, bem como uma forma geral para a expansão perturbativa das relações de dispersão.

2.3 Violação da Simetria de Lorentz em outros cenários

A seguir, iremos estudar dois cenários onde a violação da simetria de Lorentz faz-se presente. O primeiro diz respeito a sistemas planares obtidos a partir do MPE através de uma técnica conhecida como redução dimensional. O segundo cenário tem relação com a descrição clássica de uma partícula pontual na presença de um campo de fundo constante. Apresentaremos um mapeamento entre o formalismo de campos para uma partícula e a descrição clássica-relativística de uma partícula pontual.

2.3.1 Redução Dimensional

A eletrodinâmica planar tem sido objeto de intenso estudo nos últimos anos. Suas aplicações em matéria condensada [138, 139, 140] e defeitos topológicos, tais como vórtices e sólitons [141, 142, 143, 144, 145, 146, 147] são alguns dos exemplos de sua versatilidade. A teoria plana mais conhecida e amplamente estudada é sem dúvidas a teoria de Chern-Simons. Proposta inicialmente por S.S. Chern e J. Simons [148], o termo de Chern-Simons possui a seguinte estrutura:

$$\mathcal{S}_{\text{CS}} = \frac{\theta}{2} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (2.96)$$

onde θ é um parâmetro que possui dimensão de massa um e $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ é o símbolo de Levi-Civita em $(1+2)$ -dimensões.

Muito embora não seja tão óbvio, o termo de Chern-Simons é invariante de calibre sob certas condições. Vejamos o que acontece quando aplicamos a transformação de calibre $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \omega$:

$$\mathcal{S}_{\text{CS}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{CS}} + \frac{\theta}{2} \int d^3x \partial_\mu (\omega \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho). \quad (2.97)$$

Vemos que após a transformação um novo termo surge na ação. Esse termo extra pode ser reescrito como uma integral de superfície com o auxílio do teorema de Gauss. Na situação em que os campos anulam-se na fronteira, o termo de superfície não contribui e, dessa forma, a ação torna-se invariante de calibre. No entanto, nos casos em que as condições de contorno não permitem negligenciá-lo, então tal contribuição passa a ser relevante e o termo de Chern-Simons deixa de ser invariante de calibre [138].

Outro modelo planar muito interessante surge da junção do termo de Maxwell em $(1+2)$ -dimensões e o termo de Chern-Simons [149]. A densidade de Lagrange deste modelo é mostrada a seguir:

$$\mathcal{L}_{\text{MCS}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (2.98)$$

Como o parâmetro θ possui dimensão de massa e o termo de Chern-Simons é invariante de calibre, temos então uma teoria topologicamente massiva para o campo de calibre A_μ (*topologically massive gauge theory*). O termo topológico tem sua origem no estudo da versão não-abeliana¹¹ da teoria e no fato da geração de massa do campo de calibre não estar atrelada ao mecanismo de Higgs, isto é, a uma quebra espontânea de simetria. É importante ressaltar que a massa do campo de calibre adquirida via termo de Chern-Simons é completamente independente da geração de massa via mecanismo de Higgs. É possível ainda adicionar à equação (2.98) o campo de Higgs ϕ acoplado minimamente com o campo de calibre. Essa junção dá origem a seguinte densidade de Lagrange:

$$\mathcal{L}_{\text{MCSH}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho + (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - V(|\phi|), \quad (2.99)$$

Podemos identificar a massa que advém do campo de Higgs após a quebra de

¹¹ Uma discussão mais aprofundada sobre as origens topológicas e sobre a versão não-abeliana da teoria de Chern-Simons pode ser encontrada em [138, 149]

simetria¹² através dos pólos do propagador [150]

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu} = & \frac{p^2 + m_H^2}{(p^2 - m_+^2)(p^2 - m_-^2)} \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 - \xi m_H^2} - \frac{i\theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho}{p^2 - m_H^2} \right] \\ & + \frac{\xi p_\mu p_\nu (p^2 - \theta^2 - m_H^2)}{(p^2 - m_+^2)(p^2 - m_-^2)(p^2 - \xi m_H^2)}, \end{aligned} \quad (2.100)$$

onde ξ representa o parâmetro de fixação de calibre, $m_H^2 = 2v^2$ corresponde a massa de Higgs e

$$m_{\pm} = \frac{\theta}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4m_H^2}{\theta^2}} \pm 1 \right). \quad (2.101)$$

Embora tenhamos apresentado o mecanismo de Higgs no contexto da teoria de Maxwell-Chern-Simons, existe na literatura a situação em que a quebra de simetria ocorre no modelo contendo apenas o termo de Chern-Simons [151], ou seja,

$$\mathcal{L}_{\text{CSH}} = \frac{\theta}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho + (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - V(|\phi|), \quad (2.102)$$

que nos fornece o seguinte propagador [138]:

$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{1}{p^2 - \left(\frac{2v^2}{\theta}\right)^2} \left[\left(\frac{2v^2}{\theta}\right) \eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{2v^2} - \frac{i}{\theta} \varepsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho \right]. \quad (2.103)$$

Outro estudo interessante surge do acoplamento do termo de Chern-Simons com o campo de matéria. Dessa junção surgem as “partículas”¹³ conhecidas na literatura como anyons [152, 153]. Estas partículas apresentam uma peculiaridade: satisfazem uma estatística fracionária¹⁴ [154, 155, 156]. A mecânica quântica de

¹² O potencial $V(|\phi|)$ possui um mínimo não-trivial em $\langle \phi \rangle = v$. Após a quebra espontânea da simetria, o vácuo é escolhido. Como ϕ é um campo complexo, podemos avaliar o comportamento de ϕ em torno do mínimo escolhido da seguinte forma:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \chi(x) + i\psi(x)],$$

onde $\chi(x)$ e $\psi(x)$ são campos reais e são considerados pequenas perturbações. Substituindo esta perturbação na densidade de Lagrange e expandindo até segunda ordem nos campos, podemos identificar os coeficientes que acompanham os termos quadráticos como sendo a massa que cada campo adquire após a quebra da simetria.

¹³ Na verdade, anyons são quasipartículas.

¹⁴ Vale a pena ressaltar que a teoria de Chern-Simons acoplada a um campo de matéria tem como resultado a geração de anyons. No entanto, anyons são objetos mais gerais e não estão

um sistema composto por N -anyon pode ser tratado da maneira usual como uma teoria quântica de campos não-relativística composto por N partículas [152, 157]. Além disso, estas partículas desempenham um papel muito importante no efeito Hall quântico fracionário [158, 159, 160, 161].

Gostaríamos ainda de destacar uma extensão incluindo altas derivadas na teoria de Maxwell-Chern-Simons proposta em 1999 por Deser e Jackiw [162]. O termo que caracteriza essa extensão possui a forma $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \partial^\mu A_\alpha) (\partial_\beta A_\gamma)$. Na referência [163] a quantização canônica, a causalidade e a unitariedade desta extensão foram estudadas com bastante detalhes. Foi observado que a teoria é caracterizada por uma métrica indefinida no espaço de Hilbert, porém, foi mostrado que a microcausalidade, bem como a unitariedade até a ordem de um *loop* são conservadas quando a prescrição de Lee-Wick é utilizada.

Além dos modelos apresentados acima, a eletrodinâmica planar, também conhecida como QED₃, tem sido largamente investigada em outros cenários. Por exemplo, estudos mostrando a possibilidade de estados ligados entre elétron-elétron em modelos P-pares foram feitos em [164]. Destacamos ainda trabalhos que investigaram a ausência de anomalia de paridade em modelos não-massivos [165], geração de massa [166], estudos relacionados à paridade [167] e quebra da simetria quiral [168].

A possibilidade de estudar a violação da simetria de Lorentz em sistemas planares levou naturalmente a uma extensão da QED₃. Existe uma vasta literatura que trata tanto da construção desses modelos modificados quanto estudos teóricos relatando novas fenomenologias [60, 61, 62, 63, 169, 170, 171, 172]. A QED₃ estendida é obtida diretamente do setor eletromagnético do MPE através de um método conhecido como redução dimensional. Iremos detalhar um pouco mais essa técnica a seguir, uma vez que ela será de grande valor no capítulo 4.

Existem muitas maneiras de se obter uma teoria eletromagnética planar a partir de uma teoria em $(1 + 3)$ -dimensões. Por exemplo, poderíamos fazer uma simples projeção, isto é, bastaria fazer a terceira componente do campo de calibre igual a zero e desconsideraríamos qualquer dependência com a terceira coordenada

apenas restritos à teoria de Chern-Simons. Na verdade, anyon é uma designação genérica para partículas que satisfazem uma estatística quântica fracionária, isto é, não são bosons nem férmions [154]. Esta estatística quântica está intimamente ligada às teorias planares, uma vez que não existem correspondentes em dimensões espaciais maiores que dois. Indicamos a referência [152] para um aprofundamento mais detalhado destes objetos e sua conexão com a Física da Materia Condensada.

espacial. Em suma, teríamos que $A^{\hat{\mu}}(t, \mathbf{x}^{(3)}) \mapsto A^{\mu}(t, \mathbf{x}^{(2)})$, onde $\mu \in \{0 \dots 2\}$. Nesta seção e no capítulo 4 os índices com “chapeu” pertencem à teoria em $(1 + 3)$ -dimensões, já os índices sem “chapeu” pertencem à teoria planar, cuja métrica é dada por $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1)$. Introduzimos também a seguinte notação abreviada: apresentamos as coordenadas espaciais como $\mathbf{x}^{(2)} \equiv (x, y)$ e $\mathbf{x}^{(3)} \equiv (x, y, z)$ para duas e três dimensões espaciais, respectivamente.

Uma maneira mais sofisticada de se construir uma teoria planar é conhecida na literatura como redução dimensional [60]. Esta técnica consiste em reinterpretar a terceira componente do campo de calibre $A^{\hat{\mu}}$ como um campo escalar ϕ e, como na técnica de projeção, desconsideramos qualquer dependência na terceira coordenada. Dessa forma, aplicando a redução dimensional no campo de calibre, obtemos:

$$A^{\hat{\mu} \neq 3}(t, \mathbf{x}^{(3)}) \mapsto A^{\mu}(t, \mathbf{x}^{(2)}), \quad (2.104a)$$

$$A_{\hat{\mu} \neq 3}(t, \mathbf{x}^{(3)}) \mapsto A_{\mu}(t, \mathbf{x}^{(2)}), \quad (2.104b)$$

$$A^{\hat{3}}(t, \mathbf{x}^{(3)}) \mapsto \phi(t, \mathbf{x}^{(2)}), \quad (2.104c)$$

$$A_{\hat{3}}(t, \mathbf{x}^{(3)}) \mapsto -\phi(t, \mathbf{x}^{(2)}). \quad (2.104d)$$

Graças aos acoplamentos que surgem entre o campo vetorial em $(1 + 2)$ -dimensões e o campo escalar, uma infinidade de efeitos adicionais interessantes podem surgir. Se o campo escalar não for adequado para descrever um sistema físico, ele pode ser definido como zero.

Devemos observar ainda que a redução dimensional também deve ser aplicada aos campos de fundo que controlam a violação da simetria e ao símbolo de Levi-Civita. Em particular, os operadores citados transformam-se da seguinte forma:

$$(\hat{k}_{AF})^{\hat{\kappa} \neq 3}(t, \mathbf{x}^{(3)}) \mapsto (\hat{k}_{AF})^{\kappa}(t, \mathbf{x}^{(2)}), \quad (2.105a)$$

$$(\hat{k}_{AF})^{\hat{3}}(t, \mathbf{x}^{(3)}) \mapsto \hat{k}_{AF}(t, \mathbf{x}^{(2)}), \quad (2.105b)$$

$$(\hat{k}_{AF})_{\hat{\kappa} \neq 3}(t, \mathbf{x}^{(3)}) \mapsto (\hat{k}_{AF})_{\kappa}(t, \mathbf{x}^{(2)}), \quad (2.105c)$$

$$(\hat{k}_{AF})_{\hat{3}}(t, \mathbf{x}^{(3)}) \mapsto -\hat{k}_{AF}(t, \mathbf{x}^{(2)}), \quad (2.105d)$$

$$\varepsilon^{\lambda\mu\nu 3} \mapsto \varepsilon^{\lambda\mu\nu}, \quad (2.105e)$$

onde $\varepsilon^{\lambda\mu\nu}$ representa o símbolo de Levi-Civita em $(1 + 2)$ -dimensões. Correspondências análogas podem ser estabelecidas para o tensor $(k_F)^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}$. Embora os coeficientes acima tenham sido escritos como funções das coordenadas do espaço-tempo, não consideraremos tais dependências para evitar que a invariância de translação da teoria planar seja perdida. Isso acarretaria a violação da conservação do tensor energia-momento.

Como mencionamos, voltaremos a tratar desta técnica no capítulo 4, onde iremos aplicá-la ao setor eletromagnético não-mínimo do MPE. Lá veremos na prática como a densidade de Lagrange em $(1 + 3)$ -dimensões tem sua dimensionalidade reduzida.

2.3.2 Cinemática Clássica: uma breve revisão

Estudar a cinemática de uma partícula pontual no regime relativístico nos fornece informações preciosas sobre como a partícula propaga-se, isto é, conheceremos a geodésica que a partícula descreverá. O estudo de Lagrangeanas relativísticas inicia-se com os trabalhos de Plank em 1906 [173], onde ele estudou uma partícula relativística livre. Trabalhos como os de Einstein sobre geodésicas [174] e o estudo dos efeitos do spin nas trajetórias obtidos por Frenkel [175], são exemplos que estimulam o estudo das Lagrangeanas relativísticas de uma partícula pontual. Devido a sua grande importância, o estudo da cinemática clássica tornou-se fundamental não só em pesquisas como também nos cursos básicos. Uma série de aplicações podem ser encontradas nos livros-textos [176, 177, 178, 179], onde são apresentados estudos sobre o movimento do centro de massa de um corpo macroscópico relativístico, a propagação de partículas relativísticas em espaços-tempos de várias naturezas, a interação entre partículas e campos eletromagnéticos e gravitacionais, análises de espalhamentos relativísticos e obtenção de geodésicas. Esses são apenas alguns exemplos onde a cinemática clássica-relativística tem um papel muito importante.

Temos como objetivo compreender como uma partícula pontual de massa m e 4-velocidade u^μ propaga-se no espaço-tempo de Minkowski na presença de campos de fundo constantes. Estes campos de fundo são responsáveis por controlar a violação da simetria de Lorentz. O nosso ponto de partida para encontrar a Lagrangeana Clássica que descreve tais sistemas é a equação de dispersão do setor fermiônico do MPE. O conhecimento da equação de dispersão (2.75) é um ingrediente muito importante, pois a validade do limite clássico será estabelecida garantindo que o momento canônico da partícula clássica satisfaça a relação de dispersão da teoria

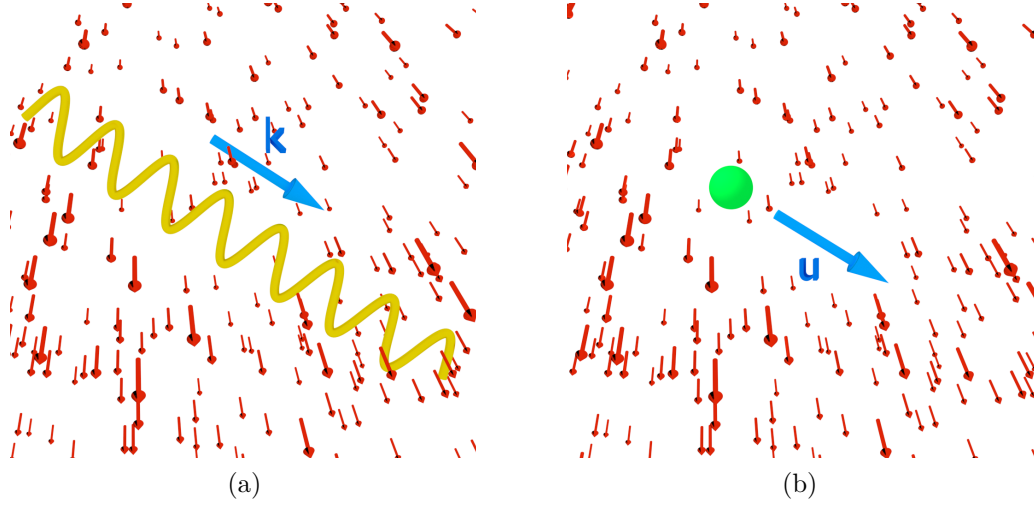


Figura 7 – A figura à esquerda corresponde a uma onda plana propagando-se com vetor de onda k , enquanto que na figura à direita a partícula clássica propaga-se com velocidade u . Em ambos os casos, a partícula propaga-se em um campo de fundo constante.

de campos. Portanto, o que desejamos em suma é estabelecer a existência de uma descrição para uma partícula pontual a partir do setor fermiônico do MPE. Essa conexão pode ser feita de maneira indireta, uma vez que conhecemos muito bem as propriedades do setor fermiônico. A forma mais consistente de relacionar os cenários em questão é impondo que a velocidade de grupo obtida através das relações de dispersão do campo fermiônico seja igual a 3-velocidade da partícula clássica. Por fim, para que a nossa Lagrangeana Clássica descreva um sistema físico que não dependa da trajetória, isto é, seja independente da parametrização escolhida, a mesma não pode depender explicitamente do parâmetro. Além disso, para que a ação seja reparametrizável, L precisa ser uma função homogênea de grau um. Invocando o teorema de Euler para funções homogêneas¹⁵, podemos restringir ainda mais as possibilidades para a forma que a Lagrangeana procurada pode assumir. Na equação (2.106), apresentamos as cinco equações que precisam ser satisfeitas para que possamos obter as Lagrangeanas Clássicas para uma partícula pontual [65]:

$$\mathcal{R}(p) = 0, \quad u^j = -u^0 \frac{\partial p_0}{\partial p_j}, \quad L = -p_\mu u^\mu, \quad p_\mu = -\frac{\partial L}{\partial u^\mu}, \quad (2.106)$$

¹⁵ Apresentaremos uma demonstração para este teorema no capítulo 5.

onde p_μ é interpretado como o momento canônico da partícula clássica. Vemos assim que a equação de dispersão $\mathcal{R}(p)$, a relação entre a velocidade de grupo e a 3-velocidade e a forma genérica para a Lagrangeana Clássica formam um sistema de equações não-lineares nas variáveis u^μ e L . Logo, é possível manipular estas cinco equações de modo a obter um polinômio em L , cuja forma genérica é:

$$\mathcal{P}(L; u^\mu, m, k_\chi) \equiv \sum_{n=0}^N c_n(u^\mu, m, k_\chi) L^n = 0. \quad (2.107)$$

Vemos que esse polinômio depende apenas dos coeficientes de controle, representados acima por k_χ , da variável L e das componentes da 4-velocidade. Consequentemente, devemos manipular as equações (2.106) de modo a eliminar todas as componentes do 4-momento.

Vamos aplicar esta técnica ao caso mais simples: uma partícula livre. A equação de dispersão para um férmion livre é mostrada a seguir:

$$\mathcal{R}(p) = p_\mu \eta^{\mu\nu} p_\nu - m^2 = 0. \quad (2.108)$$

Derivando a equação acima implicitamente com respeito à variável p_j , obtemos:

$$\frac{\partial p_\mu}{\partial p_j} \eta^{\mu\nu} p_\nu = 0. \quad (2.109)$$

Usando agora a condição entre a velocidade de grupo e a 3-velocidade, encontramos:

$$0 = \frac{\partial p_0}{\partial p_j} \eta^{0\nu} p_\nu + \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \eta^{i\nu} p_\nu, \quad (2.110a)$$

$$0 = -\frac{u^j}{u^0} \eta^{0\nu} p_\nu + \delta_{ij} \eta^{i\nu} p_\nu, \quad (2.110b)$$

$$0 = \left(-\frac{u^j}{u^0} \eta^{0\nu} + \eta^{j\nu} \right) p_\nu. \quad (2.110c)$$

Contraindo a equação acima com p_j , chegamos ao resultado:

$$-\frac{p_j u^j}{u^0} \eta^{0\nu} p_\nu + p_j \eta^{j\nu} p_\nu = 0. \quad (2.111)$$

O teorema de Euler nos fornece a seguinte identidade: $L + p_0 u^0 = -p_j u^j$. Substituindo esta relação, temos que

$$0 = \frac{L}{u^0} \eta^{0\nu} p_\nu + p_0 \eta^{0\nu} p_\nu + p_j \eta^{j\nu} p_\nu, \quad (2.112a)$$

$$0 = \frac{L}{u^0} \eta^{0\nu} p_\nu + p_\mu \eta^{\mu\nu} p_\nu, \quad (2.112b)$$

$$0 = L \eta^{0\nu} p_\nu + m^2 u^0, \quad (2.112c)$$

onde usamos a equação de dispersão (2.108). Derivando agora a equação de dispersão implicitamente com relação a p_0 , obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial p_0}{\partial p_0} \eta^{0\nu} p_\nu + \frac{\partial p_j}{\partial p_0} \eta^{j\nu} p_\nu = 0, \\ \eta^{0\nu} p_\nu &= \frac{u^0}{u^j} \eta^{j\nu} p_\nu. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Esta identidade nos permite reescrever a equação (2.112c) da seguinte forma

$$L \eta^{j\nu} p_\nu + m^2 u^j = 0. \quad (2.114)$$

Somando as equações (2.112c) e (2.114), obtemos a expressão covariante abaixo

$$L \eta^{\mu\nu} p_\nu + m^2 u^\mu = 0. \quad (2.115)$$

Contraindo agora o resultado acima com a 4-velocidade u_μ e usando novamente a relação $L = -p_\mu u^\mu$, obtemos

$$L^2 - m^2 u^\mu u_\mu = 0. \quad (2.116)$$

A equação acima é um polinômio de grau dois na variável L , cujas raízes são mostradas a seguir

$$L = \mp m \sqrt{u^\mu u_\mu}. \quad (2.117)$$

O resultado acima descreve uma partícula pontual relativística de massa m propagando-se livremente no espaço-tempo de Minkowski. O sinal negativo descreve a propagação de partículas, enquanto que o sinal positivo corresponde as antipartículas. É fácil perceber que a Lagrangeana acima é uma função homogênea de grau um na 4-velocidade, como deveria ser. É possível constatar também que o momento canônico da partícula clássica satisfaz a relação de dispersão apresentada na equação (2.108).

Podemos agora tratar um caso de uma partícula massiva propagando-se em um campo de fundo uniforme. Supondo que forma geral da relação de dispersão seja quadrática em p_μ , isto é,

$$\mathcal{R}(p) = (p + k) \cdot \Omega \cdot (p + k) - \mu^2, \quad (2.118)$$

onde k_μ representa um campo de fundo vetorial genérico, $\mu > 0$ é um escalar que faz o papel de uma massa efetiva e $\Omega^{\mu\nu}$ é um tensor de rank-2 que desempenha a função de uma métrica efetiva. No limite em o campo de fundo anula-se, temos

que $k_\mu \rightarrow 0$, $\Omega^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu}$ e $\mu \rightarrow m$. Para o caso em questão, a Lagrangeana Clássica possui a seguinte forma [65]:

$$L(u; \mu, k, \Omega) = -\mu \sqrt{u \cdot \Omega^{-1} \cdot u} + k \cdot u. \quad (2.119)$$

A relação de dispersão que corresponde a antipartícula dá origem a solução $L = (u; -\mu, k, \Omega)$. O caso genérico acima tem conexão com os operadores de spin degenerados a_μ , e_μ e f_μ , cuja equação de dispersão possui exatamente a forma apresentada na equação (2.118). Sendo assim, podemos usar a expressão (2.119) diretamente. O resultado obtido é mostrado a seguir [65]:

$$\begin{aligned} L = & -\mu \sqrt{u^2 + \frac{1}{\Delta} \left[(1-f^2)(e \cdot u)^2 + (1-e^2)(f \cdot u)^2 + 2(e \cdot f)(e \cdot u)(f \cdot u) \right]} \\ & - a \cdot u + \frac{1}{\Delta} \left[(1-f^2)(m - e \cdot a) - (e \cdot f)(f \cdot a) \right] e \cdot u \\ & + \frac{1}{\Delta} \left[(e \cdot f)(m - e \cdot a) - (1-e^2)(f \cdot a) \right] f \cdot u, \end{aligned} \quad (2.120)$$

onde

$$\begin{aligned} \mu = & \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[(1-f^2)(m - e \cdot a)^2 - 2(e \cdot f)(f \cdot a)(m - e \cdot a) \right. \\ & \left. + (1-e^2)(f \cdot a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$\Delta = (1-e^2)(1-f^2) - (e \cdot f)^2. \quad (2.122)$$

O caso envolvendo os operadores de spin não-degenerados torna-se bastante complicado uma vez que a equação de dispersão não é mais quadrática nos momentos. Como exemplo, vamos considerar a configuração em que o único operador não-nulo é b^μ . A equação de dispersão para este caso é dada por:

$$0 = (-p^2 + b^2 + m^2)^2 - 4(b \cdot p)^2 + 4b^2 p^2. \quad (2.123)$$

Usando o mapeamento apresentado na equação (2.106), encontramos o seguinte polinômio:

$$\begin{aligned} & \left[b^2 u^2 - (b \cdot u)^2 + (L + m\sqrt{u^2})^2 \right] \times \left[b^2 u^2 - (b \cdot u)^2 + (L - m\sqrt{u^2})^2 \right] \times \\ & \times \left[-b^2 (b \cdot u)^2 + b^2 L^2 - m^2 (b \cdot u)^2 \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Resolvendo esta equação de oitavo grau na variável L , obtemos as soluções [65]:

$$L = -m\sqrt{u^2} \mp \sqrt{(b \cdot u)^2 - b^2 u^2}, \quad (2.125)$$

Mapeamento	Relações de Dispersão	Lagrangeanas
$\tilde{H}_{\mu\nu} \leftrightarrow m d_{\mu\nu}$	$p^2 - m^2 \approx \pm 2\sqrt{p\tilde{H}^2 p}$	$L(u; m, H) = -m\sqrt{u^2} \mp \sqrt{u\tilde{H}^2 u}$
	$p^2 - m^2 \approx \pm 2m\sqrt{p d^2 p}$	$L(u; m, d) \approx -m\sqrt{u^2} \mp m\sqrt{u d^2 u}$
$b_\mu \leftrightarrow -mA_\mu$	$p^2 - m^2 \approx \pm m\sqrt{(b \cdot p)^2 - b^2 p^2}$	$L(u; m, b) = -m\sqrt{u^2} \mp \sqrt{(b \cdot u)^2 - b^2 u^2}$
	$p^2 - m^2 \approx \pm 2m\sqrt{(A \cdot p)^2 - A^2 p^2}$	$L(u; m, A) \approx -m\sqrt{u^2} \mp m\sqrt{(A \cdot u)^2 - A^2 u^2}$
$a_\mu \leftrightarrow -me_\mu$	$p^2 - m^2 \approx 2a \cdot p$	$L(u; m, a) = -m\sqrt{u^2} - a \cdot u$
	$p^2 - m^2 \approx -2me \cdot p$	$L(u; m, e) \approx -m\sqrt{u^2} + me \cdot u$

Tabela 2 – Na tabela acima compilamos alguns resultados perturbativos calculados na referência [67] e a correspondência existente entre algumas dessas soluções. Voltaremos a este mapeamento no capítulo 5, onde iremos generalizá-los para o caso não-mínimo. Ressaltamos ainda a utilização da definição para a componente axial do tensor $g^{\alpha\beta\nu}$, ou seja, $A_\mu = -\frac{1}{6}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\mu}g^{\alpha\beta\nu}$. Outra característica notória presente na tabela acima reside na semelhança entre as estruturas das relações de dispersão e as Lagrangeanas Clássicas em primeira ordem. Veremos no capítulo 5 que é possível propor um mapeamento direto entre as relações de dispersão perturbativas e as Lagrangeanas Clássicas em primeira ordem.

onde o sinal $(-)$ em frente a raiz corresponde a partículas de spin-up e o sinal $(+)$ descreve partículas de spin-down; para $m \rightarrow -m$, obtemos as soluções para as antipartículas. Existem na literatura muitos trabalhos com a finalidade de mapear as soluções da equação de dispersão do setor fermiônico mínimo do MPE em suas Lagrangeanas Clássicas correspondentes [66, 68, 180]. Os resultados em primeira ordem dispostos na tabela 2 foram obtidos em [67]. Soluções perturbativas para o setor fermiônico não-mínimo do MPE foram obtidas em [73, 181]. Nestes trabalhos uma técnica conhecida como bases de Gröbner foi utilizada para resolver o sistema de equações não-linear (2.106-2.107).

É importante destacar aqui os estudos mostrando a conexão entre as Lagrangeanas Clássicas do MPE e a geometria de Finsler [71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 181]. Para compreender melhor como essa conexão é estabelecida, precisamos entender do que se trata a geometria de Finsler. Essa geometria caracteriza-se por ser menos restritiva que a geometria de Riemann [182, 183], isto é, o funcional F necessário para medir a distância entre dois pontos não precisa assumir uma forma quadrática [70, 184, 185]. Sabemos que na geometria de Riemann a distância entre dois pontos é calculada a partir do funcional

$$ds^2 = F(x^1 \dots x^n; dx^1 \dots dx^n), \quad (2.126)$$

que, por hipótese, deve ser uma forma diferencial quadrática. Isto nos fornece a seguinte restrição:

$$F(x^1 \dots x^n; dx^1 \dots dx^n) = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.127)$$

A geometria de Finsler, por outro lado, não obedece tal restrição. Antes de apresentar um exemplo simples, vamos definir precisamente o que é uma métrica de Finsler.

Definição 1 (Métrica de Finsler) *Seja M uma variedade. Uma métrica de Finsler¹⁶ em M é uma função $F : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. F é C^∞ em $T_x M \setminus \{0\}$
2. Para qualquer $x \in M$, $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y) \forall \lambda > 0$.
3. O Hessiano

$$g_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} \left(\frac{1}{2} F^2 \right), \quad (2.128)$$

é positivo-definido em todos os pontos de $T_x M \setminus \{0\}$. O objeto g_{ij} é identificado como a métrica de Finsler.

Uma vez que definimos os ingredientes necessários para se identificar e calcular uma métrica de Finsler, vamos agora apresentar o exemplo do espaço de Randers [72]. Seja M uma variedade n -dimensional. Uma estrutura de Randers em $T_x M$ possui a seguinte forma:

$$F(x, y) = \sqrt{r_{ij}(x) y^i y^j} + a_i(x) y^i. \quad (2.129)$$

Na equação acima $r_{ij}(x)$ corresponde às componentes da métrica de Riemann¹⁷ e $a_i(x)$ são as componentes de uma 1-forma. Ambos os objetos vivem em $T_x M$. A métrica $g_{ij}(x)$ pode ser calculada a partir da estrutura de Finsler $F(x, y)$ através da equação (2.128), a saber:

$$g_{ij} = \frac{F}{\alpha} (r_{ij} - \xi_i \xi_j) + (\xi_i + a_i) (\xi_j + a_j), \quad (2.130)$$

¹⁶ Um espaço de Finsler é definido pelo par (M, F) , onde M designa a variedade e F corresponde a estrutura de Finsler em M .

¹⁷ A métrica de Riemann $r_{ij}(x)$ que aparece na estrutura de Finsler é responsável pela medição de comprimento de vetores e ângulos entre vetores no espaço tangente em um ponto particular.

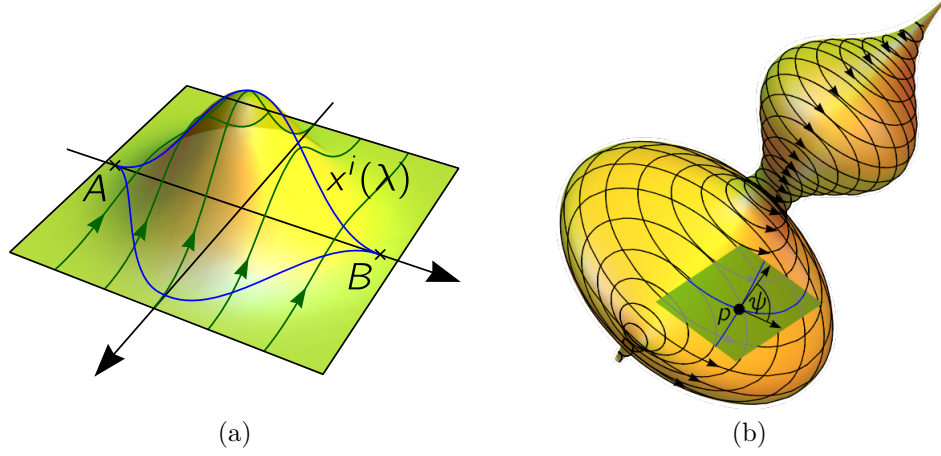


Figura 8 – Representação pictórica de dois espaços de Finsler onde podemos notar às direções privilegiadas.

onde definimos

$$\alpha = \sqrt{r_{ij}(x) y^i y^j}, \quad (2.131)$$

$$\xi_i = \frac{r_{ij} y^j}{\alpha}. \quad (2.132)$$

Vemos, a partir do resultado (2.130), que a métrica de Finsler para o exemplo em questão não obedece a estrutura quadrática apresentada em (2.127). O exemplo acima não foi escolhido por acaso. Observando a forma genérica da Lagrangeana Clássica (2.119), vemos que ela possui a mesma estrutura do funcional (2.129). Neste exemplo em particular, observamos uma clara conexão entre as Lagrangeanas obtidas a partir do setor fermiônico do MPE e as estruturas de Finsler. Outro fato importante a destacar é que a 1-forma a_i introduz uma assimetria na métrica (2.130). Isso acontece graças a direção privilegiada controlada pela 1-forma. Esse fato em particular torna as estruturas de Finsler muito importantes no contexto da violação da simetria de Lorentz, pois elas permitem-nos introduzir direções privilegiadas de uma maneira natural na própria estrutura geométrica. Na Figura 8 apresentamos duas representações pictóricas de estruturas de Finsler onde a dependência com a direção é explícita.

Muitas aplicações em Física, Biologia e Química, tais como óptica geométrica em meios anisotrópicos, mecânica dissipativa, Termodinâmica, aplicações em Ecologia dos corais e muitos outros exemplos podem ser consultados nas referências [184, 185, 186]. Dentre as diversas aplicações, gostaríamos de destacar aqui

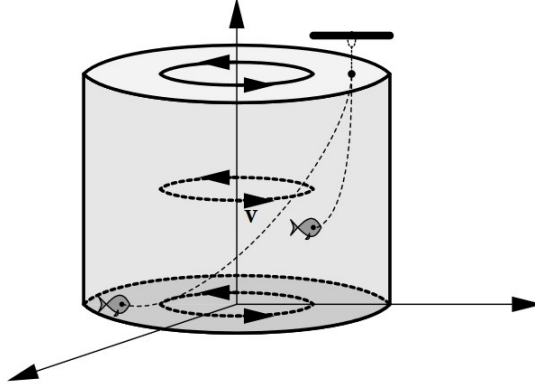


Figura 9 – Na figura acima vemos o esboço da trajetória descrita pelo peixe a fim de alcançar o ponto na superfície da água no menor tempo. Figura extraída da referência [187].

o famoso “*Shen’s fishpond*” [187]. No exemplo em questão temos um tanque de peixes cilíndrico que está girando em torno do eixo central com velocidade v . Os peixes que se encontram dentro deste tanque veem o alimento pendurado próximo à superfície da água em um ponto P de coordenadas (x_p, y_p, z_p) . Cada peixe tem que descobrir o caminho de menor tempo para chegar ao alimento. O caminho de menor tempo neste caso é o caminho mais curto da métrica Randers, vide Figura 9.

Neste exemplo, a estrutura de Finsler que caracteriza o problema possui a seguinte forma:

$$F = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}, \quad (2.133a)$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sqrt{(-yu + xv)^2 + (u^2 + v^2 + w^2)(1 - x^2 - y^2)}}{1 - x^2 - y^2}, \quad (2.133b)$$

$$\tilde{\beta} = \frac{-yu + xv}{1 - x^2 - y^2}, \quad (2.133c)$$

onde u, v, w correspondem às velocidades nas direções $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$, respectivamente. A equação da geodésica obtida a partir dessa estrutura é caracterizada a seguir:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2G^i = 0, \quad (2.134)$$

onde os coeficientes da geodésica G^i são:

$$G^1 = -\frac{x(u^2 + v^2 + w^2)}{2(1 - x^2 - y^2)} - \frac{y(xu + yv) - v}{1 - x^2 - y^2} F, \quad (2.135a)$$

$$G^2 = -\frac{y(u^2 + v^2 + w^2)}{2(1 - x^2 - y^2)} - \frac{x(xu + yv) - u}{1 - x^2 - y^2}F, \quad (2.135b)$$

$$G^3 = 0. \quad (2.135c)$$

Resolver a equação (2.134) para encontrar explicitamente a forma da geodésica não é tarefa simples, sendo necessário usar métodos computacionais.

2.3.3 Cinemática Clássica: o setor fermiônico não-mínimo

Outra tarefa muito importante, e até o momento inacabada, consiste em mapear as soluções da equação de dispersão do setor fermiônico não-mínimo do MPE. Esta tarefa é bastante desafiadora, já que a estrutura desse setor envolve um número muito grande de momentos contraídos aos coeficientes de controle, vide subseção 2.2.2. Os métodos tradicionais apresentados até o momento mostram-se bastante ineficazes para obter tais soluções. Isso deve-se principalmente ao fato do grau do polinômio (2.107) depender da dimensão de massa do operador considerado. De fato, o grau do polinômio satisfaz a inequação $N \leq (4d - 12)(4d - 13)$ [65].

Com o intuito de contornar as dificuldades encontradas ao tentar resolver o sistema de equações não-lineares (2.106), Edwards e Kostelecký desenvolveram um algoritmo capaz de obter as soluções clássicas de maneira perturbativa ordem a ordem [80]. Essa técnica baseia-se, assim como nos casos anteriores, em encontrar um polinômio na variável L . No entanto, para o caso não-mínimo, os coeficientes do polinômio (2.107) passam a depender também do 4-momento. O primeiro passo do algoritmo consiste em expandir o polinômio encontrado em ordem zero nos coeficientes que controlam a violação da simetria de Lorentz. Dessa forma, obtemos a Lagrangeana de ordem zero, ou seja, $L_0 = -m\sqrt{u^2}$. A seguir, calculamos o momento de ordem zero, isto é, $(p_0)_\mu = -\partial L_0 / \partial u^\mu$. Uma vez calculado o momento $(p_0)_\mu$, devemos substituí-lo no polinômio original. Feito isso, o segundo passo consiste em expandir o polinômio até primeira ordem nos coeficientes de controle. Após a expansão, resolvemos o polinômio resultante e obtemos a Lagrangeana de primeira ordem L_1 e, conseqüentemente, o 4-momento $(p_1)_\mu$. Procedendo desta maneira iterativa, somos capazes de calcular a Lagrangeana de ordem n . Este método foi aplicado para campos escalares [80] e para o setor fermiônico de spin não-degenerados [188] com sucesso. Aplicaremos este algoritmo no final do capítulo 5 aos operadores que quebram a degenerescência de spin.

Para entender melhor como o algoritmo que acabamos de descrever funciona na prática, vamos estudar o caso não-mínimo $\hat{a}^\mu = a^{(5)\mu\nu\alpha} p_\nu p_\alpha$. A equação de

dispersão modificada é mostrada a seguir

$$\mathcal{R}(p) = (p - \hat{a}) \cdot \eta \cdot (p - \hat{a}) - m^2 = 0. \quad (2.136)$$

Inicialmente, devemos encontrar o polinômio que L satisfaz. Para tanto, iremos proceder como nos casos tratados anteriormente. Derivando a equação de dispersão implicitamente com respeito a p_j , obtemos:

$$\frac{\partial p_0}{\partial p_j} \eta^{0\nu} (p - \hat{a})_\nu + \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \eta^{i\nu} (p - \hat{a})_\nu - \frac{\partial \hat{a}_\mu}{\partial p_j} \eta^{\mu\nu} (p - \hat{a})_\nu = 0. \quad (2.137)$$

Usando a relação entre a velocidade de grupo e a 3-velocidade na equação (2.137) e multiplicando-a por p_j , temos

$$-p_j \frac{u^j}{u^0} \eta^{0\nu} (p - \hat{a})_\nu + p_i \eta^{i\nu} (p - \hat{a})_\nu - p_j \frac{\partial \hat{a}_\mu}{\partial p_j} \eta^{\mu\nu} (p - \hat{a})_\nu = 0. \quad (2.138)$$

Levando em consideração que $a^{(5)\mu\nu\alpha} p_\nu p_\alpha$ é uma função homogênea de grau dois na variável p , obtemos o seguinte resultado

$$p_j \frac{\partial}{\partial p_j} a^{(5)\mu\nu\alpha} p_\nu p_\alpha = 2 \left(a^{(5)\mu\nu\alpha} p_\nu p_\alpha - \frac{p \cdot u}{u^0} a^{(5)\mu 0\alpha} p_\alpha \right). \quad (2.139)$$

Substituindo este resultado na equação (2.138) juntamente com a identidade $L + p_0 u^0 = -p_j u^j$, encontramos

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{L + p_0 u^0}{u^0} \eta^{0\nu} (p - \hat{a})_\nu + p_i \eta^{i\nu} (p - \hat{a})_\nu \\ & - 2 \left(a^{(5)\mu\nu\alpha} p_\nu p_\alpha - \frac{p \cdot u}{u^0} a^{(5)\mu 0\alpha} p_\alpha \right) \eta_{\mu\nu} (p - \hat{a})^\nu. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Simplificando o resultado acima, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{L}{u^0} \eta^{0\nu} (p - \hat{a})_\nu + (p - \hat{a})_\mu \eta^{\mu\nu} (p - \hat{a})_\nu - \hat{a}^\mu \eta_{\mu\nu} (p - \hat{a})^\nu \\ & + 2 \frac{p \cdot u}{u^0} a^{(5)\mu 0\alpha} p_\alpha \eta_{\mu\nu} (p - \hat{a})^\nu. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Usando agora as identidades $(p - \hat{a}) \cdot \eta \cdot (p - \hat{a}) = m^2$ e $L = -p \cdot u$, e simplificando um pouco mais os resultados, temos

$$0 = L (p^0 - \hat{a}^0) + u^0 m^2 - u^0 \hat{a} \cdot (p - \hat{a}) - 2L a^{(5)0\mu\alpha} p_\alpha (p - \hat{a})_\mu. \quad (2.142)$$

Isolando u^0 , obtemos

$$u^0 = -L \frac{(p^0 - \hat{a}^0) - 2a^{(5)0\mu\alpha} p_\alpha (p - \hat{a})_\mu}{m^2 - \hat{a} \cdot (p - \hat{a})}. \quad (2.143)$$

Derivando agora a equação de dispersão com respeito a p_0 e procedendo de maneira totalmente análoga, encontramos o seguinte resultado:

$$u^j = -L \frac{(p^j - \hat{a}^j) - 2a^{(5)j\mu\alpha} p_\alpha (p - \hat{a})_\mu}{m^2 - \hat{a} \cdot (p - \hat{a})}. \quad (2.144)$$

Juntando os resultados (2.143) e (2.144), finalmente encontramos a seguinte equação covariante

$$u^\mu = -L \frac{(p - \hat{a})^\mu - 2a^{(5)\mu\nu\alpha} p_\alpha (p - \hat{a})_\nu}{m^2 - \hat{a} \cdot (p - \hat{a})}. \quad (2.145)$$

Podemos agora contrair a equação acima com a 4-velocidade u_μ . Fazendo isso, obtemos

$$u^2 = -L \frac{-L - u \cdot \hat{a} - 2a^{(5)\mu\nu\alpha} u_\mu p_\alpha (p - \hat{a})_\nu}{m^2 - \hat{a} \cdot (p - \hat{a})}. \quad (2.146)$$

Podemos reescrever a equação acima de modo a explicitar o polinômio na variável L , isto é,

$$L^2 - L \left[-u \cdot \hat{a} - 2a^{(5)\mu\nu\alpha} u_\mu p_\alpha (p - \hat{a})_\nu \right] - u^2 \left[m^2 - \hat{a} \cdot (p - \hat{a}) \right] = 0. \quad (2.147)$$

Como podemos observar, os coeficientes do polinômio acima ainda dependem dos 4-momentos. Sendo assim, não podemos obter as Lagrangeanas Clássicas a partir desta equação, pois elas ainda terão uma dependência em p_μ . Porém, podemos usá-la para obter soluções perturbativas. Seguindo então o método iterativo apresentado na referência [80], vamos expandir a equação (2.147) em ordem zero nos coeficientes de controle. Dessa forma, obtemos a seguinte equação

$$L^2 - u^2 m^2 = 0, \quad (2.148)$$

que nos fornece o seguinte resultado

$$L_0 = \mp m \sqrt{u^2}. \quad (2.149)$$

O resultado acima corresponde à Lagrangeana Clássica de uma partícula livre. O 4-momento associado a esta Lagrangeana é

$$(p_0)_\mu = \mp \frac{m u_\mu}{\sqrt{u^2}}. \quad (2.150)$$

O próximo passo do método iterativo consiste em substituir todos os 4-momentos presentes na equação (2.147) pela aproximação de ordem zero, isto é, $p_\mu \mapsto (p_0)_\mu$.

Procedendo desta forma, obtemos

$$\begin{aligned}
0 = & L^2 - L \left[- \left(\frac{m}{\sqrt{u^2}} \right)^2 a^{(5)\mu\nu\alpha} u_\mu u_\nu u_\alpha + 2a^{(5)\mu\nu\alpha} u_\mu \frac{m u_\alpha}{\sqrt{u^2}} \left(-\frac{m u}{\sqrt{u^2}} - \hat{a} \right)_\nu \right] \\
& - u^2 \left[m^2 - \left(\frac{m}{\sqrt{u^2}} \right)^2 a^{(5)\mu\nu\alpha} u_\nu u_\alpha \left(-\frac{m u}{\sqrt{u^2}} - \hat{a} \right)_\mu \right].
\end{aligned} \tag{2.151}$$

Expandindo o resultado acima em primeira ordem no coeficiente de controle, temos:

$$0 = L^2 + \left[3 \left(\frac{m}{\sqrt{u^2}} \right)^2 a^{(5)\mu\nu\alpha} u_\mu u_\nu u_\alpha \right] L - u^2 \left[m^2 + \left(\frac{m}{\sqrt{u^2}} \right)^3 a^{(5)\mu\nu\alpha} u_\mu u_\nu u_\alpha \right]. \tag{2.152}$$

A solução da equação acima nos fornece a seguinte Lagrangeana:

$$L_1 = -m\sqrt{u^2} - \frac{m^2}{u^2} a^{(5)\mu\nu\alpha} u_\mu u_\nu u_\alpha. \tag{2.153}$$

Podemos continuar fazendo estas iterações de modo a obter Lagrangeanas de ordens mais altas. Este exemplo nos mostra o quão poderoso é este método iterativo. No capítulo 5, voltaremos a estudar com mais detalhes essa técnica.

CAPÍTULO 3

EQUAÇÃO DE DISPERSÃO DO SETOR DE NEUTRINOS

Neste capítulo apresentaremos uma técnica bastante engenhosa que nos permitirá obter a equação de dispersão completa, e totalmente covariante, para o setor dos neutrinos apresentado na subseção 2.2.3. Antes, porém, iremos calcular o propagador geral do setor fermiônico do MPE não-mínimo. Este resultado também será empregado na construção das nossas soluções. Finalmente, estudaremos as soluções perturbativas da equação de dispersão. Ressaltamos que as ferramentas matemáticas necessárias para o desenvolvimento e compreensão deste capítulo encontram-se no Apêndice A. Os resultados percorridos neste capítulo resultaram na publicação apresentada na Referência [189].

3.1 O propagador de Dirac modificado

Antes de proceder com o cálculo da equação de dispersão em si, precisamos computar um ingrediente muito importante. Ao observar a relação de recorrência (A.31), apresentada na seção A.3, notamos que será necessário calcular a matriz inversa do elemento $\alpha_{N-k, N-k}^{(k)}$ que, como veremos na seção 3.2, possui uma decomposição semelhante aos operadores definidos na equação (A.5). Constatamos, no entanto, que o processo para se obter a inversa de matrizes com tal estrutura é

inteiramente equivalente ao cálculo do propagador de um operador de campo na teoria de Dirac. Dessa forma, estamos interessados em calcular um resultado ainda mais geral, isto é, obter o propagador para um operador de campo genérico que contemple todos os acoplamentos discutidos na seção A.1.

Como mencionado, o propagador que estamos interessados em obter está diretamente conectado ao inverso do operador de Dirac no espaço dos momentos, ou seja, $\mathcal{D}S = S\mathcal{D} = \mathbb{1}_4$, onde $\mathcal{D}$ denota o operador de Dirac e S refere-se ao propagador correspondente. Como é sabido, é sempre possível expressar qualquer matriz no espaço espinorial como uma combinação linear dos elementos da base $\{\Gamma^A\}$, mostrados na equação (A.1). O propagador S não foge a essa regra. Sendo assim, podemos escrever o operador S da seguinte maneira:

$$iS = \frac{i}{\Delta} \left(\hat{S}^{(p)} \mathbb{1}_4 + i\hat{\mathcal{P}}^{(p)} \gamma^5 + \hat{\mathcal{V}}^{(p)\mu} \gamma_\mu + \hat{\mathcal{A}}^{(p)\mu} \gamma^5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{(p)\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right), \quad (3.1)$$

onde $\Delta = \det(\mathcal{D})$ e o índice sobrescrito (p) em cada operador refere-se a “propagador.” Observe que introduzimos um prefator “i” para seguir as convenções da literatura [191]. O denominador Δ corresponde a equação de dispersão apresentada na equação (2.75), amplamente estudada na subseção 2.2.2. A contribuição que cada operador fornece ao propagador pode ser calculada usando as relações de ortogonalidade estabelecidas na equação (A.3). Como resultado, obtemos as seguintes relações:

$$\hat{S}^{(p)} = \frac{\Delta}{4} \text{Tr}(\mathbb{1}_4 \mathcal{D}^{-1}), \quad \hat{\mathcal{P}}^{(p)} = -i \frac{\Delta}{4} \text{Tr}(\gamma^5 \mathcal{D}^{-1}), \quad \hat{\mathcal{V}}^{(p)\mu} = \frac{\Delta}{4} \text{Tr}(\gamma^\mu \mathcal{D}^{-1}), \quad (3.2a)$$

$$\hat{\mathcal{A}}^{(p)\mu} = -\frac{\Delta}{4} \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \mathcal{D}^{-1}), \quad \hat{\mathcal{T}}^{(p)\mu\nu} = \frac{\Delta}{4} \text{Tr}(\sigma^{\mu\nu} \mathcal{D}^{-1}). \quad (3.2b)$$

As contribuições são mostradas explicitamente a seguir

$$\hat{S}^{(p)} = -(\hat{\mathcal{S}} - m_\psi)(2\Theta - \hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}_{\text{gen}}^{\mu\nu}) - 2\hat{Y} \hat{\mathcal{P}}, \quad (3.3a)$$

$$\hat{\mathcal{P}}^{(p)} = -(\hat{\mathcal{S}} - m_\psi)(2\hat{Y} - \hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu} \tilde{\hat{\mathcal{T}}}_{\text{gen}}^{\mu\nu}) + 2\Theta \hat{\mathcal{P}}, \quad (3.3b)$$

$$\hat{\mathcal{V}}^{(p)\mu} = 2 \left[\Theta(p + \hat{\mathcal{V}})^\mu - \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}_{\nu\varrho}(p + \hat{\mathcal{V}})^\varrho - (\hat{\mathcal{S}} - m_\psi) \tilde{\hat{\mathcal{T}}}_{\text{gen}}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{A}}_\nu + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{A}}_\nu \hat{\mathcal{P}} \right], \quad (3.3c)$$

$$\hat{\mathcal{A}}^{(p)\mu} = 2 \left[\Theta \hat{\mathcal{A}}^\mu - \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}_{\nu\varrho} \hat{\mathcal{A}}^\varrho - (\hat{\mathcal{S}} - m_\psi) \tilde{\hat{\mathcal{T}}}_{\text{gen}}^{\mu\nu} (p + \hat{\mathcal{V}})_\nu + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} (p + \hat{\mathcal{V}})_\nu \hat{\mathcal{P}} \right], \quad (3.3d)$$

$$\hat{\mathcal{T}}^{(p)\mu\nu} = 2 \left[(\hat{\mathcal{S}} - m_\psi)^2 \hat{\mathcal{T}}_{\text{gen}}^{\mu\nu} - \Theta \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} + \hat{Y} \tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} - (\hat{\mathcal{T}}^{\mu\varrho} \hat{\mathcal{A}}^\nu - \hat{\mathcal{A}}^\mu \hat{\mathcal{T}}^{\nu\varrho}) \hat{\mathcal{A}}_\varrho \right. \\ \left. + [\hat{\mathcal{T}}^{\mu\varrho} (p + \hat{\mathcal{V}})^\nu - (p + \hat{\mathcal{V}})^\mu \hat{\mathcal{T}}^{\nu\varrho}] (p + \hat{\mathcal{V}})_\varrho - (\hat{\mathcal{S}} - m_\psi) \hat{\mathcal{P}} \tilde{\mathcal{T}}_{\text{gen}}^{\mu\nu} \right], \quad (3.3e)$$

onde também empregamos a seguinte definição:

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\text{gen}}^{\mu\nu} \equiv \tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} - \frac{1}{\hat{\mathcal{S}} - m_\psi} [(p + \hat{\mathcal{V}})^\mu \hat{\mathcal{A}}^\nu - \hat{\mathcal{A}}^\mu (p + \hat{\mathcal{V}})^\nu], \quad (3.3f)$$

$$2\Theta \equiv (p + \hat{\mathcal{V}})^2 - (\hat{\mathcal{S}} - m_\psi)^2 - \hat{\mathcal{A}}^2 - 2\hat{X} - \hat{\mathcal{P}}^2, \quad (3.3g)$$

$$\hat{\mathcal{T}}_{\text{gen}}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} (\tilde{\mathcal{T}}_{\text{gen}})_{\varrho\sigma}. \quad (3.3h)$$

Gostaríamos de ressaltar que a solução obtida para o propagador generaliza os resultados encontrados na literatura, visto que existiam apenas soluções para os operadores de spin-degenerados $\hat{\mathcal{S}}$ e $\hat{\mathcal{V}}$ [113], e para os operadores de spin-não-degenerados $\hat{\mathcal{A}}$ e $\hat{\mathcal{T}}$ [55] tratados separadamente. A nossa solução contempla todos os operadores do setor fermiônico não-mínimo do MPE. Ressaltamos ainda que no limite onde os operadores anulam-se, os resultados encontrados na literatura são recuperados. Neste limite temos que

$$2\Theta = p^2 - m_\psi^2, \quad \hat{\mathcal{S}}^{(p)} = m_\psi(p^2 - m_\psi^2), \quad \hat{\mathcal{P}}^{(p)} = 0, \quad (3.4a)$$

$$\hat{\mathcal{V}}^{(p)\mu} = (p^2 - m_\psi^2)p^\mu, \quad \hat{\mathcal{A}}^{(p)\mu} = 0, \quad \hat{\mathcal{T}}^{(p)\mu\nu} = 0, \quad \Delta = (p^2 - m_\psi^2)^2. \quad (3.4b)$$

Substituindo estes resultados na equação (3.1), obtemos o seguinte propagador

$$iS|_{\text{LV}=0} = \frac{i(\not{p} + m_\psi \mathbb{1}_4)}{p^2 - m_\psi^2}, \quad (3.5)$$

que corresponde exatamente ao encontrado na literatura [191].

3.2 Equação de dispersão modificada

Com todas as ferramentas matemáticas apresentadas até o momento, estamos prontos para calcular a equação de dispersão para o setor dos neutrinos do MPE, apresentado com detalhes na subseção 2.2.3. Iremos considerar desde o início o sistema mais geral possível, isto é, levaremos em consideração N neutrinos de Dirac e N neutrinos de Majorana, ambos modificados por operadores que violam a simetria de Lorentz. O operador de campo $\mathcal{D}_\nu$ no espaço dos momentos corresponde

a uma matriz de dimensão $(2N \times 2N) \otimes (4 \times 4) = (8N \times 8N)$, que pode ser expressa como

$$\mathcal{D}_v = \mathbb{1}_{2N} \otimes \not{p} - M \otimes \mathbb{1}_4 + \hat{\mathcal{Q}}, \quad (3.6a)$$

onde

$$\hat{\mathcal{Q}} = \hat{\mathcal{S}} \otimes \mathbb{1}_4 + i\hat{\mathcal{P}} \otimes \gamma^5 + \hat{\mathcal{V}}^\mu \otimes \gamma_\mu + \hat{\mathcal{A}}^\mu \otimes \gamma^5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \otimes \sigma_{\mu\nu}. \quad (3.6b)$$

Aqui, $\otimes$ representa o produto tensorial entre matrizes no espaço dos sabores, cuja dimensão é $(2N \times 2N)$, e matrizes no espaço espinorial, cuja dimensão é (4×4) .

Sabemos que a equação de dispersão é obtida através do determinante do operador de campo. No entanto, temos uma tarefa bastante complexa, já que o operador de campo em questão tem dimensão $(8N \times 8N)$. Para tornar o problema tratável do ponto de vista analítico, faremos uso do algoritmo apresentado na seção A.3. Este resultado se mostrará bastante eficiente no cálculo do determinante. Para aplicar o algoritmo, representado pelas equações (A.31) e (A.32), é conveniente expressar o nosso operador de campo na seguinte representação: $(8N \times 8N) = (4 \times 4) \otimes (2N \times 2N)$. Em outras palavras, o operador de Dirac modificado será escrito na forma de uma matriz de dimensão $(2N \times 2N)$, onde cada entrada constitui um bloco de dimensão (4×4) . Isto posto, a estrutura do operador em questão será:

$$\mathcal{D}_v = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{1,1} & \dots & \mathcal{D}_{1,2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{D}_{2N,1} & \dots & \mathcal{D}_{2N,2N} \end{pmatrix}, \quad (3.7a)$$

onde

$$\mathcal{D}_{i,j} = \delta_{i,j} \not{p} - M_{i,j} \mathbb{1}_4 + \hat{\mathcal{Q}}_{i,j}, \quad (3.7b)$$

$$\hat{\mathcal{Q}}_{i,j} = \left(\hat{\mathcal{S}} \mathbb{1}_4 + i\hat{\mathcal{P}} \gamma^5 + \hat{\mathcal{V}}^\mu \gamma_\mu + \hat{\mathcal{A}}^\mu \gamma^5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right)_{i,j}. \quad (3.7c)$$

Os índices $\{i, j\}$ correspondem a índices de sabor, enquanto que os índices espinoriais foram suprimidos, como de costume.

Com todos os elementos bem definidos, iremos agora estudar o algoritmo com mais detalhes. O problema em questão consiste em definir as $2N$ matrizes $\alpha_{i,j}^{(k)}$ com $k \in \{0 \dots 2N - 1\}$. Além disso, para cada k , existem outras $(2N)^2$ matrizes, visto que os índices de sabor $i, j \in \{1 \dots 2N\}$. Devemos nos lembrar que cada uma das matrizes $\alpha_{i,j}^{(k)}$ possui dimensão (4×4) . Ressaltamos isso, pois é preciso

evitar confusão com relação a dimensão dessas matrizes. Uma vez estabelecido estes parâmetros, precisamos agora definir o primeiro elemento da relação de recorrência, isto é, $\alpha_{i,j}^{(0)}$. Vemos, a partir da equação (A.31), que a matriz $\alpha_{i,j}^{(0)}$ deve ser igualada ao elemento (i, j) da matriz em blocos $\mathcal{D}_v$. Portanto, para o nosso problema, temos o seguinte resultado:

$$\alpha_{i,j}^{(0)} \equiv \mathcal{D}_{i,j}. \quad (3.8)$$

A partir desta identificação, podemos obter os elementos subsequentes da relação de recorrência. Para $k \in \{0 \dots 2N - 2\}$, construímos um novo conjunto de matrizes a partir dos elementos $\{\alpha^{(k)}\}$. Designados por $\{\alpha^{(k+1)}\}$, esse novo conjunto de matrizes possui a seguinte estrutura, a saber:

$$\alpha_{i,j}^{(k+1)} = \alpha_{i,j}^{(k)} - \alpha_{i,2N-k}^{(k)} (\alpha_{2N-k,2N-k}^{(k)})^{-1} \alpha_{2N-k,j}^{(k)}, \quad k \in \{0 \dots 2N - 2\}, \quad (3.9)$$

onde A^{-1} representa a inversa da matriz genérica A . Com este conjunto de $2N$ matrizes, podemos calcular o determinante da matriz $\mathcal{D}_v$ através da seguinte expressão:

$$\det \mathcal{D}_v = \prod_{k=1}^{2N} \det(\alpha_{k,k}^{(2N-k)}). \quad (3.10)$$

Observamos, através da equação acima, que o cálculo do determinante requer apenas o uso de um subconjunto das $(2N)^3$ matrizes obtidas. Esse subconjunto possui $2N$ elementos, o que claramente torna o nosso problema exequível. Este procedimento mostra-se muito vantajoso quando comparado com o cálculo via “força bruta” do determinante. Em virtude da equação (3.10), o determinante do operador de campo $\mathcal{D}_v$ decompõe-se em um produto de determinantes, cujas matrizes possuem uma decomposição análoga àquela apresentada para o operador de campo do setor fermiônico, vide equação (2.50) na subseção 2.2.2. Como consequência, podemos inferir de imediato que cada contribuição da equação (3.10) possuirá a mesma estrutura da equação de dispersão (2.75).

A seguir, detalhamos os passos necessários para aplicar este poderoso algoritmo ao setor não-mínimo dos neutrinos. Para simplificar nossa notação, introduzimos um operador genérico designado por $\hat{\mathcal{O}}^X$ que controla a violação de Lorentz. Este operador genérico possui uma estrutura de índice de Lorentz adequada para cada configuração, isto é, ele pode representar um dos cinco operadores possíveis: $\hat{\mathcal{O}}^X \in \{\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{V}}^\mu, \hat{\mathcal{A}}^\mu, \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\}$. As etapas a serem seguidas para o algoritmo são:

1. Definições iniciais:

De acordo com a equação (3.8), a primeira etapa da recursão é representada pela definição das matrizes $\alpha_{i,j}^{(0)}$. Estes objetos são identificados através da seguinte equação:

$$\alpha_{i,j}^{(0)} = \left(\hat{S} \mathbb{1}_4 + i\hat{\mathcal{P}}\gamma^5 + \hat{\mathcal{V}}^\mu \gamma_\mu + \hat{\mathcal{A}}^\mu \gamma^5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right)_{i,j}^{(0)}, \quad (3.11a)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{S}_{i,j}^{(0)} &= -M_{i,j} + \hat{S}_{i,j}, & \hat{\mathcal{P}}_{i,j}^{(0)} &= \hat{\mathcal{P}}_{i,j}, & \hat{\mathcal{V}}_{i,j}^{(0)\mu} &= p^\mu \delta_{i,j} + \hat{\mathcal{V}}_{i,j}^\mu, \\ \hat{\mathcal{A}}_{i,j}^{(0)\mu} &= \hat{\mathcal{A}}_{i,j}^\mu, & \hat{\mathcal{T}}_{i,j}^{(0)\mu\nu} &= \hat{\mathcal{T}}_{i,j}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.11b)$$

2. Cálculo da matriz inversa:

A relação de recorrência (3.9) requer o resultado da matriz inversa do elemento $\alpha_{2N-k,2N-k}^{(k)}$ que, como já destacado, possui a mesma forma do propagador obtido na seção 3.1. Com as devidas modificações, a matriz inversa procurada é dada por:

$$\left(\alpha_{2N-k,2N-k}^{(k)} \right)^{-1} = S|_{\hat{\mathcal{O}}^X = \hat{\mathcal{O}}_{2N-k,2N-k}^{(k)X}}, \quad (3.12a)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \left(\alpha_{2N-k,2N-k}^{(k)} \right)^{-1} &= \frac{1}{\Delta^{(k)}} \left(\hat{S}^{(p)} \mathbb{1}_4 + i\hat{\mathcal{P}}^{(p)} \gamma^5 + \hat{\mathcal{V}}^{(p)\mu} \gamma_\mu + \right. \\ &\quad \left. + \hat{\mathcal{A}}^{(p)\mu} \gamma^5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{(p)\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right)_{2N-k,2N-k}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.12b)$$

O denominador que aparece na última expressão é dado pelo lado esquerdo da equação de dispersão (2.75):

$$\Delta^{(k)} \equiv \det(\alpha_{2N-k,2N-k}^{(k)}) = \Delta|_{\hat{\mathcal{O}}^X = \hat{\mathcal{O}}_{2N-k,2N-k}^{(k)X}}. \quad (3.12c)$$

3. Produto entre dois operadores espinoriais:

As matrizes $(\alpha_{2N-k,2N-k}^{(k)})^{-1}$ e $\alpha_{2N-k,j}^{(k)}$ presentes na equação (3.9) podem ser expressas na base $\{\Gamma^A\}$. Como estudamos na subseção A.1, o produto entre dois operadores espinoriais também pode ser escrito como uma combinação

linear dos elementos do conjunto $\{\Gamma^A\}$, vide equação (A.1). O resultado desta operação, portanto, possui a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left(\alpha_{2N-k,2N-k}^{(k)}\right)^{-1} \alpha_{2N-k,j}^{(k)} &= \frac{1}{\Delta^{(k)}} \left(\hat{\mathcal{S}} \mathbb{1}_4 + i\hat{\mathcal{P}} + \hat{\mathcal{V}}^\mu \gamma_\mu + \right. \\ &\quad \left. + \hat{\mathcal{A}}^\mu \gamma^5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right)_{2N-k,j}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Os novos operadores que surgem do produto entre as matrizes são representados com uma barra. A seguir, mostramos a forma explícita destes objetos:

$$\hat{\mathcal{S}}_{2N-k,j}^{(k)} = \left(\hat{\mathcal{S}}^{(p)} \hat{\mathcal{S}} - \hat{\mathcal{P}}^{(p)} \hat{\mathcal{P}} + \hat{\mathcal{V}}^{(p)} \cdot \hat{\mathcal{V}} - \hat{\mathcal{A}}^{(p)} \cdot \hat{\mathcal{A}} - \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}^{(p)} \cdot \hat{\mathcal{T}} \right)_{2N-k,j}^{(k)}, \quad (3.14a)$$

$$i\hat{\mathcal{P}}_{2N-k,j}^{(k)} = \left(i\hat{\mathcal{S}}^{(p)} \hat{\mathcal{P}} + i\hat{\mathcal{P}}^{(p)} \hat{\mathcal{S}} - \hat{\mathcal{V}}^{(p)} \cdot \hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{A}}^{(p)} \cdot \hat{\mathcal{V}} + i[\star(\hat{\mathcal{T}}^{(p)} \wedge \hat{\mathcal{T}})] \right)_{2N-k,j}^{(k)}, \quad (3.14b)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{V}}_{2N-k,j}^{(k)\mu} &= \left(\hat{\mathcal{S}}^{(p)} \hat{\mathcal{V}}^\mu + \hat{\mathcal{V}}^{(p)\mu} \hat{\mathcal{S}} + i(\hat{\mathcal{V}}^{(p)} \cdot \hat{\mathcal{T}} + \hat{\mathcal{T}}^{(p)} \cdot \hat{\mathcal{V}})^\mu \right. \\ &\quad \left. + i(\hat{\mathcal{P}}^{(p)} \hat{\mathcal{A}}^\mu - \hat{\mathcal{A}}^{(p)\mu} \hat{\mathcal{P}}) + [\star(\hat{\mathcal{A}}^{(p)} \wedge \hat{\mathcal{T}} + \hat{\mathcal{T}}^{(p)} \wedge \hat{\mathcal{A}})]^\mu \right)_{2N-k,j}^{(k)}, \end{aligned} \quad (3.14c)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_{2N-k,j}^{(k)\mu} &= \left(\hat{\mathcal{S}}^{(p)} \hat{\mathcal{A}}^\mu + \hat{\mathcal{A}}^{(p)\mu} \hat{\mathcal{S}} + i(\hat{\mathcal{P}}^{(p)} \hat{\mathcal{V}}^\mu - \hat{\mathcal{V}}^{(p)\mu} \hat{\mathcal{P}}) \right. \\ &\quad \left. + i(\hat{\mathcal{A}}^{(p)} \cdot \hat{\mathcal{T}} + \hat{\mathcal{T}}^{(p)} \cdot \hat{\mathcal{A}})^\mu + [\star(\hat{\mathcal{V}}^{(p)} \wedge \hat{\mathcal{T}} + \hat{\mathcal{T}}^{(p)} \wedge \hat{\mathcal{V}})]^\mu \right)_{2N-k,j}^{(k)}, \end{aligned} \quad (3.14d)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}_{2N-k,j}^{(k)\mu\nu} &= \left(\frac{1}{2} (\hat{\mathcal{S}}^{(p)} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} + \hat{\mathcal{T}}^{(p)\mu\nu} \hat{\mathcal{S}}) - \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{P}}^{(p)} \tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} + \tilde{\mathcal{T}}^{(p)\mu\nu} \hat{\mathcal{P}}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \hat{\mathcal{V}}^{(p)\mu} \wedge \hat{\mathcal{V}}^\nu + \frac{i}{2} \hat{\mathcal{A}}^{(p)\mu} \wedge \hat{\mathcal{A}}^\nu + \frac{1}{2} [\star(\hat{\mathcal{A}}^{(p)} \wedge \hat{\mathcal{V}} - \hat{\mathcal{V}}^{(p)} \wedge \hat{\mathcal{A}})]^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + i(\hat{\mathcal{T}}^{(p)} \cdot \hat{\mathcal{T}})^{[\mu\nu]} \right)_{2N-k,j}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.14e)$$

Estes resultados são exatamente os mesmos apresentados na equação (A.9), como esperado.

4. Produto entre três operadores espinoriais:

Agora podemos avaliar completamente o produto das três matrizes espinoriais que aparecem na equação (3.9). Usando o mesmo artifício apresentado no

item anterior, obtemos o seguinte resultado:

$$\alpha_{i,2N-k}^{(k)} (\alpha_{2N-k,2N-k}^{(k)})^{-1} \alpha_{2N-k,j}^{(k)} = \frac{1}{\Delta^{(k)}} \left(\hat{\hat{S}} \mathbb{1}_4 + i \hat{\hat{P}} \gamma^5 + \hat{\hat{V}}^\mu \gamma_\mu + \hat{\hat{A}}^\mu \gamma^5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{\hat{T}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right)_{i,j}^{(k)}, \quad (3.15)$$

onde um novo conjunto de operadores, indicados por uma barra dupla, foi introduzido apenas por simplicidade. Esse conjunto de operadores é expresso em termos dos parâmetros originais. Por exemplo, o novo operador vetorial é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\hat{V}}_{i,j}^{(k)\mu} = & \left(\hat{S} \hat{V}^\mu + \hat{V}^\mu \hat{S} + i(\hat{V} \cdot \hat{T} + \hat{T} \cdot \hat{V})^\mu + i(\hat{P} \hat{A}^\mu - \hat{A}^\mu \hat{P}) \right. \\ & \left. + \left[\star(\hat{A} \wedge \hat{T} + \hat{T} \wedge \hat{A}) \right]^\mu \right)_{i,j}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Vemos que a estrutura do último resultado é idêntica àquela apresentada na equação (3.14c). A diferença é que os operadores devem ser mapeados de acordo com a regra: $\hat{O}^{(p)X} \mapsto \hat{O}^X$ e $\hat{O}^X \mapsto \hat{\hat{O}}^X$. Substituições análogas devem ser realizadas para obter o restante dos operadores que compõem a equação (3.15). É curioso notar a validade geral do mapeamento descrito acima, uma vez que, se tivéssemos um produto entre quatro ou mais operadores espinoriais, esta regra geral continuaria válida.

5. Etapa recursiva $k \mapsto k + 1$:

Agora que temos todos os ingredientes necessários, podemos calcular a $(k+1)$ -ésima contribuição do algoritmo (3.9). O termo $\alpha_{i,j}^{(k+1)}$ pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j}^{(k+1)} &= \alpha_{i,j}^{(k)} - \alpha_{i,2N-k}^{(k)} (\alpha_{2N-k,2N-k}^{(k)})^{-1} \alpha_{2N-k,j}^{(k)}, \\ &= \left(\hat{S} \mathbb{1}_4 + i \hat{P} \gamma^5 + \hat{V}^\mu \gamma_\mu + \hat{A}^\mu \gamma^5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{T}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right)_{i,j}^{(k+1)}. \end{aligned} \quad (3.17a)$$

Vemos, portanto, que os operadores que congregam a estrutura da matriz $\alpha_{i,j}^{(k+1)}$ devem assumir a seguinte forma:

$$\hat{O}_{i,j}^{(k+1)X} = \hat{O}_{i,j}^{(k)X} - \frac{1}{\Delta^{(k)}} \hat{\hat{O}}_{i,j}^{(k)X}. \quad (3.17b)$$

6. Expressando os $(k+1)$ -coeficientes em termos dos operadores iniciais:

Usando a relação de recorrência (3.17b), vemos que:

$$\hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(1)X} = \hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(0)X} - \frac{1}{\Delta^{(0)}} \hat{\hat{\mathcal{O}}}_{i,j}^{(0)X}, \quad (3.18a)$$

$$\hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(2)X} = \hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(1)X} - \frac{1}{\Delta^{(1)}} \hat{\hat{\mathcal{O}}}_{i,j}^{(1)X}, \quad (3.18b)$$

$$\vdots$$

$$\hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(k+1)X} = \hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(k)X} - \frac{1}{\Delta^{(k)}} \hat{\hat{\mathcal{O}}}_{i,j}^{(k)X}. \quad (3.18c)$$

Combinando os resultados acima, obtemos:

$$\hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(k+1)X} = \hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(0)X} - \sum_{l=0}^k \frac{1}{\Delta^{(l)}} \hat{\hat{\mathcal{O}}}_{i,j}^{(l)X}. \quad (3.18d)$$

Observamos, portanto, que é possível expressar todos os coeficientes que definimos ao longo dos passos anteriores em termos dos operadores iniciais definidos na equação (3.11b).

7. Cálculo final do determinante:

Todos os resultados anteriores são empregados para calcular o determinante de acordo com a equação (3.10). Dessa forma, a estrutura final da equação de dispersão pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\det \mathcal{D}_v = \prod_{k=1}^{2N} \det(\alpha_{k,k}^{(2N-k)}) = \det(\alpha_{1,1}^{(2N-1)}) \prod_{k=2}^{2N} \Delta^{(2N-k)} = \frac{\det(\tilde{\alpha}_{1,1}^{(2N-1)})}{(\Pi_{\Delta}^{(2N-2)})^3}, \quad (3.19a)$$

onde

$$\Pi_{\Delta}^{(k)} \equiv \prod_{n=0}^k \Delta^{(n)}, \quad (3.19b)$$

$$\tilde{\alpha}_{1,1}^{(2N-1)} \equiv \Pi_{\Delta}^{(2N-2)} \alpha_{1,1}^{(2N-1)}. \quad (3.19c)$$

No resultado apresentado na equação (3.19a) extraímos o produto de denominadores $\Delta^{(n)}$ da expressão de modo que o resultado final seja um polinômio em vez de uma soma de frações de polinômios.

A partir dos passos descritos anteriormente, somos capazes de escrever a equação de dispersão $\det \mathcal{D}_\nu$ de forma explícita. Como a matriz $\tilde{\alpha}_{1,1}^{(2N-1)}$ que aparece na equação (3.19a) tem a mesma decomposição do operador de campo da teoria de Dirac para um único férmion, vide equação (2.50), podemos calcular diretamente a equação de dispersão total para o setor de neutrinos do MPE não-mínimo com base nos resultados apresentados na subseção 2.2.2, em especial o cálculo da equação de dispersão. Os fatores $\Pi_\Delta^{(2N-2)}$ que extraímos do determinante em (3.19a) não desempenham um papel importante, visto que a equação de dispersão é dada por $\det \mathcal{D}_\nu = 0$. Assim, os neutrinos sujeitos a qualquer tipo de violação de Lorentz parametrizadas pelo MPE não-mínimo, obedecem a seguinte equação de dispersão:

$$0 = (\check{\mathcal{S}}_-^2 - \check{\mathcal{T}}_-^2)(\check{\mathcal{S}}_+^2 - \check{\mathcal{T}}_+^2) + \check{\mathcal{V}}_-^2 \check{\mathcal{V}}_+^2 - 2\check{\mathcal{V}}_- \cdot (\check{\mathcal{S}}_- \eta + 2i\check{\mathcal{T}}_-) \cdot (\check{\mathcal{S}}_+ \eta - 2i\check{\mathcal{T}}_+) \cdot \check{\mathcal{V}}_+ . \quad (3.20a)$$

Os novos operadores são mostrados a seguir

$$\check{\mathcal{S}}_\pm = (\check{\mathcal{S}} \pm i\check{\mathcal{P}})_{1,1}^{(2N-1)} , \quad (3.20b)$$

$$\check{\mathcal{V}}_\pm^\mu = (\check{\mathcal{V}}^\mu \pm \check{\mathcal{A}}^\mu)_{1,1}^{(2N-1)} , \quad (3.20c)$$

$$\check{\mathcal{T}}_\pm^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\check{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \pm i\check{\tilde{\mathcal{T}}}^{\mu\nu} \right]_{1,1}^{(2N-1)} , \quad (3.20d)$$

onde

$$\check{\mathcal{O}}_{i,j}^{(2N-1)X} = \Pi_\Delta^{(2N-2)} \hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(2N-1)X} . \quad (3.20e)$$

Uma das coisas mais interessantes a se notar aqui é que a equação de dispersão obtida para um sistema composto por N neutrinos de Dirac e N neutrinos de Majorana, ambos sujeitos à violação da simetria de Lorentz, tem uma forma completamente análoga à equação de dispersão do setor de férmions representada pela equação (2.75). Em geral, os coeficientes que aparecem na equação de dispersão (3.20a) são combinações dos operadores iniciais (3.11b) obtidos através de aplicações sucessivas das equações (3.14), (3.16) e (3.17b) que, em geral, são estruturas bastante longas e complicadas. Vale ressaltar ainda que a equação de dispersão (3.20a) é um polinômio de grau $8N(d-3)$ em p_μ , o que torna a solução exata desta equação uma tarefa impossível.

A vantagem do resultado apresentado na equação (3.20a) reside na sua estrutura covariante que, por sua vez, não se aplica apenas a um referencial de observador específico. Acreditamos ainda que este resultado também possa ser empregado em um sistema de álgebra computacional, uma vez que é possível evitar

o cálculo do determinante de uma matriz de grandes dimensões, além, é claro, de obtermos o resultado final em uma forma covariante.

3.3 Relações de dispersão: expansão perturbativa

Como a equação (3.20a) é, em geral, um polinômio de alto grau na variável p_0 , é desafiador obter as relações de dispersão exatas. Podemos, no entanto, tentar obter uma expansão perturbativa dessas soluções. A expansão em primeira ordem nos coeficientes que controlam a violação da simetria de Lorentz nos permitirá entender a estrutura geral dessas soluções, bem como a sua fenomenologia.

O cálculo perturbativo das relações de dispersão é feito basicamente retendo apenas as contribuições de primeira ordem dos coeficientes de controle. Porém, como vimos na subseção 2.2.2, alguns coeficientes de controle possuem contribuições não-nulas a partir da segunda ordem. Dessa forma, precisamos ter um cuidado especial com os coeficientes pseudoescalar, pseudovetorial e tensorial. Devemos lembrar ainda que os operadores $\hat{\mathcal{S}}_{i,j}^{(k)}$ e $\hat{\mathcal{V}}_{i,j}^{(k)\mu}$ exibem partes invariantes de Lorentz. Sendo assim, é razoável decompor estes operadores em duas partes, isto é, uma contribuição relacionada aos termos invariantes de Lorentz e uma parte que congrega os coeficientes de controle. Ao fazer isso, nós obtemos a seguinte expansão:

$$\hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(k)} = \hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(0)} - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{\Delta_{2N-l, 2N-l}^{(l)}} \hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(l)} \approx \hat{\mathcal{O}}_{0,i,j}^{(k)} + \delta \hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(k)}. \quad (3.21a)$$

O índice adicional “0” (sem parênteses) denota a parte invariante de Lorentz. De forma análoga, expandimos genericamente os operadores $\hat{\mathcal{P}}_{i,j}^{(k)}$, $\hat{\mathcal{A}}_{i,j}^{(k)\mu}$ e $\hat{\mathcal{T}}_{i,j}^{(k)\mu\nu}$ na forma

$$\hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(k)} = \hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(0)} - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{\Delta_{2N-l, 2N-l}^{(l)}} \hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(l)} \approx \delta \hat{\mathcal{O}}_{i,j}^{(k)}. \quad (3.21b)$$

A notação δ indica que todas as contribuições perturbativas estão inclusas. Posteriormente, podemos substituir esses termos pelas expansões correspondentes. Uma vez que a equação de dispersão obtida para os neutrinos possui uma estrutura análoga àquela obtida para o setor dos férmions, podemos então aplicar a mesma técnica usada na subseção 2.2.2 para obter a forma perturbativa da equação de dispersão. Procedendo de maneira inteiramente semelhante, a equação de dispersão expandida assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0 \approx & \left[(\hat{\mathcal{S}}_{0,i,j}^{(k)})^2 + 2\hat{\mathcal{S}}_{0,i,j}^{(k)} \delta \hat{\mathcal{S}}_{i,j}^{(k)} - (\hat{\mathcal{V}}_{0,i,j}^{(k)})^2 - 2\hat{\mathcal{V}}_{0,i,j}^{(k)} \cdot \delta \hat{\mathcal{V}}_{i,j}^{(k)} \right]^2 \\ & + 2 \left[(\hat{\mathcal{S}}_{0,i,j}^{(k)})^2 - (\hat{\mathcal{V}}_{0,i,j}^{(k)})^2 \right] (\delta \hat{\mathcal{P}}_{i,j}^{(k)})^2 - 4(\delta \hat{\mathcal{Y}}_{i,j}^{(k)})^2, \end{aligned} \quad (3.22a)$$

onde a parte que descreve os operadores de spin não-degenerados é dada por:

$$\begin{aligned}
(\delta\hat{\mathcal{Y}}_{i,j}^{(k)})^2 &= (\hat{\mathcal{V}}_{0;i,j}^{(k)} \cdot \delta\hat{\mathcal{A}}_{i,j}^{(k)})^2 - \frac{1}{2} [(\hat{\mathcal{V}}_{0;i,j}^{(k)})^2 + (\hat{\mathcal{S}}_{0;i,j}^{(k)})^2] (\delta\hat{\mathcal{A}}_{i,j}^{(k)})^2 \\
&\quad + 2\hat{\mathcal{S}}_{0;i,j}^{(k)} \hat{\mathcal{V}}_{0;i,j}^{(k)} \cdot \delta\hat{\mathcal{T}}_{i,j}^{(k)} \cdot \delta\hat{\mathcal{A}}_{i,j}^{(k)} + \hat{\mathcal{V}}_{0;i,j}^{(k)} \cdot \delta\hat{\mathcal{T}}_{i,j}^{(k)} \cdot \delta\hat{\mathcal{T}}_{i,j}^{(k)} \cdot \hat{\mathcal{V}}_{0;i,j}^{(k)} \\
&\quad + \frac{1}{4} [(\hat{\mathcal{V}}_{0;i,j}^{(k)})^2 - (\hat{\mathcal{S}}_{0;i,j}^{(k)})^2] (\delta\hat{\mathcal{T}}_{i,j}^{(k)})^2.
\end{aligned} \tag{3.22b}$$

Comparando o resultado acima com o obtido na equação (5.105), vemos que o último termo do lado direito não contribui para o setor fermiônico. A expansão perturbativa da equação de dispersão pode ainda ser expressa como:

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathcal{V}}_{0;i,j}^{(k)})^2 - (\hat{\mathcal{S}}_{0;i,j}^{(k)})^2 &\approx 2\hat{\mathcal{S}}_{0;i,j}^{(k)} \delta\hat{\mathcal{S}}_{i,j}^{(k)} - 2\hat{\mathcal{V}}_{0;i,j}^{(k)} \cdot \delta\hat{\mathcal{V}}_{i,j}^{(k)} \\
&\quad \pm 2\sqrt{(\delta\hat{\mathcal{Y}}_{i,j}^{(k)})^2 - \frac{1}{2} [(\hat{\mathcal{S}}_{0;i,j}^{(k)})^2 - (\hat{\mathcal{V}}_{0;i,j}^{(k)})^2]} (\delta\hat{\mathcal{P}}_{i,j}^{(k)})^2.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Enfatizamos novamente que as partes invariantes de Lorentz estão contidas apenas em $\hat{\mathcal{V}}_{0;i,j}^{(k)}$ e $\hat{\mathcal{S}}_{0;i,j}^{(k)}$, respectivamente. O termo no lado esquerdo da equação acima é um polinômio de ordem $8N$ na variável p^0 . Na ausência de violação de Lorentz, as relações de dispersão padrão para um número arbitrário N de sabores parecem seguir o seguinte padrão

$$E_0^{(u)} \stackrel{?}{=} \sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2N} [\mathfrak{M} + (m_{\text{eff}}^{(u)})^2]}, \quad u \in \{1 \dots 2N\}, \tag{3.24a}$$

onde

$$\mathfrak{M} = \text{Tr}(M^2) = \sum_{i,j=1}^{2N} M_{i,j} M_{j,i}. \tag{3.24b}$$

Além disso, o parâmetro $m_{\text{eff}}^{(u)}$ introduzido, para um dado valor de u , é um polinômio extremamente complicado dos coeficientes da matriz de massa e, por simplicidade, chamamos aqui de “massa efetiva”. Para um dado valor de N , é possível calcular esta massa efetiva explicitamente. Devido à complexidade do termo $m_{\text{eff}}^{(u)}$, demonstrar a validade da equação (3.24a), no entanto, é um desafio bastante complicado para um valor N arbitrário.

Levando agora em consideração as contribuições advindas da violação da simetria de Lorentz, a relação de dispersão em primeira ordem assume a seguinte forma

$$E^{(u)} \approx E_0^{(u)} + \frac{1}{2NE_0^{(u)}(m_{\text{eff}}^{(u)})^2} \left\{ \hat{\mathcal{S}}_{0;i,j}^{(k)} \delta \hat{\mathcal{S}}_{i,j}^{(k)} - \hat{\mathcal{V}}_{0;i,j}^{(k)} \cdot \delta \hat{\mathcal{V}}_{i,j}^{(k)} \right. \\ \left. \pm \sqrt{(\delta \hat{\mathcal{Y}}_{i,j}^{(k)})^2 - \frac{1}{2} [(\hat{\mathcal{S}}_{0;i,j}^{(k)})^2 - (\hat{\mathcal{V}}_{0;i,j}^{(k)})^2]} (\delta \hat{\mathcal{P}}_{i,j}^{(k)})^2 \right\}, \quad (3.25)$$

onde usamos os operadores definidos através das equações (3.21a), (3.21b) e (3.22b). Ao total existem $8N$ relações de dispersão modificadas, que corresponde ao grau máximo do polinômio em p^0 . Aqui vemos como a presença dos operadores de spin não-degenerados dobra o número de relações de dispersão, como esperado. Além disso, o operador pseudoescalar também leva a uma duplicação das soluções. Tal resultado não possui correspondente no setor fermiônico, como podemos observar na equação (2.81). Iremos explorar a seguir dois casos especiais na tentativa de esclarecer as estruturas generalizadas que apresentamos até agora.

3.3.1 Primeiro caso: $N = 1$

Apesar da expansão perturbativa da equação de dispersão possuir uma estrutura que, entre outras coisas, nos possibilitou compreender como o operador pseudoescalar quebra a degenerescência de spin, ainda assim é uma equação bastante complexa. A fim de poder entender melhor esta solução, iremos estudar alguns casos particulares. Começaremos com $N = 1$, ou seja, consideraremos uma teoria onde temos um neutrino de Dirac e um neutrino de Majorana. É razoável calcular inicialmente a relação de dispersão para o caso em que todos os coeficientes que controlam a violação da simetria de Lorentz são nulos. A equação de dispersão para o caso em questão é um polinômio de quarto grau:

$$0 = \left(p^4 - \mathfrak{M}p^2 + \tilde{\mathfrak{M}} \right)^2, \quad (3.26a)$$

onde

$$\mathfrak{M} = \text{Tr}(M^2), \quad \tilde{\mathfrak{M}} = (\det M)^2. \quad (3.26b)$$

Resolvendo a equação de dispersão para a variável p_0 , obtemos as seguintes soluções:

$$E_0^{(1,2)} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{\mathfrak{M}}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{M}}{2} \right)^2 - \tilde{\mathfrak{M}}}. \quad (3.27)$$

Fazendo agora os coeficientes que controlam a violação da simetria não-nulos, temos:

$$E^{(1,2)\pm} = E_0^{(1,2)} - \frac{1}{2E_0^{(1,2)}} \left(\hat{\mathcal{S}}_{\text{disp}}^{(1,2)} + p \cdot \hat{\mathcal{V}}_{\text{disp}}^{(1,2)} \pm \delta \hat{\mathcal{Y}} \right) + \dots, \quad (3.28a)$$

em que

$$\hat{\mathcal{S}}_{\text{disp}}^{(1,2)} = M_{ab}\hat{\mathcal{S}}_{ba} \pm \frac{(M_{aa} + M_{bb})M_{ab}\hat{\mathcal{S}}_{ba} - (M_{aa}^2 + M_{aa}M_{bb} - 2M_{ab}M_{ba})\hat{\mathcal{S}}_{aa}}{\sqrt{(M_{11} - M_{22})^2 + 4M_{12}M_{21}}}, \quad (3.28b)$$

$$\hat{\mathcal{V}}_{\text{disp}}^{(1,2)\mu} = \hat{\mathcal{V}}_{aa}^{\mu} \pm \frac{2M_{ab}\hat{\mathcal{V}}_{ba}^{\mu} - M_{aa}\hat{\mathcal{V}}_{bb}^{\mu}}{\sqrt{(M_{11} - M_{22})^2 + 4M_{12}M_{21}}}, \quad (3.28c)$$

$$\begin{aligned} (\delta\hat{\mathcal{Y}})^2 &= \frac{1}{(M_{11} + M_{22})^2 [(M_{11} - M_{22})^2 + 4M_{12}M_{21}]} \\ &\times \left\{ (\hat{\mathcal{V}}_0 \cdot \delta\hat{\mathcal{A}})^2 - \frac{1}{2} [(\hat{\mathcal{V}}_0)^2 + (\hat{\mathcal{S}}_0)^2] (\delta\hat{\mathcal{A}})^2 + 2\hat{\mathcal{S}}_0\hat{\mathcal{V}}_0 \cdot \delta\hat{\mathcal{T}} \cdot \delta\hat{\mathcal{A}} \right. \\ &\quad \left. + \hat{\mathcal{V}}_0 \cdot \delta\hat{\mathcal{T}} \cdot \delta\hat{\mathcal{T}} \cdot \hat{\mathcal{V}}_0 + \frac{1}{4} [(\hat{\mathcal{V}}_0)^2 - (\hat{\mathcal{S}}_0)^2] (\delta\hat{\mathcal{T}})^2 \right\}_{1,1}^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.28d)$$

Além disso, temos que

$$\delta\hat{\mathcal{A}}_{1,1}^{(1)\mu} \approx \hat{\mathcal{A}}_{1,1}^{(1)\mu} = \hat{\mathcal{A}}_{1,1}^{(0)\mu} - \frac{1}{\Delta_{2,2}^{(0)}} \hat{\hat{\mathcal{A}}}_{1,1}^{(0)\mu}, \quad (3.29a)$$

$$\delta\hat{\mathcal{T}}_{1,1}^{(k)\mu\nu} \approx \hat{\mathcal{T}}_{1,1}^{(1)\mu\nu} = \hat{\mathcal{T}}_{1,1}^{(0)\mu\nu} - \frac{1}{\Delta_{2,2}^{(0)}} \hat{\hat{\mathcal{T}}}_{1,1}^{(0)\mu\nu}, \quad (3.29b)$$

e

$$\hat{\mathcal{S}}_0 = -M_{11} - \frac{M_{12}M_{22}M_{21}}{p^2 - M_{22}}, \quad (3.29c)$$

$$\hat{\mathcal{V}}_0^{\mu} = \frac{p^2 - M_{12}M_{21} - M_{11}^2}{p^2 - M_{22}} p^{\mu}. \quad (3.29d)$$

Os índices de sabor nas equações (3.28b) e (3.28c) devem ser entendidos como uma soma de Einstein. Note que na equação (3.28a) dois sinais podem ser escolhidos em posições diferentes, independentemente um do outro. O primeiro sinal é indicado pelo sufixo (1, 2) e aparece nas partes invariantes de Lorentz e de spin-degenerado da relação de dispersão. Esta escolha está diretamente relacionada aos dois sabores dos neutrinos considerados, isto é, “1” designa o neutrino de Dirac e “2” designa o neutrino de Majorana. O segundo sinal está relacionado apenas aos coeficientes de spin não-degenerados, que são incorporados na quantidade $(\delta\hat{\mathcal{Y}})^2$. Esta escolha reflete a quebra da degenerescência das soluções. Feita estas considerações, observamos que para $N = 1$ existem 4 relações de dispersão diferentes. Com a presença dos coeficientes de spin não-degenerados, existem duas relações de dispersão distintas para cada um dos dois neutrinos considerados.

3.3.2 Segundo caso: $\hat{\mathcal{S}} \neq 0$, $N = \frac{3}{2}$

Iremos agora avaliar um caso simples em que apenas o operador escalar é não-nulo. Consideraremos a situação em que apenas neutrinos de Dirac estão presentes. Para isso, devemos usar $N = \frac{3}{2}$ ¹, de tal forma que selecionamos apenas $2 \times \frac{3}{2} = 3$ sabores na equação (3.7a). As energias $E_{(0)}^{(i)}$ para o caso em questão são as soluções da seguinte equação de dispersão

$$\left(-p^6 + \mathfrak{M}_S p^4 - \mathfrak{N}_S p^2 + \tilde{\mathfrak{M}}_S\right)^2 = 0, \quad (3.30a)$$

onde usamos as seguintes definições:

$$\mathfrak{M}_S = \text{tr} \left(-M + \hat{\mathcal{S}}\right)^2 \approx \text{tr} M^2 - 2\text{tr} (M \cdot \hat{\mathcal{S}}), \quad (3.30b)$$

$$\tilde{\mathfrak{M}}_S = \det \left(-M + \hat{\mathcal{S}}\right)^2 \approx \det M^2 - 2\det M^2 \text{Tr} \left(M^{-1} \hat{\mathcal{S}}\right), \quad (3.30c)$$

$$\mathfrak{N}_S = \left[\det \left(-M + \hat{\mathcal{S}}\right)\right]^2 \text{tr} \left[\left(-M + \hat{\mathcal{S}}\right)^{-1}\right]^2, \quad (3.30d)$$

$$\begin{aligned} &\approx 3\text{tr} \left[\text{adj} \left(M^2\right)\right] - 2\text{tr} \left[\text{adj} \left(M^2 + M \cdot \hat{\mathcal{S}}\right)\right] \\ &\quad + 2\text{tr} \left[\text{adj} \left(M \cdot \hat{\mathcal{S}}\right)\right], \end{aligned} \quad (3.30e)$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_{11} & \hat{\mathcal{S}}_{12} & \hat{\mathcal{S}}_{13} \\ \hat{\mathcal{S}}_{21} & \hat{\mathcal{S}}_{22} & \hat{\mathcal{S}}_{23} \\ \hat{\mathcal{S}}_{31} & \hat{\mathcal{S}}_{32} & \hat{\mathcal{S}}_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.30f)$$

e adj é o adjunto, operação matemática definida a seguir:

$$\text{adj} (A) = C^T. \quad (3.31)$$

Na equação acima, C representa a matriz dos cofatores de uma matriz genérica A , isto é, $C_{i,j} = (-i)^{i+j} \det A_{i,j}$, em que $A_{i,j}$ representa a submatriz obtida da matriz original A eliminando-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna.

Expandindo a relação de dispersão (3.30a) até primeira ordem, obtemos:

$$\left(-p^6 + \mathfrak{M} p^4 - \mathfrak{N} p^2 + \tilde{\mathfrak{M}} + \delta \mathfrak{M}_S p^4 - \delta \mathfrak{N}_S p^2 + \delta \tilde{\mathfrak{M}}_S\right)^2 = 0, \quad (3.32a)$$

¹ Aqui devemos salientar que escolhas para N iguais a um semi inteiro da forma $\frac{2n+1}{2}$, onde $n \in \mathbb{N}$, na verdade não passa de um artifício matemático que nos permite estudar neutrinos de Dirac ou neutrinos de Majorana separadamente.

onde

$$\mathfrak{M} = \text{tr} M^2, \quad \tilde{\mathfrak{M}} = \det M^2, \quad \mathfrak{N} = 3 \text{tr} [\text{adj} (M^2)], \quad (3.32b)$$

e

$$\delta \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} = -2 \text{tr} (M \cdot \hat{\mathcal{S}}), \quad \delta \tilde{\mathfrak{M}}_{\mathcal{S}} = -2 \det M^2 \text{tr} (M^{-1} \hat{\mathcal{S}}), \quad (3.32c)$$

$$\delta \mathfrak{N}_{\mathcal{S}} = -2 \text{tr} [\text{adj} (M^2 + M \cdot \hat{\mathcal{S}})] + 2 \text{tr} [\text{adj} (M \cdot \hat{\mathcal{S}})]. \quad (3.32d)$$

Feita todas as observações acima, encontramos o seguinte resultado para a relação de dispersão:

$$E^{(i)} \approx E_{(0)}^{(i)} + \frac{1}{3} \frac{\delta \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} p_{(i)}^4 - \delta \mathfrak{N}_{\mathcal{S}} p_{(i)}^2 + \delta \tilde{\mathfrak{M}}_{\mathcal{S}}}{m_{(i)\text{eff}}^2 E_{(0)}^{(i)}}, \quad (3.33a)$$

$$\approx E_{(0)}^{(i)} + \frac{1}{3} \frac{m_{(i)\text{eff}}^2 \delta \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}}{E_{(0)}^{(i)}} - \frac{1}{3} \frac{\delta \mathfrak{N}_{\mathcal{S}}}{E_{(0)}^{(i)}} + \frac{1}{3} \frac{\delta \tilde{\mathfrak{M}}_{\mathcal{S}}}{m_{(i)\text{eff}}^2 E_{(0)}^{(i)}} \quad (3.33b)$$

onde usamos

$$E_{(0)}^{(i)} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{\mathfrak{M}}{3} + \frac{m_{(i)\text{eff}}^2}{3}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.33c)$$

e

$$p_{(i)}^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{M} + \frac{1}{2} m_{(i)\text{eff}}^2,$$

$$m_{(i)\text{eff}}^2 = -18 \sqrt[3]{2\mathfrak{N}} + 6\mathfrak{M} \left(27\tilde{\mathfrak{M}} + 2\mathfrak{M}^3 - 9\mathfrak{M}\mathfrak{N} + \Lambda \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.33d)$$

$$+ \left(54\tilde{\mathfrak{M}} + 4\mathfrak{M}^3 - 18\mathfrak{M}\mathfrak{N} + 6\Lambda \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.33e)$$

$$\Lambda = \sqrt{81\tilde{\mathfrak{M}}^2 + 12\tilde{\mathfrak{M}}\mathfrak{M}^3 - 54\mathfrak{M}\mathfrak{N}\tilde{\mathfrak{M}} - 3\mathfrak{M}^2\mathfrak{N}^2 + 12\mathfrak{N}^3}. \quad (3.33f)$$

Como podemos observar claramente neste exemplo, a estrutura da massa efetiva $m_{(i)\text{eff}}$ torna-se bastante complexa na medida em que consideramos um valor cada vez maior para N .

Por fim, porém não menos importante, devemos ressaltar que os nossos resultados podem ser utilizados em aplicações como oscilações de neutrinos. Como apontado na Referência [41], por exemplo, oscilações entre sabores podem ocorrer mesmo na ausência do termo de massa. Neste caso, os operadores que violam a simetria de Lorentz e que possuem dimensão de massa podem ser interpretados como uma “massa efetiva”. Desta forma, já que a probabilidade de transição entre sabores também depende da relação de dispersão, nossos resultados podem ser

utilizados para estimar tais efeitos tanto para a versão mínima quanto para a versão não-mínima do MPE. Além disso, iremos mostrar no capítulo 5 que podemos usar o resultado geral apresentado na equação (3.25) para estudar a cinemática clássica dos neutrinos na presença de *background*.

CAPÍTULO 4

ELETRODINÂMICA PLANAR NÃO-MÍNIMA

Na subseção 2.3.1 apresentamos uma técnica muito útil que nos permite obter eletrodinâmicas planares a partir de modelos em $(1 + 3)$ -dimensões. Vimos que uma série de trabalhos foram feitos usando como base o MPE-mínimo. Neste capítulo pretendemos aplicar a mesma técnica ao MPE não-mínimo, isto é, iremos obter um modelo planar estendido que contempla os operadores de dimensão de massa arbitrária. Estudaremos as principais propriedades deste sistema, tais como: as equações de campo e suas soluções, o propagador, além das relações de dispersão. Os resultados percorridos neste capítulo resultaram na publicação apresentada na Referência [192].

4.1 Redução dimensional do setor eletromagnético

A densidade de Lagrange que estamos interessados em aplicar a redução dimensional foi apresentada na subseção 2.2.1. Reescrevendo a equação (2.14) com a notação apresentada na subseção 2.3.1, temos:

$$\mathcal{L}_{(1+3)} = -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{1}{2}\epsilon^{\hat{\lambda}\hat{\kappa}\hat{\mu}\hat{\nu}}A_{\hat{\lambda}}(\hat{k}_{AF})_{\hat{\kappa}}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{4}F_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}(\hat{k}_F)^{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\mu}\hat{\nu}}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \quad (4.1)$$

Devemos lembrar que os índices gregos com “chapeu” assumem os valores em $(1+3)$ -dimensões, por exemplo, $\hat{\mu} \in \{0, 1, 2, 3\}$. Aplicando a técnica de redução dimensional tratada na subseção 2.3.1 à densidade de Lagrange (4.1), obtemos:

$$-\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \mapsto -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi, \quad (4.2a)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}(\hat{k}_F)^{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\mu}\hat{\nu}}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &\mapsto -\frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\mu\nu} - \partial_\kappa\phi(\hat{k}_\phi)^{\kappa\mu}\partial_\mu\phi \\ &\quad + F_{\kappa\lambda}(\hat{k}_{\phi F})^{\kappa\lambda\mu}\partial_\mu\phi, \end{aligned} \quad (4.2b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon^{\hat{\lambda}\hat{\kappa}\hat{\mu}\hat{\nu}}A_{\hat{\lambda}}(\hat{k}_{AF})_{\hat{\kappa}}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &\mapsto -\varepsilon^{\lambda\kappa\mu}A_\lambda(\hat{k}_{AF})_\kappa\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\mu\nu}A_\lambda(\hat{k}_{AF})F_{\mu\nu} \\ &\quad - \varepsilon^{\mu\kappa\nu}\phi(\hat{k}_{AF})_\kappa\partial_\mu A_\nu, \end{aligned} \quad (4.2c)$$

onde definimos os operadores $(\hat{k}_\phi)^{\kappa\mu} \equiv (\hat{k}_F)^{\kappa 3 \mu 3}$ e $(\hat{k}_{\phi F})^{\kappa\lambda\mu} \equiv (\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu 3}$. Todos os campos e operadores do lado direito da equação acima pertencem agora a $(1+2)$ -dimensões. O tensor de *rank*-3 $(\hat{k}_{\phi F})^{\kappa\lambda\mu}$ obedece a seguinte propriedade de antissimetria: $(\hat{k}_{\phi F})^{\kappa\lambda\mu} = -(\hat{k}_{\phi F})^{\lambda\kappa\mu}$. Tal propriedade foi herdada das simetrias originais do tensor $(\hat{k}_F)^{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\mu}\hat{\nu}}$. Ademais, $(\hat{k}_{\phi F})^{\kappa\lambda\mu}$ também satisfaz uma identidade tipo Bianchi, a saber:

$$(\hat{k}_{\phi F})^{\kappa\lambda\mu} + (\hat{k}_{\phi F})^{\mu\kappa\lambda} + (\hat{k}_{\phi F})^{\lambda\mu\kappa} = 0. \quad (4.3)$$

O tensor de *rank*-2 $(\hat{k}_\phi)^{\kappa\mu}$ também possui uma simetria residual herdada do tensor $(\hat{k}_F)^{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\mu}\hat{\nu}}$. Como podemos observar através da própria definição, o tensor $(\hat{k}_\phi)^{\kappa\mu}$ é simétrico quando efetuamos a troca de índices $\kappa \leftrightarrow \mu$. Vale ressaltar ainda que apenas o termo CPT-par em $(1+3)$ -dimensões gera uma contribuição escalar modificada.

A densidade de Lagrange em $(1+2)$ -dimensões obtida após a redução dimensional possui a estrutura:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(1+2)} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\mu\nu}A_\lambda(\hat{k}_{AF})F_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\mu\nu} - \partial_\kappa\phi(\hat{k}_\phi)^{\kappa\mu}\partial_\mu\phi \\ &\quad + \varepsilon^{\nu\kappa\mu}[\phi(\hat{k}_{AF})_\kappa\partial_\mu A_\nu - A_\nu(\hat{k}_{AF})_\kappa\partial_\mu\phi] \\ &\quad + F_{\kappa\lambda}(\hat{k}_{\phi F})^{\kappa\lambda\mu}\partial_\mu\phi. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Os dois primeiros termos da equação acima descrevem a cinética dos campos eletromagnético e escalar, respectivamente. O terceiro e o quarto termo são os

sucessores diretos dos operadores CPT-ímpar e CPT-par, nesta ordem, do modelo em $(1 + 3)$ -dimensões. O quinto termo é uma contribuição que envolve apenas o campo escalar modificado por um coeficiente CPT-par. Observamos que esta contribuição tem a estrutura análoga ao coeficiente c presente na teoria do campo escalar em $(1 + n)$ -dimensões desenvolvida recentemente no trabalho [80]. Por outro lado, vemos que modificações do tipo a , encontradas no trabalho [80], não são obtidas através da redução dimensional. Finalmente, os três últimos termos descrevem acoplamentos entre os campos planares. Os tensores que são responsáveis pelos acoplamentos são $(\hat{k}_{\phi F})^{\kappa\lambda\mu}$ e $(\hat{k}_{AF})^\kappa$.

A estrutura do campo eletromagnético e sua modificação em razão da presença do tensor $(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}$ permanecem iguais na teoria planar. As simetrias do tensor $(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}$, herdada do seu ascendente, permanecem intactas. Levando isso em consideração, temos então 6 operadores independentes que surgem a partir de $(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}$. Além disso, podemos eliminar o duplo traço do operador $(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}$ através de uma redefinição nos campos eletromagnéticos. Por causa disso, podemos eliminar de antemão esta contribuição a partir da seguinte definição:

$$(\hat{k}_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.5)$$

Esta condição estabelece um vínculo entre os coeficientes, reduzindo assim o número de operadores independentes para 5. Podemos escolher $(\hat{k}_F)^{0101}$, $(\hat{k}_F)^{0202}$, $(\hat{k}_F)^{0102}$, $(\hat{k}_F)^{0112}$ e $(\hat{k}_F)^{0212}$ como os operadores independentes.

Em contrapartida, o descendente planar do termo Maxwell-Chern-Simons possui uma estrutura bastante diferente. Como podemos observar, o campo de fundo que outrora era um vetor, agora é o operador escalar $\hat{k}_{AF}$, cujos coeficientes de controle poderiam ser interpretados como constantes de acoplamento similares à massa topológica da teoria de Chern-Simons. No MPE-mínimo o operador em questão não possui direções privilegiadas, uma vez que se reduz a uma constante. Este resultado está em concordância com o fato de que só existem termos de Chern-Simons genuínos em espaços-tempo cuja dimensão seja ímpar¹ [138]. Os termos genuínos em questão não necessitam de uma estrutura tensorial adicional como aqueles construídos em $(1 + 3)$ -dimensões [193, 194], por exemplo. Devemos,

¹ Em $(1 + 4)$ -dimensões, por exemplo, o termo de Chern-Simons possui a seguinte estrutura:

$$\mathcal{L}_{(1+4)}^{\text{CS}} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} A_\mu \partial_\nu A_\rho \partial_\sigma A_\tau,$$

onde $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau}$ é o símbolo de Levi-Civita em 5-dimensões. Vemos, portanto, que apenas em $(1 + 2)$ -dimensões é possível obter uma teoria quadrática no campo de calibre.

no entanto, notar que no MPE não-mínimo o operador $\hat{k}_{AF}$ contém tanto direções privilegiadas quanto 4-derivadas adicionais em sua estrutura. Por fim, o tensor $(\hat{k}_{AF})_\kappa$ possui apenas três componentes independentes em $(1+2)$ -dimensões e desempenha o papel de acoplamento entre os campos escalar e eletromagnético.

Sabemos que os campos de fundo originais $(\hat{k}_{AF})_{\hat{\kappa}}$ e $(\hat{k}_F)^{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\mu}\hat{\nu}}$ são operadores definidos através de uma soma infinita de coeficientes de controle convenientemente contraídos com 4-derivadas. Devemos ainda lembrar que as dimensões de massa dos campos planares A^μ , ϕ e $F^{\mu\nu}$ não são as mesmas que seus ascendentes em $(1+3)$ -dimensões. Para o caso planar temos:

$$[A^\mu] = \frac{1}{2}, \quad [\phi] = \frac{1}{2}, \quad [F^{\mu\nu}] = \frac{3}{2}. \quad (4.6)$$

A partir destes resultados, podemos inferir as dimensões de massa dos campos de fundo, a saber:

$$[\hat{k}_F] = 0, \quad [\hat{k}_{AF}] = 1, \quad [\hat{k}_\phi] = 0, \quad [\hat{k}_{\phi F}] = 0. \quad (4.7)$$

Podemos, em princípio, manter a notação já estabelecida do MPE para os operadores de dimensão de massa d . Porém, devemos ter em mente que d não corresponderá mais à dimensão de massa do operador de campo cujo coeficiente de controle está contraído. Não obstante, as dimensões de massa dos coeficientes de controle continuam a seguir as mesmas regras dos seus ascendentes. Como iremos trabalhar ao longo deste capítulo exclusivamente no espaço dos momentos, é conveniente expressar a decomposição dos campos de fundo presentes na equação (4.4) em função do 4-momento, isto é,

$$(\hat{k}_{AF})_\kappa = \sum_{d \text{ ímpar}} (k_{AF}^{(d)})_\kappa^{\alpha_1 \dots \alpha_{(d-3)}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{(d-3)}}, \quad (4.8a)$$

$$(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu} = \sum_{d \text{ par}} (k_F^{(d)})^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1 \dots \alpha_{(d-4)}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{(d-4)}}, \quad (4.8b)$$

$$\hat{k}_{AF} = \sum_{d \text{ ímpar}} (k_{AF}^{(d)})^{\alpha_1 \dots \alpha_{(d-3)}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{(d-3)}}, \quad (4.8c)$$

$$(\hat{k}_\phi)^{\kappa\mu} = \sum_{d \text{ par}} (k_\phi^{(d)})^{\kappa\mu\alpha_1 \dots \alpha_{(d-4)}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{(d-4)}}, \quad (4.8d)$$

$$(\hat{k}_{\phi F})^{\kappa\lambda\mu} = \sum_{d \text{ par}} (k_{\phi F}^{(d)})^{\kappa\lambda\mu\alpha_1 \dots \alpha_{(d-4)}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{(d-4)}}, \quad (4.8e)$$

onde $p_\mu = i\partial_\mu$. Cada classe de coeficiente de controle tem dimensão de massa $4 - d$.

4.2 Conexão com os campos físicos

Vamos revisar brevemente os conceitos da eletrodinâmica em $(1 + 2)$ -dimensões que são fundamentais para a compreensão do modelo em desenvolvimento [195]. Sabemos que o campo eletromagnético tem 6 componentes independentes em $(1 + 3)$ -dimensões. Tais componentes correspondem às três componentes do campo elétrico $\mathbf{E}$ e as outras três estão relacionadas à densidade de fluxo magnético $\mathbf{B}$. Em contraste, a situação em $(1 + 2)$ -dimensões é bastante diferente. Como uma matriz antissimétrica (3×3) admite apenas 3 coeficientes independentes, temos então que o campo elétrico em $(1 + 2)$ -dimensões é simplesmente um vetor com duas componentes, isto é, $\mathbf{E} = (E^1, E^2)$, enquanto que a densidade de fluxo magnético é descrita por um (pseudo)escalar B . De maneira análoga, o campo deslocamento elétrico $\mathbf{D}$ é um vetor com duas componentes, $\mathbf{D} = (D^1, D^2)$, e o campo magnético H é simplesmente um escalar. Apesar dessa incompatibilidade de componentes, é possível escrever as relações constitutivas entre $\{\mathbf{E}, B\}$ e $\{\mathbf{D}, H\}$ como uma matriz (3×3) , a saber²:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 + \hat{\kappa}_{DE}^{(2)} & \hat{\kappa}_{DB}^{(2)} \\ \hat{\kappa}_{HE}^{(2)} & 1 + \hat{\kappa}_{HB}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ B \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

onde $\mathbb{1}_2$ é a matriz identidade (2×2) . As quantidades correspondentes aos operadores $\hat{\kappa}_{DE}^{(2)}$, $\hat{\kappa}_{DB}^{(2)}$, $\hat{\kappa}_{HE}^{(2)}$ e $\hat{\kappa}_{HB}^{(2)}$ em $(1 + 3)$ -dimensões são todas matrizes de dimensão (3×3) . Na teoria planar, no entanto, $\hat{\kappa}_{DE}^{(2)}$ é uma matriz simétrica de dimensão (2×2) com 3 coeficientes independentes, $\hat{\kappa}_{DB}^{(2)}$ é um vetor coluna com duas componentes, $\hat{\kappa}_{HE}^{(2)}$ é um vetor linha com duas componentes e $\hat{\kappa}_{HB}^{(2)}$ é um escalar. Estes novos operadores relacionam-se com os antigos da seguinte forma:

$$\hat{\kappa}_{DE}^{(2)ij} \equiv -2(\hat{k}_F)^{0ij}, \quad (4.10a)$$

$$\hat{\kappa}_{HB}^{(2)} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs}(\hat{k}_F)^{pqrs}, \quad (4.10b)$$

$$\hat{\kappa}_{DB}^{(2)i} \equiv \varepsilon^{pq}(\hat{k}_F)^{0ipq}, \quad (4.10c)$$

$$\hat{\kappa}_{HE}^{(2)i} \equiv -(\hat{\kappa}_{DB}^{(2)i})^T, \quad (4.10d)$$

onde ε^{ij} denota o símbolo de Levi-Civita em duas dimensões espaciais e T significa a operação de transposição de um vetor. Os índices espaciais podem assumir apenas

² vide equação (2.20) na subseção 2.2.1 para uma melhor compreensão.

os valores no intervalo $\{1, 2\}$. Observamos que as três componentes do operador $\hat{\kappa}_{DE}^{(2)}$ juntamente com as duas componentes do operador $\hat{\kappa}_{DB}^{(2)}$ correspondem às cinco componentes independentes do tensor $\hat{k}_F$. O operador $\hat{\kappa}_{HB}^{(2)}$, portanto, não nos fornece nada de novo uma vez que a condição (4.5) deve ser satisfeita, isto é

$$\text{Tr} \left(\hat{\kappa}_{DE}^{(2)} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_2 \hat{\kappa}_{HB}^{(2)} \right) = 0. \quad (4.11)$$

Reescrevendo agora os operadores em função dos coeficientes não-nulos, obtemos as seguintes relações:

$$\hat{\kappa}_{DE}^{(2)} = -2 \begin{pmatrix} (\hat{k}_F)^{0101} & (\hat{k}_F)^{0102} \\ (\hat{k}_F)^{0102} & (\hat{k}_F)^{0202} \end{pmatrix}, \quad (4.12a)$$

$$\hat{\kappa}_{DB}^{(2)} = 2 \begin{pmatrix} (\hat{k}_F)^{0112} \\ (\hat{k}_F)^{0212} \end{pmatrix}, \quad (4.12b)$$

$$\hat{\kappa}_{HE}^{(2)} = -2((\hat{k}_F)^{0112}, (\hat{k}_F)^{0212}), \quad (4.12c)$$

$$\hat{\kappa}_{HB}^{(2)} = 2(\hat{k}_F)^{1212}. \quad (4.12d)$$

Como consequência do número limitado de coeficientes independentes, podemos inferir que os fenômenos associados à teoria planar são bastante restritos. É válido mencionar ainda que a matriz $\hat{\kappa}_{DE}^{(2)}$ pode ser interpretada como um tensor permissividade que descreve um meio óptico com um índice de refração não-trivial³. Outra observação importante é que os campos elétrico e magnético podem misturar-se. Essa mistura é consequência dos coeficientes $\hat{\kappa}_{DB}^{(2)}$ e $\hat{\kappa}_{HE}^{(2)}$.

4.3 Equações de campo

Estamos interessados agora em calcular as equações de campo a partir da densidade de Lagrange dada pela equação (4.4). Sabemos que a teoria em questão contém altas derivadas e, portanto, as equações de Euler-Lagrange devem ser adaptadas para esse cenário. Para tanto, precisamos aplicar o princípio da mínima ação a um funcional S que dependa até a n -ésima derivada de um campo genérico ψ , ou seja,

$$\delta S[\mathcal{L}] = \int d^4x \delta \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \partial_\nu \psi, \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \psi) = 0. \quad (4.13)$$

³ A dependência no momento que aparece no MPE não-mínimo pode ser usada para descrever um meio dispersivo.

A equação de Euler-Lagrange⁴ obtida nesse processo é mostrada a seguir:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) + \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \psi)} \right) - \dots + (-1)^n \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \psi)} \right). \quad (4.14)$$

Podemos usar o resultado acima para calcular as equações de campo. Calculando as derivadas apropriadamente, as equações para os campos escalar e eletromagnético são mostradas a seguir:

$$0 = \square \phi - 2(\hat{k}_\phi)^{\kappa\mu} \partial_\kappa \partial_\mu \phi - \varepsilon^{\kappa\mu\nu} (\hat{k}_{AF})_\kappa F_{\mu\nu} + (\hat{k}_{\phi F})^{\mu\kappa\lambda} \partial_\mu F_{\kappa\lambda}, \quad (4.15a)$$

$$0 = \partial_\nu F^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu\rho} (\hat{k}_{AF}) F_{\nu\rho} + (\hat{k}_F)^{\mu\sigma\nu\rho} \partial_\sigma F_{\nu\rho} - 2\varepsilon^{\mu\nu\rho} (\hat{k}_{AF})_\nu \partial_\rho \phi + 2(\hat{k}_{\phi F})^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \partial_\rho \phi, \quad (4.15b)$$

onde o d'Alembertiano é representado por $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$. Se fizermos os coeficientes que violam a simetria de Lorentz iguais a zero, as equações de campo reduzem-se à equação padrão para um campo escalar sem massa e às equações de Maxwell homogêneas. A equação de movimento do campo escalar modificado é composta por dois termos cinéticos, enquanto que existem três termos cinéticos para o campo eletromagnético.

Além disso, vale ressaltar que as equações (4.15) são equações diferenciais parciais acopladas de pelo menos segunda ordem (que corresponde ao setor mínimo). Derivadas superiores à ordem dois podem aparecer para contribuições no setor não-mínimo. As soluções das equações de movimento para setor eletromagnético e para o setor escalar, ambos desacoplados, na presença de fontes externas serão determinadas posteriormente após a derivação das funções de Green correspondentes.

As componentes do *field strength tensor* em duas dimensões espaciais têm a seguinte forma:

$$F^{0i} = -E^i, \quad F^{ij} = -\varepsilon^{ij} B. \quad (4.16)$$

Portanto, vemos novamente que o campo elétrico tem duas componentes, enquanto que a densidade do fluxo magnético é um (pseudo)escalar. As equações de Maxwell homogêneas são obtidas através da identidade Bianchi. Em contraste com a configuração em (1 + 3)-dimensões, há apenas um único conjunto de equações de Maxwell homogêneas dada pela lei de Faraday

$$\varepsilon^{ij} \partial_i E^j = -\dot{B}. \quad (4.17)$$

⁴ Na referência [196] temos um tratamento no contexto da mecânica clássica. Para teorias de campos com derivadas superiores, indicamos a leitura da referência [197].

Agora investigaremos as equações de Maxwell homogêneas na presença de violação da simetria de Lorentz. As equações homogêneas surgem a partir do resultado apresentado na equação (4.15b) fazendo os acoplamentos entre os campos eletromagnético e escalar iguais a zero. Iremos, inicialmente, manter os acoplamentos diferentes de zero apenas por completeza e, no momento adequado, faremos eles iguais a zero. A primeira equação homogênea é obtida fazendo $\mu = 0$ na equação (4.15b). Isso nos fornece o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\nu F^{0\nu} - \varepsilon^{0\nu\varrho}(\hat{k}_{AF})F_{\nu\varrho} + (\hat{k}_F)^{0\sigma\nu\varrho}\partial_\sigma F_{\nu\varrho} - 2\varepsilon^{0\nu\varrho}(\hat{k}_{AF})_\nu\partial_\varrho\phi \\ &\quad + 2(\hat{k}_{\phi F})^{0\nu\varrho}\partial_\nu\partial_\varrho\phi, \\ 0 &= -\partial_i E^i + 2(\hat{k}_{AF})B + 2(\hat{k}_F)^{0i0j}\partial_i E^j - 2(\hat{k}_F)^{0i12}\partial_i B \\ &\quad - 2\varepsilon^{ij}(\hat{k}_{AF})_i\partial_j\phi + 2(\hat{k}_{\phi F})^{0i0}\partial_i\dot{\phi} + 2(\hat{k}_{\phi F})^{0ij}\partial_i\partial_j\phi, \end{aligned} \quad (4.18a)$$

onde denotamos com um ponto a derivada temporal. Fazendo agora $\mu = i$ na equação (4.15b), obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\nu F^{i\nu} - \varepsilon^{i\nu\varrho}(\hat{k}_{AF})F_{\nu\varrho} + (\hat{k}_F)^{i\sigma\nu\varrho}\partial_\sigma F_{\nu\varrho} \\ &\quad - 2\varepsilon^{i\nu\varrho}(\hat{k}_{AF})_\nu\partial_\varrho\phi + 2(\hat{k}_{\phi F})^{i\nu\varrho}\partial_\nu\partial_\varrho\phi, \\ 0 &= \dot{E}^i + \varepsilon^{ij}(-\partial_j B + 2(\hat{k}_{AF})E^j) - 2(\hat{k}_F)^{0i0j}\dot{E}^j \\ &\quad + 2(\hat{k}_F)^{0i12}\dot{B} + 2(\hat{k}_F)^{0jil}\partial_l E^j - 2(\hat{k}_F)^{ij12}\partial_j B \\ &\quad + 2\varepsilon^{ij}[(\hat{k}_{AF})_0\partial_j\phi - (\hat{k}_{AF})_j\dot{\phi}] \\ &\quad + 2(\hat{k}_{\phi F})^{i00}\ddot{\phi} + 2[(\hat{k}_{\phi F})^{ij0} - (\hat{k}_{\phi F})^{0ij}]\partial_j\dot{\phi} \\ &\quad + 2(\hat{k}_{\phi F})^{iji}\partial_j\partial_i\phi + 2(\hat{k}_{\phi F})^{ijj}\partial_j^2\phi. \end{aligned} \quad (4.18b)$$

Aqui, os campos físicos foram introduzidos através das relações mostradas na equação (4.16). Devemos observar que o índice i que aparece na equação (4.18b) não está somado e, quando aparece duas ou mais vezes em um único termo, não devemos interpretá-los como uma soma de Einstein. Da equação (4.18a), nós obtemos a lei de Gauss modificada definindo os acoplamentos com o campo escalar iguais a zero. No espaço dos momentos, a lei de Gauss modificada possui a seguinte estrutura

$$0 = p_i E^i - 2i(\hat{k}_{AF})B - 2(\hat{k}_F)^{0i0j}p_i E^j + 2(\hat{k}_F)^{0i12}p_i B. \quad (4.19)$$

Podemos reescrever a equação acima de uma forma mais conveniente, isto é (para $\hat{k}_{AF} = 0$)

$$0 = p_i D^i, \quad (4.20a)$$

$$0 = p_i E^i + \hat{\kappa}_{DE}^{(2)ij} p_i E^j + \hat{\kappa}_{DB}^{(2)i} p_i B, \quad (4.20b)$$

onde usamos os operadores definidos na equação (4.12). Esta última equação é o equivalente à lei de Gauss formulada para o eletromagnetismo modificado em $(1 + 3)$ -dimensões [83]. Todos os operadores que violam a simetria de Lorentz devem ser transformados para o espaço dos momentos. Isso equivale a substituir todas as 4-derivadas por 4-momentos através da relação $\partial_\mu = -ip_\mu$, conforme mostrado nas equações (4.8). Além disso, da equação (4.18b) também podemos obter a lei de Ampère modificada, a saber

$$\begin{aligned} 0 = & p_0 E^i - \varepsilon^{ij} (p_j B - 2i(\hat{k}_{AF}) E^j) - 2(\hat{k}_F)^{0i0j} p_0 E^j \\ & + 2(\hat{k}_F)^{0i12} (p_0 B + p_j E^i) + 2(\hat{k}_F)^{0jij} p_j E^j \\ & - 2(\hat{k}_F)^{ij12} p_j B. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Descartando $\hat{k}_{AF}$ e inserindo as quantidades definidas na equação (4.12), vemos que equação (4.21) assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} 0 = & p_0 D^i - \varepsilon^{ij} p_j H \\ & = p_0 E^i - \varepsilon^{ij} p_j B + \hat{\kappa}_{DE}^{(2)ij} p_0 E^j + \hat{\kappa}_{DB}^{(2)i} p_0 B \\ & - \varepsilon^{ij} \hat{\kappa}_{HE}^{(2)k} p_j E^k - \varepsilon^{ij} \hat{\kappa}_{HB}^{(2)} p_j B. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Este último resultado é similar a lei de Ampère modificada em $(1 + 3)$ -dimensões estabelecida na referência [83]. É possível eliminar o campo magnético da equação (4.21) inserindo a lei de Faraday (4.17) reescrita no espaço dos momentos, isto é: $\varepsilon^{ij} p^i E^j = p_0 B$. Fazendo isso, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 = & \left[E^i - 2(\hat{k}_F)^{0i0j} E^j \right] p_0^2 + 2i(\hat{k}_{AF}) \varepsilon^{ij} p_0 E^j \\ & + \left[(1 + 2(\hat{k}_F)^{1212}) \varepsilon^{ij} p^j + 2p_0 (\hat{k}_F)^{0i12} \right] \varepsilon^{mn} p^m E^n \\ & - 2 \left[(\hat{k}_F)^{0iij} E^i + (\hat{k}_F)^{0jij} E^j \right] p_0 p^j. \end{aligned} \quad (4.23)$$

É possível ainda mostrar que a contração da lei de Ampère modificada, dada pela equação (4.23), com a componente p^i é equivalente a lei de Gauss modificada, dada pela equação (4.19), multiplicada pela componente p_0 .

A lei de Ampère modificada também pode ser expressa de uma forma conveniente em termos de uma matriz, isto é:

$$0 = \hat{N}^{ab} E^b, \quad (4.24a)$$

$$\begin{aligned}
\hat{N}^{ab} = & \left[\delta^{ab} - 2(\hat{k}_F)^{0a0b} \right] p_0^2 + 2i(\hat{k}_{AF})\varepsilon^{ab}p_0 \\
& + \left[(1 + 2(\hat{k}_F)^{1212})\varepsilon^{aj}p^j + 2p_0(\hat{k}_F)^{0a12} \right] \varepsilon^{mb}p^m \\
& - 2 \left[(\hat{k}_F)^{0aa j} \delta^{ab} + (\hat{k}_F)^{0jaj} \delta^{jb} \right] p_0 p^j .
\end{aligned} \tag{4.24b}$$

Esta equação tem soluções não-triviais apenas para os valores de p_0 que satisfazem a condição $\det \hat{N} = 0$. Esta condição corresponde à equação de dispersão modificada da teoria. Voltaremos a essa questão mais adiante.

4.4 Funções de Green e expansão perturbativa

É sabido que a invariância de calibre proíbe um tratamento perturbativo da teoria descrita pela densidade de Lagrange dada pela equação (4.4). Para um tratamento perturbativo ser viável, devemos adicionar um termo de fixação de calibre⁵. Procedendo desta maneira, definimos uma nova densidade de Lagrange com um termo extra responsável por fixar o calibre, ou seja

$$\mathcal{L}_{(1+2)}^{\text{gf}} \equiv \mathcal{L}_{(1+2)} - \frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2, \tag{4.25}$$

onde ξ representa o parâmetro de fixação de calibre. Agora, temos como finalidade quadrar a densidade de Lagrange $\mathcal{L}_{(1+2)}^{\text{gf}}$. Realizando algumas integrações por partes na densidade de Lagrange, podemos reescrever a equação (4.25) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(1+2)}^{\text{gf}} = & \frac{1}{2}A^\mu(\Box g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu)A^\nu - \frac{1}{2}\phi\Box\phi \\
& - \varepsilon^{\lambda\mu\nu}A_\lambda(\hat{k}_{AF})\partial_\mu A_\nu - A_\lambda(\hat{k}_F)^{\lambda\kappa\mu\nu}\partial_\kappa\partial_\mu A_\nu \\
& + \phi(\hat{k}_\phi)^{\kappa\mu}\partial_\kappa\partial_\mu\phi + 2A_\lambda(\hat{k}_{\phi F})^{\lambda\kappa\mu}\partial_\kappa\partial_\mu\phi \\
& + \varepsilon^{\nu\kappa\mu}\left[\phi(\hat{k}_{AF})_\kappa\partial_\mu A_\nu - A_\nu(\hat{k}_{AF})_\kappa\partial_\mu\phi\right] \\
& + \frac{1}{2\xi}A^\mu\partial_\mu\partial_\nu A^\nu .
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Ressaltamos que para obter a forma quadrática de alguns termos presentes na equação anterior, a integração por partes teve que ser realizada duas vezes. Como

⁵ Deve-se observar que na presença de altas derivadas a escolha de uma condição de fixação de calibre apropriada para a quantização não é trivial (vide, por exemplo, a referência [198] para a extensão da eletrodinâmica de Podolsky). No presente trabalho, já que não estamos interessados em quantizar explicitamente a eletrodinâmica planar encontrada, esse problema pode ser ignorado.

de costume, as integrais de superfície resultantes da integração podem ser negligenciadas no espaço-tempo de Minkowski. Transformando agora a densidade de Lagrange quadrática para o espaço dos momentos e reescrevendo-a de uma forma matricial, obtemos:

$$\mathcal{L}_{(1+2)}^{\text{gf}} = \frac{1}{2}(A, \phi) \begin{pmatrix} \hat{M} & \hat{U} - i\hat{V} \\ (\hat{U} + i\hat{V})^T & \hat{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ \phi \end{pmatrix}, \quad (4.27a)$$

onde $\hat{M}$ é uma matriz de dimensão (3×3) dada por

$$\hat{M}_{\mu\nu} = -p^2\Theta_{\mu\nu} + \hat{K}_{\mu\nu} + i\hat{L}_{\mu\nu} - \frac{p^2}{\xi}\Omega^{\mu\nu}, \quad (4.27b)$$

e $\hat{S}$ é um operador escalar definido através da expressão

$$\hat{S} = p^2 - \hat{D}. \quad (4.27c)$$

Usamos também as definições dos projetores transversal e longitudinal, respectivamente,

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \Omega_{\mu\nu}, \quad (4.27d)$$

$$\Omega_{\mu\nu} \equiv \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \quad (4.27e)$$

e os seguintes operadores que representam a quebra da simetria de Lorentz

$$\hat{K}_{\mu\nu} \equiv 2(\hat{k}_F)_{\mu\kappa\beta\nu}p^\kappa p^\beta, \quad (4.28a)$$

$$\hat{L}_{\mu\nu} \equiv 2(\hat{k}_{AF})\varepsilon_{\mu\beta\nu}p^\beta, \quad (4.28b)$$

$$\hat{U}_\mu \equiv 2(\hat{k}_{\phi F})_{\mu\kappa\beta}p^\kappa p^\beta, \quad (4.28c)$$

$$\hat{V}_\mu \equiv 2\varepsilon_{\mu\kappa\nu}(\hat{k}_{AF})^\kappa p^\nu, \quad (4.28d)$$

$$\hat{D} \equiv 2(\hat{k}_\phi)^{\kappa\mu}p_\kappa p_\mu. \quad (4.28e)$$

Por definição o operador $\hat{L}_{\mu\nu}$ é antissimétrico, enquanto que $\hat{K}_{\mu\nu}$ é simétrico. Agora, gostaríamos de construir as ferramentas necessárias para o tratamento perturbativo da teoria planar encontrada. Para tanto, iremos desconsiderar os campos de fundo $(\hat{k}_{AF})^\kappa$ e $\hat{k}_{\phi F}$. Na prática, isso significa que vamos desligar os acoplamentos entre

os campos eletromagnético e escalar⁶. Com a teoria desacoplada, podemos calcular a função de Green tanto para o campo escalar, quanto para o eletromagnético. A densidade de Lagrange para o campo escalar desacoplado é mostrada a seguir:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \phi \hat{S} \phi, \quad (4.29)$$

em que o operador $\hat{S}$ é dado pela equação (4.27c). A função de Green corresponde à função inversa do operador escalar $\hat{S}$. Invertendo o operador em questão, obtemos facilmente o propagador

$$\Delta_\phi = \frac{1}{p^2 - \hat{D}}, \quad (4.30)$$

onde o operador $\hat{D}$ foi definido na equação (4.28e).

Diferentemente do campo escalar, o tratamento do campo eletromagnético planar é um pouco mais complicado. A densidade de Lagrange desacoplada é mostrada a seguir:

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} A_\mu \hat{M}^{\mu\nu} A_\nu. \quad (4.31)$$

A função de Green corresponde à inversa da matriz $\hat{M}^{\mu\nu}$, cuja dimensão é (3×3) . Para calcular a matriz inversa desejada, adaptamos o teorema de Cayley-Hamilton da álgebra linear para um espaço pseudo-Euclidiano. Isso nos permite expressar o resultado final em termos do tensor métrico e de contrações adequadas da matriz original $\hat{M}^{\mu\nu}$. A função de Green resultante é:

$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{1}{\mathcal{R}} \left\{ \frac{1}{2} \left[(\hat{M}^\alpha_\alpha)^2 - \hat{M}^{\alpha\beta} \hat{M}_{\beta\alpha} \right] \eta_{\mu\nu} - (\hat{M}^\alpha_\alpha) \hat{M}_{\mu\nu} + \hat{M}_{\mu\beta} \hat{M}^\beta_\nu \right\}, \quad (4.32a)$$

onde o denominador $\mathcal{R}$ corresponde a função

$$3!\mathcal{R} = (\hat{M}^\alpha_\alpha)^3 - 3(\hat{M}^{\alpha\beta} \hat{M}_{\beta\alpha})(\hat{M}^\gamma_\gamma) + 2\hat{M}^{\alpha\beta} \hat{M}_{\beta\gamma} \hat{M}^\gamma_\alpha. \quad (4.32b)$$

Na seção 4.5 apresentaremos mais detalhes sobre a adaptação feita ao teorema de Cayley-Hamilton. Vale destacar ainda que é possível generalizar essa técnica

⁶ Uma abordagem alternativa consistiria em encontrar uma transformação unitária que diagonalizasse o operador de campo que aparece na equação (4.27a). Outra possibilidade, utilizada na Referência [63], consiste em isolar o campo escalar a partir das equações de movimento e, por conseguinte, substituí-lo na equação de movimento para o campo de calibre A^μ . Após esta substituição, faz-se uma expansão até primeira ordem nos campos de fundo. Ao final, temos como resultado um sistema de equações em primeira ordem nos campos de fundo completamente desacopladas.

para um espaço-tempo de Minkowski em $(1 + D)$ -dimensões e até mesmo para um espaço-tempo curvo.

As quantidades tensoriais que aparecem na equação (4.32a) podem ser reescritas explicitamente em termos dos projetores apresentados na equação (4.27d) e dos operadores tensoriais $\hat{K}_{\mu\nu}$ e $\hat{L}_{\mu\nu}$, isto é:

$$\hat{M}^\alpha_\alpha = - \left(2 + \frac{1}{\xi} \right) p^2 + \hat{K}^\alpha_\alpha, \quad (4.33a)$$

$$\hat{M}^{\alpha\beta} \hat{M}_{\beta\alpha} = \left(2 + \frac{1}{\xi^2} \right) p^4 - 2p^2 \hat{K}^\alpha_\alpha - \hat{L}^{\alpha\beta} \hat{L}_{\beta\alpha} + \hat{K}^{\alpha\beta} \hat{K}_{\beta\alpha}, \quad (4.33b)$$

$$\begin{aligned} \hat{M}^{\alpha\beta} \hat{M}_{\beta\gamma} \hat{M}^\gamma_\alpha = & - \left(2 + \frac{1}{\xi^3} \right) p^6 + 3p^4 \hat{K}^\alpha_\alpha + 3p^2 (\hat{L}^{\alpha\beta} \hat{L}_{\beta\alpha} - \hat{K}^{\alpha\beta} \hat{K}_{\beta\alpha}) \\ & + 3(i\hat{L}^{\alpha\beta} \hat{K}_{\beta\gamma} \hat{K}^\gamma_\alpha - \hat{L}^{\alpha\beta} \hat{L}_{\beta\gamma} \hat{K}^\gamma_\alpha) \\ & + \hat{K}^{\alpha\beta} \hat{K}_{\beta\gamma} \hat{K}^\gamma_\alpha - i\hat{L}^{\alpha\beta} \hat{L}_{\beta\gamma} \hat{L}^\gamma_\alpha. \end{aligned} \quad (4.33c)$$

Estes escalares de Lorentz envolvem os operadores $\hat{K}$ e $\hat{L}$ em primeira, segunda e terceira ordem, respectivamente. Por fim, o tensor de *rank*-2 $\hat{M}_{\mu\beta} \hat{M}^\beta_\nu$ que aparece na estrutura do propagador pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\mu\beta} \hat{M}^\beta_\nu = p^4 \left(\Theta_{\mu\nu} + \frac{1}{\xi^2} \Omega_{\mu\nu} \right) - 2p^2 (\hat{K} + i\hat{L})_{\mu\nu} \\ + (\hat{K} + i\hat{L})_{\mu\beta} (\hat{K} + i\hat{L})^\beta_\nu. \end{aligned} \quad (4.33d)$$

Com todas as ferramentas desenvolvidas até o momento, podemos agora escrever as regras de Feynman necessárias para um tratamento perturbativo da eletrodinâmica planar. Essa regras são dadas por:

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \\ q \end{array} = i\Delta_\phi(q), \quad (4.33ea)$$

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \\ \mu \quad k \quad \nu \end{array} = i\Delta_{\mu\nu}(k), \quad (4.33eb)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \\ q \quad k \quad \nu \end{array} = \frac{i\varepsilon^{\nu\rho\sigma} \{ [\hat{k}_{AF}(q)]_\rho q_\sigma - [\hat{k}_{AF}(k)]_\rho k_\sigma \}}{-2[\hat{k}_{\phi F}(q)]^{\nu\varrho\sigma} q_\varrho q_\sigma}. \quad (4.33ec)$$

Para o caso limite em que os coeficientes que violam a simetria de Lorentz são iguais a zero, devemos fazer algumas observações importantes. Neste limite, $i\Delta_\phi$ corresponde ao propagador de um campo escalar sem massa. Além disso, $i\Delta_{\mu\nu}$ reproduz o resultado padrão para o propagador do campo eletromagnético para a nossa escolha do termo de fixação de calibre:

$$i\Delta_{\mu\nu}\Big|_{\substack{k_F=0 \\ k_{AF}=0}} = \frac{-i}{p^2} \left(\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right). \quad (4.6)$$

Para o análogo em $(1 + 2)$ -dimensões do calibre de 't Hooft-Feynman, isto é $\xi = 1$, o segundo termo não contribui. As convenções adotadas foram escolhidas de forma que o propagador possua a mesma estrutura padrão que na teoria em $(1 + 3)$ -dimensões no limite em que a violação de Lorentz anula-se [191].

O último ingrediente que compõe o propagador é mostrado na equação (4.32b). Salientamos que $\mathcal{R}$ está diretamente conectado ao determinante da matriz $\hat{M}$. Sendo assim, a equação $\mathcal{R} = 0$ deve ser interpretada como a equação de dispersão da eletrodinâmica plana modificada. Portanto, as soluções desta equação para a variável p_0 fornecem as relações de dispersão das ondas eletromagnéticas no plano.

4.5 Propagador em $(1 + D)$ -dimensões

Nesta seção temos como principal objetivo esboçar tanto a construção quanto a generalização do propagador usado na equação (4.32a). É sabido que o cálculo de matrizes inversas pode ser efetuado de forma sistemática a partir do teorema de Cayley-Hamilton da álgebra linear. Observamos que na literatura matemática as fórmulas correspondentes são geralmente apresentadas para matrizes quadradas e não para tensores de *rank*-2. Muito embora tensores de *rank*-2 possam ser representados como matrizes, sabemos que existem diferenças, por exemplo, um mesmo tensor pode ser escrito em sua forma covariante, contravariante ou mesmo como um tensor misto. Portanto, o tensor inverso correspondente irá depender da forma como o tensor original foi escrito. A idéia central é generalizar o teorema de Cayley-Hamilton para que se leve em consideração a estrutura tensorial na matriz que representa o tensor de *rank*-2.

O teorema de Cayley-Hamilton afirma que toda matriz quadrada satisfaz sua própria equação característica [199, 200, 201, 202]. Seja $\mathcal{M}$ uma matriz genérica de dimensão $n \times n$. A equação característica associada a essa matriz é mostrada a

seguir:

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1}_n - \mathcal{M}), \quad (4.7)$$

onde $\mathbb{1}_n$ é a matriz identidade $n \times n$. O determinante da matriz $(\lambda \mathbb{1}_n - \mathcal{M})$ resultará um polinômio de ordem n na variável λ , isto é

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0. \quad (4.8)$$

A partir deste resultado podemos construir um polinômio análogo para $\mathcal{M}$, ou seja

$$p(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^n + c_{n-1}\mathcal{M}^{n-1} + \dots + c_1\mathcal{M} + c_0\mathbb{1}_n. \quad (4.9)$$

O teorema de Cayley-Hamilton afirma, portanto, que este polinômio tem como resultado a matriz nula, ou seja

$$p(\mathcal{M}) = 0. \quad (4.10)$$

Se a matriz $\mathcal{M}$ for inversível, podemos usar a equação (4.10) para calcular a sua inversa. Se multiplicarmos a equação acima pela matriz inversa $\mathcal{M}^{-1}$, encontramos que

$$\mathcal{M}^{n-1} + c_{n-1}\mathcal{M}^{n-2} + \dots + c_1\mathbb{1}_n + c_0\mathcal{M}^{-1} = 0, \quad (4.11)$$

de onde obtemos o seguinte resultado

$$\mathcal{M}^{-1} = -\frac{1}{c_0} \left(\mathcal{M}^{n-1} + c_{n-1}\mathcal{M}^{n-2} + \dots + c_1\mathbb{1}_n \right). \quad (4.12)$$

A equação acima nos fornece o valor da matriz inversa $\mathcal{M}^{-1}$ em termos da matriz original $\mathcal{M}$. Os coeficientes c_n podem ser obtidos a partir da seguinte expressão

$$c_{n-k} = \frac{(-1)^k}{k!} B_k(s_1, -s_2, 2!s_3, \dots, (-1)^{k-1}(k-1)!s_k), \quad (4.13)$$

onde B_k são os polinômios de Bell. Estes últimos são tabelados e os quatro primeiros elementos são mostrados a seguir

$$B_0 = 1, \quad (4.14a)$$

$$B_1(x_1) = x_1, \quad (4.14b)$$

$$B_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2, \quad (4.14c)$$

$$B_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 3x_1x_2 + x_3. \quad (4.14d)$$

A partir do resultado acima, constatamos que o polinômio de Bell B_k é uma função de k variáveis. Os parâmetros s_k que aparecem no argumento dos polinômios de Bell são dados por

$$s_k = \text{tr}(\mathcal{M}^k), \quad (4.15)$$

ou seja, corresponde ao traço da k -ésima potência da matriz $\mathcal{M}$. Um resultado particularmente interessante da equação (4.13) é obtido quando fazemos $k = n$, isto é,

$$c_0 = \frac{(-1)^n}{n!} B_n(s_1, -s_2, 2!s_3, \dots, (-1)^{n-1}(n-1)!s_n). \quad (4.16)$$

No entanto, da própria equação característica, sabemos que o coeficiente $c_0 = (-1)^n \det \mathcal{M}$. Sendo assim,

$$\det \mathcal{M} = \frac{1}{n!} B_n(s_1, -s_2, 2!s_3, \dots, (-1)^{n-1}(n-1)!s_n). \quad (4.17)$$

Vemos, a partir do resultado acima, que é possível calcular o determinante da matriz $\mathcal{M}$ através do n -ésimo polinômio de Bell. O resultado da matriz inversa pode então ser reescrito como

$$\mathcal{M}^{-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{\det \mathcal{M}} (\mathcal{M}^{n-1} + c_{n-1}\mathcal{M}^{n-2} + \dots + c_1\mathbb{1}_n). \quad (4.18)$$

Observamos que a equação acima é escrita em termos de produtos da matriz $\mathcal{M}$ e de quantidades invariantes tais como o $\det \mathcal{M}$ e $\text{tr}(\mathcal{M}^k)$. Notada estas propriedades, queremos generalizar o resultado apresentado na equação (4.18) para tensores de *rank*-2. Faremos isso no contexto de campos clássicos, uma vez que estamos interessados em calcular propagadores.

Vamos inicialmente considerar um campo vetorial A_μ em um espaço-tempo de Minkowski em $(1 + D)$ -dimensões, cuja densidade de Lagrange em sua forma quadrática é dada por

$$\mathcal{L}_A = A_\mu \hat{\mathcal{H}}^{\mu\nu} A_\nu, \quad (4.19)$$

onde $\hat{\mathcal{H}}^{\mu\nu}$ é um operador tensorial de *rank*-2 escrito no espaço dos momentos e que pode conter potências arbitrárias de 4-momentos. Os índices de Lorentz variam de 0 a D e são contraídos entre si por meio da métrica de Minkowski $(1 + D)$ -dimensional $\eta_{\mu\nu}$. Já sabemos que o propagador pode ser obtido a partir da inversão do operador $\hat{\mathcal{H}}^{\mu\nu}$. Como o tensor de *rank*-2 $\hat{\mathcal{H}}^{\mu\nu}$ pode ser representado por uma matriz quadrada de ordem $(1 + D) \times (1 + D)$, podemos adaptar os resultados do

teorema de Cayley-Hamilton levando em consideração as propriedades tensoriais do operador $\hat{\mathcal{H}}^{\mu\nu}$. Fazendo isso, obtemos o seguinte resultado

$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{\det(\eta_{\alpha\beta})}{\mathcal{R}} \sum_{k=0}^D (-1)^{D+k} \frac{\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{D-k}}{k!} \Lambda_k, \quad (4.20a)$$

$$\Lambda_k = B_k(s_1, -s_2, 2!s_3, \dots, (-1)^{k-1}(k-1)!s_k). \quad (4.20b)$$

A matriz $\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^k$ que aparece na equação acima deve ser compreendida como a contração de k matrizes $\hat{\mathcal{H}}^{\mu\nu}$ de modo que o primeiro índice da primeira matriz e o segundo da última permaneçam livres, isto é,

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^0 = \mathcal{I}_{\mu\nu}, \quad (4.21a)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^1 = \hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}, \quad (4.21b)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^2 = \hat{\mathcal{H}}_{\mu\beta} \hat{\mathcal{H}}^{\beta}_{\nu}, \quad (4.21c)$$

$$\vdots$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^k = \hat{\mathcal{H}}_{\mu\alpha_1} \hat{\mathcal{H}}^{\alpha_1\alpha_2} \hat{\mathcal{H}}_{\alpha_2\alpha_3} \dots \hat{\mathcal{H}}^{\alpha_k}_{\nu}. \quad (4.21d)$$

As componentes do tensor $\mathcal{I}$ são definidas através do tensor métrico inverso:

$$\mathcal{I}_{\mu\nu} \equiv (\eta^{-1})_{\mu\nu}. \quad (4.21e)$$

As variáveis s_k são agora escritas como $s_k = (\hat{\mathcal{H}}^k)^{\alpha}_{\alpha}$, que representa o traço de um tensor. O denominador $\mathcal{R}$ na frente da soma presente na equação (4.20a) corresponde ao determinante da matriz $\hat{\mathcal{H}}^{\mu\nu}$ e pode ser expresso na forma

$$\mathcal{R} = \frac{\det(\eta_{\mu\nu})}{(1+D)!} \Lambda_{D+1}. \quad (4.22)$$

O polinômio característico que o operador $\hat{\mathcal{H}}$ satisfaz é mostrado a seguir

$$p(\hat{\mathcal{H}}) = \hat{\mathcal{H}}^{D+1} + c_D \hat{\mathcal{H}}^D + \dots + c_1 \hat{\mathcal{H}} + c_0 \mathcal{I} = 0, \quad (4.23a)$$

onde

$$c_{D-k+1} = \frac{(-1)^k}{k!} \Lambda_k. \quad (4.23b)$$

Este último resultado é o principal ingrediente usado na demonstração da fórmula geral da matriz inversa dada pela equação (4.20).

Vale a pena ressaltar que as fórmulas acima foram expressas em uma forma covariante. Assim, esse resultado geral não perde sua validade para uma teoria eletromagnética definida em um espaço-tempo curvo. Neste caso, devemos substituir a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ pela métrica pseudo-Riemanniana correspondente $g_{\mu\nu}$ em $(1 + D)$ -dimensões.

Com a finalidade de mostrar o quão geral é o nosso método, vamos calcular explicitamente o propagador do seguinte operador em 4 dimensões, a saber

$$[\mathcal{H}_{ab}] \equiv \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{M}} & \widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}} \\ -\widehat{\mathcal{N}}^T + \widehat{\mathcal{G}}^T & \widehat{\mathcal{S}} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

onde $\widehat{\mathcal{M}}$ é um tensor de *rank*-2 em 3 dimensões, $\widehat{\mathcal{N}}$ e $\widehat{\mathcal{G}}$ são tensores de *rank*-1 em 3 dimensões, $\widehat{\mathcal{S}}$ é um escalar e os índices assumem os seguintes valores $\{a, b\} = \{0, 1, 2, 3\}$. O operador $\mathcal{H}$ apresentado acima assemelha-se àquele presente na equação (4.27a). Aplicando-se o método aqui desenvolvido, obtemos o seguinte resultado:

$$\Delta_{ab} = \frac{1}{\mathcal{R}} \left\{ \left[\frac{1}{6} \left[(\mathcal{H}^c_c)^3 - 3 (\mathcal{H}^n_n) (\mathcal{H}^{cd} \mathcal{H}_{dc}) + 2 \mathcal{H}^{cd} \mathcal{H}_{dn} \mathcal{H}^n_c \right] \tilde{\eta}_{ab} - \frac{1}{2} \left[(\mathcal{H}^c_c)^2 - \mathcal{H}^{cd} \mathcal{H}_{dc} \right] \mathcal{H}_{ab} + (\mathcal{H}^c_c) \mathcal{H}_a^n \mathcal{H}_{nb} - \mathcal{H}_{an} \mathcal{H}^{nl} \mathcal{H}_{lb} \right] \right\}, \quad (4.25)$$

onde

$$\mathcal{R} = \frac{1}{4!} \left[(\mathcal{H}^c_c)^4 - 6 (\mathcal{H}^{cd} \mathcal{H}_{dc}) (\mathcal{H}^n_n)^2 + 3 (\mathcal{H}^{cd} \mathcal{H}_{dc})^2 + 8 (\mathcal{H}^{cd} \mathcal{H}_{dn} \mathcal{H}^n_c) (\mathcal{H}^l_l) - 6 (\mathcal{H}^{cd} \mathcal{H}_{dn} \mathcal{H}^{nl} \mathcal{H}_{lc}) \right], \quad (4.26)$$

e a métrica a ser usada é dada por:

$$\tilde{\eta} = \text{diag}(1, -1, -1, 1). \quad (4.27)$$

A métrica $\tilde{\eta}$ possui esta forma, pois temos um campo vetorial e um campo escalar juntos em uma única estrutura. Esta também é a justificativa pela qual não usamos índices de Lorentz no operador $\mathcal{H}$. O objeto $\tilde{\eta}$ não corresponde a métrica do espaço-tempo, é apenas um artifício matemático que precisa ser levado em consideração para que os nossos resultados sejam consistentes com a estrutura tensorial do operador $\mathcal{H}$.

Podemos expandir o operador $\mathcal{H}$ e as suas contrações em termos dos operadores $\widehat{\mathcal{M}}$, $\widehat{\mathcal{S}}$, $\widehat{\mathcal{N}}$ e $\widehat{\mathcal{G}}$, a saber:

$$\mathcal{H}^n_n = \widehat{\mathcal{M}}^\alpha_\alpha + \widehat{\mathcal{S}}, \quad (4.28a)$$

$$\mathcal{H}^{nm}\mathcal{H}_{mn} = \widehat{\mathcal{M}}^{\alpha\beta}\widehat{\mathcal{M}}_{\beta\alpha} + \widehat{\mathcal{S}}^2 - 2(\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}) \cdot (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}), \quad (4.28b)$$

$$\mathcal{H}^{nm}\mathcal{H}_{ma}\mathcal{H}_n^a = \widehat{\mathcal{M}}^{\alpha\beta}\widehat{\mathcal{M}}_{\beta\gamma}\widehat{\mathcal{M}}_{\alpha}^{\gamma} + \widehat{\mathcal{S}}^3 - 3\widehat{\mathcal{S}}(\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}) \cdot (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}) \quad (4.28c)$$

$$- 3(\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}) \cdot \widehat{\mathcal{M}} \cdot (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}), \quad (4.28d)$$

além dos tensores

$$\mathcal{H}_a^n \mathcal{H}_{nb} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{M}} \cdot \widehat{\mathcal{M}} - (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}})^T \otimes (\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}) & \widehat{\mathcal{S}}(\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}) - \widehat{\mathcal{M}} \cdot (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}) \\ -\widehat{\mathcal{S}}(\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}})^T + [(\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}) \cdot \widehat{\mathcal{M}}]^T & \widehat{\mathcal{S}}^2 - (\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}) \cdot (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}) \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

e

$$\mathcal{H}_{an}\mathcal{H}^{nm}\mathcal{H}_{mb} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}^T & \mathcal{D} \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

onde usamos as definições

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \widehat{\mathcal{M}} \cdot \widehat{\mathcal{M}} \cdot \widehat{\mathcal{M}} - \widehat{\mathcal{M}} \cdot (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}) \otimes (\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}) \\ &\quad - (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}) \otimes (\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}) \cdot \widehat{\mathcal{M}} - \widehat{\mathcal{S}}(\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}) \otimes (\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}), \end{aligned} \quad (4.31a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= -\widehat{\mathcal{M}} \cdot \widehat{\mathcal{M}} \cdot (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}) - \widehat{\mathcal{S}}\widehat{\mathcal{M}} \cdot (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}) + \widehat{\mathcal{S}}^2(\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}) \\ &\quad + (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}) \cdot [(\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}) \otimes (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}})], \end{aligned} \quad (4.31b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}) \cdot \widehat{\mathcal{M}} \cdot \widehat{\mathcal{M}} + \widehat{\mathcal{S}}(\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}) \cdot \widehat{\mathcal{M}} - \widehat{\mathcal{S}}^2(\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}) \\ &\quad - (\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}) \cdot [(\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}) \otimes (\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}})], \end{aligned} \quad (4.31c)$$

$$\mathcal{D} = \widehat{\mathcal{S}}^3 - (\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}) \cdot \widehat{\mathcal{M}} \cdot (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}) - 2\widehat{\mathcal{S}}(\widehat{\mathcal{N}} - \widehat{\mathcal{G}}) \cdot (\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{G}}). \quad (4.31d)$$

Vemos, através deste exemplo, que nosso método é de fato bastante geral. Podemos ainda observar como os acoplamentos representados pelos operadores $\widehat{\mathcal{N}}$ e $\widehat{\mathcal{G}}$ misturam-se aos operadores $\widehat{\mathcal{M}}$ e $\widehat{\mathcal{S}}$. Este resultado mostra-se bastante útil, pois nos permite compreender o papel desempenhado por estes operadores. Fazendo $\widehat{\mathcal{N}}$ e $\widehat{\mathcal{G}}$ iguais a zero, recuperamos os resultados apresentados nas equações (4.30) e (4.32a).

4.6 As relações de dispersão modificadas

As relações de dispersão têm um papel muito importante na construção das soluções de ondas planas para campos livres. Tais soluções são *on-shell*, isto é, satisfazem as equações clássicas de movimento. Além disso, também devem

satisfazer as equações de dispersão da teoria subjacente. Para o campo escalar, as relações de dispersão são obtidas através da seguinte equação de dispersão $p^2 - \hat{D} = 0$ (4.28e), enquanto que as ondas eletromagnéticas satisfazem $\mathcal{R} = 0$, onde $\mathcal{R}$ é dado pela equação (4.32b). As soluções dessas equações de dispersão em relação a p_0 correspondem às relações de dispersão dos respectivos setores. Sabemos ainda que a relação de dispersão é uma função do momento $\mathbf{p} = (p^1, p^2)$, que no caso planar possui apenas duas componentes.

Iniciaremos o nosso estudo pelo campo escalar. Como o operador não-mínimo $\hat{k}_\phi$ possui um número infinito de 4-momentos em sua estrutura, precisaríamos indicar a dimensão d para que fosse possível obter as relações de dispersão. Uma maneira de evitar tal problema, consiste em obter as relações de dispersão de maneira perturbativa, ou seja, retendo apenas a primeira ordem na violação de Lorentz. Tais soluções são obtidas substituindo todos os p_0 adicionais que aparecem na estrutura do operador $\hat{k}_\phi$ pela relação de dispersão do campo escalar sem massa, isto é, $\omega_0(\mathbf{p}) \equiv |\mathbf{p}|$. Ao resolver a equação de dispersão após essa modificação, obtemos as soluções em primeira ordem desejadas. Para o caso em questão, as soluções de energia positiva são dadas por

$$E^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \frac{-2\hat{k}_\phi^{0i}p^i \pm \Psi(\hat{k}_\phi)}{1 - 2\hat{k}_\phi^{00}} \Big|_{p_0=\omega_0(\mathbf{p})} + \dots, \quad (4.32a)$$

$$\Psi(\hat{k}_\phi) = \sqrt{4(\hat{k}_\phi^{0i}p^i)^2 + (1 - 2\hat{k}_\phi^{00})(\mathbf{p}^2 + 2\hat{k}_\phi^{ij}p^ip^j)}. \quad (4.32b)$$

Como podemos observar, existem duas relações de dispersão e elas se aproximam do resultado padrão ω_0 no limite em que os coeficientes de controle anulam-se. Devemos lembrar que na situação não-perturbativa, onde operadores não-mínimos são levados em consideração, as equações de dispersão podem ser polinômios de ordem maior que dois em p_0 . Sendo assim, podem existir mais do que duas relações de dispersão. Vale lembrar que isto também ocorre com os operadores de spin não-degenerados. Além disso, é sabido que teorias não-mínimas fornecem relações de dispersão que não se aproximam do resultado padrão (ω_0) no limite em que a violação de Lorentz anula-se. Essas relações de dispersão espúrias são divergentes nesse limite [55].

O próximo passo é discutir as relações de dispersão das ondas eletromagnéticas modificadas. Elas serão calculadas em primeira ordem na violação de Lorentz para os casos $\hat{k}_{AF} = 0$ e $\hat{k}_F = 0$ separadamente. Como a matriz $\hat{M}$ da teoria eletromagnética planar dada pela equação (4.31) possui dimensão (3×3) , $\mathcal{R}$ é

pelo menos um polinômio de sexto grau na variável p_0 (para o caso mínimo). A seguir, examinamos as relações de dispersão positivas. Inserindo os campos de fundo explicitamente, o denominador $\mathcal{R}$ pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{p^2}{\xi} \left\{ \frac{1}{2} [\hat{K}^{\alpha\beta} \hat{K}_{\beta\alpha} - (\hat{K}^\alpha_\alpha)^2 - \hat{L}^{\alpha\beta} \hat{L}_{\beta\alpha}] - p^2(p^2 - \hat{K}^\alpha_\alpha) \right\} \\ &= -\frac{p^4}{\xi} \mathcal{R}^{\text{phys}},\end{aligned}\tag{4.33a}$$

onde

$$\mathcal{R}^{\text{phys}} = p^2 - \left(1 + \frac{1}{2} (\hat{k}_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} \right) \hat{K}^\alpha_\alpha + \hat{K}^{\mu\nu} (\hat{k}_F)_{\mu\kappa\nu}{}^\kappa - 4(\hat{k}_{AF})^2.\tag{4.33b}$$

A decomposição mostrada acima foi derivada inserindo as formas explícitas de $\hat{K}_{\mu\nu}$ e $\hat{L}_{\mu\nu}$. Usando a condição definida na equação (4.5), podemos omitir o duplo traço do coeficiente $\hat{k}_F$. É possível também extrair o parâmetro de fixação de calibre presente na equação (4.33a) de modo que as relações de dispersão físicas não dependam dele. Além disso, a decomposição da equação de dispersão $\mathcal{R}$ nos permite separar duas potências p^2 da expressão restante $\mathcal{R}^{\text{phys}}$. Portanto, independentemente da escolha explícita do campo de fundo, os dois primeiros modos de propagação em duas dimensões espaciais possuem a seguinte forma

$$\omega^{(1,2)}(\mathbf{p}) = \omega_0.\tag{4.34}$$

A terceira relação de dispersão envolve os operadores que violam a simetria de Lorentz. Para o primeiro caso, simplesmente definimos $\hat{L}_{\mu\nu} = 0$, de onde obtemos:

$$\omega^{(3)}(\mathbf{p})|_{k_{AF}=0} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} [\hat{K}^\alpha_\alpha + \Upsilon(\hat{K})]} \Big|_{p_0=\omega_0(\mathbf{p})} + \dots,\tag{4.35a}$$

$$\Upsilon(\hat{K}) = \sqrt{2\hat{K}^{\alpha\beta} \hat{K}_{\beta\alpha} - (\hat{K}^\alpha_\alpha)^2}.\tag{4.35b}$$

Para o segundo caso, inserimos $\hat{K}_{\mu\nu} = 0$, o que resulta na seguinte solução:

$$\omega^{(3)}(\mathbf{p})|_{k_F=0} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + 4(\hat{k}_{AF})^2} \Big|_{p_0=\omega_0(\mathbf{p})} + \dots.\tag{4.36}$$

Antes de interpretar esses resultados, várias observações precisam ser feitas. Em primeiro lugar, ressaltamos novamente que todas as componentes p_0 que estão contraídas com os coeficientes de controle e que aparecem no lado direito das equações (4.35a) e (4.36) foram substituídas pela relação de dispersão padrão ω_0 .

Como já mencionado, essa técnica nos permite obter as soluções em primeira ordem nos coeficientes de controle. Em segundo lugar, observamos que a relação de dispersão (4.35a) tem dependência tanto em primeira ordem no operador $\hat{k}_F$ quanto em ordens superiores, enquanto que a relação de dispersão (4.36) depende do operador $\hat{k}_{AF}$ em ordens superiores a um, ou seja, sua primeira contribuição na relação de dispersão é quadrática. Esta última propriedade parece ser característica de teorias em $(1 + 2)$ -dimensões, visto que em $(1 + 3)$ -dimensões o operador $\hat{k}_{AF}$ contribui em todas as ordens na relação de dispersão [193, 194].

Observamos também que, como existe apenas uma única relação de dispersão modificada, não ocorre birrefringência. Esta propriedade é válida tanto para a teoria mínima⁷, como também para a estrutura não-mínima em primeira ordem nos coeficientes de controle. Por este motivo, deve ser possível parametrizar a estrutura tensorial completa do operador $\hat{k}_F$ usando uma versão equivalente do *Ansatz* não-birrefringente apresentado em [203]. Dessa forma, obtemos:

$$(\hat{k}_F)^{\mu\nu\varrho\sigma} = \eta^{\mu\varrho}\hat{k}^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\hat{k}^{\nu\varrho} - \eta^{\nu\varrho}\hat{k}^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\hat{k}^{\mu\varrho}, \quad (4.37a)$$

$$\hat{k}^{\mu\nu} \equiv (\hat{k}_F)_{\alpha}{}^{\mu\alpha\nu}, \quad (4.37b)$$

onde $\hat{k}^{\mu\nu}$ é um tensor de *rank*-2 simétrico, de traço nulo e com cinco coeficientes independentes.

É interessante ressaltar ainda que a relação de dispersão (4.35a) tem uma forma análoga a uma das duas relações de dispersão obtidas a partir do coeficiente mínimo $(k_F)^{\mu\nu\varrho\sigma}$; conforme Eqs. (16) – (18) na Referência [83]. Além disso, a relação de dispersão (4.36) possui a forma exata para a teoria mínima. Por fim, as soluções de energia negativa encontradas estão relacionadas às positivas através da inversão do sinal das componentes do momento espacial e do sinal global à sua frente. Em particular, seja $\omega_-(\mathbf{p})$ a relação de dispersão de energia negativa associada à relação de dispersão de energia positiva $\omega_+(\mathbf{p})$. Observamos então que a seguinte relação é verificada: $\omega_+(\mathbf{p}) = -\omega_-(-\mathbf{p})$. Esse resultado indica que uma quantização da teoria deve proporcionar fótons que são suas próprias antipartículas, assim como em $(1 + 3)$ -dimensões. Observe que a situação no setor fermiônico é bastante diferente, e tais correspondências não são necessariamente válidas para todos os conjuntos de operadores. A explicação para essa diferença reside no fato

⁷ Na Ref. [63] foi mostrado que a redução dimensional do setor eletromagnético CPT-par mínimo não produz birrefringência em qualquer ordem nos coeficientes de controle.

de que os coeficientes C -ímpares, que aparecem no setor fermiônico, adquirem um sinal oposto para antipartículas [55].

Uma outra característica importante das ondas eletromagnéticas em $(1 + 3)$ -dimensões são seus graus de liberdade. Sabemos que existem dois graus de liberdade físicos e dois graus de liberdade não-físicos. Os dois primeiros correspondem às polarizações transversais, já os graus de liberdade não-físicos estão relacionados às polarizações escalar e longitudinal. Em $(1 + 2)$ -dimensões, notamos que os graus de liberdade não-físicos permanecem os mesmos. Além disso, as relações de dispersão associadas a estes graus são dadas pela equação (4.34), que por sua vez não possuem nenhuma contribuição decorrente da violação da simetria de Lorentz. É sabido ainda que em $(1 + 3)$ -dimensões os graus de liberdade não-físicos podem ser eliminados através da lei de Gauss modificada. Para tanto, devemos resolvê-la para uma das componentes do campo elétrico e então substituímos o resultado na lei de Ampère modificada (cf. [36]). A partir do resultado obtido nesse processo, é possível identificar as relações de dispersão físicas. Porém, vemos que em $(1 + 2)$ -dimensões tal procedimento não é necessário. A matriz $\hat{N}$ obtida da lei de Ampère modificada, equação (4.24), pode ser reescrita como

$$\det(\hat{N}) = p_0^2 \mathcal{R}^{\text{phys}}, \quad (4.38)$$

onde usamos a condição (4.5). Portanto, vemos que as relações de dispersão físicas podem ser identificadas diretamente a partir desta equação. O fato das relações de dispersão não-físicas não serem afetadas pela violação de Lorentz parece ser uma propriedade que é válida em geral (cf. apresentado em [87, 90]).

Em duas dimensões espaciais existe apenas uma única polarização perpendicular a uma determinada direção de propagação. Portanto, para a teoria mínima, existe apenas uma única relação de dispersão física. Outras relações de dispersão podem surgir em teorias não-mínimas que incluem derivadas temporais adicionais. Dessa forma, podemos então definir duas classes de relações de dispersão. A primeira classe compreende às relações de dispersão que podem ser escritas como perturbações da relação de dispersão padrão. Vemos que as relações de dispersão (4.35a) e (4.36) são exemplos da primeira classe. A segunda classe envolve as relações de dispersão que não se aproximam do resultado padrão no limite em que os coeficientes de controle anulam-se (exemplos em $(1 + 3)$ -dimensões podem ser vistos nas Referências [94, 95, 53, 54]). Essas relações de dispersão às vezes são chamadas de espúrias ou exóticas. Em princípio, elas não são necessariamente não-físicas, mas podem estar associadas a fantasmas. Por exemplo, em [95] observou-se que

tais modos não se propagam, ou seja, suas velocidades de grupo vão a zero.

4.7 Soluções das equações de campo

Queremos agora resolver as equações de campo (4.15). Devido à complexidade existente no tratamento dos acoplamentos entre os campos escalar e eletromagnético, consideramos apenas a situação em que estes campos estão desacoplados. Calcularemos as soluções das equações (4.15) no limite em que todos os acoplamentos são identicamente nulos. Além disso, levaremos em consideração as inomogeneidades. Posto as condições, obtemos as seguintes equações de campo:

$$j(x) = \square\phi - 2(\hat{k}_\phi)^{\kappa\mu}\partial_\kappa\partial_\mu\phi, \quad (4.39a)$$

$$j^\mu(x) = \square A^\mu + \varepsilon^{\mu\nu\varrho}\hat{k}_{AF}F_{\nu\varrho} - (\hat{k}_F)^{\mu\sigma\nu\varrho}\partial_\sigma F_{\nu\varrho}, \quad (4.39b)$$

onde usamos o calibre de Lorentz $\partial \cdot A = 0$ na segunda equação. A inomogeneidade associada ao campo escalar é $j(x)$. A 3-corrente conservada que se acopla ao campo eletromagnético é designada por $j^\mu(x)$.

Vamos primeiramente tratar do campo escalar. A solução geral homogênea é dada pela superposição de soluções de ondas planas envolvendo as relações de dispersão modificadas, isto é:

$$\phi^{\text{hom}}(x) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \sum_k \frac{1}{2E^{(k)}(\mathbf{p})} \phi^{(k)}(x), \quad (4.40a)$$

$$\phi^{(k)}(x) = a^{(k)}(p) \exp(-ip_\alpha^{(k)}x^\alpha) + a^{(k)*}(p) \exp(ip_\alpha^{(k)}x^\alpha), \quad (4.40b)$$

em que $a^{(k)}$ é a amplitude da onda plana, $a^{(k)*}$ denota o complexo conjugado da amplitude e $(p^{(k)\alpha}) = (E^{(k)}, \mathbf{p})$, onde as relações de dispersão usadas estão reunidas na equação (4.32). Observe que todas as relações de dispersão $E^{(k)}$ devem ser levadas em consideração. Relações de dispersão espúrias podem, em princípio, ser omitidas quando a teoria é restrita ao regime de baixa energia onde estes modos podem ser negligenciados. A solução inomogênea para o campo escalar mostrado na equação (4.39a) pode ser escrita como uma integral de contorno no plano complexo p_0 , ou seja,

$$\phi^{\text{in}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{C_E} dp_0 \int d^2p \Delta_\phi(p) \tilde{j}(p) \exp(-ip_\alpha x^\alpha), \quad (4.41)$$

onde usamos a função de Green $\Delta_\phi(p)$ dada por (4.30), $\tilde{j}(p)$ que corresponde à transformada de Fourier da inomogeneidade e um contorno apropriado C_E . Ao

escolher as condições de contorno retardadas, o contorno circunda todos os pólos de Δ_ϕ no sentido anti-horário.

As soluções para o campo eletromagnético são mais complicadas, pois envolvem os vetores de polarização modificados. As soluções homogêneas referentes a equação (4.39b) são mostradas a seguir:

$$A_\mu^{\text{hom}}(x) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \sum_k \frac{1}{2\omega^{(k)}(\mathbf{p})} A_\mu^{(k)}(x), \quad (4.42a)$$

$$A_\mu^{(k)}(x) = \varepsilon_\mu^{(k)}(p) \exp(-ip_\alpha^{(k)} x^\alpha) + \varepsilon_\mu^{(k)*}(p) \exp(ip_\alpha^{(k)} x^\alpha). \quad (4.42b)$$

Na equação acima, $\varepsilon_\mu^{(k)}$ corresponde ao vetor de polarização do k -ésimo modo de propagação, $\varepsilon_\mu^{(k)*}$ equivale ao complexo conjugado do vetor de polarização e $(p^{(k)\alpha}) = (\omega^{(k)}, \mathbf{p})$, onde $\omega^{(k)}$ denota a k -ésima relação de dispersão. Em primeira ordem nos coeficientes de controle, $\omega^{(k)}$ representa as relações de dispersão (4.35a) e (4.36). Os vetores de polarização $\varepsilon_\mu^{(k)}$ formam a base das soluções da equação (4.39b) no espaço dos momentos, onde $p_0 = \omega^{(k)}$ e $j^\mu(x) = 0$. Esses vetores são calculados mais facilmente para casos particulares, pois sua forma depende das simetrias residuais do espaço-tempo. No arcabouço da eletrodinâmica planar mínima, existe apenas um vetor de polarização associado a única relação de dispersão física.

As soluções inhomogêneas da equação (4.39b) para uma 3-corrente $j^\mu(x)$ conservada, é obtida por meio da função de Green $\Delta_{\mu\nu}$ dada pela equação (4.32a). Podemos escrevê-las como uma integral de contorno no plano complexo p_0 assim como fizemos para o campo escalar. Fazendo isso, obtemos

$$A_\mu^{\text{in}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{C_\omega} dp_0 \int d^2p \Delta_{\mu\nu}^{\text{phys}}(p) \tilde{j}^\nu(p) \exp(-ip_\alpha x^\alpha), \quad (4.43)$$

onde $\tilde{j}^\mu(p)$ corresponde à transformada de Fourier da 3-corrente. Novamente, C_ω é um contorno apropriado que circunda os pólos físicos no sentido anti-horário, já que as condições de contorno retardadas são escolhidas (cf. [204]). As soluções físicas não envolvem graus de liberdade não-físicos, razão pela qual devem ser construídas a partir da parte física da função de Green $\Delta_{\mu\nu}^{\text{phys}}$. Na tentativa de eliminar os graus de liberdade indesejáveis presentes na equação (4.32a), podemos decompor o propagador $\Delta_{\mu\nu}$ em função dos tensores de *rank*-2 disponíveis em $(1+2)$ -dimensões. Dessa forma, obtemos o seguinte *Ansatz*

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu} = & \alpha \eta_{\mu\nu} + \beta p_\mu p_\nu + \gamma (p_\mu \psi_\nu + \psi_\mu p_\nu) \\ & + \delta (p_\mu \zeta_\nu + \zeta_\mu p_\nu) + \epsilon \psi_\mu \psi_\nu + \iota \zeta_\mu \zeta_\nu + \kappa \varepsilon_{\mu\nu\alpha} p^\alpha, \end{aligned} \quad (4.44a)$$

onde ψ_μ é um vetor tipo-tempo e ζ_μ um vetor tipo-espaço com a seguinte estrutura

$$(\psi^\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\zeta^\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.44b)$$

A vantagem de escrever o propagador desta forma reside no fato do *Ansatz* separa claramente os graus de liberdade físicos dos não-físicos. Os graus não-físicos estão contidos nas parcelas que são proporcionais a pelo menos um 4-momento com índice de Lorentz livre. Esses termos desaparecem quando o propagador é contraído com as duas 3-correntes externas conservadas, uma vez que a condição $p \cdot \tilde{j} = 0$ deve valer. Nesse sentido, o termo que envolve o símbolo Levi-Civita também não contribui para as soluções físicas, já que é um tensor antissimétrico. Consequentemente, os graus de liberdade físicos devem estar contidos apenas nos termos restantes.

Uma vez que definimos o *Ansatz*, devemos agora igualá-lo ao propagador e resolver o sistema de equações que surge dessa igualdade para os parâmetros $\alpha \dots \kappa$. Para tornar o cálculo viável, usamos o equivalente ao calibre de Feynman-'t Hooft em $(1+2)$ -dimensões, isto é, definimos $\xi = 1$. Com a ajuda do *software Mathematica* é possível resolver o sistema de equações sem grandes dificuldades. Dessa forma, a parte física do propagador é dada pela seguinte equação:

$$\Delta_{\mu\nu}^{\text{phys}} = -\frac{1}{p^0 p^1 \mathcal{R}^{\text{phys}}} \left[(p^0 p^1 + \hat{K}^{01}) \eta_{\mu\nu} + \left(\frac{p^0}{p^2} \hat{K}^{12} - \hat{K}^{01} \right) \psi_\mu \psi_\nu + \left(\hat{K}^{01} - \frac{p^1}{p^2} \hat{K}^{02} \right) \zeta_\mu \zeta_\nu \right], \quad (4.45)$$

com a equação de dispersão física dada por (4.33b). Uma verificação rápida que atesta a exatidão deste resultado reside na ausência do denominador p^4 que dá origem às relações de dispersão não-físicas. Além disso, verificou-se que

$$\tilde{j}^\mu (\Delta_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\nu}^{\text{phys}}) \tilde{j}^\nu = 0. \quad (4.46)$$

Este resultado é interessante, pois sabemos que a contração de $\Delta_{\mu\nu}$ com duas 3-correntes externas conservadas elimina todos os graus de liberdade não-físicos. Dessa maneira, a contração do propagador $\Delta_{\mu\nu}^{\text{phys}}$ com as mesmas 3-correntes deve fornecer a mesma solução. Consequentemente, o resultado obtido a partir da equação (4.46) corrobora a nossa solução. Uma observação importante é que o numerador da

equação (4.45) depende apenas de contribuições em primeira ordem na violação de Lorentz. Esta é a razão pela qual o operador $\hat{k}_{AF}$ não possui contribuição no numerador. Devemos lembrar que $\hat{k}_{AF}$ contribui apenas com correções a partir de segunda ordem, como podemos observar nas equações (4.33a-4.33d).

Como os pólos não-físicos foram removidos, o contorno C_ω no plano complexo p_0 circunda apenas os pólos físicos positivos e seus correspondentes negativos no sentido anti-horário. A integral de caminho no plano p_0 geralmente é calculada fazendo-se uso do teorema dos resíduos. Como uma aplicação simples, consideremos o caso mínimo explicitamente. Seja $\omega^{(3)}$ a relação de dispersão física. O denominador da equação (4.45) pode então ser reescrito como

$$\mathcal{R}^{\text{phys}} = \Xi[p^0 - \omega^{(3)}(\mathbf{p})][p^0 + \omega^{(3)}(-\mathbf{p})], \quad (4.47a)$$

$$\begin{aligned} \Xi = 1 - 2 \left[(\hat{k}_F)^{0101} + (\hat{k}_F)^{0202} \right] \\ + 4 \left\{ (\hat{k}_F)^{0101} (\hat{k}_F)^{0202} - [(\hat{k}_F)^{0102}]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.47b)$$

Os resíduos são facilmente obtidos a partir deste resultado. Mencionamos anteriormente que relações de dispersão físicas adicionais podem surgir para o caso não-mínimo. Estas relações devem ser levadas em consideração na integral de caminho.

Finalmente, no limite em que os coeficientes de controle anulam-se, obtemos o seguinte resultado

$$i\Delta_{\mu\nu}^{\text{phys}} \Big|_{\substack{k_F=0 \\ k_{AF}=0}} = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2}, \quad (4.48)$$

como esperado, vide equação (4.6).

Muito embora não tenhamos tratado da quantização do modelo planar encontrado, esse seria um passo natural já que todo o arcabouço teórico está pronto. Aplicações em sistemas planares da matéria condensada também é algo factível, como, por exemplo, o Efeito Hall. Neste último caso, poderíamos investigar as consequências da anisotropia introduzida pelos coeficientes de controle neste efeito. O modelo teórico aqui apresentado também abre muitas outras portas para novas investigações em sistemas planares. Pode-se, por exemplo, buscar efeitos semelhantes ao Aharonov-Bohm [205], Aharonov-Casher [206] ou até mesmo Aharonov-Ananda [207] em (1 + 2)-dimensões. Tornar os coeficientes de controle dependentes das coordenadas do espaço-tempo pode também trazer implicações interessantes aos

sistemas planares. Vemos, portanto, que há uma infinidade de possibilidades para o modelo apresentado.

CAPÍTULO 5

LAGRANGEANAS CLÁSSICAS

Neste capítulo faremos uma extensão, ainda que em primeira ordem, das Lagrangeanas obtidas na subseção 2.3.2 para os operadores não-mínimos. Faremos uso de uma técnica baseada em um *ansatz* que iremos desenvolver tanto para os operadores de spin-degenerados quanto para os não-degenerados. Este *ansatz* terá como ponto de partida soluções previamente estabelecidas na literatura. Veremos também a possibilidade de conectar os resultados em primeira ordem diretamente às relações de dispersão. Finalizamos o capítulo aplicando o método iterativo apresentado na subseção 2.3.2 aos operadores de spin não-degenerados com o objetivo de obter correções de ordem superior. Os resultados discutidos neste capítulo resultaram nas publicações apresentadas nas Referências [208, 209].

5.1 *Ansatz*

Esta seção destina-se à construção de Lagrangeanas generalizadas em primeira ordem. Começaremos estudando os casos mais simples, são eles: Lagrangeanas baseadas em operadores não-mínimos de spin-degenerados. Em seguida, apresentaremos como estender as soluções de spin não-degenerados que, por sua vez, são mais complexas.

5.1.1 Operadores de spin-degenerado

É de nosso conhecimento que as soluções perturbativas dos operadores $\hat{a}^{(5)}$, $\hat{c}^{(6)}$, $\hat{e}^{(6)}$, $\hat{f}^{(6)}$ e $\hat{m}^{(5)}$ foram obtidas usando um método conhecido como bases de Gröbner [73]. O que faremos a seguir será uma tentativa de generalizar esses resultados para dimensões de massa d arbitrárias. Para tanto, iremos comparar as soluções encontradas em [65] e as extensões obtidas em [73]. Isso nos fornecerá um padrão a ser seguido.

Iremos demonstrar o nosso método usando como exemplo o mais simples de todos os coeficientes. Estudamos na subseção 2.2.2 o operador de spin-degenerado $\hat{a}^\mu$ e vimos que sua estrutura no espaço dos momentos possui a seguinte forma:

$$\hat{a}^\mu = a^{(3)\mu} + a^{(5)\mu\alpha_1\alpha_2} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} + a^{(7)\mu\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} p_{\alpha_3} p_{\alpha_4} + \dots \quad (5.1)$$

Vemos, a partir da equação acima, que o número de 4-momentos na estrutura do operador $\hat{a}$ aumenta de dois a medida que a dimensão de massa d cresce. Esse detalhe será de extremo valor em nossa próxima análise. A Lagrangeana Clássica obtida por Kostelecký para a dimensão de massa $d = 3$ [65] e a Lagrangeana Clássica para $d = 5$ obtida por Schreck [73], são mostradas a seguir:

$$L^{a^{(3)}} = -m_\psi \sqrt{u^2} - a_*^{(3)}, \quad a_*^{(3)} \equiv a_\mu^{(3)} u^\mu, \quad (5.2a)$$

$$L^{\hat{a}^{(5)}} = -m_\psi \sqrt{u^2} - \frac{m_\psi^2}{u^2} \hat{a}_*^{(5)} + \dots, \quad \hat{a}_*^{(5)} \equiv a_{\mu\nu\rho}^{(5)} u^\mu u^\nu u^\rho. \quad (5.2b)$$

Sabemos que o resultado obtido para $d = 3$ é exato, enquanto que para $d = 5$ é uma solução perturbativa, isto é, válida apenas em primeira ordem na violação de Lorentz. Comparando as contribuições da violação de Lorentz nas soluções (5.2a) e (5.2b) com os operadores $a^{(3)\mu}$ e $\hat{a}^{(5)\mu}$, mostrados na equação (5.1), observamos o seguinte padrão:

$$p_\alpha \rightarrow \frac{m_\psi}{\sqrt{u^2}} u_\alpha, \quad (5.3a)$$

$$a^{(3)\mu} \rightarrow a^{(3)\mu} u_\mu \equiv a_*^{(3)}, \quad (5.3b)$$

$$\hat{a}^{(5)\mu} \rightarrow \frac{m_\psi^2}{u^2} a_{\mu\nu\rho}^{(5)} u^\mu u^\nu u^\rho \equiv \frac{m_\psi^2}{u^2} \hat{a}_*^{(5)}, \quad (5.3c)$$

onde o fator m_ψ^2/u^2 em frente ao operador $\hat{a}_*^{(5)}$ garante tanto a homogeneidade de grau 1 da expressão quanto a dimensão de massa correta. Devemos notar ainda que os termos que envolvem a violação de Lorentz, $a_*^{(3)}$ e $\hat{a}_*^{(5)}$, são escalares de

Lorentz. Isso faz total sentido, uma vez que as Lagrangeanas Clássicas são escalares. Outro exemplo ilustrativo é o do operador $\hat{e}^\mu$. As soluções perturbativas para $d = 4$, obtida em [67], e $d = 6$, obtida em [73], são, respectivamente,

$$L^{e^{(4)}} = -m_\psi \sqrt{u^2} - m_\psi e_*^{(4)} + \dots, \quad e_*^{(4)} \equiv e_\mu^{(4)} u^\mu, \quad (5.4a)$$

$$L^{\hat{e}^{(6)}} = -m_\psi \sqrt{u^2} + m_\psi \frac{m_\psi^2}{u^2} \hat{e}_*^{(6)} + \dots, \quad e_*^{(6)} \equiv e_{\mu\nu\rho}^{(6)} u^\mu u^\nu u^\rho. \quad (5.4b)$$

Vemos aqui que o termo controlador da violação de Lorentz comporta-se da mesma forma que no exemplo do operador $\hat{a}^\mu$. A diferença crucial entre os exemplos mostrados é um fator m_ψ em frente à contribuição gerada pelo operador $\hat{e}^\mu$. Esse fator é justificado tanto pelo fato do operador $\hat{e}^\mu$ ser adimensional quanto pela preservação da dimensão da Lagrangeana.

Podemos usar os dois exemplos acima juntamente com as restrições que as Lagrangeanas Clássicas satisfazem e propor uma generalização dos resultados para uma dimensão de massa d arbitrária. Com base nos argumentos expostos e nos exemplos apresentados, propomos o seguinte *Ansatz* para o operador $\hat{a}^{(d)\mu}$:

$$L^{\hat{a}^{(d)}} = -m_\psi \sqrt{u^2} - \hat{A}_* + \dots, \quad (5.5a)$$

$$\hat{A}_* \equiv \Xi_a \hat{a}_*, \quad \Xi_a = \Xi_a^{(d)} = \frac{m_\psi^{d-3}}{(u^2)^{(d-3)/2}}, \quad (5.5b)$$

$$\hat{a}_* = \hat{a}_*^{(d)} \equiv a_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}}^{(d)} u^\mu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}. \quad (5.5c)$$

Devemos mencionar que o resultado acima é válido apenas em primeira ordem na violação de Lorentz¹. É conveniente definir um novo escalar de Lorentz $\hat{A}_*$ que corresponde ao produto de um fator de consistência Ξ_a e o escalar de Lorentz $\hat{a}_*$ que foi obtido a partir da contração do coeficiente de controle com um número adequado de 4-velocidades. Note que o operador $\hat{A}_*$ é homogêneo de grau 1:

$$\begin{aligned} \hat{A}_*(\lambda u) &= \Xi_a(\lambda u) \hat{a}_*(\lambda u), \\ &= \frac{m_\psi^{d-3}}{\lambda^{d-3} (u^2)^{(d-3)/2}} \lambda^{d-2} a_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}}^{(d)} u^\mu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}, \\ &= \lambda \Xi_a(u) \hat{a}_*(u), \\ &= \hat{A}_*(u), \end{aligned} \quad (5.6)$$

¹ Ao longo desta Tese um asterisco indicará coeficientes que controlam a violação de Lorentz contraídos adequadamente com 4-velocidades. Esta notação foi introduzida no artigo [73] e será utilizada aqui por consistência e porque sintetiza os resultados. Vide os exemplos (5.2a), (5.2b), (5.4a) e (5.4b) para uma melhor compreensão da notação.

onde λ é um parâmetro escalar positivo definido introduzido para a verificação do grau de homogeneidade, vide teorema de Euler a seguir. Vemos, a partir do exposto, que o fator Ξ_a é responsável não apenas pela dimensão de massa como também por restabelecer a homogeneidade de grau 1 do operador $\hat{A}_*$. É fácil mostrar que o *Ansatz* proposto em (5.5) reproduz os casos $d = 3$ e $d = 5$ apresentados nas equações (5.2a) e (5.2b).

Muito embora o nosso resultado reproduza as soluções existentes, ainda não está demonstrado que o nosso *Ansatz* é válido para todo e qualquer $d > 5$. Precisamos então de uma prova formal que nos mostre tal validade. Felizmente, é possível demonstrar de forma analítica que a nossa solução satisfaz todas as cinco equações (2.106) apresentadas na subseção 2.3.2 que, por conveniência, as reproduzimos novamente aqui:

$$\mathcal{R}(p) = 0, \quad (5.7a)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial p_i} = -\frac{u^i}{u^0}, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (5.7b)$$

$$L = -p_\mu u^\mu, \quad p_\mu = -\frac{\partial L}{\partial u^\mu}. \quad (5.7c)$$

Iniciaremos calculando o momento covariante através da relação (5.7c), a saber:

$$p_\mu = -\frac{\partial L^{\hat{a}^{(d)}}}{\partial u^\mu} = m_\psi \frac{u_\mu}{\sqrt{u^2}} + \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^\mu}. \quad (5.8)$$

Não é necessário calcular o segundo termo explicitamente. Uma vez que supomos que a nossa Lagrangeana Clássica está correta, o momento covariante obtido a partir dela deve satisfazer a seguinte equação de dispersão:

$$\mathcal{R} = (p - \hat{a})^2 - m_\psi^2 = p^2 - 2\hat{a} \cdot p - m_\psi^2 + \dots, \quad (5.9a)$$

$$\hat{a}_\mu = \hat{a}_\mu^{(d)} \equiv a_{\mu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}} p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_{d-3}}. \quad (5.9b)$$

Como nossa solução é válida apenas em primeira ordem, é suficiente substituir todos os 4-momentos que aparecem contraídos com os coeficientes de controle $a_{\mu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)}$ pela aproximação $m_\psi u_\mu / \sqrt{u^2}$, o que nos leva ao seguinte resultado:

$$a_{\mu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}} p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_{d-3}} \mapsto \left(\frac{m_\psi}{\sqrt{u^2}} \right)^{d-3} a_{\mu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}} = \Xi_a \hat{a}_{*\mu}. \quad (5.10)$$

Substituindo todos os ingredientes na equação (5.9a), obtemos:

$$\mathcal{R} = p^2 - 2\hat{a} \cdot p - m_\psi^2 + \dots,$$

$$\begin{aligned}
& \mapsto \left(m_\psi \frac{u_\mu}{\sqrt{u^2}} + \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^\mu} \right) \left(m_\psi \frac{u^\mu}{\sqrt{u^2}} + \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u_\mu} \right) - \frac{2m_\psi}{\sqrt{u^2}} \Xi_a \hat{a}_* \cdot u - m_\psi^2 + \dots, \\
& \approx m_\psi^2 + 2 \frac{m_\psi}{\sqrt{u^2}} u_\mu \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u_\mu} - \frac{2m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{A}_* - m_\psi^2, \\
& = 2 \frac{m_\psi}{\sqrt{u^2}} u_\mu \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u_\mu} - \frac{2m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{A}_*,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

onde usamos a definição $\hat{A}_* \equiv \Xi_a \hat{a}_*$ e negligenciamos termos de ordens superiores. O resultado acima não está completo. Precisamos mostrar que ele é identicamente nulo e, para tanto, é conveniente usar o teorema de Euler.

Teorema 2 (Teorema de Euler) *Se $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e homogênea de grau p , então*

$$x_\mu \frac{\partial F}{\partial x_\mu} = pF. \tag{5.12}$$

Inversamente, se F satisfaz (5.12) então F é homogênea de grau p [185].

Demonstração. Suponha F homogênea de grau p e defina $y_1 = \lambda x_1, \dots, y_m = \lambda x_m$, de modo que

$$F(y_1, \dots, y_m) = \lambda^p F(x_1, \dots, x_m). \tag{5.13}$$

Diferenciando esta última equação em relação ao parâmetro λ , com $x_1, \dots, x_m$ mantidos fixos, obtemos

$$\frac{d}{d\lambda} F(y_1, \dots, y_m) = \frac{d\lambda^p}{d\lambda} F(x_1, \dots, x_m), \tag{5.14a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\mu}{\partial \lambda} = p\lambda^{p-1} F(x_1, \dots, x_m), \tag{5.14b}$$

$$x_\mu \frac{\partial F}{\partial y_\mu} = p\lambda^{p-1} F(x_1, \dots, x_m). \tag{5.14c}$$

Fazendo $\lambda = 1$ na equação acima, esta reduz-se ao resultado desejado (5.12), pois agora $y_1 = x_1, \dots, y_m = x_m$. ■

Com base no teorema acima, temos que

$$u^\mu \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^\mu} = \hat{A}_*, \tag{5.15}$$

uma vez que $\hat{A}_*$ é uma função homogênea de grau 1 na 4-velocidade. Substituindo esse resultado na equação (5.11), obtemos

$$\mathcal{R} \approx 2 \frac{m_\psi}{\sqrt{u^2}} u_\mu \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u_\mu} - \frac{2m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{A}_*, \quad (5.16a)$$

$$= 2 \frac{m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{A}_* - \frac{2m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{A}_*, \quad (5.16b)$$

$$= 0. \quad (5.16c)$$

Portanto, a equação de dispersão é satisfeita quando negligenciamos contribuições de ordens maiores que um.

Precisamos agora mostrar que a equação (5.7b) também é satisfeita. Porém, ao invés de calcular a derivada da relação de dispersão com relação a p_i , calcularemos a derivada implícita da equação de dispersão com relação a p_i . Efetuando a derivação, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} = 2p_0 \frac{\partial p_0}{\partial p_i} + 2p^i - 2 \frac{\partial(\hat{a} \cdot p)}{\partial p_i} + \dots \quad (5.17)$$

Substituindo agora o 4-momento

$$p_\mu = m_\psi \frac{u_\mu}{\sqrt{u^2}} + \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^\mu}, \quad (5.18)$$

e a correspondência entre a velocidade de grupo e a 3-velocidade da partícula clássica,

$$\frac{\partial p_0}{\partial p_i} = -\frac{u^i}{u^0}, \quad (5.19)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} &\approx 2 \left[m_\psi \frac{u^0}{\sqrt{u^2}} + \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^0} \right] \left(-\frac{u^i}{u^0} \right) + 2 \left(m_\psi \frac{u^i}{\sqrt{u^2}} - \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^i} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{m_\psi \hat{A}_*}{\sqrt{u^2}} \right), \\ &= -2 \left(\frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^0} \frac{u^i}{u^0} + \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^i} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{m_\psi \hat{A}_*}{\sqrt{u^2}} \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Calcularemos separadamente quanto vale o segundo termo da equação acima, a saber:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{m_\psi \hat{A}_*}{\sqrt{u^2}} \right) &= m_\psi \frac{\partial}{\partial u^\sigma} \left(\frac{\hat{A}_*}{\sqrt{u^2}} \right) \frac{\partial u^\sigma}{\partial p_i}, \\ &= m_\psi \left[\frac{\partial}{\partial u^0} \left(\frac{\hat{A}_*}{\sqrt{u^2}} \right) \frac{\partial u^0}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{\hat{A}_*}{\sqrt{u^2}} \right) \frac{\partial u^j}{\partial p_i} \right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Precisamos calcular agora cada uma das derivadas que se apresentam na equação acima. A seguir, obtemos algumas relações úteis

$$u^\mu = \frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} p^\mu, \quad (5.22a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{u^2}} \frac{\partial u^0}{\partial p_i} = \frac{1}{\sqrt{u^2}} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sqrt{u^2} \frac{p^0}{m_\psi} \right) = \frac{1}{m_\psi} \frac{\partial p^0}{\partial p_i} = -\frac{1}{m_\psi} \frac{u^i}{u^0}, \quad (5.22b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{u^2}} \frac{\partial u^j}{\partial p_i} = \frac{1}{\sqrt{u^2}} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sqrt{u^2} \frac{p^j}{m_\psi} \right) = -\frac{1}{m_\psi} \delta^{ij}, \quad (5.22c)$$

juntamente com a seguinte propriedade genérica para funções $f = f(u^2)$, cujo argumento depende apenas do quadrado da 4-velocidade,

$$\frac{u^i}{u^0} \frac{\partial f(u^2)}{\partial u^0} + \frac{\partial f(u^2)}{\partial u^i} = \frac{u^i}{u^0} \frac{\partial f}{\partial (u^2)} 2u^0 - \frac{\partial f}{\partial (u^2)} 2u^i = 0. \quad (5.23)$$

Voltando à equação (5.21), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{m_\psi \hat{A}_*}{\sqrt{u^2}} \right) &= \frac{m_\psi}{\sqrt{u^2}} \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^0} \frac{\partial u^0}{\partial p_i} + m_\psi \hat{A}_* \frac{\partial}{\partial u^0} \left(\frac{1}{\sqrt{u^2}} \right) \frac{\partial u^0}{\partial p_i} \\ &\quad + \frac{m_\psi}{\sqrt{u^2}} \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial p_i} + m_\psi \hat{A}_* \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{1}{\sqrt{u^2}} \right) \frac{\partial u^j}{\partial p_i} \\ &= m_\psi \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^0} \frac{1}{\sqrt{u^2}} \frac{\partial u^0}{\partial p_i} + m_\psi \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^j} \frac{1}{\sqrt{u^2}} \frac{\partial u^j}{\partial p_i} \\ &= m_\psi \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^0} \left(-\frac{1}{m_\psi} \frac{u^i}{u^0} \right) + m_\psi \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^j} \left(-\frac{1}{m_\psi} \delta^{ij} \right) \\ &= -\frac{u^i}{u^0} \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^0} - \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^i}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Substituindo o resultado (5.24) na equação (5.20), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} &\approx -2 \left(\frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^0} \frac{u^i}{u^0} + \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^i} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{m_\psi \hat{A}_*}{\sqrt{u^2}} \right) \\ &\approx -2 \left(\frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^0} \frac{u^i}{u^0} + \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^i} \right) - 2 \left(-\frac{u^i}{u^0} \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^0} - \frac{\partial \hat{A}_*}{\partial u^i} \right) \\ &\approx 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Portanto, mostramos que o nosso *Ansatz* para o operador $\hat{a}^\mu$ satisfaz todas as cinco equações (2.106), como deveria ser.

Podemos agora aplicar esse método de obtenção das Lagrangeanas Clássicas para o restante dos operadores de spin-degenerados. O resultado geral, válido em primeira ordem na violação de Lorentz, obtido para o restante dos operadores pode ser convenientemente expresso da seguinte forma

$$L^{\hat{x}^{(d)}} = -m_\psi \sqrt{u^2} - \hat{X}_* + \dots, \quad \hat{X}_* = \Xi_x \hat{x}_*, \quad (5.26)$$

em que $\hat{x}_* = \hat{x}_*^{(d)}$ é um operador composto pelos coeficientes de controle contraídos com uma combinação apropriada de 4-velocidades. Já o parâmetro $\Xi_x = \Xi_x^{(d)}$ é uma função composta apenas pela massa da partícula e do escalar de Lorentz u^2 , que garantem a homogeneidade e a dimensão de massa correta para o operador $\hat{X}_*$. A expressão particular que $\hat{X}_* = \Xi_x \hat{x}_*$ assume para cada operador de spin-degenerado é mostrada na Tabela 3.

Observa-se que a estrutura geral do *Ansatz* é formada pelo termo *standard* $L = -m_\psi \sqrt{u^2}$ somada às contribuições lineares que advém da violação de Lorentz representada pelos coeficientes de controle. Graças a essa estrutura, podemos generalizar a correspondência apresentada na Tabela 2 entre os coeficientes $a_\mu \leftrightarrow -m_\psi e_\mu$ do MPE-mínimo para o MPE não-mínimo $\hat{a}_* \leftrightarrow -m_\psi \hat{e}_*$.

Para o restante dos operadores de spin-degenerado que não foram contemplados com uma demonstração formal, podemos assegurar que a solução geral apresentada na equação (5.26) satisfaz todas as cinco equações fundamentais que regem a cinemática clássica (2.106)².

Por fim, podemos generalizar ainda mais os resultados apresentados na equação (5.26) onde, ao invés de ter apenas um operador $\hat{X}_*^{(d)}$ por vez, podemos ter uma combinação com vários operadores de dimensões de massa diferentes. Para obter tal resultado, basta fazer a seguinte modificação:

$$\hat{X}_*^{(d)} \mapsto \sum_d \hat{X}_*^{(d)} \quad (5.27)$$

onde d agora varia dentro de algum intervalo conveniente permitido para o operador $\hat{x}^{(d)}$. Apresentamos a seguir dois exemplos que ilustram essa combinação linear:

$$L^{\hat{a}} = -m_\psi \sqrt{u^2} - a_*^{(3)} - \frac{m_\psi^2}{u^2} \hat{a}_*^{(5)} - \frac{m_\psi^4}{u^4} \hat{a}_*^{(7)}, \quad (5.28a)$$

$$L^{\hat{e}} = -m_\psi \sqrt{u^2} + m_\psi e_*^{(4)} + \frac{m_\psi^3}{u^2} \hat{e}_*^{(6)} + \frac{m_\psi^5}{u^4} \hat{e}_*^{(8)}. \quad (5.28b)$$

² Será apresentado na seção 5.4 uma demonstração geral que contemplará todos os operadores do MPE.

Como cada termo mostrado acima é homogêneo de grau 1 na velocidade, a soma também será. Além disso, como as nossas Lagrangeanas Clássicas são válidas apenas em primeira ordem, podemos inferir que a substituição $\hat{A}_*^{(d)} \mapsto \sum_d \hat{A}_*^{(d)}$, por exemplo, não modificará em nada a demonstração que efetuamos para a solução $\hat{A}_*^{(d)}$. Apresentaremos na subseção 5.4 uma demonstração bem mais geral onde incluiremos todos os operadores do MPE não-mínimo. Daremos mais uma motivação para a construção dos *Ansätze* baseando-se em um mapeamento direto entre as relações de dispersão e as Lagrangeanas Clássicas.

$\hat{x}_*$	Contrações	Ξ_x	Derivadas radiais	Correspondência
$\hat{a}_*$	$a_{\mu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} u^\mu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}$	$m_\psi^{d-3}/(u^2)^{(d-3)/2}$	$u^\mu \frac{\partial \hat{a}_*}{\partial u^\mu} = (d-2)\hat{a}_*$	$\hat{a}_\mu \approx \Xi_a \hat{a}_{*\mu}$
$\hat{c}_*$	$c_{\mu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} u^\mu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}$	$-m_\psi^{d-3}/(u^2)^{(d-3)/2}$	$u^\mu \frac{\partial \hat{c}_*}{\partial u^\mu} = (d-2)\hat{c}_*$	$\hat{c}_\mu \approx -\Xi_c \hat{c}_{*\mu}$
$\hat{e}_*$	$e_{\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}$	$-m_\psi^{d-3}/(u^2)^{(d-4)/2}$	$u^\mu \frac{\partial \hat{e}_*}{\partial u^\mu} = (d-3)\hat{e}_*$	$\hat{e}_\mu \approx -\frac{\Xi_e}{m_\psi} \hat{e}_{*\mu}$
$\hat{f}_*$	$f_{\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}$	$m_\psi^{2d-7}/[2(u^2)^{(2d-7)/2}]$	$u^\mu \frac{\partial \hat{f}_*^2}{\partial u^\mu} = 2(d-3)\hat{f}_*^2$	$\hat{f}_\mu \hat{f}_\nu \approx \frac{2\sqrt{u^2}\Xi_f}{m_\psi} \hat{f}_{*\mu} \hat{f}_{*\nu}$
$\hat{m}_*$	$m_{\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}$	$m_\psi^{d-3}/(u^2)^{(d-4)/2}$	$u^\mu \frac{\partial \hat{m}_*}{\partial u^\mu} = (d-3)\hat{m}_*$	$\hat{m} \approx \frac{\Xi_m}{\sqrt{u^2}} \hat{m}_*$
$\hat{\mathcal{S}}_*$	$\mathcal{S}_{\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}$	$-m_\psi^{d-3}/(u^2)^{(d-4)/2}$	$u^\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{S}}_*}{\partial u^\mu} = (d-3)\hat{\mathcal{S}}_*$	$\hat{\mathcal{S}} \approx -\frac{\Xi_s}{\sqrt{u^2}} \hat{\mathcal{S}}_*$
$\hat{\mathcal{V}}_*$	$\mathcal{V}_{\mu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} u^\mu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}$	$-m_\psi^{d-3}/(u^2)^{(d-3)/2}$	$u^\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{V}}_*}{\partial u^\mu} = (d-2)\hat{\mathcal{V}}_*$	$\hat{\mathcal{V}}_\mu \approx -\Xi_v \hat{\mathcal{V}}_{*\mu}$

Tabela 3 – Parâmetros da Lagrangeana Clássica genérica dada pela equação (5.26). A primeira coluna indica os escalares de Lorentz empregados nas Lagrangeanas. Já a segunda coluna fornece as expressões explícitas correspondentes. Os fatores de consistência são listados na terceira coluna. A quarta coluna mostra o teorema de Euler para cada um dos escalares de Lorentz definidos nas duas primeiras colunas. A quinta coluna nos mostra os resultados perturbativos obtidos para cada um dos operadores que violam a simetria de Lorentz. Este último resultado é obtido substituindo os 4-momentos pelas 4-velocidades.

5.1.2 Operadores de Spin não-degenerado

A obtenção das Lagrangeanas Clássicas para os operadores de spin-degenerado de dimensão de massa arbitrária foi motivada pelas soluções apresentadas em [73]. No entanto, não existe até o momento nenhuma evidência de como as soluções clássicas para os operadores não-mínimos de spin não-degenerado devem se comportar. Todavia, conhecemos algumas soluções para os coeficientes mínimos b , d , H , e g que foram apresentadas pela primeira vez em [65]. Queremos, portanto, estender essas soluções conhecidas para dimensões de massa arbitrárias. Para tanto, usaremos a mesma idéia apresentada na subseção anterior, ou seja, iremos propor, a partir da solução mínima conhecida, uma expressão geral válida apenas em primeira ordem na violação de Lorentz.

Começaremos nossa análise com o coeficiente pseudovetorial $b^{(3)\mu}$, cuja solução foi obtida em [65] e é mostrada a seguir

$$L^{b^{(3)}} = -m_\psi \sqrt{u^2} \mp \sqrt{(b^{(3)} \cdot u)^2 - (b^{(3)})^2 u^2}. \quad (5.29)$$

As duas soluções distintas que aparecem é um reflexo da quebra da degenerescência do spin. Todos os operadores de spin não-degenerado b , d , H , e g apresentam essa mesma característica. Iremos agora conjecturar que a técnica usada anteriormente também funcionará para os operadores de spin não-degenerado. O nosso *Ansatz* deve ser elaborado de modo que esteja de acordo com todas as propriedades preestabelecidas, além, é claro, deve reproduzir o resultado conhecido $L^{b^{(3)}}$. Sendo assim, o *Ansatz* encontrado que possui essas características tem seguinte forma:

$$L^{\hat{b}^{(d)}} = -m_\psi \sqrt{u^2} \mp \hat{\mathcal{B}}_* + \dots, \quad \hat{\mathcal{B}}_* = \sqrt{\hat{B}_*^2 - (\hat{B}_*^\mu \hat{B}_{*\mu}) u^2}, \quad (5.30a)$$

$$\hat{B}_{*\mu} \equiv \Xi_b \hat{b}_{*\mu}, \quad \hat{B}_* \equiv \Xi_b \hat{b}_*, \quad \Xi_b = \Xi_b^{(d)} = \frac{m_\psi^{d-3}}{(u^2)^{(d-3)/2}}, \quad (5.30b)$$

$$\hat{b}_{*\mu} = \hat{b}_{*\mu}^{(d)} \equiv b_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}}^{(d)} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}, \quad \hat{b}_* = \hat{b}_*^{(d)} \equiv \hat{b}_{*\mu} u^\mu. \quad (5.30c)$$

Precisamos agora demonstrar que essa solução satisfaz todas as cinco equações fundamentais que governam a cinemática clássica, ou seja, as equações (2.106). A prova analítica é possível de se executar, porém, iremos adiá-la para um momento mais conveniente, uma vez que a demonstração é longa e requer uma análise cuidadosa, vide seção 5.2.

Estudamos na subseção 2.2.2 que os operadores $\hat{b}$ e $\hat{d}$ compõem o operador pseudovetorial $\hat{\mathcal{A}}^\mu$. Vimos que, por causa disso, é possível conectar as equações de

dispersão desses operadores através da seguinte transformação:

$$\hat{b}^\mu \leftrightarrow -\hat{d}^\mu. \quad (5.31)$$

Como esta transformação é geral, ela também deve funcionar em nível perturbativo. Portanto, podemos usá-la para encontrar uma transformação adequada que mapeie as Lagrangeanas $L^{\hat{b}^{(d)}} \leftrightarrow L^{\hat{d}^{(d)}}$. Sendo assim, a correspondência³ encontrada entre as Lagrangeanas Clássicas é simplesmente $\hat{b}_{*\mu} \leftrightarrow -\hat{d}_{*\mu\nu}u^\nu = -\hat{d}_{*\mu}$, onde o resultado anterior foi obtido a partir da equação (5.31) fazendo $p_\alpha \rightarrow u_\alpha$.

Seguindo os mesmos passos, podemos propor uma solução geral para os operadores $\hat{H}$ e $\hat{g}$ com base em soluções conhecidas. Sejam $X \equiv H_{\mu\nu}^{(3)}H^{(3)\mu\nu}/4$ e $Y \equiv H_{\mu\nu}^{(3)}\tilde{H}^{(3)\mu\nu}/4$ invariantes de Lorentz, onde $\tilde{H}^{(3)\mu\nu}$ é o correspondente dual do operador $H^{(3)\mu\nu}$ dado por $\tilde{H}^{(3)\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}H_{\alpha\beta}^{(3)}$. A Lagrangeana Clássica exata que corresponde ao operador $H^{(3)\mu\nu}$ para a configuração em que o invariante $Y = 0$ é dada pela equação (15) em [65], e é reproduzida a seguir:

$$\begin{aligned} L^{H^{(3)}}|_{Y=0} &= -m_\psi\sqrt{u^2} \mp \sqrt{u^\nu(H^{(3)})_\nu{}^\mu H_{\mu\rho}^{(3)}u^\rho + 2Xu^2}, \\ &= -m_\psi\sqrt{u^2} \mp \sqrt{-(\tilde{H}^{(3)})^\mu{}_\nu u^\nu \tilde{H}_{\mu\rho}^{(3)}u^\rho}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde usamos a identidade

$$(H^{(3)})^\mu{}_\nu u^\nu H_{\mu\rho}^{(3)}u^\rho = (\tilde{H}^{(3)})^\mu{}_\nu u^\nu \tilde{H}_{\mu\rho}^{(3)}u^\rho + 2Xu^2. \quad (5.33)$$

Com base neste resultado e nos argumentos exaustivamente discutidos até aqui, é possível propor um *Ansatz* apropriado que nos forneça uma solução capaz de reproduzir a solução existente e ao mesmo tempo que seja capaz de gerar uma solução para uma dimensão de massa arbitrária.

A Lagrangeana Clássica que satisfaz todas as propriedades requeridas é mostrada a seguir

$$L^{\hat{H}^{(d)}} = -m_\psi\sqrt{u^2} \mp \hat{\mathcal{H}}_* + \dots, \quad \hat{\mathcal{H}}_* = \sqrt{-\tilde{\hat{H}}_*^\mu \tilde{\hat{H}}_{*\mu}}, \quad (5.34a)$$

$$\tilde{\hat{H}}_{*\mu} \equiv \Xi_h \tilde{h}_{*\mu}, \quad \Xi_H = \Xi_H^{(d)} = \frac{m_\psi^{d-3}}{(u^2)^{(d-3)/2}}, \quad (5.34b)$$

$$\tilde{h}_{*\mu} = \tilde{h}_{*\mu}^{(d)} \equiv \tilde{H}_{\mu\nu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} u^\nu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}. \quad (5.34c)$$

³ Devemos enfatizar que esta correspondência é válida apenas em primeira ordem nos coeficientes que controlam a violação da simetria de Lorentz.

A Lagrangeana $L^{\hat{H}^{(d)}}$, assim como todas as demais soluções obtidas, necessita de uma prova formal. Iremos demonstrar a validade desta solução na seção 5.3, onde apresentaremos uma demonstração formal e analítica. Veremos também que $L^{\hat{H}^{(d)}}$ é um resultado geral, ou seja, vale para qualquer configuração do operador $\hat{H}^{(d)}$, uma vez que a restrição $Y = 0$ empregada na solução (5.32) não será utilizada na demonstração.

Do mesmo modo que os operadores $\hat{b}$ e $\hat{d}$ guardam uma conexão, os operadores $\hat{H}$ e $\hat{g}$ também têm. Esses operadores compõem o operador tensorial de *rank*-2 $\hat{T}^{\mu\nu}$, conforme apresentado na subseção 2.2.2. A equação de dispersão para o operador $\hat{g}^{\mu\nu}$ pode ser obtida a partir de $\hat{H}^{\mu\nu}$ através da seguinte substituição:

$$\hat{H}^{\mu\nu} \leftrightarrow -\hat{g}^{\mu\nu}. \quad (5.35)$$

Usando essa conexão existente entre eles, que também é válida em nível perturbativo, podemos mapear as Lagrangeanas $L^{\hat{H}^{(d)}} \leftrightarrow L^{\hat{g}^{(d)}}$. Esse mapeamento é obtido a partir da seguinte substituição em $L^{\hat{H}^{(d)}}$:

$$\hat{H}_{*\mu\nu} \leftrightarrow -\hat{g}_{*\mu\nu} u^0 = -\hat{g}_{*\mu\nu}. \quad (5.36)$$

Com base nas soluções encontradas e no padrão que elas apresentam, podemos escrever uma Lagrangeana geral para os operadores de spin não-degenerados. Tal Lagrangeana possui a seguinte forma:

$$L^{\hat{x}^{(d)}} = -m_\psi \sqrt{u^2} \mp \hat{\mathcal{X}}_*, \quad (5.37)$$

onde a quantidade $\hat{\mathcal{X}}_*$ é apresentada na Tabela 4a. É notório que o resultado acima reproduz o resultado *standard* no limite em que os coeficientes que controlam a violação de Lorentz anulam-se. É fácil constatar que nossos resultados são todos homogêneos de grau 1 e possuem a dimensão de massa correta graças ao fator de consistência Ξ_x . Este fator de consistência tem a mesma forma para todos os operadores de spin não-degenerados. Porém, devemos lembrar que a dimensão de massa de cada um desses operadores é diferente. Outra propriedade que merece destaque, e que difere dos casos tratados na subseção 5.1.1, reside no fato de termos duas Lagrangeanas Clássicas distintas para cada operador. Isso ocorre, pois os operadores $\hat{b}$, $\hat{d}$, $\hat{H}$, e $\hat{g}$ quebram a degenerescência com respeito ao spin, ou seja, uma partícula com spin-up propaga-se de uma maneira diferente daquela com spin-down. Essa quebra reflete-se também nas relações de dispersão, conforme estudado na subseção 2.2.2. Devemos mencionar ainda que uma parcela da Lagrangeana que

obtivemos tem a forma de uma raiz quadrada contendo uma expressão que anula-se no limite em que a violação de Lorentz vai a zero. Isso, por sua vez, compromete a diferenciabilidade das soluções no limite mencionado.

As nossas soluções podem ser reescritas de uma forma mais conveniente e que se ajustam a uma notação conhecida na literatura como bipartite [77]. Sendo assim, as nossas Lagrangeanas assumem a seguinte forma:

$$L^{\hat{x}^{(d)}} = -m_\psi \sqrt{u^2} \mp \sqrt{u^\mu s_{\mu\nu}^{\hat{x}} u^\nu}, \quad (5.38)$$

onde $s_{\mu\nu}^{\hat{x}} = s_{\mu\nu}^{\hat{x}}(u)$ são matrizes de dimensão 4×4 e estão listadas explicitamente na Tabela 4a. Podemos encarar o resultado apresentado na equação (5.38) como uma generalização não-mínima das estruturas bipartites apresentadas em [77]. Como trata-se de uma generalização, cabe mencionar que a matriz $s_{\mu\nu}^{\hat{x}}$ é agora uma função explícita da 4-velocidade, o que não ocorre na versão mínima desta estrutura.

Graças à conexão existente entre os operadores pseudovetoriais $\hat{b}$ e $\hat{d}$ e tensoriais $\hat{H}$ e $\hat{g}$, isto é,

$$\hat{\mathcal{A}}^\mu = \hat{d}^\mu - \hat{b}^\mu, \quad (5.39a)$$

$$\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} - \hat{H}^{\mu\nu}, \quad (5.39b)$$

é possível escrever uma solução onde uma combinação desses operadores é levada em consideração. As soluções que estamos interessados devem possuir a mesma estrutura que as soluções já encontradas. Porém, devem ser expressas em termos dos operadores $\hat{\mathcal{A}}$ e $\hat{\mathcal{T}}$. Levando isso em conta, obtemos as seguintes Lagrangeanas Clássicas:

$$L^{\hat{\mathcal{A}}^{(d)}}|_{\substack{d \geq 3 \\ \text{even}}} = -m_\psi \sqrt{u^2} \mp \sqrt{\hat{\mathcal{A}}_*^2 - (\hat{\mathcal{A}}_*^\mu \hat{\mathcal{A}}_{*\mu}) u^2}, \quad (5.40a)$$

$$L^{\hat{\mathcal{T}}^{(d)}}|_{\substack{d \geq 3 \\ \text{odd}}} = -m_\psi \sqrt{u^2} \mp \sqrt{-\tilde{\mathcal{T}}_*^\mu \tilde{\mathcal{T}}_{*\mu}}, \quad (5.40b)$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{*\mu}^{(d)} \equiv \Xi_b^{(d)} \left(\frac{m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{d}_{*\mu}^{(d+1)} - \hat{b}_{*\mu}^{(d)} \right), \quad \tilde{\mathcal{T}}_{*\mu}^{(d)} \equiv \Xi_H^{(d)} \left(\frac{m_\psi}{\sqrt{u^2}} \tilde{g}_{*\mu}^{(d+1)} - \tilde{H}_{*\mu}^{(d)} \right), \quad (5.40c)$$

onde os índices que indicam a dimensão de massa dos operadores $\hat{\mathcal{A}}_{*\mu}$ e $\tilde{\mathcal{T}}_{*\mu}$ foram omitidos dentro da Lagrangeana a fim de simplificar a notação. Em suma, a nova Lagrangeana que congrega os operadores $\hat{b}$ e $\hat{d}$ é mostrada em (5.40a) e para os operadores $\hat{H}$ e $\hat{g}$ possui a forma apresentada em (5.40b).

$\hat{x}_*, \hat{x}_{*\mu}$	Contrações	Ξ_x	Derivadas radiais	Correspondência
$\hat{b}_*$	$b_{\mu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} u^\mu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}$	$m_\psi^{d-3}/(u^2)^{(d-3)/2}$	$u^\mu \frac{\partial \hat{b}_*}{\partial u^\mu} = (d-2)\hat{b}_*$	$\hat{b}_\mu \approx \Xi_b \hat{b}_{*\mu}$
$\hat{d}_*$	$d_{\mu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} u^\mu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}$	$m_\psi^{d-3}/(u^2)^{(d-3)/2}$	$u^\mu \frac{\partial \hat{d}_*}{\partial u^\mu} = (d-2)\hat{d}_*$	$\hat{d}_\mu \approx \Xi_d \hat{d}_{*\mu}$
$\hat{h}_{*\mu}$	$\tilde{H}_{\mu\nu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} u^\nu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}$	$m_\psi^{d-3}/(u^2)^{(d-3)/2}$	$u^\mu \frac{\partial \hat{h}_{*\nu}}{\partial u^\mu} = (d-2)\hat{h}_{*\nu}$	$\hat{H}_{\mu\nu} \approx \Xi_H \hat{H}_{*\mu\nu}$
$\hat{g}_{*\mu}$	$\tilde{g}_{\mu\nu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} u^\nu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}$	$m_\psi^{d-3}/(u^2)^{(d-3)/2}$	$u^\mu \frac{\partial \hat{g}_{*\nu}}{\partial u^\mu} = (d-2)\hat{g}_{*\nu}$	$\hat{g}_{\mu\nu} \approx \Xi_g \hat{g}_{*\mu\nu}$

(a)

$\hat{\mathcal{X}}_*$	Expressão explícita	$\hat{X}_*$	Derivada radial	Matriz bipartite generalizada $s_{\mu\nu}^{\hat{\mathcal{X}}}$
$\hat{\mathcal{B}}_*$	$\sqrt{\hat{B}_*^2 - (\hat{B}_*^\mu \hat{B}_{*\mu})u^2}$	$\hat{B}_* = \Xi_b b_*$	$u^\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{B}}_*}{\partial u^\mu} = \hat{\mathcal{B}}_*$	$\hat{B}_{*\mu} \hat{B}_{*\nu} - (\hat{B}_*^e \hat{B}_{*e})\eta_{\mu\nu}$
$\hat{\mathcal{D}}_*$	$\sqrt{\hat{D}_*^2 - (\hat{D}_*^\mu \hat{D}_{*\mu})u^2}$	$\hat{D}_* = \Xi_d d_*$	$u^\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{D}}_*}{\partial u^\mu} = \hat{\mathcal{D}}_*$	$\hat{D}_{*\mu} \hat{D}_{*\nu} - (\hat{D}_*^e \hat{D}_{*e})\eta_{\mu\nu}$
$\hat{\mathcal{H}}_*$	$\sqrt{-\tilde{H}_*^\mu \tilde{H}_{*\mu}}$	$\tilde{H}_{*\mu} = \Xi_H \tilde{h}_{*\mu}$	$u^\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}_*}{\partial u^\mu} = \hat{\mathcal{H}}_*$	$-\tilde{H}_*^e \tilde{H}_{*e} \eta_{\mu\nu}/u^2$
$\hat{\mathcal{G}}_*$	$\sqrt{-\tilde{G}_*^\mu \tilde{G}_{*\mu}}$	$\tilde{G}_{*\mu} = \Xi_g \tilde{g}_{*\mu}$	$u^\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{G}}_*}{\partial u^\mu} = \hat{\mathcal{G}}_*$	$-\tilde{G}_*^e \tilde{G}_{*e} \eta_{\mu\nu}/u^2$

(b)

Tabela 4 – Ingredientes necessários para formular a Lagrangeana Clássica mostrada em (5.37) para um operador de spin não-degenerado específico. A primeira coluna da tabela 4a nos fornece a base dos escalares de Lorentz e dos vetores usados, onde a estrutura explícita deles são mostradas na segunda coluna. A terceira coluna lista os fatores de consistência e a quarta nos mostra o teorema de Euler para as quantidades definidas anteriormente. Na quinta coluna, encontramos as correspondências em primeira ordem entre os operadores que violam a simetria de Lorentz transformados do espaço de momento para o espaço das velocidades. Como sabemos, tal transformação é obtida substituindo os 4-momentos pelas 4-velocidades. Já a primeira coluna da tabela 4b caracteriza as funções $\hat{\mathcal{X}}_*$, presente na equação (5.37), compõem as Lagrangeanas e guardam as contribuições advindas da violação da simetria. Na segunda coluna, encontramos os escalares de Lorentz e vetores necessários para construir tais funções. A terceira coluna nos mostra o teorema de Euler para cada $\hat{\mathcal{X}}_*$ e na quarta coluna listamos as matrizes explícitas que compõem as estruturas bipartite generalizadas das Lagrangeanas (5.38).

5.1.3 Conexão entre os coeficientes c e f

Um resultado conhecido na literatura mostra que existe uma transformação que conecta o coeficiente pseudoescalar mínimo f ao coeficiente vetorial mínimo c . Tal transformação é obtida a partir de uma redefinição espinorial que pode ser encontrada em [102]. Vale a pena lembrar que os coeficientes pseudoescalares não contribuem em primeira ordem na equação de dispersão; sua contribuição mais baixa é na segunda ordem. Sendo assim, as Lagrangeanas perturbativas correspondentes ao operador $\hat{f}$ devem ser quadráticas na violação de Lorentz. Por conta disso, a estrutura da transformação é tal que apenas combinações bilineares dos coeficientes f são permitidas. A conexão perturbativa entre os coeficientes é mostrada a seguir:

$$c_{\mu\nu}^{(4)} \approx -f_{\mu}^{(4)} f_{\nu}^{(4)} / 2. \quad (5.41)$$

É possível generalizar esta transformação para o caso em que os operadores envolvidos são não-mínimos. Para tanto, compararemos as Lagrangeanas obtidas para $\hat{c}$ e $\hat{f}$, listadas a seguir:

$$\begin{aligned} L^{\hat{c}} &= -m_{\psi} \sqrt{u^2} + \frac{m_{\psi}^{d-3}}{(u^2)^{\frac{d-3}{2}}} \hat{c}_*, \\ L^{\hat{f}} &= -m_{\psi} \sqrt{u^2} - \frac{m_{\psi}^{2d-7}}{2(u^2)^{\frac{2d-7}{2}}} (\hat{f}_*)^2. \end{aligned}$$

Comparando os resultados dispostos acima, encontramos a seguinte correspondência entre os coeficientes, cada um contraído com um número adequado de 4-velocidades,

$$c_*^{(d)} \leftrightarrow -\frac{m_{\psi}^{d-4}}{2(u^2)^{(d-4)/2}} (f_*^{(d)})^2. \quad (5.42)$$

Podemos ainda evidenciar a estrutura tensorial destes objetos. Dessa forma, a transformação passa a ter a seguinte estrutura:

$$c_{*\mu\nu}^{(d)} \leftrightarrow -\frac{m_{\psi}^{d-4}}{2(u^2)^{(d-4)/2}} f_{*\mu}^{(d)} f_{*\nu}^{(d)}. \quad (5.43)$$

Observamos, no entanto, que as equações (5.42) e (5.43) não fornecem um mapeamento direto entre os coeficientes de controle, apenas uma conexão entre os coeficientes contraídos com as 4-velocidades. Não obstante, é possível mostrar que existe um mapeamento alternativo que conecta os coeficientes de controle em si; essa transformação é mostrada a seguir:

$$c_{\mu\nu\alpha_2\ldots\alpha_{d-3}}^{(d)} \leftrightarrow -\frac{1}{2} f_{\mu\alpha_2\ldots\alpha_{d/2-1}}^{(d/2+2)} f_{\nu\alpha_{d/2+1}\ldots\alpha_{d-2}}^{(d/2+2)}. \quad (5.44)$$

Vemos imediatamente que para $d = 4$ recuperamos o resultado da literatura, mostrada na equação (5.41). Contudo, é possível constatar que apenas um subconjunto dos coeficientes de controle de fato relacionam-se. Por exemplo, $c^{(6)}$ não tem correspondente, uma vez que seu par, de acordo com a expressão (5.44), seria $f^{(5)}$ e sabemos que o operador $\hat{f}$ possui dimensão de massa par, ou seja, $d \geq 4$. Esse problema é resolvido restringindo as dimensões de massa que o operador $\hat{c}$ pode assumir; para que haja concordância na transformação apresentada, os valores possíveis são: $d = 4n + 4$, onde $n \in \mathbb{N}_0$. Quando $n = 1$, observamos que $f_{\mu\alpha_1\alpha_2}^{(6)}$ é mapeado em $c_{\mu\nu\alpha_2\ldots\alpha_5}^{(8)}$, $n = 2$ descreve o mapeamento entre $f_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_4}^{(8)}$ e $c_{\mu\nu\alpha_2\ldots\alpha_9}^{(12)}$ e assim por diante. Percebemos ainda que o subconjunto $c_{\mu\nu\alpha_2\alpha_3}^{(6)}$, $c_{\mu\nu\alpha_2\ldots\alpha_7}^{(10)}$, $\ldots$ não tem nenhum f correspondente. Por fim, a transformação citada nos permite obter a Lagrangeana para o operador $\hat{f}^{(d)}$ a partir do operador $\hat{c}^{(d)}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} L^{\hat{c}^{(d)}} &= -m_\psi \sqrt{u^2} - \Xi_c^{(d)} \hat{c}_*^{(d)} \leftrightarrow -m_\psi \sqrt{u^2} + \frac{\Xi_c^{(d)}}{2} (\hat{f}_*^{(d/2+2)})^2, \\ &= -m_\psi \sqrt{u^2} + \frac{\Xi_c^{(2d'-4)}}{2} (\hat{f}_*^{(d')})^2 = -m_\psi \sqrt{u^2} + \Xi_f^{(d')} (\hat{f}_*^{(d')})^2 = L^{\hat{f}^{(d)}}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

5.2 Demonstração para $L^{\hat{\mathcal{A}}^{(d)}}$

Dedicaremos esta seção e a próxima às demonstrações formais dos operadores de spin não-degenerados; os operadores de spin-degenerados serão abordados na seção 5.4. Como já sabemos, é necessário mostrar que a Lagrangeana Clássica (5.40a) satisfaz o conjunto de equações (2.106) que governam a cinemática clássica de uma partícula pontual na presença de um *background* que viola a simetria de Lorentz. Devemos nos lembrar que nossas soluções são perturbativas, ou seja, são válidas apenas em primeira ordem. Portanto, na demonstração que iremos fornecer, descartamos termos de ordens superiores. Vale lembrar ainda que as nossas Lagrangeanas são homogêneas de grau 1, tal propriedade é de vital importância na demonstração que se sucede. A Lagrangeana que usaremos, mostrada na equação (5.40a), pode ser reescrita da seguinte forma

$$L^{\hat{\mathcal{A}}^{(d)}} = -m_\psi \sqrt{u^2} \mp \hat{\mathcal{A}}_*, \quad (5.46a)$$

$$\hat{\mathcal{A}}_* = \sqrt{\hat{\mathcal{A}}_*^2 - (\hat{\mathcal{A}}_*^\mu \hat{\mathcal{A}}_{*\mu}) u^2}, \quad (5.46b)$$

onde definimos um novo operador $\hat{\mathcal{A}}_*$ que é explicitamente homogêneo de grau 1. A demonstração analítica será feita por partes de modo a facilitar o entendimento do processo.

5.2.1 Equação de dispersão

Iniciaremos a nossa demonstração mostrando que o momento canônico obtido a partir da nossa solução clássica satisfaz a equação de dispersão do operador $\hat{\mathcal{A}}$. O momento é obtido através da seguinte equação:

$$p_\mu = -\frac{\partial L^{\hat{\mathcal{A}}^{(d)}}}{\partial u^\mu} = m_\psi \frac{u_\mu}{\sqrt{u^2}} \pm \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^\mu}. \quad (5.47)$$

Como é de praxe em soluções perturbativas, devemos substituir todos os 4-momentos p_μ que aparecem na estrutura do operador $\hat{\mathcal{A}}^{(d)}$ pela expressão $m_\psi u_\mu / \sqrt{u^2}$; isso nos garante que a única contribuição que advém deste operador é linear na violação de Lorentz e possui a forma $\hat{\mathcal{A}}_\mu \approx \Xi_{\mathcal{A}} \hat{\mathcal{A}}_{*\mu}$. A equação de dispersão para o caso em questão é mostrada a seguir:

$$\mathcal{R} = (p^2 - m_\psi^2)^2 + 4 \left[\hat{\mathcal{A}}^2 m_\psi^2 - (\hat{\mathcal{A}} \cdot p)^2 \right] + \dots \quad (5.48)$$

Vemos que os primeiros termos não-nulos que contribuem na violação da simetria de Lorentz aparecem em segunda ordem. Pode parecer contraditório, mas precisamos lembrar que estamos trabalhando com a equação de dispersão em sua versão perturbativa e não com a relação de dispersão perturbativa. Esta última, nos fornece as contribuições lineares na violação de Lorentz. Porém, é muito mais simples usar a equação de dispersão com os seus termos quadráticos na demonstração a seguir do que lidar com raízes quadradas e suas derivadas. Por esse motivo, devemos expandir as quantidades que irão ser inseridas na equação de dispersão até segunda ordem. Por exemplo, expandindo $p_\mu p^\mu$ até segunda ordem resulta

$$p^2 \approx m_\psi^2 \pm \frac{2m_\psi}{\sqrt{u^2}} u^\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^\mu} + \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u} \right)^2 = m_\psi^2 \pm \frac{2m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{\mathcal{A}}_* + \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u} \right)^2, \quad (5.49)$$

onde invocamos o teorema de Euler para o operador $\hat{\mathcal{A}}_*$:

$$u^\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^\mu} = \hat{\mathcal{A}}_*. \quad (5.50)$$

Os outros dois termos que aparecem na equação de dispersão assumem a seguinte forma:

$$\hat{\mathcal{A}}^2 \mapsto \hat{\mathcal{A}}_*^\mu \hat{\mathcal{A}}_{*\mu}, \quad (5.51a)$$

$$\hat{\mathcal{A}} \cdot p \mapsto m_\psi \frac{\hat{\mathcal{A}}_*}{\sqrt{u^2}} \pm \hat{\mathcal{A}}_*^\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^\mu} + \dots, \quad (5.51b)$$

$$(\hat{\mathcal{A}} \cdot p)^2 \mapsto m_\psi^2 \frac{\hat{\mathcal{A}}_*^2}{u^2} + \dots \quad (5.51c)$$

Substituindo todos os ingredientes acima na equação de dispersão, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= (p^2 - m_\psi^2)^2 + 4 \left[\hat{\mathcal{A}}^2 m_\psi^2 - (\hat{\mathcal{A}} \cdot p)^2 \right] + \dots \\ &\mapsto \left(\pm \frac{2m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{\mathcal{A}}_* \right)^2 + 4 \left(\hat{\mathcal{A}}^2 m_\psi^2 - m_\psi^2 \frac{\hat{\mathcal{A}}_*^2}{u^2} \right) + \dots \\ &\approx \frac{4m_\psi^2}{u^2} \hat{\mathcal{A}}_*^2 + 4m_\psi^2 \left(\hat{\mathcal{A}}_*^\mu \hat{\mathcal{A}}_{*\mu} - \frac{\hat{\mathcal{A}}_*^2}{u^2} \right) \\ &= \frac{4m_\psi^2}{u^2} \hat{\mathcal{A}}_*^2 + \frac{4m_\psi^2}{u^2} \left[(\hat{\mathcal{A}}_*^\mu \hat{\mathcal{A}}_{*\mu}) u^2 - \hat{\mathcal{A}}_*^2 \right] \\ &= \frac{4m_\psi^2}{u^2} \hat{\mathcal{A}}_*^2 - \frac{4m_\psi^2}{u^2} \hat{\mathcal{A}}_*^2 \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde usamos a definição do operador $\hat{\mathcal{A}}_*$ apresentada na equação (5.46a). O resultado acima comprova que o momento canônico obtido a partir da Lagrangeana proposta satisfaz a equação de dispersão em segunda ordem.

5.2.2 Correspondência entre as velocidades

Queremos agora mostrar a validade da equação (5.7b) que exprime a conexão entre a velocidade de grupo e a 3-velocidade da partícula, isto é,

$$\frac{\partial p_0}{\partial p_i} = -\frac{u^i}{u^0}.$$

Para demonstrar essa conexão precisaremos lidar com a relação de dispersão. Porém, pelos mesmos motivos apresentados na subseção anterior, usaremos de maneira inteligente a equação de dispersão que temos em mãos. Sabemos que as relações de dispersão são obtidas a partir da seguinte equação

$$\mathcal{R} = 0. \quad (5.53)$$

Desse modo, ao invés de calcular $\partial p_0 / \partial p_i$, calcularemos a derivada implícita da equação de dispersão, ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.54)$$

Após efetuar a derivação, devemos substituir todos os termos $\partial p_0/\partial p_i \mapsto -u^i/u^0$ e o momento p_μ por

$$p_\mu = m_\psi \frac{u_\mu}{\sqrt{u^2}} \pm \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}}{\partial u^\mu}. \quad (5.55)$$

Devemos lembrar ainda que as expansões devem ser efetuadas até segunda ordem a fim de obter o resultado correto. Posto isto, começaremos calculando a derivada implícita, a saber

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} = & 4(p^2 - m_\psi^2) \left(\frac{\partial p^0}{\partial p_i} p_0 + \frac{\partial p^j}{\partial p_i} p_j \right) + 8m_\psi^2 \hat{\mathcal{A}}^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_\nu}{\partial p_i} \\ & + 8(\hat{\mathcal{A}} \cdot p) \left(\hat{\mathcal{A}}_0 \frac{\partial p^0}{\partial p_i} + \hat{\mathcal{A}}_j \frac{\partial p^j}{\partial p_i} \right) - 8(\hat{\mathcal{A}} \cdot p) p^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_\nu}{\partial p_i} + \dots \end{aligned} \quad (5.56)$$

Substituindo agora $\partial p_0/\partial p_i \mapsto -u^i/u^0$, obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} = & -4(p^2 - m_\psi^2) \left(\frac{u^i}{u^0} p_0 + p_i \right) + 8m_\psi^2 \hat{\mathcal{A}}^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_\nu}{\partial p_i} \\ & + 8(\hat{\mathcal{A}} \cdot p) \left(\frac{u^i}{u^0} \hat{\mathcal{A}}_0 + \hat{\mathcal{A}}_i \right) - 8(\hat{\mathcal{A}} \cdot p) p^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_\nu}{\partial p_i} + \dots \end{aligned} \quad (5.57)$$

É razoável dividir a equação acima em três partes. Isso nos ajudará a organizar melhor os resultados de agora em diante. Assim sendo, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} = \sum_{i=1\dots 3} \left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(i)}, \quad (5.58a)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(1)} = -4(p^2 - m_\psi^2) \left(\frac{u^i}{u^0} p_0 + p_i \right), \quad (5.58b)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(2)} = 8(\hat{\mathcal{A}} \cdot p) \left(\frac{u^i}{u^0} \hat{\mathcal{A}}_0 + \hat{\mathcal{A}}_i \right), \quad (5.58c)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(3)} = 8m_\psi^2 \hat{\mathcal{A}}^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_\nu}{\partial p_i} - 8(\hat{\mathcal{A}} \cdot p) p^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_\nu}{\partial p_i}. \quad (5.58d)$$

Devemos agora proceder substituindo todos os 4-momentos p_μ pela equação (5.47). Fazendo essas mudanças no primeiro termo da equação (5.58a), obtemos

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(1)} = -4(p^2 - m_\psi^2) \left(\frac{u^i}{u^0} p_0 + p_i \right)$$

$$\begin{aligned} \mapsto & -4 \left[m_\psi^2 \pm \frac{2m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{\mathcal{A}}_* + \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u} \right)^2 - m_\psi^2 \right] \times \\ & \times \left[\frac{u^i}{u^0} \left(m_\psi \frac{u_0}{\sqrt{u^2}} \pm \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^0} \right) + \left(m_\psi \frac{u_i}{\sqrt{u^2}} \pm \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Simplificando a expressão acima, encontramos que

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(1)} \approx -\frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{\mathcal{A}}_* \left(\frac{u^i}{u^0} \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^0} + \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^i} \right). \quad (5.60)$$

O segundo termo, mostrado na equação (5.58c), assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(2)} &= 8(\hat{\mathcal{A}} \cdot p) \left(\frac{u^i}{u^0} \hat{\mathcal{A}}_0 + \hat{\mathcal{A}}_i \right) \\ &\mapsto \frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} (\hat{\mathcal{A}} \cdot u) \left(\frac{u^i}{u^0} \hat{\mathcal{A}}_0 + \hat{\mathcal{A}}_i \right) + \dots \\ &\approx \frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{\mathcal{A}}_* \left(\frac{u^i}{u^0} \hat{\mathcal{A}}_{*0} + \hat{\mathcal{A}}_{*i} \right). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Somando as duas contribuições calculadas anteriormente, chegamos ao resultado

$$\begin{aligned} \sum_{l=1\dots 2} \left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(l)} &= \frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} \left[\hat{\mathcal{A}}_* \left(\frac{u^i}{u^0} \hat{\mathcal{A}}_{*0} + \hat{\mathcal{A}}_{*i} \right) - \hat{\mathcal{A}}_* \left(\frac{u^i}{u^0} \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^0} + \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^i} \right) \right] + \dots \\ &= \frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} \left\{ \hat{\mathcal{A}}_* \left(\frac{u^i}{u^0} \hat{\mathcal{A}}_{*0} + \hat{\mathcal{A}}_{*i} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{u^i}{u^0} \left(\hat{\mathcal{A}}_* \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^0} - u^2 \hat{\mathcal{A}}_*^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^0} \right) + \hat{\mathcal{A}}_* \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^i} - u^2 \hat{\mathcal{A}}_*^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^i} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.62)$$

onde usamos a expressão

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^\mu} = \frac{1}{\hat{\mathcal{A}}_*} \left(\hat{\mathcal{A}}_* \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^\mu} - \hat{\mathcal{A}}_*^\nu \hat{\mathcal{A}}_{*\nu} u_\mu - u^2 \hat{\mathcal{A}}_*^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^\mu} \right). \quad (5.63)$$

Por fim, a terceira parcela nos fornece a igualdade

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(3)} = 8m_\psi^2 \hat{\mathcal{A}}^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_\nu}{\partial p_i} - 8(\hat{\mathcal{A}} \cdot p) p^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_\nu}{\partial p_i}$$

$$\mapsto 8m_\psi^2 \left(\hat{\mathcal{A}}_*^\nu - \frac{\hat{\mathcal{A}}_* u^\nu}{u^2} \right) \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^\mu} \frac{\partial u^\mu}{\partial p_i} + \dots \quad (5.64)$$

Note que usamos a regra da cadeia no termo $\partial \hat{\mathcal{A}}_\nu / \partial p_i$, pois o operador $\hat{\mathcal{A}}_\nu$ passa a ser uma função de u_μ , que por sua vez é uma função de p_μ . Calculando esta derivada, encontramos que

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^\mu} \frac{\partial u^\mu}{\partial p_i} = -\frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \left(\frac{u^i}{u^0} \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^0} + \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^i} \right), \quad (5.65)$$

onde usamos os resultados deduzidos nas equações (5.22) e (5.23). Substituindo esta expressão na equação (5.64), conseguimos obter

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(3)} \approx -8m_\psi \sqrt{u^2} \left(\hat{\mathcal{A}}_*^\nu - \frac{\hat{\mathcal{A}}_* u^\nu}{u^2} \right) \left(\frac{u^i}{u^0} \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^0} + \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^i} \right). \quad (5.66)$$

Juntando todos os ingredientes na equação original (5.58a), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} &= \sum_{i=1\dots 3} \left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(i)} \\ &= \frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} \left[\hat{\mathcal{A}}_* \left(\frac{u^i}{u^0} \hat{\mathcal{A}}_{*0} + \hat{\mathcal{A}}_{*i} \right) - \hat{\mathcal{A}}_* \left(\frac{u^i}{u^0} \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^0} + \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^i} \right) \right. \\ &\quad \left. + u^2 \left(\frac{u^i}{u^0} \hat{\mathcal{A}}_*^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^0} + \hat{\mathcal{A}}_*^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^i} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\hat{\mathcal{A}}_*^\nu u^2 - \hat{\mathcal{A}}_* u^\nu \right) \left(\frac{u^i}{u^0} \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^0} + \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^i} \right) \right] + \dots, \\ &\approx 0, \end{aligned} \quad (5.67)$$

onde usamos as seguintes identidades

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^0} = \frac{\partial(u^\nu \hat{\mathcal{A}}_{*\nu})}{\partial u^0} = \hat{\mathcal{A}}_*^0 + u^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^0}, \quad (5.68a)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_*}{\partial u^i} = \frac{\partial(u^\nu \hat{\mathcal{A}}_{*\nu})}{\partial u^i} = \hat{\mathcal{A}}_{*i} + u^\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_{*\nu}}{\partial u^i}. \quad (5.68b)$$

Observamos, portanto, que a Lagrangeana Clássica que obtivemos satisfaz todos os critérios necessários e suficientes. Na próxima seção abordaremos outra demonstração importante envolvendo agora o operador $\hat{\mathcal{T}}$.

5.3 Demonstração para $L^{\hat{T}^{(d)}}$

Faremos nesta seção uma demonstração inteiramente análoga àquela feita para o operador $\hat{\mathcal{A}}$. A diferença fundamental aqui é que agora lidamos com um operador tensorial de *rank*-2, cuja Lagrangeana Clássica possui a forma designada pela equação (5.40b), e é reproduzida a seguir

$$L^{\hat{T}^{(d)}} = -m_\psi \sqrt{u^2} \mp \hat{\mathcal{T}}_*, \quad (5.69a)$$

$$\hat{\mathcal{T}}_* = \sqrt{-\tilde{\mathcal{T}}_*^\mu \tilde{\mathcal{T}}_{*\mu}}, \quad (5.69b)$$

onde definimos um novo operador $\hat{\mathcal{T}}_*$ que é explicitamente homogêneo de grau 1 e permitirá que a dedução desenvolvida seja mais compacta.

5.3.1 Equação de dispersão

Antes de mais nada, começamos a nossa demonstração mostrando que o momento canônico satisfaz a equação (5.7a). Seu valor é calculado a seguir

$$p_\mu = -\frac{\partial L^{\hat{T}^{(d)}}}{\partial u^\mu} = m_\psi \frac{u_\mu}{\sqrt{u^2}} \pm \frac{\partial \hat{\mathcal{T}}_*}{\partial u^\mu}. \quad (5.70)$$

A equação de dispersão obtida para o operador $\hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu}$ é indicada abaixo

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= p^4 - 2m_\psi^2 p^2 + m_\psi^4 - m_\psi^2 \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu} - 2p_\mu (\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} - i\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}) (\hat{\mathcal{T}}_{\nu\varrho} + i\tilde{\mathcal{T}}_{\nu\varrho}) p^\varrho + \dots \\ &= (p^2 - m_\psi^2)^2 + (p^2 - m_\psi^2) \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu} - 4p^\mu \tilde{\mathcal{T}}_{\mu\varrho} \tilde{\mathcal{T}}_{\nu}^{\varrho} p^\nu + \dots \\ &= (p^2 - m_\psi^2)^2 - 4p^\mu \tilde{\mathcal{T}}_{\mu\varrho} \tilde{\mathcal{T}}_{\nu}^{\varrho} p^\nu + \dots, \end{aligned} \quad (5.71)$$

onde usamos a identidade

$$p_\mu (\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} - i\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}) (\hat{\mathcal{T}}_{\nu\varrho} + i\tilde{\mathcal{T}}_{\nu\varrho}) p^\varrho = 2p^\mu \tilde{\mathcal{T}}_{\mu\varrho} \tilde{\mathcal{T}}_{\nu}^{\varrho} p^\nu - \frac{1}{2} p^2 \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu}. \quad (5.72)$$

Um dos ingredientes necessários é calculado a seguir:

$$\begin{aligned} p^2 &= \left(m_\psi \frac{u_\mu}{\sqrt{u^2}} \pm \frac{\partial \hat{\mathcal{T}}_*}{\partial u^\mu} \right) \left(m_\psi \frac{u^\mu}{\sqrt{u^2}} \pm \frac{\partial \hat{\mathcal{T}}_*}{\partial u_\mu} \right) \\ &= m_\psi^2 \pm \frac{2m_\psi}{\sqrt{u^2}} u^\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{T}}_*}{\partial u^\mu} + \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{T}}_*}{\partial u} \right)^2 \end{aligned}$$

$$= m_\psi^2 \pm \frac{2m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{\mathcal{T}}_* + \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{T}}_*}{\partial u} \right)^2, \quad (5.73)$$

em que exploramos novamente o teorema de Euler, ou seja,

$$u^\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{T}}_*}{\partial u^\mu} = \hat{\mathcal{T}}_*. \quad (5.74)$$

Devemos proceder agora substituindo o momento canônico (5.47) na equação de dispersão juntamente com o resultado apresentado em (5.73). Lembramos ainda que é necessário e suficiente substituir $p_\mu \approx m_\psi u^\mu / u^2$ nos 4-momentos que aparecem contraídos no operador $\hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu}$ e que a substituição mencionada também nos fornece o mapeamento $\hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu} \approx \Xi_{\hat{\mathcal{T}}} \hat{\mathcal{T}}_{*\mu\nu}$. Dito isto, a equação de dispersão assume então a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= (p^2 - m_\psi^2)^2 - 4p^\mu \tilde{\mathcal{T}}_{\mu\varrho} \tilde{\mathcal{T}}_{\nu}^{\varrho} p^\nu + \dots, \\ &\mapsto \left[m_\psi^2 \pm \frac{2m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{\mathcal{T}}_* + \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{T}}_*}{\partial u} \right)^2 - m_\psi^2 \right]^2 - \frac{4m_\psi^2}{u^2} \tilde{\mathcal{T}}_{*\varrho} \tilde{\mathcal{T}}_*^{\varrho} + \dots, \\ &\approx \frac{4m_\psi^2}{u^2} \hat{\mathcal{T}}_*^2 - \frac{4m_\psi^2}{u^2} \tilde{\mathcal{T}}_{*\varrho} \tilde{\mathcal{T}}_*^{\varrho}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Sabemos que $\hat{\mathcal{T}}_*^2 = -\tilde{\mathcal{T}}_*^\mu \tilde{\mathcal{T}}_{*\mu}$, o que torna a equação acima identicamente nula

$$\mathcal{R} \approx \frac{4m_\psi^2}{u^2} \hat{\mathcal{T}}_*^2 - \frac{4m_\psi^2}{u^2} \hat{\mathcal{T}}_*^2 = 0. \quad (5.76)$$

5.3.2 Correspondência entre as velocidades

Agora demonstraremos a validade da equação (5.7b). Derivando implicitamente a equação de dispersão com respeito a p_i , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} &= 4(p^2 - m_\psi^2) \left(\frac{\partial p^0}{\partial p_i} p_0 + \frac{\partial p^j}{\partial p_i} p_j \right) - 4 \frac{\partial p^\mu}{\partial p_i} \tilde{\mathcal{T}}_{\mu\varrho} \tilde{\mathcal{T}}_{\nu}^{\varrho} p^\nu \\ &\quad - 4p^\mu \tilde{\mathcal{T}}_{\mu\varrho} \tilde{\mathcal{T}}_{\nu}^{\varrho} \frac{\partial p^\nu}{\partial p_i} - 4p^\mu \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_{\mu\varrho}}{\partial p_i} \tilde{\mathcal{T}}_{\nu}^{\varrho} p^\nu + \dots \\ &= 4(p^2 - m_\psi^2) \left(\frac{\partial p^0}{\partial p_i} p_0 - p_i \right) - 8p^\mu \tilde{\mathcal{T}}_{\mu\varrho} \tilde{\mathcal{T}}_{\nu}^{\varrho} \frac{\partial p_\nu}{\partial p_i} - 4p^\mu \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_{\mu\varrho}}{\partial p_i} \tilde{\mathcal{T}}_{\nu}^{\varrho} p^\nu + \dots \quad (5.77) \end{aligned}$$

Pelos mesmos motivos apresentados na demonstração do operador $\hat{\mathcal{A}}$, trataremos separadamente cada uma das parcelas apresentadas na equação acima. Dividimos a equação da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} = \sum_{l=1 \dots 3} \left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(l)}, \quad (5.78a)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(1)} = 4(p^2 - m_\psi^2) \left(\frac{\partial p^0}{\partial p_i} p_0 - p_i \right), \quad (5.78b)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(2)} = -8p^\mu \tilde{\mathcal{T}}_{\mu e} \tilde{\mathcal{T}}_{e\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial p_i} = -8p^\mu \tilde{\mathcal{T}}_{\mu e} \tilde{\mathcal{T}}_{e0} \frac{\partial p_0}{\partial p_i} - 8p^\mu \tilde{\mathcal{T}}_{\mu e} \tilde{\mathcal{T}}_{ej} \frac{\partial p_j}{\partial p_i}, \quad (5.78c)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(3)} = -4p^\mu \left(\tilde{\mathcal{T}}_{\mu e} \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_{e\nu}^\nu}{\partial p_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_{\mu e}^\nu}{\partial p_i} \tilde{\mathcal{T}}_{e\nu}^\nu \right) p^\nu. \quad (5.78d)$$

Substituindo $\partial p_0 / \partial p_i \mapsto -u^i / u^0$, utilizando o momento canônico dado pela equação (5.70), bem como o resultado apresentado na equação (5.73) e retendo apenas termos até segunda ordem na violação de Lorentz, obtemos:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(1)} \mapsto -\frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{\mathcal{T}}_* \left(\frac{u^i}{u^0} \frac{\partial \hat{\mathcal{T}}_*}{\partial u^0} + \frac{\partial \hat{\mathcal{T}}_*}{\partial u^i} \right), \quad (5.79a)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(2)} \mapsto \frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} u^\mu \tilde{\mathcal{T}}_{\mu e} \tilde{\mathcal{T}}_{e0} \frac{u^i}{u^0} - \frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} u^\mu \tilde{\mathcal{T}}_{\mu e} \tilde{\mathcal{T}}_{ei} = \frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} \tilde{\mathcal{T}}_{*e} \left(\frac{u^i}{u^0} \tilde{\mathcal{T}}_{e0} - \tilde{\mathcal{T}}_{ei} \right), \quad (5.79b)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(3)} \mapsto -\frac{4m_\psi^2}{u^2} u^\mu \left(\tilde{\mathcal{T}}_{\mu e} \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_{e\nu}^\nu}{\partial p_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_{\mu e}^\nu}{\partial p_i} \tilde{\mathcal{T}}_{e\nu}^\nu \right) u^\nu = \frac{8m_\psi^2}{u^2} \tilde{\mathcal{T}}_{*e} \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_{*e}^\nu}{\partial u^\mu} \frac{\partial u^\mu}{\partial p_i} u^\nu. \quad (5.79c)$$

Duas outras quantidades precisam ser calculadas para que possamos finalizar a demonstração, são elas: $\partial \hat{\mathcal{T}}_* / \partial u^\mu$ e $\left(\partial \tilde{\mathcal{T}}_{*e}^\nu / \partial u^\mu \right) u^\nu$. A seguir, calculamos estas derivadas

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{T}}_*}{\partial u^\mu} = -\frac{1}{\hat{\mathcal{T}}_*} \frac{\partial \hat{\mathcal{T}}_*^\nu}{\partial u^\mu} \tilde{\mathcal{T}}_{*\nu}, \quad (5.80)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_{*e}^\nu u^\nu}{\partial u^\mu} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_{*e}^\nu}{\partial u^\mu} u^\nu + \tilde{\mathcal{T}}_{*e}^\nu \frac{\partial u^\nu}{\partial u^\mu} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_{*e}^\nu}{\partial u^\mu} u^\nu + \tilde{\mathcal{T}}_{*e}^\nu. \quad (5.81)$$

Esta última equação nos fornece a identidade abaixo:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_{*e}^\nu}{\partial u^\mu} u^\nu = \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_{*e}^\nu}{\partial u^\mu} - \tilde{\mathcal{T}}_{*e}^\nu. \quad (5.82)$$

Com o auxílio dos resultados expostos acima, podemos reescrever as parcelas $\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(1)}$ e $\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(3)}$ da seguinte forma

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(1)} = \frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} \tilde{\mathcal{T}}_{*\nu} \left(\frac{u^i}{u^0} \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_*^\nu}{\partial u^0} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_*^\nu}{\partial u^i} \right), \quad (5.83a)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(3)} = \frac{8m_\psi^2}{u^2} \tilde{\mathcal{T}}_{*\varrho} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_*^\varrho}{\partial u^\mu} - \tilde{\mathcal{T}}_{*\mu}^\varrho \right) \frac{\partial u^\mu}{\partial p_i}. \quad (5.83b)$$

Usaremos agora as identidades obtidas em (5.22), que estão listadas abaixo de uma forma mais adequada, a saber

$$\frac{\partial u^0}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sqrt{u^2} \frac{p^0}{m_\psi} \right) = \frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \frac{\partial p^0}{\partial p_i} = -\frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \frac{u^i}{u^0}, \quad (5.84)$$

$$\frac{\partial u^j}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sqrt{u^2} \frac{p^j}{m_\psi} \right) = -\frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \delta^{ij}. \quad (5.85)$$

Substituindo esses resultados em $\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(3)}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(3)} &= \frac{8m_\psi^2}{u^2} \tilde{\mathcal{T}}_{*\varrho} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_*^\varrho}{\partial u^0} - \tilde{\mathcal{T}}_{*0}^\varrho \right) \frac{\partial u^0}{\partial p_i} + \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_*^\varrho}{\partial u^j} - \tilde{\mathcal{T}}_{*j}^\varrho \right) \frac{\partial u^j}{\partial p_i} \right] \\ &= -\frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} \tilde{\mathcal{T}}_{*\varrho} \left[\frac{u^i}{u^0} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_*^\varrho}{\partial u^0} - \tilde{\mathcal{T}}_{*0}^\varrho \right) + \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_*^\varrho}{\partial u^i} - \tilde{\mathcal{T}}_{*i}^\varrho \right]. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Somando todas as quantidades calculadas, observamos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} &= \sum_{i=1\dots 3} \left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_i} \right|^{(i)} \\ &= \frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} \tilde{\mathcal{T}}_{*\nu} \left(\frac{u^i}{u^0} \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_*^\nu}{\partial u^0} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_*^\nu}{\partial u^i} \right) + \frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} \tilde{\mathcal{T}}_{*\varrho} \left(\frac{u^i}{u^0} \tilde{\mathcal{T}}_{*0}^\varrho - \tilde{\mathcal{T}}_{*i}^\varrho \right) \\ &\quad - \frac{8m_\psi}{\sqrt{u^2}} \tilde{\mathcal{T}}_{*\varrho} \left[\frac{u^i}{u^0} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_*^\varrho}{\partial u^0} - \tilde{\mathcal{T}}_{*0}^\varrho \right) + \frac{\partial \tilde{\mathcal{T}}_*^\varrho}{\partial u^i} - \tilde{\mathcal{T}}_{*i}^\varrho \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.87)$$

ou seja, obtemos um resultado identicamente nulo como esperado.

Finalizamos assim a demonstração formal dos nossos resultados mostrando que eles satisfazem todos os pré-requisitos exigidos. Na próxima seção abordaremos

uma outra maneira de obter os *Ansätze* baseando-se em uma conexão direta entre as Lagrangeanas Clássicas e as relações de dispersão. Através desse método será possível generalizar ainda mais nossos resultados.

5.4 Proposição: Mapeamento Geral

A seguir, iremos propor uma forma geral de obter as Lagrangeanas Clássicas perturbativas a partir da expansão em primeira ordem das relações de dispersão. Os passos para obter tais Lagrangeanas estão descritos proposição a seguir.

Proposição 3 (Mapeamento Geral) *Seja $\hat{\mathcal{Q}}$ um operador cuja relação de dispersão em primeira ordem exista. Seja $L^{\hat{\mathcal{Q}}}$ a Lagrangeana Clássica correspondente ao operador $\hat{\mathcal{Q}}$. Suponha, sem perda de generalidade, que o operador $\hat{\mathcal{Q}}$ possa ser escrito da seguinte forma:*

$$\hat{\mathcal{Q}} = \sum_d \mathcal{Q}^{(d)\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}} \tilde{p}_{\alpha_1} \dots \tilde{p}_{\alpha_{d-3}}, \quad (5.88)$$

onde usamos a definição $\tilde{p}_\mu \equiv (E_0, \mathbf{p})_\mu$. Suponha ainda que a equação de dispersão em primeira ordem seja

$$\mathcal{R}_{\hat{\mathcal{Q}}}(p) = p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m_\psi^2 - 2\mathfrak{f}(\hat{\mathcal{Q}}, m_\psi, \tilde{p}_\mu) + \dots, \quad (5.89)$$

cujas relação de dispersão em primeira ordem (solução para partículas) é dada por

$$p_0 \approx \sqrt{m_\psi^2 + \mathbf{p}^2} + \frac{\mathfrak{f}(\hat{\mathcal{Q}}, m_\psi, \tilde{p}_\mu)}{\sqrt{m_\psi^2 + \mathbf{p}^2}}, \quad (5.90)$$

em que $\mathfrak{f}$ é uma função genérica que envolve $\hat{\mathcal{Q}}$, m_ψ e $\tilde{p}_\mu$ apenas.

Para encontrar a contribuição da Lagrangeana que corresponde a violação de Lorentz contida no operador $\mathfrak{f}$, precisamos seguir os seguintes passos: 1º) substituir todas as ocorrências $\sqrt{m_\psi^2 + \mathbf{p}^2} \rightarrow -m_\psi \sqrt{u^2}$; 2º) substituir todos os $\tilde{p}_\mu \rightarrow m_\psi u_\mu / \sqrt{u^2}$ e, finalmente, 3º) multiplicar os termos que carregam a contribuição da violação de Lorentz por u^2 . Seguindo os passos mencionados, encontramos a seguinte estrutura para a Lagrangeana Clássica:

$$L^{\hat{\mathcal{Q}}} = -m_\psi \sqrt{u^2} - \frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \mathfrak{f}_* (\hat{\mathcal{Q}}_*, m_\psi, u_\mu), \quad (5.91)$$

onde $\hat{\mathcal{Q}}_* \equiv \sum_d \left(\frac{m_\psi}{\sqrt{u^2}}\right)^{d-3} \mathcal{Q}^{(d)\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}} u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_{d-3}}$ e $\mathfrak{f}_*$ são funções obrigatoriamente homogêneas de grau 0 em u_μ . Dito isto, podemos afirmar que a Lagrangeana Clássica acima é a solução procurada para o operador $\hat{\mathcal{Q}}$.

Demonstração. A fim de provar a proposição anterior, precisamos calcular algumas quantidades úteis, a saber:

$$p_\mu = -\frac{\partial L^{\hat{\mathcal{Q}}}}{\partial u^\mu} = \frac{m_\psi u_\mu}{\sqrt{u^2}} + \frac{u_\mu}{m_\psi \sqrt{u^2}} \mathfrak{f}_* + \frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \partial_\mu \mathfrak{f}_* \quad (5.92)$$

e

$$p^2 = m_\psi^2 + 2\mathfrak{f}_* \left(\hat{\mathcal{Q}}_*, m_\psi, u_\mu \right), \quad (5.93)$$

onde usamos o teorema de Euler na função homogênea de grau zero $\mathfrak{f}_*$, ou seja,

$$u^\mu \partial_\mu \mathfrak{f}_* = 0.$$

Agora vamos analisar a equação de dispersão:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\hat{\mathcal{Q}}}(p) &= p^2 - m_\psi^2 - 2\mathfrak{f} \left(\hat{\mathcal{Q}}, m_\psi, \tilde{p}_\mu \right) + \dots, \\ &= m_\psi^2 + 2\mathfrak{f}_* \left(\hat{\mathcal{Q}}_*, m_\psi, u_\mu \right) - m_\psi^2 - 2\mathfrak{f} \left(\hat{\mathcal{Q}}, m_\psi, \tilde{p}_\mu \right) + \dots, \\ &\approx 2\mathfrak{f}_* \left(\hat{\mathcal{Q}}_*, m_\psi, u_\mu \right) - 2\mathfrak{f} \left(\hat{\mathcal{Q}}, m_\psi, \tilde{p}_\mu \right). \end{aligned} \quad (5.94)$$

Contudo, sabemos que $\mathfrak{f} \left(\hat{\mathcal{Q}}, m_\psi, \tilde{p}_\mu \right) \mapsto \mathfrak{f}_* \left(\hat{\mathcal{Q}}_*, m_\psi, u_\mu \right)$ em primeira ordem após a substituição $\tilde{p}_\mu \rightarrow m_\psi u_\mu / \sqrt{u^2}$. Sendo assim,

$$\mathcal{R}_{\hat{\mathcal{Q}}}(p) \approx 2\mathfrak{f}_* \left(\hat{\mathcal{Q}}_*, m_\psi, u_\mu \right) - 2\mathfrak{f}_* \left(\hat{\mathcal{Q}}_*, m_\psi, u_\mu \right) \approx 0. \quad (5.95)$$

A estrutura geral da Lagrangeana Clássica é $L = -p_\mu u^\mu$, portanto, substituindo o valor de p_μ calculado em (5.92), obtemos:

$$\begin{aligned} L &= -p_\mu u^\mu, \\ &\approx -\frac{m_\psi u_\mu u^\mu}{\sqrt{u^2}} - \frac{u_\mu u^\mu}{m_\psi \sqrt{u^2}} \mathfrak{f}_* - \frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} u^\mu \partial_\mu \mathfrak{f}_*, \\ &= -m_\psi \sqrt{u^2} - \frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \mathfrak{f}_* \left(\hat{\mathcal{Q}}_*, m_\psi, u_\mu \right) = L^{\hat{\mathcal{Q}}}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Finalmente, devemos mostrar que $\partial \mathcal{R}_{\hat{\mathcal{Q}}}(p) / \partial p_j \approx 0$ em primeira ordem. Derivando então a equação de dispersão implicitamente, temos que

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\hat{\mathcal{Q}}}(p)}{\partial p_j} = 2p_0 \frac{\partial p_0}{\partial p_j} + 2p^j - 2 \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial p_j}. \quad (5.97)$$

Sabemos ainda que $\partial p_0 / \partial p_j = -u^j / u^0$. Substituindo este resultado na equação acima encontramos

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\hat{\mathcal{Q}}}(p)}{\partial p_j} = -2p_0 \frac{u^j}{u^0} + 2p^j - 2 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p_j}. \quad (5.98)$$

Agora vamos substituir todos os componentes do momento pela equação (5.92), assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_{\hat{\mathcal{Q}}}(p)}{\partial p_j} &\approx -\frac{2m_\psi u^j}{\sqrt{u^2}} - \frac{2u^j}{m_\psi \sqrt{u^2}} \mathbf{f}_* - 2 \frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \frac{u^j}{u^0} \frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial u^0} \\ &\quad + \frac{2m_\psi u^j}{\sqrt{u^2}} + \frac{2u^j}{m_\psi \sqrt{u^2}} \mathbf{f}_* + \frac{2\sqrt{u^2}}{m_\psi} \frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial u_j} \\ &\quad - 2 \frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial u_\sigma} \frac{\partial u_\sigma}{\partial p_j}. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Simplificando o resultado acima, obtemos:

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\hat{\mathcal{Q}}}(p)}{\partial p_j} \approx -2 \frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \frac{u^j}{u^0} \frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial u^0} + \frac{2\sqrt{u^2}}{m_\psi} \frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial u_j} - 2 \frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial u_0} \frac{\partial u^0}{\partial p_j} - 2 \frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial p_j}. \quad (5.100)$$

Invocaremos agora as seguintes identidades, a saber:

$$p_\mu = \frac{m_\psi u_\mu}{\sqrt{u^2}} \mapsto u_\mu = \frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} p_\mu, \quad (5.101a)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial p_j} = \frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \frac{\partial p_0}{\partial p_j} = -\frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \frac{u^j}{u^0}, \quad (5.101b)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial p_j} = \frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \delta_{i,j}. \quad (5.101c)$$

Substituindo estes resultados na equação original, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\hat{\mathcal{Q}}}(p)}{\partial p_j} \approx 2 \frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \frac{u^j}{u^0} \frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial u^0} - \frac{2\sqrt{u^2}}{m_\psi} \frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial u_j} - 2 \frac{\sqrt{u^2}}{m_\psi} \frac{u^j}{u^0} \frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial u^0} + \frac{2\sqrt{u^2}}{m_\psi} \frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial u^j}, \quad (5.102)$$

$$\approx 0. \quad (5.103)$$

Portanto, demonstramos que o *Ansatz* proposto para a Lagrangeana Clássica satisfaz todos os requisitos exigidos. ■

Felizmente, o setor fermiônico não-mínimo do MPE possui uma relação de dispersão idêntica àquela apresentada na equação (5.90), onde a função genérica $\mathbf{f}(\hat{\mathcal{Q}}, m_\psi, \bar{p}_\mu)$ assume a seguinte forma:

$$\mathbf{f}(\hat{\mathcal{Q}}, m_\psi, \tilde{p}_\mu) = -m_\psi \hat{\mathcal{S}} - p \cdot \hat{\mathcal{V}} \pm \mathcal{Y}, \quad (5.104)$$

em que $\mathcal{Y}$ é dado pela expressão

$$\mathcal{Y}^2 = (p \cdot \hat{\mathcal{A}})^2 - m_\psi^2 \hat{\mathcal{A}}^2 - 2m_\psi p \cdot \tilde{\mathcal{T}} \cdot \hat{\mathcal{A}} + p \cdot \tilde{\mathcal{T}} \cdot \tilde{\mathcal{T}} \cdot p, \quad (5.105)$$

e os operadores dispostos nas equações acima possuem a seguinte estrutura:

$$\hat{\mathcal{S}} = \sum_{d=3} \hat{\mathcal{S}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (5.106a)$$

$$\hat{\mathcal{V}}^\mu = \sum_{d=3} \hat{\mathcal{V}}^{\mu \alpha_1 \dots \alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (5.106b)$$

$$\hat{\mathcal{A}}^\mu = \sum_{d=3} \hat{\mathcal{A}}^{\mu \alpha_1 \dots \alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (5.106c)$$

$$\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \sum_{d=3} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu \alpha_1 \dots \alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{d-3}}, \quad (5.106d)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \hat{\mathcal{T}}_{\alpha\beta}. \quad (5.106e)$$

Vemos que a proposição apresentada nos permite ir além dos resultados mostrados nas seções precedentes. Percebemos ainda que é possível construir uma Lagrangeana Clássica consistente em primeira ordem bem mais geral. Observamos a presença de um termo novo, outrora impossível de se detectar, que envolve os operadores $\hat{\mathcal{A}}$ e $\tilde{\mathcal{T}}$ simultaneamente. Calcularemos explicitamente a Lagrangeana Clássica correspondente e discutiremos ainda mais suas propriedades na seção 5.6 após examinar cuidadosamente o que ocorre com os coeficientes efetivos apresentados na subseção 2.2.2 no contexto da cinemática clássica.

5.5 Coeficientes efetivos

Como apresentado na subseção 2.2.2, a liberdade que temos em redefinir o campo espinorial eliminou e recombinau alguns dos coeficientes que aparecem na definição original da densidade de Lagrange (2.31). Como essa redefinição modifica o modo como podemos expressar a equação de dispersão, isso implicará diretamente na maneira como a Lagrangeana Clássica irá ser escrita. Portanto, faz todo sentido estudar como esses coeficientes efetivos comportam-se quando aplicamos a proposição apresentada na seção 5.4.

Fundamentado nesta observação, é possível definir os escalares de Lorentz efetivos $\hat{a}_{*,\text{eff}}$, $\hat{c}_{*,\text{eff}}$, $\hat{g}_{*,\text{eff}}$ e $\hat{H}_{*,\text{eff}}$ a partir daqueles apresentados na subseção 2.2.2.

Para tanto, seguiremos a prescrição expressa na seção 5.4. Tais escalares serão definidos genericamente como

$$\hat{X}_{*,\text{eff}}^{(d)} \equiv \Xi_x^{(d)} \hat{x}_{*,\text{eff}}^{(d)}, \quad \hat{x}_{*,\text{eff}}^{(d)} \equiv x_{\text{eff},\mu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} u^\mu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}. \quad (5.107)$$

Como exemplo ilustrativo, vamos investigar o que ocorre com o operador efetivo $\hat{a}_{\text{eff}}^\mu$, cuja definição é mostrada a seguir:

$$\hat{a}_{\text{eff}}^\mu = \hat{a}^\mu - \frac{1}{m_\psi} p^\mu \hat{e} = \sum_d a_{\text{eff}}^{(d)\mu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_{d-3}}. \quad (5.108)$$

Usando a prescrição apresentada na seção 5.4, sabemos que devemos mapear $\hat{a}_{\text{eff}}^\mu \mapsto \hat{a}_{*,\text{eff}}^\mu$ através da substituição $p_\alpha \rightarrow m_\psi u_\alpha / \sqrt{u^2}$. Em seguida, devemos efetuar a contração do resultado com a 4-velocidade de modo a obter o coeficiente $\hat{a}_{*,\text{eff}} = \hat{a}_{*,\text{eff}}^\mu u_\mu$. Para uma dimensão de massa fixa d , obtemos o resultado:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{*,\text{eff}}^{(d)} &\equiv \Xi_a^{(d)} a_{\text{eff},\mu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} u^\mu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}, \\ &= \Xi_a^{(d)} \left(a_{\mu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)} - \frac{1}{m_\psi} \eta_{\mu\alpha_1} e_{\alpha_2\dots\alpha_{d-3}}^{(d-1)} \right) u^\mu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}, \\ &= \Xi_a^{(d)} \hat{a}_*^{(d)} - \frac{m_\psi^{d-4}}{(u^2)^{(d-5)/2}} e_{\alpha_2\dots\alpha_{d-3}}^{(d-1)} u^{\alpha_2} \dots u^{\alpha_{d-3}}, \\ &= \Xi_a^{(d)} \hat{a}_*^{(d)} - \Xi_e^{(d-1)} \hat{e}_*^{(d-1)} = \hat{A}_*^{(d)} - \hat{E}_*^{(d-1)}. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Notamos que o nosso resultado passa a ser expresso em termos dos coeficientes $\hat{A}_*$ e $\hat{E}_*$ com dimensionalidades diferentes. Vemos ainda que o mapeamento do operador efetivo é consistente com os parâmetros listados na Tabela 3. Uma correspondência análoga existe entre os operadores $\hat{c}^\mu$ e $\hat{m}$ que compõem o operador efetivo $\hat{c}_{\text{eff}}^\mu$. Esse operador assume a seguinte forma após aplicar a prescrição usual:

$$\hat{C}_{*,\text{eff}}^{(d)} = \hat{C}_*^{(d)} - \hat{M}_*^{(d-1)}, \quad (5.110a)$$

$$\hat{C}_*^{(d)} = \Xi_c^{(d)} \hat{c}_*^{(d)}, \quad (5.110b)$$

$$\hat{M}_*^{(d-1)} = \Xi_m^{(d-1)} \hat{m}_*^{(d-1)}. \quad (5.110c)$$

As Lagrangeanas Clássicas obtidas para $\hat{A}_{*,\text{eff}}^{(d)}$ e $\hat{C}_{*,\text{eff}}^{(d)}$ são mostradas a seguir:

$$L^{\hat{a}_{\text{eff}}^{(d)}} = -m_\psi \sqrt{u^2} - \hat{A}_*^{(d)} + \hat{E}_*^{(d-1)}, \quad (5.111a)$$

$$L^{\hat{c}_{\text{eff}}^{(d)}} = -m_\psi \sqrt{u^2} - \hat{C}_*^{(d)} + \hat{M}_*^{(d-1)}. \quad (5.111b)$$

Uma consequência direta que pode ser notada a partir das soluções acima é que os operadores efetivos nos permitem escrever uma Lagrangeana Clássica consistente entre operadores distintos com dimensionalidades distintas. Essa é uma maneira interessante de se obter novas Lagrangeanas através da composição de operadores que pareciam não ter nenhuma relação.

Podemos usar o mesmo procedimento para os operadores de spin não-degenerados que compõem os operadores efetivos $\tilde{g}_{\text{eff}}^{\mu\nu}$ e $\tilde{H}_{\text{eff}}^{\mu\nu}$. Os resultados obtidos para estes operadores efetivos são mostrados a seguir

$$\begin{aligned} L_{\text{par}}^{\tilde{g}_{\text{eff}}^{(d)}}|_{d \geq 4} &= -m_\psi \sqrt{u^2} \mp \sqrt{-\tilde{G}_*^\mu \tilde{G}_{*\mu} + \frac{2}{\sqrt{u^2}} \left[\tilde{G}_* \hat{B}_* - (\tilde{G}_*^\mu \hat{B}_{*\mu}) u^2 \right] + \hat{B}_*^2 - (\hat{B}_*^\mu \hat{B}_{*\mu}) u^2}, \\ &= -m_\psi \sqrt{u^2} \mp \sqrt{-\tilde{G}_{\text{eff},*}^\mu \tilde{G}_{\text{eff},*\mu}}, \end{aligned} \quad (5.112a)$$

$$\tilde{G}_{*\mu,\text{eff}}^{(d)} \equiv \Xi_g^{(d)} \tilde{g}_{*\mu,\text{eff}}^{(d)}, \quad \tilde{g}_{*\mu,\text{eff}}^{(d)} \equiv \tilde{g}_{\text{eff},\mu\nu\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}}^{(d)} u^\nu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}, \quad (5.112b)$$

e

$$\begin{aligned} L_{\text{ímpar}}^{\tilde{H}_{\text{eff}}^{(d)}}|_{d \geq 3} &= -m_\psi \sqrt{u^2} \mp \sqrt{-\tilde{H}_*^\mu \tilde{H}_{*\mu} + \frac{2}{\sqrt{u^2}} \left[\tilde{H}_* \hat{D}_* - (\tilde{H}_*^\mu \hat{D}_{*\mu}) u^2 \right] + \hat{D}_*^2 - (\hat{D}_*^\mu \hat{D}_{*\mu}) u^2}, \\ &= -m_\psi \sqrt{u^2} \mp \sqrt{-\tilde{H}_{\text{eff},*}^\mu \tilde{H}_{\text{eff},*\mu}}, \end{aligned} \quad (5.113)$$

$$\tilde{H}_{*\mu,\text{eff}}^{(d)} \equiv \Xi_H^{(d)} \tilde{h}_{*\mu,\text{eff}}^{(d)}, \quad \tilde{h}_{*\mu,\text{eff}}^{(d)} \equiv \tilde{H}_{\text{eff},\mu\nu\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}}^{(d)} u^\nu u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{d-3}}. \quad (5.114)$$

Nas equações (5.112a) e (5.113) a dimensão de massa foi omitida apenas para manter a notação enxuta.

Por fim, vale destacar que em todos os casos a mistura entre os operadores ocorrem sempre entre um operador com dimensão de massa par e outro com dimensão ímpar. Isso acontece, pois a única maneira consistente de construir um novo operador a partir de operadores com dimensionalidades diferentes ocorre apenas quando o número de índices são compatíveis, vide Tabela 1.

5.6 A Lagrangeana do setor fermiônico do MPE

Estamos preparados para calcular a Lagrangeana mais geral possível para o setor fermiônico. Para tanto, nos valeremos do resultado demonstrado na seção

5.4, onde mostramos uma conexão direta entre a relação de dispersão em primeira ordem e a solução perturbativa para a Lagrangeana.

A relação de dispersão que iremos considerar é exatamente aquela calculada na subseção 2.2.2, dada pela equação (2.81), que pode ser reescrita em termos dos operadores efetivos, a saber:

$$E^{(\pm)} = E_0 - \frac{1}{E_0} \left(p \cdot \hat{\mathcal{V}}_{\text{eff}} \mp \mathcal{Y} \right), \quad (5.115a)$$

$$\mathcal{Y} = \sqrt{p^\mu (\tilde{\mathcal{T}}_{\text{eff}})_{\mu\varrho} (\tilde{\mathcal{T}}_{\text{eff}})^\varrho{}_\nu p^\nu}, \quad (5.115b)$$

onde as formas dos operadores efetivos são mostrados a seguir [42]:

$$\hat{\mathcal{V}}_{\text{eff}}^\mu \equiv \hat{\mathcal{V}}^\mu + \frac{1}{m_\psi} p^\mu \hat{\mathcal{S}}, \quad \tilde{\mathcal{T}}_{\text{eff}}^{\mu\nu} \equiv \tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} + \frac{1}{m_\psi} p^{[\mu} \hat{\mathcal{A}}^{\nu]}, \quad (5.115c)$$

Aplicando agora o mapeamento geral descrito na seção 5.4, obtemos a seguinte Lagrangeana Clássica “master” que inclui todos os operadores do MPE não-mínimo:

$$L_{\text{master}}^{(\pm)} = -m_\psi \sqrt{u^2} + \hat{\mathcal{V}}_{*,\text{eff}} \mp \mathcal{Y}_*, \quad (5.116a)$$

$$\mathcal{Y}_* = \sqrt{-(\tilde{\mathcal{T}}_{*,\text{eff}})^\mu (\tilde{\mathcal{T}}_{*,\text{eff}})_\mu}. \quad (5.116b)$$

Os operadores efetivos que aparecem na $L_{\text{master}}^{(\pm)}$ acima são definidos a seguir:

$$\hat{\mathcal{V}}_{*,\text{eff}} \equiv \hat{\mathcal{V}}_* + \sqrt{u^2} \hat{\mathcal{S}}_*, \quad (5.116c)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{*,\text{eff}}^\mu \equiv \tilde{\mathcal{T}}_*^\mu + \frac{u^\mu}{\sqrt{u^2}} \hat{\mathcal{A}}_* - \sqrt{u^2} \hat{\mathcal{A}}_*^\mu, \quad (5.116d)$$

onde usamos as seguintes definições:

$$\hat{\mathcal{S}}_* \equiv \sum_{d \geq 4, \text{par}} \Xi_{\mathcal{V}}^{(d)} \left(\hat{e}_*^{(d)} - \frac{m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{m}_*^{(d+1)} \right), \quad (5.117a)$$

$$\hat{\mathcal{V}}_{*\mu} \equiv \sum_{d \geq 3, \text{ímpar}} \Xi_{\mathcal{V}}^{(d)} \left(\frac{m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{c}_{*\mu}^{(d+1)} - \hat{a}_{*\mu}^{(d)} \right), \quad \hat{\mathcal{V}}_* \equiv \hat{\mathcal{V}}_{*\mu} u^\mu, \quad (5.117b)$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{*\mu} \equiv \sum_{d \geq 3, \text{ímpar}} \Xi_{\mathcal{A}}^{(d)} \left(\frac{m_\psi}{\sqrt{u^2}} \hat{d}_{*\mu}^{(d+1)} - \hat{b}_{*\mu}^{(d)} \right), \quad \hat{\mathcal{A}}_* \equiv \hat{\mathcal{A}}_{*\mu} u^\mu, \quad (5.117c)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{*\mu} \equiv \sum_{d \geq 3, \text{ímpar}} \Xi_{\mathcal{A}}^{(d)} \left(\frac{m_{\psi}}{\sqrt{u^2}} \tilde{g}_{*\mu}^{(d+1)} - \tilde{H}_{*\mu}^{(d)} \right), \quad (5.117d)$$

além, é claro, dos fatores de consistência responsáveis, dentre outras coisas, por preservar a homogeneidade de grau 1:

$$\Xi_{\mathcal{V}}^{(d)} = \frac{m_{\psi}^{d-3}}{(u^2)^{(d-3)/2}}, \quad (5.118a)$$

$$\Xi_{\mathcal{A}}^{(d)} = \frac{m_{\psi}^{d-3}}{(u^2)^{(d-3)/2}}. \quad (5.118b)$$

Podemos destacar algumas propriedades interessantes da solução (5.116a). A primeira refere-se ao fato da Lagrangeana Clássica ser basicamente escrita em termos de dois operadores efetivos, $\hat{\mathcal{V}}_{*,\text{eff}}$ contendo as propriedades referentes aos operadores de spin-degenerados e $\tilde{\mathcal{T}}_{*,\text{eff}}$ responsável pelas propriedades dos operadores de spin não-degenerados. Outro destaque importante é que todos os resultados obtidos nas subseções 5.1.1 e 5.1.2 estão contidos na solução representada pela equação (5.116a). Por fim, vale salientar que o único operador que não está diretamente contido na Lagrangeana *master* é o operador pseudoescalar representado por $\hat{\mathcal{P}} = \hat{f} - \hat{m}_5$. Como já foi mencionado na seção 5.1.3, o operador pseudoescalar possui contribuições não-nulas a partir da segunda ordem e, como sabemos, os nossos resultados são válidos apenas em primeira ordem. Todavia, as correspondências descritas pelas equações (5.42) e (5.43) nos permitem escrever uma solução explícita para tais operadores.

É importante mencionar ainda que, do ponto de vista da propagação de partículas, o spin exercerá uma influência nas trajetórias desde que a contribuição $\mathcal{Y}_*$ seja não nula. Como podemos observar na equação (5.116a), o último termo controla exatamente essa dependência no spin, fazendo com que partículas com *spin-up* propaguem-se de maneira distinta das partículas com *spin-down*. Vemos, portanto, que mesmo no regime clássico o efeito residual do spin pode ter um papel importante na propagação das partículas.

Muito embora não tenhamos feito aplicações com a Lagrangeana (5.116a), podemos enumerar aqui varias propostas. A aplicação mais direta que podemos fazer refere-se ao acoplamento desta Lagrangeana a um campo eletromagnético externo ou mesmo a um campo gravitacional. A partir destes acoplamentos, será possível extrair informações importantes sobre a propagação das partículas sob a influência destes campos. Uma outra possibilidade reside em obter a Hamiltoniana associada

através da transformação de Legendre. Com esta Hamiltoniana modificada em mãos, é possível construir uma equação de Schrödinger modificada, por exemplo, e assim estudar os efeitos causados pelas novas contribuições. Um estudo menos trivial de se pôr em prática diz respeito à promoção desta Lagrangeana à estrutura de Finsler. Neste cenário, é possível estudar a propagação de partículas em espaços curvos. Outra abordagem um pouco mais complexa de se implementar, consiste em considerar os campos de fundo dependentes das coordenadas. Este cenário poderia trazer novos efeitos interessantes.

Ainda no contexto das trajetórias das partículas, podemos escrever a equação que descreve a geodésica da partícula, a saber (para um tratamento mais detalhado vide Referência [210]):

$$F \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{F} \frac{dx^j}{d\lambda} \right) + G^j = 0, \quad (5.119)$$

onde F corresponde à estrutura de Finsler associada à Lagrangeana Clássica L . Os coeficientes G^j são conhecidos como *spray coefficients* e possuem a seguinte forma:

$$G^j := g^{jm} \Gamma_{mkl} \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda}, \quad (5.120)$$

em que os símbolos de Christoffel Γ_{mkl} para a métrica de Riemann-Finsler g_{jk} é dada por:

$$\Gamma_{mkl} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j} \right). \quad (5.121)$$

Em geral, as soluções da equação (5.119), que correspondem à geodésica, são bastante complexas mesmo para configurações simples e para geometrias com uma alta simetria, como é o exemplo da esfera. Em muitos casos soluções analíticas não são possíveis, sendo necessário o uso de métodos numéricos.

5.7 A Lagrangeana do setor de neutrinos do MPE

Como uma aplicação final do mapeamento geral apresentado na seção 5.4 e dos resultados apresentados no capítulo 3, em especial da relação de dispersão apresentada na equação (3.25), queremos descrever de maneira geral a cinemática clássica para um sistema composto por neutrinos. Esta última é descrita por uma função de Lagrange em termos de 4-velocidades u^μ , de maneira inteiramente análoga ao que estudamos no início do capítulo.

Vamos empregar o mapeamento para o caso em que o número de sabor é igual a um, isto é, $N = 1$. Esta escolha corresponde a situação em que temos um neutrino de Dirac e um neutrino de Majorana. Aplicado o mapeamento, obtemos a seguinte Lagrangeana:

$$L^{(1,2)\pm} = -M^{(1,2)}\sqrt{u^2} \left[1 - \frac{(\hat{\mathcal{S}}_{\text{disp}}^{(1,2)})_* \pm \delta\hat{\mathcal{Y}}_*}{2(M^{(1,2)})^2} - \frac{u \cdot (\hat{\mathcal{V}}_{\text{disp}}^{(1,2)})_*}{2M^{(1,2)}\sqrt{u^2}} + \dots \right], \quad (5.122a)$$

$$M^{(1,2)} = \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{M}}{2}\right)^2 - \tilde{\mathfrak{M}}}}. \quad (5.122b)$$

As quantidades marcadas com asterisco emergem das expressões definidas em (3.28) substituindo $p_\mu \mapsto u_\mu$ em cada operador. Cada contração envolve também uma constante adicional que depende da dimensão da massa e é responsável por manter a homogeneidade de grau 1 preservada. Para um operador genérico, por exemplo, cuja dimensão de massa seja d , obtemos

$$(\hat{\mathcal{O}}_{i,j})_* = \left(\frac{M^{(1,2)}}{\sqrt{u^2}} \right)^{d-3} \mathcal{O}_{i,j}^{\alpha_1 \dots \alpha_{d-3}} u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_{d-3}}. \quad (5.123)$$

Como existem quatro relações de dispersão modificadas, também existem quatro Lagrangeanas Clássicas correspondentes. Cada uma delas descreve um tipo de “neutrino clássico” massivo. No limite em que os operadores que controlam a violação da simetria de Lorentz anulam-se, as Lagrangeanas assumem a forma $L^{(1,2)} = -M^{(1,2)}\sqrt{u^2}$, que é análoga ao resultado $L = -m_\psi\sqrt{u^2}$ obtido para o setor fermiônico com um único férmion de massa m_ψ . Aqui vemos como as combinações $M^{(1,2)}$ dos coeficientes da matriz de massa podem ser interpretados como resquícios clássico do efeito quântico da mistura de sabores. Além disso, verifica-se que a Lagrangeana Clássica preserva a homogeneidade de grau 1 em u^μ , como esperado.

Lagrangeanas Clássicas como a apresentada na equação (5.122a) são valiosas na descrição da violação da simetria de Lorentz para neutrinos na presença de um campo gravitacional externo, por exemplo. Visto que a seção atual serve apenas como uma demonstração do procedimento básico desenvolvido neste capítulo, não nos aprofundaremos neste tópico interessante.

Sempre que as massas dos neutrinos forem simplesmente negligenciadas, as Lagrangeanas clássicas obtidas anteriormente simplesmente perdem seu significado. A propagação de neutrinos em um *background* gravitacional deve então ser descrita

por um formalismo diferente, como por exemplo, o formalismo *eikonal*, que se mostrou bastante adequado para partículas sem massa, tais como os fótons [213].

5.8 Expansão perturbativa: spin não-degenerado

Iremos agora aplicar o método iterativo apresentado no final da subseção 2.3.2 para obter as séries perturbativas das Lagrangeanas Clássicas que correspondem aos operadores de spin não-degenerados. Vimos que mesmo no método iterativo, precisamos seguir todo o protocolo relacionado à obtenção da Lagrangeana Clássica proposto em [65], são eles: derivação implícita da equação de dispersão, correspondência entre as velocidades, teorema de Euler para funções homogêneas e, por fim, obtenção do polinômio $\mathcal{P}(L; u^\mu, m, k_\chi)$.

A diferença primordial entre os métodos é que o polinômio obtido nesse processo continua com uma dependência dos 4-momentos, isto é, $\mathcal{P}(L; u^\mu, m, k_\chi; p^\mu)$, o que é algo bastante inconveniente. Contudo, o método perturbativo nos permite calcular as correções das Lagrangeanas ordem-a-ordem através de iterações, cujo ingrediente primordial é o polinômio $\mathcal{P}(L; u^\mu, m, k_\chi; p^\mu)$ (2.107).

O primeiro passo do algoritmo é iniciado conhecendo a Lagrangeana de ordem zero e o 4-momento de ordem zero $(p_0)^\mu$ associado, ambos obtidos a partir do polinômio $\mathcal{P}(L; u^\mu, m, k_\chi = 0)$. Em seguida, substituímos o 4-momento obtido no polinômio, ou seja, $\mathcal{P}(L; u^\mu, m, k_\chi; (p_0)^\mu)$, e expandimos até primeira ordem nos coeficientes de controle. Esse processo nos fornece as Lagrangeanas Clássicas de primeira ordem. Seguindo este método, calculamos as Lagrangeanas de segunda ordem através do polinômio $\mathcal{P}(L; u^\mu, m, k_\chi; (p_1)^\mu)$ e assim por diante, vide o exemplo estudado no final da subseção 2.3.2.

Apresentamos a seguir o resultado generalizado que usaremos para obter as Lagrangeanas Clássicas dos operadores não-mínimos de spin não-degenerados $\hat{b}_\mu$, $\hat{d}_\mu$, $\hat{H}_{\mu\nu}$ e $\hat{g}_{\mu\nu}$, cujos detalhes são apresentados no Apêndice B:

$$u^\mu|_b = -\frac{L}{\Gamma_b^\pm} \left\{ \pm \Upsilon_b \left[p^\mu - (d-3)b^{(d)\mu\nu\diamond}(b^{(d)})_\nu^\diamond \right] + b^{(d)\nu\diamond}(b^{(d)})_\nu^\diamond p^\mu - b^{(d)\diamond}b^{(d)\mu\diamond} + (d-3) \left[b^{(d)\mu\nu\diamond}(b^{(d)})_\nu^\diamond p^2 - b^{(d)\diamond}b^{(d)\mu\diamond} \right] \right\}, \quad (5.124a)$$

$$u^\mu|_H = -\frac{L}{\Gamma_H^\pm} \left\{ \pm \Upsilon_H \left[p^\mu + 2(d-3)\hat{X}^\mu \right] - 2\hat{X}p^\mu - H^{(d)\mu\nu\diamond}(H^{(d)})_\nu^\diamond + (d-3) \left(-2\hat{X}^\mu p^2 - p_\nu H^{(d)\nu\varrho\mu\diamond}(H^{(d)})_\varrho^\diamond + 2\hat{Y}\hat{Y}^\mu \right) \right\}, \quad (5.124b)$$

onde, por conveniência, definimos as seguintes quantidades:

$$\Gamma_b^\pm \equiv \pm \Upsilon_b \left[p^2 - (d-3)b^{(d)\rho\Diamond}(b^{(d)})_\rho^\Diamond \right] - (d-2)\Upsilon_b^2, \quad (5.125a)$$

$$\Gamma_H^\pm \equiv \pm \Upsilon_H [p^2 + 2(d-3)\hat{X}] - (d-2)\Upsilon_H^2 + (d-4)\hat{Y}^2, \quad (5.125b)$$

$$\hat{X}^\varrho \equiv \frac{1}{4} H^{(d)\mu\nu\varrho\Diamond} (\hat{H}^{(d)})_{\mu\nu}^\Diamond, \quad (5.125c)$$

$$\hat{Y}^\varrho \equiv \frac{1}{4} H^{(d)\mu\nu\varrho\Diamond} (\tilde{H}^{(d)})_{\mu\nu}^\Diamond. \quad (5.125d)$$

Resultados análogos para $\hat{d}_\mu$ e $\hat{g}_{\mu\nu}$ podem ser obtidos diretamente da equação (5.124) através do mapeamento $b^{(d)\mu\Diamond} \mapsto d^{(d+1)\mu\Diamond}$ e $H^{(d)\mu\nu\Diamond} \mapsto g^{(d+1)\mu\nu\Diamond}$, respectivamente, com as devidas adaptações na dimensão de massa d . Todavia, em contraste com os resultados de primeira ordem na violação de Lorentz, conforme discutido na seção 5.1, não é possível realizar as substituições $\hat{b}_\mu \mapsto -\hat{\mathcal{A}}_\mu$ e $\hat{H}_{\mu\nu} \mapsto -\hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu}$. Essas substituições induzem acoplamentos entre diferentes tipos de coeficientes, e as equações (5.124) não são adequadas para tais cenários.

Contraindo as 4-velocidades obtidas em (5.124) com u_μ e usando novamente o resultado $L = -p_\mu u^\mu$, obtemos um polinômio $\mathcal{P}(L; u^\mu, m, k_\chi; p^\mu)$ quadrático em L , tais como aqueles obtidos para os operadores de spin degenerado [80, 188]. Por exemplo, para o caso $\hat{b}_\mu$ obtemos o seguinte resultado:

$$\mathcal{P}(L; u^\mu, m, \hat{b}_\mu; p^\mu) = \zeta_b^\pm L_b^2 + \psi_b^\pm L_b - u^2 = 0, \quad (5.126a)$$

onde

$$\zeta_b^\pm = (\Xi_b^\pm)^{-1} \left[\pm \Upsilon_b + b^{(d)\mu\Diamond}(b^{(d)})_\mu^\Diamond \right], \quad (5.126b)$$

$$\begin{aligned} \psi_b^\pm = (\Xi_b^\pm)^{-1} \Big\{ (d-3)(\mp \Upsilon_b - b^{(d)\nu\Diamond}(b^{(d)})_\nu^\Diamond - m_\psi^2) \\ \times b^{(d)\varrho\sigma\Diamond} u_\varrho (b^{(d)})_\sigma^\Diamond + b^{(d)\Diamond} \left[b^{(d)\nu\Diamond} u_\nu + (d-3)b^{(d)\kappa\lambda\Diamond} u_\kappa p_\lambda \right] \Big\}, \end{aligned} \quad (5.126c)$$

$$\Xi_b^\pm = \pm \Upsilon_b \left[m_\psi^2 - (d-4)b^{(d)\rho\Diamond}(b^{(d)})_\rho^\Diamond \right] - (d-4)\Upsilon_b^2, \quad (5.126d)$$

A equação (5.126a) pode ser resolvida para a Lagrangeana L ao custo de ainda depender parcialmente do 4-momento. No total, são quatro soluções: duas para partículas e duas para antipartículas. Essas soluções são muito poderosas, pois nos permitem calcular as Lagrangeanas como séries perturbativas nos coeficientes de controle. Na próxima seção iremos obter alguns resultados explícitos.

5.9 Correções perturbativas

A seguir, apresentamos as Lagrangeanas Clássicas para os operadores de dimensão-5 $\hat{b}$ e $\hat{H}$ em segunda ordem na violação de Lorentz. Fazendo $d = 5$ na equação (5.126a) e aplicando o método iterativo, obtemos a seguinte Lagrangeana para o coeficiente b :

$$L_{2,b}^{(5)\pm} = L_0 \left[1 \pm \sqrt{(\tilde{b}^{(5)})^2 - (\tilde{b}^{(5)})_\alpha (\tilde{b}^{(5)})^\alpha} \right. \\ \left. - \frac{1}{(\tilde{b}^{(5)})^2 - (\tilde{b}^{(5)})_\alpha (\tilde{b}^{(5)})^\alpha} \left(2(\tilde{b}^{(5)})^4 - 6(\tilde{b}^{(5)})^2 (\tilde{b}^{(5)})_\alpha (\tilde{b}^{(5)})^\alpha \right. \right. \\ \left. \left. + 6(\tilde{b}^{(5)}) (\tilde{b}^{(5)})_\alpha (\tilde{b}^{(5)})^{\alpha\beta} (\tilde{b}^{(5)})_\beta - 2(\tilde{b}^{(5)})_\alpha (\tilde{b}^{(5)})^{\alpha\beta} (\tilde{b}^{(5)})_{\gamma\beta} (\tilde{b}^{(5)})^\gamma \right) \right]. \quad (5.127)$$

O resultado acima é válido para uma escolha totalmente simétrica dos coeficientes de controle $b_{\mu\nu}^{(5)}$, que corresponde a 20 coeficientes independentes.

A situação é mais complicada para o operador $\hat{H}$. Em primeiro lugar, um pequeno problema pode surgir com a notação originalmente adotada em [80] e que queremos usar por uma questão de consistência. Alguns resultados podem ser expressos de forma mais conveniente em termos do dual do coeficiente de controle $H_{\mu\nu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}^{(d)}$, que denotamos por um til, como de costume:

$$(\tilde{H}^{(d)})_{\mu\nu\alpha_1\dots\alpha_{d-3}} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (H^{(d)})^{\rho\sigma}_{\alpha_1\dots\alpha_{d-3}}. \quad (5.128)$$

Observe que as contrações adimensionais do dual com a 4-velocidade normalizada $\hat{u}^\mu \equiv u^\mu / \sqrt{u^2}$ serão escritas por um til duplo:

$$(\tilde{\tilde{H}}^{(d)})_{\alpha_1\dots\alpha_l} \equiv m_\psi^{d-4} (\tilde{H}^{(d)})_{\alpha_1\dots\alpha_l\alpha_{l+1}\alpha_{l+2}\dots} \hat{u}^{\alpha_{l+1}} \hat{u}^{\alpha_{l+2}} \dots \quad (5.129)$$

Dessa forma, devemos lembrar que este último resultado não corresponde ao dual do dual nesta seção. Como um primeiro exemplo, nos concentraremos no coeficiente mínimos $H_{\mu\nu}^{(3)}$. É sabido que a Lagrangeana para o conjunto completo de seis coeficientes independentes ainda não foi reportado na literatura. Resultados exatos, por outro lado, foram obtidos para os setores compostos pelos coeficientes $H_{0i}^{(3)}$ e para os coeficientes puramente espaciais $H_{ij}^{(3)}$ separadamente. Contanto que esses dois setores não se acoplem, a condição $\tilde{Y}^{(3)} \equiv \frac{1}{4} (H^{(3)})_{\mu\nu} (\tilde{H}^{(3)})^{\mu\nu} = 0$ é preservada. A Lagrangeana para esses casos pode ser encontrada na referência [65].

Contudo, para o caso $\tilde{Y}^{(3)} \neq 0$, podemos empregar o algoritmo acima para obter uma forma perturbativa da Lagrangeana Clássica. O resultado em terceira

ordem na violação de Lorentz é mostrado a seguir:

$$L_{3,H}^{(3)\pm} = L_0 \left(1 \mp \sqrt{-(\tilde{H}^{(3)})_\alpha (\tilde{H}^{(3)})^\alpha} - \frac{(\tilde{Y}^{(3)})^2}{2(\tilde{H}^{(3)})_\alpha (\tilde{H}^{(3)})^\alpha} \mp \frac{(\tilde{Y}^{(3)})^2 (\tilde{H}^{(3)})_\alpha (\tilde{H}^{(3)})^{\alpha\beta} (\tilde{H}^{(3)})_{\beta\gamma} (\tilde{H}^{(3)})^\gamma}{2 [-(\tilde{H}^{(3)})_\alpha (\tilde{H}^{(3)})^\alpha]^{5/2}} \right). \quad (5.130)$$

Uma Lagrangeana covariante também pode ser calculada para o operador $\hat{H}$ de dimensão-5 em segunda ordem na violação de Lorentz. O resultado em questão pode ser escrito da seguinte forma:

$$L_{2,H}^{(5)\pm} = L_0 \left(1 \mp \sqrt{-(\tilde{H}^{(5)})_\alpha (\tilde{H}^{(5)})^\alpha} + \frac{\delta L^{(2)} - \delta L_c^{(2)}}{(\tilde{H}^{(5)})_\alpha (\tilde{H}^{(5)})^\alpha} \right), \quad (5.131a)$$

$$\delta L^{(2)} = 2(S_1^{(5)} - S_5^{(5)} - S_6^{(5)} + S_7^{(5)} + S_8^{(5)}) - 4S_2^{(5)} + S_3^{(5)} - \frac{1}{2}S_4^{(5)}, \quad (5.131b)$$

$$\delta L_c^{(2)} = \frac{1}{2}(\tilde{Y}^{(5)})^2 + 2(S_7^{(5)} + S_8^{(5)} + S_9^{(5)}), \quad (5.131c)$$

com os escalares de Lorentz expressos em termos de tensores formados a partir dos coeficientes $H_{\mu\nu\rho\sigma}^{(5)}$ contraídos adequadamente com as 4-derivadas conforme equação (5.128):

$$S_1^{(5)} = [(\tilde{H}^{(5)})_\alpha (\tilde{H}^{(5)})^\alpha]^2, \quad (5.132a)$$

$$S_2^{(5)} = (\tilde{H}^{(5)})_\alpha (\tilde{H}^{(5)})^\alpha \tilde{X}^{(5)}, \quad (5.132b)$$

$$S_3^{(5)} = (\tilde{H}^{(5)})_\alpha (\tilde{H}^{(5)})^{\alpha\beta} (\tilde{H}^{(5)})_{\gamma\delta} (\tilde{H}^{(5)})^{\gamma\delta}, \quad (5.132c)$$

$$S_4^{(5)} = (\tilde{H}^{(5)})_{\alpha\beta\gamma} (\tilde{H}^{(5)})^{\alpha\beta} (\tilde{H}^{(5)})_{\delta\epsilon}^\gamma (\tilde{H}^{(5)})^{\delta\epsilon}, \quad (5.132d)$$

$$S_5^{(5)} = \hat{u}^\alpha (\tilde{H}^{(5)})^\beta (\tilde{H}^{(5)})_{\alpha\beta\gamma} (\tilde{H}^{(5)})_{\delta\epsilon} (\tilde{H}^{(5)})^{\delta\epsilon\gamma}, \quad (5.132e)$$

$$S_6^{(5)} = \hat{u}^\alpha (\tilde{H}^{(5)})^\beta (\tilde{H}^{(5)})_{\alpha\beta\gamma} \hat{u}^\delta (\tilde{H}^{(5)})_\epsilon (\tilde{H}^{(5)})_\delta^{\epsilon\gamma}, \quad (5.132f)$$

$$S_7^{(5)} = (\tilde{H}^{(5)})_\alpha (\tilde{H}^{(5)})^\alpha \hat{u}^\beta (\tilde{H}^{(5)})_{\beta\gamma\delta} (\tilde{H}^{(5)})^{\gamma\delta}, \quad (5.132g)$$

$$S_8^{(5)} = (\tilde{H}^{(5)})^\alpha (\tilde{H}^{(5)})_\beta \hat{u}^\gamma (\tilde{H}^{(5)})_{\gamma\delta\alpha} (\tilde{H}^{(5)})^{\beta\delta}, \quad (5.132h)$$

$$S_9^{(5)} = (\tilde{H}^{(5)})^\alpha \hat{u}^\beta (\tilde{H}^{(5)})_{\beta\alpha\gamma} (\tilde{H}^{(5)})_\delta (\tilde{H}^{(5)})^{\gamma\delta}, \quad (5.132i)$$

$$\tilde{X}^{(5)} = \frac{1}{4}(\tilde{H}^{(5)})_{\alpha\beta}(\tilde{H}^{(5)})^{\alpha\beta}, \quad (5.132j)$$

$$\tilde{Y}^{(5)} = \frac{1}{4}(\tilde{H}^{(5)})_{\mu\nu}(\tilde{H}^{(5)})^{\mu\nu}. \quad (5.132k)$$

O último resultado é válido para um coeficiente $H_{\mu\nu\rho\sigma}^{(5)}$ simétrico em seus dois últimos índices. Claramente, a forma da Lagrangeana $L_{2,H}^{(5)\pm}$ é muito mais complexa do que $L_{2,b}^{(5)\pm}$ dada pela equação (5.127).

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta Tese, iniciamos os nossos estudos com o MP no Capítulo 2. Apresentamos ainda a sua extensão, denominada MPE mínimo, cuja principal propriedade é a violação da simetria de Lorentz, implementada em todos os setores do MP. Vimos que as modificações no MP preservam tanto a estrutura de *gauge* quanto a independência nas coordenadas do espaço tempo. Esta última propriedade é requerida para que o tensor energia-momento seja conservado.

Analizamos também a chamada extensão não-mínima do MPE. A ideia central desta extensão consistiu em implementar altas-derivadas nos operadores de campo, gerando assim contribuições não-renormalizáveis. Estes operadores, como discutido, tornam-se relevantes em altas escalas de energias. Concentramos a nossa atenção nos setores dos fótons, férmions e neutrinos, onde apresentamos as principais propriedades de cada um.

Descobrimos, ao longo dos nossos estudos, que a violação da simetria de Lorentz faz-se presente em outros cenários, como é o caso da eletrodinâmica planar. Vimos que é possível obter uma eletrodinâmica modificada em $(1 + 2)$ -dimensões a partir do setor eletromagnético do MPE. A técnica que nos possibilita obter tais resultados é conhecida como redução dimensional. O outro cenário de destaque nas últimas décadas tem a ver com o estudo da cinemática clássica de uma partícula pontual e relativística na presença de um *background* constante.

Graças à existência do mapeamento desenvolvido em [65], foi possível construir as Lagrangeanas Clássicas que descreve a cinemática de uma partícula pontual. Como vimos, estas Lagrangeanas guardam uma conexão com a geometria de Finsler.

No Capítulo 3, nós apresentamos um conjunto de ferramentas matemáticas muito úteis. Estudamos as matrizes gama e suas propriedades com bastante detalhes. Examinamos de maneira sucinta as definições e propriedades dos produtos tensorial, de Wedge e o dual de Hodge. Por fim, analisamos também um algoritmo capaz de calcular determinantes de matrizes em bloco. Todas essas ferramentas foram de grande ajuda tanto para a compreensão quanto para a apresentação compacta dos resultados apresentados neste capítulo.

Os nossos resultados principais iniciaram-se com a derivação do propagador completo para a teoria de Dirac modificada baseada no MPE não-mínimo. Este resultado, além de novo e muito importante para futuras aplicações em TQC, também foi ingrediente primordial para a obtenção da equação de dispersão do setor dos neutrinos. Finalmente, com todo o alicerce montado, foi possível calcular a equação de dispersão para o setor de neutrinos modificado na sua forma covariante. Vale ressaltar que a solução obtida vale para um sistema composto por $2N$ neutrinos, isto é, N do tipo Dirac e N do tipo Majorana. A abordagem adotada torna o nosso resultado ainda mais geral, uma vez que ainda não se sabe qual a natureza dos neutrinos. Apesar da estrutura do setor dos neutrinos ser bastante diferente do setor fermiônico, em parte graças à estrutura de sabor, notou-se que as equações de dispersão desses setores possuem uma estrutura bastante semelhante.

Como os coeficientes de controle podem ser tratados de forma perturbativa, foi possível obter as relações de dispersão em primeira ordem nos coeficientes de controle. Muito embora as estruturas da equação de dispersão e das relações de dispersão sejam bastante complexas, estes resultados podem ser úteis tanto em futuras aplicações fenomenológicas quanto em pacotes de software, uma vez que reduzimos o cálculo do determinante de uma matriz $(8N \times 8N)$ em uma única equação completamente covariante.

Dentre as diversas possibilidades de aplicações para as relações de dispersão obtidas, a mais evidente sem dúvidas é a oscilação de neutrinos. Como já mencionado, as oscilações entre sabores podem ocorrer mesmo na ausência do termo massivo no MPE. Em teorias cuja simetria de Lorentz é violada, os operadores que controlam a violação da simetria, e que possuem dimensão de massa, podem ser interpretados como uma “massa efetiva” induzindo assim o fenômeno de oscilação.

Isto posto, já que a probabilidade de transição entre sabores também depende da relação de dispersão, nossos resultados podem ser utilizados para estimar tais efeitos tanto para a versão mínima quanto para a versão não-mínima do MPE. Além disso, calcular as probabilidades de transição entre neutrinos de Dirac e neutrinos de Majorana é algo factível, uma vez que os nossos resultados são os mais gerais possíveis. Neste último caso, podemos obter os *bounds* para os coeficientes de controle que permitem a mistura entre esses neutrinos. Ademais, dentro do setor de neutrinos há muito o que se fazer, por exemplo, estudar a propagação de neutrinos de Dirac e Majorana acoplados à um campo gravitacional. Poderíamos também observar quais novos efeitos poderiam surgir entre os neutrinos acoplados aos chamados fótons escuros [211] ou mesmo axions [212].

A eletrodinâmica planar não-mínima foi obtida no Capítulo 4. Ao aplicar a redução dimensional no setor eletromagnético do MPE não-mínimo, foi possível obter uma QED₃ estendida que contempla todas as formas possíveis de violar a simetria de Lorentz. Ao empregar a redução dimensional, nós obtivemos não só uma eletrodinâmica modificada, mas também uma teoria planar para um campo escalar. Esse campo escalar é igualmente modificado por operadores que violam a simetria de Lorentz e acopla-se ao campo eletromagnético através dos acoplamentos $(\hat{k}_{AF})_\kappa$ e $(\hat{k}_{\phi F})_{\kappa\lambda\mu}$.

A partir da densidade de Lagrange planar obtida no processo, foi possível obter as equações de campo acopladas. Ao desacoplar a teoria através da prescrição $(\hat{k}_{AF})_\kappa \mapsto 0$ e $(\hat{k}_{\phi F})_{\kappa\lambda\mu} \mapsto 0$, foram calculadas as funções de Green tanto para o campo eletromagnético quanto para o campo escalar. Além disso, derivamos também as regras perturbativas de Feynman da teoria. Por outro lado, apresentamos uma técnica que nos possibilitou generalizar os calculos dos propagadores de campos de spin-1 em $(1 + D)$ -dimensões. Essa abordagem baseou-se no teorema de Cayley-Hamilton e na estrutura dos tensores de *rank*-2. Determinamos ainda as relações de dispersão em primeira ordem para as duas teorias desacopladas. Finalmente, as soluções homogêneas e não-homogêneas das equações de campo desacopladas foram construídas.

Os resultados obtidos no Capítulo 4 são fundamentais para se entender a fenomenologia de sistemas planares onde campos eletromagnéticos e escalares façam-se presentes. Análises mais sofisticadas das propriedades desses setores estão planejadas para serem realizadas no futuro, incluindo aplicações em sistemas planares no contexto da matéria condensada como, por exemplo, o Efeito Hall. Neste último caso, poderíamos investigar as consequências da anisotropia introduzida

pelos coeficientes de controle neste efeito. De fato, a estrutura desenvolvida aqui pode servir de base para investigações teóricas dos aspectos eletromagnéticos em vários sistemas planares da matéria condensada. Além disso, a estrutura da eletrodinâmica planar é muito mais simples do que a teoria original em $(1 + 3)$ -dimensões do espaço-tempo.

O modelo teórico desenvolvido abre muitas outras portas para novos estudos em sistemas planares. No contexto da TQC podemos calcular os mais diversos processos de espalhamento, o análogo planar do efeito Cherenkov entre outros. Já em Mecânica Quântica pode-se, por exemplo, buscar efeitos equivalentes ao Aharonov-Bohm, Aharonov-Casher ou até mesmo Aharonov-Ananda em $(1 + 2)$ -dimensões. Estudar os efeitos desta eletrodinâmica modificada em um espaço-tempo curvo também é possível. Promover os coeficientes de controle a dependentes das coordenadas do espaço-tempo pode revelar efeitos interessantes presentes nos sistemas planares. Neste último caso, podemos averiguar quais as implicações da quebra da invariância translacional. É possível ainda calcular explicitamente as soluções clássicas para algumas configurações interessantes. A partir dessas soluções, poderíamos compreender melhor como os coeficientes de controle modificam tanto o campo elétrico como o magnético. Estes resultados seriam particularmente interessantes em problemas planares de eletrostática e magnetostática. Poderíamos também estudar a expansão multipolar e, a partir desse resultado, examinar quais as diferenças em relação ao modelo em $(1 + 3)$ -dimensões. No que diz respeito à propagação de ondas eletromagnéticas, estudos semelhantes aos de guias de onda e cavidades ressonantes poderiam ser feitos. Além disso, aplicar a eletrodinâmica modificada à meios dispersivos planares parece algo factível. Enfim, muitas possibilidades de aplicações estão em aberto para o modelo em questão.

Os resultados apresentados no Capítulo 5 correspondem às Lagrangeanas Clássicas alicerçadas no setor fermiônico do MPE não-mínimo. Estas Lagrangeanas, como discutido no final do Capítulo 2, descrevem partículas pontuais e relativísticas que se propagam na presença de um *background* constante. Iniciamos este capítulo construindo os *ansätze* que correspondem às prováveis soluções perturbativas não-mínimas. Estes *ansätze* fundamentaram-se fortemente tanto nas expansões das soluções do setor mínimo quanto nas soluções do setor não-mínimo. Logo após a proposição dos *ansätze*, demonstramos formalmente que as Lagrangeanas Clássicas construídas de fato satisfazem as cinco equações que governam a cinemática clássica.

Ao longo da construção dos *ansätze*, foi observada uma estreita conexão entre as nossas soluções e as relações de dispersão. Esta correspondência nos permi-

tiu propor um mapeamento geral entre as relações de dispersão e as Lagrangeanas Clássicas. Esta proposição não só corroborou os nossos resultados iniciais como também nos possibilitou generalizar ainda mais as nossas soluções para os coeficientes de spin não-degenerado. A partir deste mapeamento, constatamos que uma nova contribuição proporcional a $u \cdot \tilde{\mathcal{T}}_* \cdot \hat{\mathcal{A}}_*$ satisfazia todos os pré-requisitos exigidos pela cinemática clássica. Com o auxílio dos coeficientes efetivos apresentados no Capítulo 2, construímos o que chamamos de Lagrangeana *master*. Esta solução perturbativa congrega tanto os coeficientes de spin degenerado quanto os coeficientes de spin não-degenerado em uma única equação.

Com a finalidade de verificar a amplitude de sua aplicabilidade, decidimos empregar o mapeamento geral para o setor dos neutrinos. Com as relações de dispersão encontradas no final do Capítulo 3, obtivemos com sucesso as Lagrangeanas Clássicas que descrevem a cinemática dessas partículas. Notou-se, por sua vez, que as soluções clássicas carregam em sua estrutura possíveis efeitos relacionados às oscilações de neutrinos. Embora este efeito seja de origem quântica, ele pôde ser inferido nos nossos resultados, pois as massas dessas partículas misturam-se entre as diversas soluções encontradas, um claro indício de um efeito residual das oscilações.

Por fim, decidimos aplicar o recém desenvolvido algoritmo, detalhado no final do Capítulo 2, na tentativa de obter correções perturbativas de ordem superior a um [80]. Aplicamos o método iterativo aos coeficientes de spin não-degenerado e obtivemos com sucesso as correções em segunda ordem desejadas para os coeficientes b de dimensão 5 e os coeficientes H de dimensões 3 e 5.

Graças a relação entre a cinemática clássica do MPE e a geometria de Finsler, pretendemos, em trabalhos futuros, investigar se as Lagrangeanas encontradas podem ser promovidas a novas estruturas de Finsler. Os resultados apresentados aqui também atraem o interesse dos matemáticos, já que estes resultados representam uma base sólida para a construção de novas estruturas de Finsler. Para além disso, podemos ainda estudar casos de operadores invariantes de Lorentz no contexto do MP (ver, por exemplo, Tabela V em [44] e Tabela XX em [214] no espaço-tempo de Minkowski).

Muitas outras investigações podem ser feitas a partir dos nossos resultados. O exemplo mais simples consiste em acoplar a nossa Lagrangeana *master* a um campo eletromagnético externo ou mesmo a um campo gravitacional. De maneira equivalente, podemos acoplar Lagrangeana dos neutrinos a um campo gravitacional.

A partir destes acoplamentos, informações importantes sobre a propagação das partículas poderá ser extraída. Estudar as Hamiltonianas associadas às Lagrangeanas também é algo interessante. Por exemplo, com as Hamiltonianas modificadas em mãos, somos capazes de construir equações de Schrödinger modificadas. Com estas equações, podemos explorar os efeitos causados pelas novas contribuições advindas da violação da simetria de Lorentz em sistemas quânticos, tais como o átomo de hidrogênio, átomos formados por antipartículas, entre outros. Um estudo menos trivial consiste em considerar os campos de fundo dependentes das coordenadas. Neste caso, examinar as implicações da quebra da invariância translacional na propagação das partículas faz-se necessário e pode nos fornecer muitas informações interessantes. No contexto da geometria de Finsler, podemos ainda estudar como os férmions propagam-se em espaços-tempo curvos com quebra explícita da simetria de Lorentz. Calcular as geodésicas que as partículas descrevem nestes espaços-tempo é um trabalho em aberto. Porém, não é tarefa fácil, principalmente para as contribuições que quebram a degenerescência de spin. Nesse sentido, é preciso fazer uso de métodos numérico ou buscar novas alternativas que nos permitam obter soluções analíticas.

Em suma, gostaríamos de ressaltar que o problema relacionado a obtenção das Lagrangeanas Clássicas que descrevem partículas pontuais relativísticas sujeitas à violação da simetria de Lorentz parametrizada pelo MPE pode ser considerado resolvido. Cerca de 10 anos após ter sido proposto originalmente em [65], obtivemos os últimos resultados desse quebra-cabeça. Uma compilação das Lagrangeanas obtidas até agora formam uma estrutura que parametriza a violação da simetria de Lorentz no contexto da cinemática clássica [65, 66, 67, 68, 71, 73, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 181]. Esta estrutura poderia ser facilmente chamada de “*point-particle Standard-Model extension*”.

Apêndices

APÊNDICE A

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Este Apêndice dedica-se ao estudo das propriedades de algumas ferramentas matemáticas indispensáveis para a compreensão do que fizemos ao longo do Capítulo 3. Iniciaremos estudando os aspectos gerais das matrizes gama, explorando, principalmente, a sua independência linear. Esta propriedade é relevante para o entendimento da técnica implementada na seção 3.2. Estudaremos ainda alguns produtos que são recorrentes no desenvolvimento das nossas soluções, são eles: o produto tensorial, o produto de Wedge e o dual de Hodge. Por fim, estudaremos um método que nos permite calcular o determinante de matrizes que podem ser escritas em blocos. Este último resultado tem um papel central na obtenção da equação de dispersão.

A.1 Matrizes gama

Na Física-Matemática as matrizes gama, também conhecidas como matrizes de Dirac, têm um papel muito importante na descrição de férmions, além, é claro, da sua relevância na descrição de rotações infinitesimais e *boosts* no espaço espinorial. Tais matrizes satisfazem uma relação de anticomutação muito particular, o que as conferem o título de geradoras da representação matricial da álgebra de

Clifford¹ $\text{Cl}_{t,s}(\mathbb{C})$. Muito embora seja possível definir as matrizes gama para um espaço de dimensão arbitrária, iremos nos ater aqui ao espaço de Minkowski em $(1+3)$ -dimensões.

Em $(1+3)$ -dimensões as matrizes gama compõem um conjunto linearmente independente de 16 matrizes de dimensão 4×4 . Devido à independência linear, este conjunto gera o espaço das matrizes complexas de dimensão 4×4 , ou seja, qualquer matriz $A \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$ pode ser expressa como uma combinação linear dessa base. As matrizes gama podem ser escritas em uma forma covariante, o que é bastante conveniente, pois elas são amplamente usadas em teorias relativísticas. A representação contravariante é mostrada a seguir:

$$\{\Gamma^A\} \equiv \{\mathbb{1}_4, \gamma^5, \gamma^\mu, i\gamma^5\gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}\}, \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathbb{1}_4$ é a matriz identidade, $\gamma_5 = \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ é a matriz de Dirac quiral e $\sigma_{\mu\nu} \equiv (i/2)[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Explicitamente, as matrizes gama assumem a seguinte forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^k \\ -\sigma^k & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

A partir dessas definições, somos capazes de obter tanto $i\gamma^5\gamma^\mu$ como $\sigma^{\mu\nu}$. Podemos ainda obter a forma covariante das matrizes gama fazendo uso da métrica de Minkowski, isto é, $\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu$. Desta forma, é possível obter toda a base dual $\{\Gamma_A\}$.

Dentre as propriedades mais importantes, destacamos inicialmente o fato das matrizes de Dirac satisfazerem a álgebra de Clifford $\text{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$ definida a partir

¹ Seja B uma forma bilinear em um espaço V . Definimos a álgebra de Clifford $\text{Cl}(V, B)$ como a álgebra associativa gerada pelos elementos de V , que satisfazem a seguinte relação

$$u \otimes v + v \otimes u = 2B(u, v) \mathbb{1}_n, \quad u, v \in V,$$

onde $\otimes$ denota o produto tensorial. Se $B = 0$, a expressão acima reduz-se à conhecida álgebra exterior $\wedge(V)$. Para o caso mais geral, há um isomorfismo, conhecido como *quantization map*, designado por

$$q : \wedge(V) \mapsto \text{Cl}(V, B).$$

Dessa forma, a álgebra de Clifford pode ser considerada como uma álgebra exterior $\wedge(V)$ com respeito a um novo produto “deformado”. Como exemplos da atuação do operador q , temos:

$$\begin{aligned} q(u) &= u, \\ q(u \wedge v) &= uv - B(u, v). \end{aligned}$$

da relação de anticomutação $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_4$. Além disso, as matrizes gama satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade

$$\text{Tr}(\Gamma_A \Gamma^B) = 4\delta_A^B, \quad (\text{A.3})$$

ou seja, dois elementos distintos do conjunto Γ são ortogonais entre si com respeito ao produto escalar definido no espaço espinorial, que neste caso é definido pelo traço $\text{Tr}(\dots)$.

As matrizes gama aparecem na teoria de Dirac na forma de covariantes bilineares, ou seja, apresentam-se na seguinte estrutura: $\bar{\psi}\Gamma\psi$, onde ψ é um espinor e $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ o seu conjugado. Através dessas estruturas bilineares, podemos classificar as matrizes de Dirac quanto ao seu comportamento sob transformações de Lorentz. Na tabela 5 mostramos a classificação dos elementos do conjunto $\{\Gamma^A\}$.

Bilinear	Classificação
$\bar{\psi}\psi$	Escalar
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	Pseudoescalar
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4-vetor
$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	Pseudovetor
$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$	Tensor de <i>rank</i> -2

Tabela 5 – Classificação dos covariantes bilineares.

Até agora conhecemos apenas uma representação das matrizes gama. As matrizes apresentadas na equação (A.2) fazem parte da chamada representação de Dirac ou *Standard*. Essa representação, como já mencionado, satisfaz a álgebra de Clifford $\text{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$. No entanto, existem outras representações importantes. Dentre estas, destacamos as representações de Majorana e Quiral. Estas representações podem ser obtidas a partir da representação de Dirac através de transformações de similaridade, isto é, $\gamma_{\text{Novo}}^\mu = U^\dagger \gamma_D^\mu U$. A seguir, apresentamos tanto a matriz de transformação U quanto a forma explícita das representações de Majorana e Quiral. Começemos com a representação Quiral:

$$U_{\text{Ch}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4a})$$

$$\gamma_{\text{Ch}}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\text{Ch}}^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^k \\ -\sigma^k & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\text{Ch}}^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4b})$$

Assim como na representação de Dirac, a representação Quiral satisfaz a álgebra de Clifford $\text{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$ ². Vejamos agora a representação de Majorana:

$$U_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4c})$$

$$\begin{aligned} \gamma_M^0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, & \gamma_M^1 &= \begin{pmatrix} i\sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\sigma^3 \end{pmatrix}, & \gamma_M^2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \gamma_M^3 &= \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\sigma^1 \end{pmatrix}, & \gamma_M^5 &= \begin{pmatrix} \sigma^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.4d})$$

A representação de Majorana, diferentemente das outras duas apresentadas, satisfaz a álgebra $\text{Cl}_{1,3}(\mathbb{R}) \simeq \text{Mat}_4(\mathbb{R})$. Esta representação é bastante interessante, pois ela nos permite obter a equação de Dirac livre em uma forma puramente real.

Ainda sobre a independência linear das matrizes de Dirac, podemos nos indagar o seguinte: como o produto entre dois operadores genéricos escritos no espaço espinorial é expresso na base $\{\Gamma_A\}$? Vejamos como responder a essa pergunta. Sejam os operadores genéricos $\hat{\mathcal{Q}}$ e $\hat{\mathcal{F}}$ escritos no espaço espinorial, cujas decomposições em termos da base $\{\Gamma_A\}$ são apresentadas a seguir:

$$\hat{\mathcal{Q}} = \hat{\mathcal{S}}\mathbb{1}_4 + i\hat{\mathcal{P}}\gamma^5 + \hat{\mathcal{V}}^\mu\gamma_\mu + \hat{\mathcal{A}}^\mu\gamma^5\gamma_\mu + \frac{i}{2}\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}, \quad (\text{A.5a})$$

$$\hat{\mathcal{F}} = \hat{\Xi}\mathbb{1}_4 + i\hat{\Lambda}\gamma^5 + \hat{\xi}^\mu\gamma_\mu + \hat{\zeta}^\mu\gamma^5\gamma_\mu + \frac{i}{2}\hat{\psi}^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}. \quad (\text{A.5b})$$

De acordo com a classificação apresentada na tabela 5, identificamos $\{\hat{\mathcal{S}}, \hat{\Xi}\}$ como sendo os operadores escalares, $\{\hat{\mathcal{P}}, \hat{\Lambda}\}$ são os operadores pseudoescalares, $\{\hat{\mathcal{V}}^\mu, \hat{\xi}^\mu\}$ são os operadores vetoriais, $\{\hat{\mathcal{A}}^\mu, \hat{\zeta}^\mu\}$ são os operadores pseudo-vetoriais e, por fim, $\{\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}, \hat{\psi}^{\mu\nu}\}$ são os operadores tensoriais de *rank*-2. Analisemos agora como calcular o produto entre os operadores $\hat{\mathcal{F}}$ e $\hat{\mathcal{Q}}$. De maneira explícita, obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}} \cdot \hat{\mathcal{Q}} &= \hat{\Xi}\hat{\mathcal{S}}\mathbb{1}_4 + i\hat{\Xi}\hat{\mathcal{P}}\gamma_5 + \hat{\Xi}\hat{\mathcal{V}}^\lambda\gamma_\lambda + \hat{\Xi}\hat{\mathcal{A}}^\lambda\gamma_5\gamma_\lambda + \frac{i}{2}\hat{\Xi}\hat{\mathcal{T}}^{\lambda\alpha}\sigma_{\lambda\alpha} + i\hat{\Lambda}\hat{\mathcal{S}}\gamma^5 \\ &\quad - \hat{\Lambda}\hat{\mathcal{P}}\mathbb{1}_4 + i\hat{\Lambda}\hat{\mathcal{V}}^\lambda\gamma^5\gamma_\lambda + i\hat{\Lambda}\hat{\mathcal{A}}^\lambda\gamma_\lambda - \frac{1}{2}\hat{\Lambda}\hat{\mathcal{T}}^{\lambda\alpha}\sigma_{\lambda\alpha}\gamma^5 + \hat{\xi}^\mu\hat{\mathcal{S}}\gamma_\mu - i\hat{\xi}^\mu\hat{\mathcal{P}}\gamma^5\gamma_\mu \end{aligned}$$

² A álgebra $\text{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$ é obtida a partir da *complexificação* da álgebra $\text{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$, isto é, $\text{Cl}_{1,3}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes \text{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$. A complexificação nos permite estender o espaço vetorial do corpo dos reais para o corpo dos complexos. Uma diferença entre estas representações reside no fato de que $\text{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$ permite apenas combinações lineares reais das matrizes gama e de seus produtos.

$$\begin{aligned}
& + \hat{\xi}^\mu \hat{\mathcal{V}}^\lambda \gamma_\mu \gamma_\lambda - \hat{\xi}^\mu \hat{\mathcal{A}}^\lambda \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma^5 + \frac{i}{2} \hat{\xi}^\mu \hat{\mathcal{T}}^{\lambda\alpha} \gamma_\mu \sigma_{\lambda\alpha} + \hat{\zeta}^\mu \hat{\mathcal{S}} \gamma^5 \gamma_\mu - i \hat{\zeta}^\mu \hat{\mathcal{P}} \gamma_\mu \\
& + \hat{\zeta}^\mu \hat{\mathcal{V}}^\lambda \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma^5 - \hat{\zeta}^\mu \hat{\mathcal{A}}^\lambda \gamma_\mu \gamma_\lambda + \frac{i}{2} \hat{\zeta}^\mu \hat{\mathcal{T}}^{\lambda\alpha} \gamma^5 \gamma_\mu \sigma_{\lambda\alpha} + \frac{i}{2} \hat{\psi}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{S}} \sigma_{\mu\nu} \\
& - \frac{1}{2} \hat{\psi}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{P}} \sigma_{\mu\nu} \gamma^5 + \frac{i}{2} \hat{\psi}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{V}}^\lambda \sigma_{\mu\nu} \gamma_\lambda + \frac{i}{2} \hat{\psi}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{A}}^\lambda \gamma^5 \sigma_{\mu\nu} \gamma_\lambda - \frac{1}{4} \hat{\psi}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}^{\lambda\alpha} \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\lambda\alpha}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Podemos reorganizar o resultado acima usando as seguintes identidades:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu} \mathbb{1}_4 - i \sigma_{\mu\nu}, \quad \sigma_{\mu\nu} \gamma^5 = \frac{i}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta}, \tag{A.7a}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^5 = \eta_{\mu\nu} \gamma^5 + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}, \tag{A.7b}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda = \eta_{\mu\nu} \gamma_\lambda + \eta_{\nu\lambda} \gamma_\mu - \eta_{\lambda\mu} \gamma_\nu + i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^\rho \gamma^5, \tag{A.7c}$$

$$\sigma_{\mu\nu} \gamma_\lambda = i \eta_{\nu\lambda} \gamma_\mu - i \eta_{\lambda\mu} \gamma_\nu - \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^\rho \gamma^5, \tag{A.7d}$$

$$\gamma_\mu \sigma_{\nu\lambda} = i \eta_{\mu\nu} \gamma_\lambda - i \eta_{\lambda\mu} \gamma_\nu - \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^\rho \gamma^5, \tag{A.7e}$$

$$\gamma^5 \sigma_{\mu\nu} \gamma_\lambda = i \eta_{\nu\lambda} \gamma^5 \gamma_\mu - i \eta_{\lambda\mu} \gamma^5 \gamma_\nu + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^\rho, \tag{A.7f}$$

$$\gamma^5 \gamma_\mu \sigma_{\nu\lambda} = i \eta_{\mu\nu} \gamma^5 \gamma_\lambda - i \eta_{\lambda\mu} \gamma^5 \gamma_\nu + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^\rho, \tag{A.7g}$$

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\sigma}] = -2i \left(\eta_{\mu\rho} \sigma_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho} \sigma_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \sigma_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma} \sigma_{\mu\rho} \right), \tag{A.7h}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mu\nu} \sigma_{\lambda\alpha} &= i \eta_{\mu\lambda} \sigma_{\alpha\nu} - i \eta_{\nu\lambda} \sigma_{\alpha\mu} + i \eta_{\nu\alpha} \sigma_{\lambda\mu} - i \eta_{\mu\alpha} \sigma_{\lambda\nu} \\
&+ (\eta_{\alpha\nu} \eta_{\lambda\mu} - \eta_{\alpha\mu} \eta_{\lambda\nu}) \mathbb{1}_4 + i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \gamma^5.
\end{aligned} \tag{A.7i}$$

Fazendo isso, obtemos que

$$\hat{\mathcal{F}} \cdot \hat{\mathcal{Q}} = \hat{\mathbf{s}} \mathbb{1}_4 + i \hat{\mathbf{p}} \gamma^5 + \hat{\mathbf{v}}^\mu \gamma_\mu + \hat{\mathbf{a}}^\mu \gamma^5 \gamma_\mu + \frac{i}{2} \hat{\mathbf{t}}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}, \tag{A.8}$$

onde os novos conjuntos de operadores são definidos a seguir:

$$\hat{\mathbf{s}} = \hat{\Xi} \hat{\mathcal{S}} - \hat{\Lambda} \hat{\mathcal{P}} + \hat{\xi} \cdot \hat{\mathcal{V}} - \hat{\zeta} \cdot \hat{\mathcal{A}} + \frac{1}{2} \hat{\psi} \cdot \hat{\mathcal{T}}, \tag{A.9a}$$

$$i \hat{\mathbf{p}} = i \hat{\Xi} \hat{\mathcal{P}} + i \hat{\Lambda} \hat{\mathcal{S}} - \hat{\xi} \cdot \hat{\mathcal{A}} + \hat{\zeta} \cdot \hat{\mathcal{V}} - i \left(\star (\hat{\psi} \wedge \hat{\mathcal{T}}) \right), \tag{A.9b}$$

$$\hat{\mathbf{v}}^\mu = \hat{\Xi} \hat{\mathcal{V}}^\mu + i \hat{\Lambda} \hat{\mathcal{A}}^\mu + \hat{\xi}^\mu \hat{\mathcal{S}} - i \hat{\zeta}^\mu \hat{\mathcal{P}} - \left(\hat{\xi} \cdot \hat{\mathcal{T}} \right)^\mu - \left(\hat{\psi} \cdot \hat{\mathcal{V}} \right)^\mu$$

$$+ i \left(\star (\hat{\zeta} \wedge \hat{\mathcal{T}}) \right)^\mu + i \left(\star (\hat{\psi} \wedge \hat{\mathcal{A}}) \right)^\mu, \quad (\text{A.9c})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}^\mu &= \hat{\Xi} \hat{\mathcal{A}}^\mu + i \hat{\Lambda} \hat{\mathcal{V}}^\mu - i \hat{\xi}^\mu \hat{\mathcal{P}} + \hat{\zeta}^\mu \hat{\mathcal{S}} + i \left(\star (\hat{\xi} \wedge \hat{\mathcal{T}}) \right)^\mu + i \left(\star (\hat{\psi} \wedge \hat{\mathcal{V}}) \right)^\mu \\ &\quad - (\hat{\zeta} \cdot \hat{\mathcal{T}})^\mu - (\hat{\psi} \cdot \hat{\mathcal{A}})^\mu, \end{aligned} \quad (\text{A.9d})$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \hat{\mathbf{t}}^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} \hat{\Xi} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \hat{\psi}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{S}} - \frac{i}{2} \hat{\Lambda} \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu} - \frac{i}{2} \hat{\psi}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{P}} - \frac{i}{2} \hat{\xi}^\mu \wedge \hat{\mathcal{V}}^\nu + \frac{i}{2} \hat{\zeta}^\mu \wedge \hat{\mathcal{A}}^\nu \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\star (\hat{\xi} \wedge \hat{\mathcal{A}}) \right)^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\star (\hat{\zeta} \wedge \hat{\mathcal{V}}) \right)^{\mu\nu} - i (\hat{\psi} \cdot \hat{\mathcal{T}})^{[\mu\nu]}, \end{aligned} \quad (\text{A.9e})$$

em que $[\mu\nu]$ denota antissimetização dos índices μ e ν . Nos resultados acima também fizemos uso das definições:

$$\hat{\zeta}^\mu \hat{\mathcal{T}}^{\nu\lambda} \eta_{\mu\nu} = (\hat{\zeta} \cdot \hat{\mathcal{T}})^\lambda, \quad \hat{\psi}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{A}}^\lambda \eta_{\nu\lambda} = (\hat{\psi} \cdot \hat{\mathcal{A}})^\mu, \quad (\text{A.10a})$$

$$\hat{\psi}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{V}}^\lambda \eta_{\nu\lambda} = (\hat{\psi} \cdot \hat{\mathcal{V}})^\mu, \quad \hat{\xi}^\mu \hat{\mathcal{T}}^{\nu\lambda} \eta_{\mu\nu} = (\hat{\xi} \cdot \hat{\mathcal{T}})^\lambda, \quad (\text{A.10b})$$

$$\hat{\psi}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}^{\lambda\alpha} \eta_{\nu\lambda} = (\hat{\psi} \cdot \hat{\mathcal{T}})^{\mu\alpha}, \quad \hat{\psi} \cdot \hat{\mathcal{T}} = \hat{\psi}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}^{\lambda\alpha} \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\lambda}, \quad (\text{A.10c})$$

$$\left(\star (\hat{\xi} \wedge \hat{\mathcal{A}}) \right)_{\alpha\beta} = \hat{\xi}^\mu \hat{\mathcal{A}}^\nu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad \left(\star (\hat{\xi} \wedge \hat{\mathcal{T}}) \right)_\rho = \frac{1}{2} \hat{\xi}^\mu \hat{\mathcal{T}}^{\nu\lambda} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}, \quad (\text{A.10d})$$

$$\left(\star (\hat{\zeta} \wedge \hat{\mathcal{T}}) \right)_\rho = \frac{1}{2} \hat{\zeta}^\mu \hat{\mathcal{T}}^{\nu\lambda} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}, \quad \left(\star (\hat{\psi} \wedge \hat{\mathcal{A}}) \right)_\rho = \frac{1}{2} \hat{\psi}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{A}}^\lambda \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}, \quad (\text{A.10e})$$

$$\star (\hat{\psi} \wedge \hat{\mathcal{T}}) = \frac{1}{4} \hat{\psi}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{T}}^{\lambda\alpha} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha}, \quad (\text{A.10f})$$

onde $\star$ significa o produto de Wedger e $\wedge$ corresponde ao dual de Hodger. Nas definições acima precisamos prestar atenção na ordem em que contrações ocorrem. Por exemplo, na equação (A.10a) o tensor de *rank*-2 $\hat{\psi}$ é contraído pela direita e, neste caso, o índice livre que aparece corresponde ao primeiro índice do tensor $\hat{\psi}$. Já na equação (A.10b), o tensor de *rank*-2 $\hat{\mathcal{T}}$ é contraído pela esquerda e, neste caso, o índice livre corresponde ao segundo índice do tensor $\hat{\mathcal{T}}$. Assim posto, sempre que tais configurações envolvendo tensores de *rank*-2 aparecerem, essas regras estarão subentendidas. Estas observações fazem-se necessárias, pois nos permitirá generalizar estes resultados para o cenário em que três ou mais operadores espinoriais são multiplicados.

A.2 Os produtos tensorial, de Wedge e o dual de Hodge

Os produtos tensorial, de Wedge e o dual de Hodge são conceitos amplamente utilizados em Álgebra e Física. Como veremos mais adiante, estes conceitos

matemáticos serão empregados nas nossas soluções. Dessa forma, é interessante apresentar as definições e algumas propriedades destas ferramentas.

Iniciamos com o produto tensorial. O produto tensorial, também conhecido como produto de Kronecker ou ainda produto direto é denotado pelo símbolo $\otimes$, cuja definição é apresentada a seguir:

Definição 4 (Produto Direto) *Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{p,q}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m,n}$ duas matrizes. O produto direto destas matrizes é definido como*

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1q}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}\mathbf{B} & \cdots & a_{pq}\mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Como podemos notar, o produto direto é um mapeamento da forma $\mathbb{M}^{p,q} \times \mathbb{M}^{m,n} \mapsto \mathbb{M}^{pm,qn}$, ou seja, tem como resultado uma matriz de dimensão $pm \times qn$. Como vimos na subseção 2.2.3, o operador de campo do setor dos neutrinos é composto por um produto direto entre matrizes que são definidas no espaço dos sabores e matrizes gama que são definidas no espaço espinorial. No que segue, mostramos algumas das propriedades mais relevantes do produto direto.

PD1 Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{p,q}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m,n}$ duas matrizes. Além disso, seja $\alpha \in \mathbb{K}$ um escalar. Sendo assim, temos:

$$\alpha (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (\alpha \mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (\alpha \mathbf{B}). \quad (\text{A.12})$$

PD2 Fazer a transposição antes de realizar o produto direto produz o mesmo resultado que fazer depois, ou seja,

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{M}^{p,q}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m,n}. \quad (\text{A.13})$$

PD3 Fazer a conjugação complexa antes de realizar o produto direto produz o mesmo resultado que fazê-lo depois, isto é,

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \otimes \mathbf{B}^* \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{M}^{p,q}(\mathbb{C}), \mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m,n}(\mathbb{C}). \quad (\text{A.14})$$

PD4 É associativo

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{M}^{p,q}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m,n}, \mathbf{C} \in \mathbb{M}^{r,s}. \quad (\text{A.15})$$

PD5 É distributivo pela direita

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{M}^{p,q}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m,n}, \mathbf{C} \in \mathbb{M}^{r,s}. \quad (\text{A.16})$$

PD6 É distributivo pela esquerda

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{M}^{p,q}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m,n}, \mathbf{C} \in \mathbb{M}^{r,s}. \quad (\text{A.17})$$

PD7 O traço do produto de Kronecker de duas matrizes é o produto dos traços das matrizes, ou seja,

$$\text{Tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{A}) \text{Tr}(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{M}^{p,q}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m,n}. \quad (\text{A.18})$$

PD8 O determinante do produto direto de duas matrizes é dado por

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) &= \det(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}), \\ &= [\det(\mathbf{A})]^n [\det(\mathbf{B})]^m \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{M}^m, \mathbf{B} \in \mathbb{M}^n. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Para compreender do que se trata o produto de Wedge, também conhecido como produto exterior, precisamos inicialmente definir o que são p-formas. As p-formas são tensores de ordem $\binom{0}{p}$ completamente antissimétricos. O conjunto de tais tensores é denotado aqui por $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$. Estes objetos têm propriedades geométricas especiais e muitas aplicações na Física. Por exemplo, eles permitem obter uma expressão muito elegante para as equações de Maxwell (e suas generalizações), bem como uma generalização do Teorema de Stokes para dimensões arbitrárias. Uma vez compreendido o que são as p-formas, podemos definir o produto exterior.

Definição 5 (Produto Exterior) *Sejam as formas diferenciais $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$. Definimos o produto exterior $\omega \wedge \phi \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$ como o produto direto antissimetrizado desses tensores, isto é,*

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \wedge \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \frac{(k+l)!}{k!l!} \omega_{[\mu_1 \dots \mu_k} \otimes \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_l]} \equiv C_{\mu_1 \dots \mu_k \alpha_1 \dots \alpha_l}. \quad (\text{A.20})$$

Como implicação direta da definição, podemos usar o produto exterior para criar uma nova forma diferencial a partir de dois ou mais tensores. A seguir, destacamos algumas propriedades importantes.

PE1 Distributiva:

$$(\omega + \phi) \wedge \psi = \omega \wedge \psi + \phi \wedge \psi \quad \forall \omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n), \phi \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n), \psi \in \Lambda^m(\mathbb{R}^n). \quad (\text{A.21})$$

PE2 Associativa

$$(\omega \wedge \phi) \wedge \psi = \omega \wedge (\phi \wedge \psi) \quad \forall \omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n), \phi \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n), \psi \in \Lambda^m(\mathbb{R}^n). \quad (\text{A.22})$$

PE3 Skew-comutatividade

$$\omega \wedge \phi = (-1)^{kl} \phi \wedge \omega \quad \forall \omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n), \phi \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n). \quad (\text{A.23})$$

A próxima ferramenta matemática que apresentamos para formas diferenciais é o dual de Hodge, também conhecido como *Hodge Star* ($\star$). O dual de Hodge é a operação matemática responsável por converter uma p -forma em seu correspondente dual, ou seja, ele é encarregado da seguinte transformação:

$$\star : \Lambda^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^{n-p}(\mathbb{R}^n). \quad (\text{A.24})$$

Como podemos observar, a definição do dual de Hodge depende do número de dimensões do espaço considerado. O mapeamento acima pode ser traduzido na definição mostrada a seguir.

Definição 6 (*Hodge Star*) *Seja $\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ uma p -forma. Então, seu correspondente dual é obtido a partir da seguinte expressão:*

$$\star \phi^{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \frac{1}{(n-p)!} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{n-p} \alpha_1 \dots \alpha_p} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}. \quad (\text{A.25})$$

Como trabalhamos no espaço-tempo de Minkowski 4-dimensional, o dual de Hodge de um tensor covariante de rank-2, por exemplo, fornece um tensor de rank-2 contravariante, isto é

$$(\star A)^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} A_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (\text{A.26})$$

Por outro lado, o dual de Hodge de um tensor de rank-3 covariante B fornece um vetor contravariante, já para um tensor de rank-4 C temos um escalar:

$$(\star B)^e \equiv \frac{1}{3!} B_{\mu\nu\lambda} \varepsilon^{\mu\nu\lambda e}, \quad \star C \equiv \frac{1}{4!} C_{\mu\nu\lambda\alpha} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\alpha}. \quad (\text{A.27})$$

A.3 Determinante de matrizes em blocos

Matrizes em blocos são onipresentes na Física e na Matemática aplicada. Estes objetos aparecem naturalmente na descrição de sistemas com múltiplas variáveis discretas. Os exemplos mais comuns onde tais estruturas aparecem são: descrição do spin, bem como dos números quânticos de cor e sabor dos quarks. Sabemos ainda que as relações de dispersão são obtidas através da seguinte equação

$$\mathcal{R} = \det \mathcal{D} = 0, \quad (\text{A.28})$$

onde $\mathcal{D}$ é um operador de campo arbitrário. O cálculo do determinante é uma tarefa relativamente fácil para matrizes cuja dimensão não seja maior que 3. Para dimensões maiores, o trabalho empregado nesta tarefa torna-se bastante enfadonho, sendo necessário o uso de *software* que nos permitem agilizar os cálculos. Vimos na subseção 2.2.3 que o operador de campo que descreve os neutrinos pode ser escrito na forma de uma matriz de dimensão $8N \times 8N$. Podemos ainda reorganizar essa matriz de modo que suas entradas sejam blocos de dimensão 4×4 , ou seja:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{4 \times 4} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{2N \times 2N}. \quad (\text{A.29})$$

Essa abordagem será muito útil nos cálculos que iremos apresentar na seção 3.2.

Precisamos de uma ferramenta matemática que nos permita calcular o determinante de matrizes em blocos. Felizmente, existe na literatura um método bastante útil. Apresentaremos a seguir um teorema³ que nos permitirá calcular o determinante de qualquer matriz de dimensão $nN \times nN$.

Teorema 7 (Determinante $nN \times nN$) *Seja $\mathbf{S}$ uma matrix complexa de dimensão $nN \times nN$ organizada da seguinte forma*

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \cdots & \mathbf{S}_{1N} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \cdots & \mathbf{S}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_{N1} & \mathbf{S}_{N2} & \cdots & \mathbf{S}_{NN} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

onde cada elemento $\mathbf{S}_{i,j}$ é uma matriz de dimensão $n \times n$. Vamos definir agora o seguinte conjunto de matrizes: $\{\boldsymbol{\alpha}^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\alpha}^{(N-1)}\}$. As matrizes $\boldsymbol{\alpha}^{(k)}$ também

³ Para uma demonstração simples vide Ref. [190].

possuem dimensão $n \times n$ e assumem os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j}^{(0)} &= \mathbf{S}_{i,j}, \\ &\vdots \\ \alpha_{i,j}^{(k+1)} &= \alpha_{i,j}^{(k)} - \alpha_{i,N-k}^{(k)} (\alpha_{N-k,N-k}^{(k)})^{-1} \alpha_{N-k,j}^{(k)}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Com estes elementos em mãos, o determinante da matriz $\mathbf{S}$ é calculado através da seguinte expressão:

$$\det \mathbf{S} = \prod_{k=1}^N \det \left(\alpha_{k,k}^{(N-k)} \right). \quad (\text{A.32})$$

Vemos, a partir do teorema acima enunciado, que é possível calcular o determinante de uma matriz em blocos através das relações de recorrência apresentadas na equação (A.31). Veremos mais adiante que este resultado associado às propriedades das matrizes gama nos permitirão encontrar um resultado bastante geral para a equação de dispersão do setor dos neutrinos.

APÊNDICE B

CÁLCULO DAS 4-VELOCIDADES

Aqui, demonstraremos explicitamente como derivar as 4-velocidades apresentadas na equação (5.124). As derivações fazem uso extensivo das equações (2.106), bem como das propriedades que objetos como $b^{(d)\diamond}$ e $H^{(d)\diamond}$ possuem, tais como o grau de homogeneidade que estes operadores manifestam com respeito a variável 4-velocidade.

B.1 Operador pseudovetorial

A equação de dispersão para o operador $\hat{b}_\mu$ é mostrada a seguir

$$0 = \left[p^2 - b^{(d)\mu\diamond}(b^{(d)})_\mu^\diamond - m_\psi^2 \right]^2 + 4b^{(d)\mu\diamond}(b^{(d)})_\mu^\diamond p^2 - 4(b^{(d)\diamond})^2. \quad (\text{B.1})$$

Sua derivada implícita é dada por

$$\begin{aligned} 0 = & \left[p^2 - b^{(d)\mu\diamond}(b^{(d)})_\mu^\diamond - m_\psi^2 \right] \times \left(p_0 \frac{\partial p_0}{\partial p_j} + p^j - b^{(d)\mu\diamond} \frac{\partial(b^{(d)})_\mu^\diamond}{\partial p_j} \right) \\ & + 2b^{(d)\mu\diamond}(b^{(d)})_\mu^\diamond \left(p_0 \frac{\partial p_0}{\partial p_j} + p^j \right) + 2b^{(d)\mu\diamond} \frac{\partial(b^{(d)})_\mu^\diamond}{\partial p_j} p^2 - 2b^{(d)\diamond} \frac{\partial b^{(d)\diamond}}{\partial p_j}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Usando a correspondência entre as velocidades, dada pela equação (2.106), obtemos:

$$0 = \left[p^2 - b^{(d)\mu\Diamond}(b^{(d)})_\mu^\Diamond - m_\psi^2 \right] \times \left(p_0 u^j - u^0 p^j + u^0 b^{(d)\mu\Diamond} \frac{\partial(b^{(d)})_\mu^\Diamond}{\partial p_j} \right) \\ + 2b^{(d)\mu\Diamond}(b^{(d)})_\mu^\Diamond \left[p_0 u^j - u^0 p^j \right] - 2u^0 b^{(d)\mu\Diamond} \frac{\partial(b^{(d)})_\mu^\Diamond}{\partial p_j} p^2 + 2u^0 b^{(d)\Diamond} \frac{\partial b^{(d)\Diamond}}{\partial p_j}. \quad (\text{B.3})$$

Uma contração do resultado acima com p_j em conjunção com

$$p_j \frac{\partial(b^{(d)})_\mu^\Diamond}{\partial p_j} = (d-3) \left[(b^{(d)})_\mu^\Diamond - \frac{p \cdot u}{u^0} (b^{(d)})_{\mu 0}^\Diamond \right], \quad (\text{B.4a})$$

$$p_j \frac{\partial b^{(d)\Diamond}}{\partial p_j} = (d-2) \left[b^{(d)\Diamond} - \frac{p \cdot u}{u^0} (b^{(d)})_0^\Diamond \right], \quad (\text{B.4b})$$

bem como os resultados apresentados em (2.106), resulta:

$$0 = \left[p^2 - b^{(d)\mu\Diamond}(b^{(d)})_\mu^\Diamond - m_\psi^2 \right] \left[p_0(-p_0 u^0 - L) - u^0 p_j p^j \right. \\ \left. + (d-3)b^{(d)\mu\Diamond} \left(u^0 (b^{(d)})_\mu^\Diamond + L(b^{(d)})_{0\mu}^\Diamond \right) \right] \\ + 2b^{(d)\mu\Diamond}(b^{(d)})_\mu^\Diamond \left[p_0(-p_0 u^0 - L) - u^0 p_j p^j \right] \\ - 2(d-3)b^{(d)\mu\Diamond} \left(u^0 (b^{(d)})_\mu^\Diamond + L(b^{(d)})_{0\mu}^\Diamond \right) p^2 \\ + 2(d-2) \left[(b^{(d)\Diamond})^2 u^0 + L b^{(d)\Diamond} (b^{(d)})_0^\Diamond \right]. \quad (\text{B.5})$$

A expressão acima pode ser resolvido para u^0 . Uma covariantização fornece o resultado apresentado em (5.124a)

B.2 Operador tensorial

A equação de dispersão para o operador em questão tem a forma

$$0 = (p^2 - m_\psi^2 + 2\hat{X})^2 - 8\hat{X}p^2 + 4H^{(d)\nu\Diamond}(H^{(d)})_\nu^\Diamond + 4\hat{Y}^2, \quad (\text{B.6})$$

Derivando agora a equação de dispersão em relação a p_j , temos

$$0 = (p^2 - m_\psi^2 + 2\hat{X}) \left(p_0 \frac{\partial p_0}{\partial p_j} + p^j + \frac{\partial \hat{X}}{\partial p_j} \right) - 2 \frac{\partial \hat{X}}{\partial p_j} p^2 - 4\hat{X} \left(p_0 \frac{\partial p_0}{\partial p_j} + p^j \right) \\ + 2H^{(d)\nu\Diamond} \frac{\partial(H^{(d)})_\nu^\Diamond}{\partial p_j} + 2\hat{Y} \frac{\partial \hat{Y}}{\partial p_j}, \quad (\text{B.7a})$$

onde

$$\frac{\partial \hat{X}}{\partial p_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial (H^{(d)})_{\mu\nu}{}^\diamond}{\partial p_j} H^{(d)\mu\nu\diamond}, \quad (\text{B.7b})$$

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial p_j} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial (H^{(d)})_{\mu\nu}{}^\diamond}{\partial p_j} \tilde{H}^{(d)\mu\nu\diamond} + (\hat{H}^{(d)})_{\mu\nu}{}^\diamond \frac{\partial (\tilde{H}^{(d)})^{\mu\nu\diamond}}{\partial p_j} \right). \quad (\text{B.7c})$$

Inserindo as relações entre as velocidades, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = & (p^2 - m_\psi^2 + 2\hat{X}) \left(p_0 u^j - u^0 p^j - u^0 \frac{\partial \hat{X}}{\partial p_j} \right) + 2u^0 \frac{\partial \hat{X}}{\partial p_j} p^2 - 4\hat{X} (p_0 u^j - u^0 p^j) \\ & - 2u^0 H^{(d)\nu\diamond} \frac{\partial (H^{(d)})_\nu{}^\diamond}{\partial p_j} - 2u^0 \hat{Y} \frac{\partial \hat{Y}}{\partial p_j}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

A multiplicação do resultado acima com p_j nos fornece a seguinte equação

$$\begin{aligned} 0 = & (p^2 - m_\psi^2 + 2\hat{X}) \left[p_0 (-p_0 u^0 - L) - u^0 p_j p^j - 2(d-3)(u^0 \hat{X} + L\hat{X}_0) \right] \\ & + 4(d-3)(u^0 \hat{X} + L\hat{X}_0) p^2 - 4\hat{X} \left[p_0 (-p_0 u^0 - L) - u^0 p_j p^j \right] \\ & - 2(d-2)u^0 H^{(d)\nu\diamond} (H^{(d)})_\nu{}^\diamond + L \left[2(d-3)p_\nu H^{(d)\nu\varrho 0\diamond} (H^{(d)})_\varrho{}^\diamond + 2H^{(d)0\nu\diamond} (H^{(d)})_\nu{}^\diamond \right] \\ & - 4(d-3)\hat{Y}(u^0 \hat{Y} + L\hat{Y}_0), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde empregamos as seguintes identidades

$$\begin{aligned} p_j \frac{\partial H^{(d)\mu\diamond}}{\partial p_j} &= -\frac{p \cdot u}{u^0} \left[(d-3)H^{(d)\mu\nu 0\diamond} p_\nu + H^{(d)\mu 0\diamond} \right] + (d-2)H^{(d)\mu\diamond}, \\ p_j \frac{\partial H^{(d)\mu\nu\diamond}}{\partial p_j} &= (d-3) \left(H^{(d)\mu\nu\diamond} - \frac{p \cdot u}{u^0} H^{(d)\mu\nu 0\diamond} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.10a})$$

$$\begin{aligned} p_j \frac{\partial \hat{X}}{\partial p_j} &= \frac{1}{2} p_j \frac{\partial (H^{(d)})_{\mu\nu}{}^\diamond}{\partial p_j} H^{(d)\mu\nu\diamond} \\ &= \frac{d-3}{2} \left((H^{(d)})_{\mu\nu}{}^\diamond - \frac{p \cdot u}{u^0} (H^{(d)})_{\mu\nu 0\diamond} \right) H^{(d)\mu\nu\diamond} \\ &= 2(d-3) \left(\hat{X} - \frac{p \cdot u}{u^0} \hat{X}_0 \right), \end{aligned} \quad (\text{B.10b})$$

$$p_j \frac{\partial \hat{Y}}{\partial p_j} = \frac{1}{4} \left(p_j \frac{\partial (H^{(d)})_{\mu\nu}{}^\diamond}{\partial p_j} \tilde{H}^{\mu\nu\diamond} + (H^{(d)})_{\mu\nu}{}^\diamond p_j \frac{\partial \tilde{H}^{\mu\nu\diamond}}{\partial p_j} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d-3}{4} \left[\left((H^{(d)})_{\mu\nu} \diamond - \frac{p \cdot u}{u^0} (H^{(d)})_{\mu\nu 0} \diamond \right) \tilde{H}^{(d)\mu\nu\diamond} \right. \\
&\quad \left. + (H^{(d)})_{\mu\nu} \diamond \left(H^{(d)\mu\nu\diamond} - \frac{p \cdot u}{u^0} \tilde{H}^{(d)\mu\nu 0\diamond} \right) \right] \\
&= \frac{d-3}{2} \left[(H^{(d)})_{\mu\nu} \diamond \tilde{H}^{(d)\mu\nu\diamond} - \frac{p \cdot u}{u^0} (H^{(d)})_{\mu\nu 0} \diamond \tilde{H}^{(d)\mu\nu\diamond} \right] \\
&= 2(d-3) \left(\hat{Y} - \frac{p \cdot u}{u^0} \hat{Y}_0 \right). \tag{B.10c}
\end{aligned}$$

Finalmente, a equação (B.9) pode ser resolvida para u^0 . Após uma covariantização, obtemos o resultado apresentado em (5.124b).

APÊNDICE C

CLASSIFICAÇÃO DOS COVARIANTES BILINEARES

Nas tabelas 6, 7, 8 e 9 mostramos como os 16 covariantes bilineares transformam-se sob a ação das simetrias discretas $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ e $\mathcal{CPT}$, respectivamente. Finalizamos mostrando um resultado bastante útil que diz respeito ao comportamento e classificação dos covariantes bilineares sob a ação da transformação de Lorentz.

Nome		Forma Bilinear	# ^a	% ^b	Paridade C
Escalar	S	$\bar{\psi}\psi$	1	$\bar{\psi}\psi$	+
Pseudoescalar	P	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	+
Vetor	V	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4	$-\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	-
Pseudovetor	A	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	+
Tensor	T	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	+

a # número de componentes independentes

b % Após transformação de conjugação de carga

c $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. O i que aparece na componente pseudoescalar é necessária para torná-lo hermitiano.

Tabela 6 – Covariantes bilineares sob a ação da transformação de conjugação de carga $\mathcal{C}$.

Nome		Forma Bilinear	# ^a	% ^b	Paridade $\mathcal{P}$
Escalar	S	$\bar{\psi}\psi$	1	$\bar{\psi}\psi$	+
Pseudoescalar	P	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1	$-i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	-
Vetor	V	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	-
Pseudovetor	A	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	$-\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	+
Tensor	T	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	+

b % Após transformação de paridade

Tabela 7 – Covariantes bilineares sob a ação da transformação de paridade $\mathcal{P}$.

Nome		Forma Bilinear	# ^a	% ^b	Paridade $\mathcal{T}$
Escalar	S	$\bar{\psi}\psi$	1	$\bar{\psi}\psi$	+
Pseudoescalar	P	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1	$-i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	-
Vetor	V	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4	$-\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	-
Pseudovetor	A	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	$-\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	-
Tensor	T	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	+

b % Após transformação de reversão temporal

Tabela 8 – Covariantes bilineares sob a ação da transformação de reversão temporal $\mathcal{T}$.

Nome		Forma Bilinear	# ^a	% ^b	Paridade $\mathcal{CPT}$
Escalar	S	$\bar{\psi}\psi$	1	$\bar{\psi}\psi$	+
Pseudoescalar	P	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	+
Vetor	V	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4	$-\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	-
Pseudovetor	A	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	$-\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	-
Tensor	T	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	+

b % Após a transformação $\mathcal{CPT}$

Tabela 9 – Covariantes bilineares sob a ação da transformação de conjugação de carga $\mathcal{CPT}$.

Forma Bilinear	# ^a	% ^b	Classificação
$\bar{\psi}\psi$	1	$\bar{\psi}\psi$	$\mapsto$ Escalar
$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1	$i\det(\Lambda)\bar{\psi}\gamma^5\psi$	$\mapsto$ Pseudoescalar
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$\mapsto$ Vetor
$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	$\det(\Lambda)\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	$\mapsto$ Pseudovetor
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	$\mapsto$ Tensor

a # número de componentes independentes

b % Após transformação de Lorentz

$\det(\Lambda)$ aparece nos bilineares γ^5 , pois estes dependem da natureza das transformações de Lorentz, isto é, se são próprias ou impróprias.

Tabela 10 – Covariantes bilineares sob a ação da transformação de Lorentz

REFERÊNCIAS

- 1 D. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973); Phys. Rev. D **8**, 3633 (1973); H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973); H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Phys. Lett. B **47**, 365 (1973); H. Fritzsch and M. Gell-Mann, Current algebra: quarks and what else?, in 16th Int. Conference on High-Energy Physics, Chicago, 1972, Eds. J.D. Jackson, A. Roberts, and R. Donaldson (National Accelerator Laboratory, Batavia, IL, 1973), p. 135 [arXiv:hep-ph/0208010]. Citado na página [1](#).
- 2 S.L. Glashow, Nucl. Phys. B **22**, 579 (1961); S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967); A. Salam, in Proceedings of the 8th Nobel Symposium, Ed. N. Svartholm (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968). Citado na página [1](#).
- 3 S.L. Glashow, I. Iliopoulos and L. Maiani, “Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry,” Phys. Rev. D, **2**, 1285 (1970). Citado na página [1](#).
- 4 N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963); M. Kobayashi and K. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973). Citado na página [1](#).
- 5 B. Greene, *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory*, Vintage Books (2000). Citado 2 vezes nas páginas [xvii](#) e [2](#).
- 6 V.A. Kostelecký and S. Samuel, “Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory,” Phys. Rev. D **39**, 683 (1989). Citado na página [2](#).

- 7 V.A. Kostelecký and S. Samuel, “Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories,” *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989); Citado na página 2.
- 8 V.A. Kostelecký and S. Samuel, “Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings,” *Phys. Rev. D* **40**, 1886 (1989). Citado na página 2.
- 9 V.A. Kostelecký and R. Potting, “CPT and strings,” *Nucl. Phys. B* **359**, 545 (1991). Citado na página 2.
- 10 V.A. Kostelecký and R. Potting, “CPT, strings, and meson factories,” *Phys. Rev. D* **51**, 3923 (1995), hep-ph/9501341. Citado na página 2.
- 11 R. Gambini and J. Pullin, *Phys. Rev. D* **59**, 124021 (1999); M. Bojowald, H.A. Morales-Técotl, and H. Sahlmann, *Phys. Rev. D* **71**, 084012 (2005). Citado na página 2.
- 12 M. Bojowald, H.A. Morales-Técotl, and H. Sahlmann, “Loop quantum gravity phenomenology and the issue of Lorentz invariance,” *Phys. Rev. D* **71**, 084012 (2005). Citado na página 2.
- 13 G. Amelino-Camelia and S. Majid, “Waves on noncommutative space-time and gamma-ray bursts,” *Int. J. Mod. Phys. A* **15**, 4301 (2000). Citado na página 3.
- 14 S.M. Carroll, J.A. Harvey, V.A. Kostelecký, C.D. Lane, and T. Okamoto, “Noncommutative field theory and Lorentz violation,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001). Citado 3 vezes nas páginas 3, 5 e 23.
- 15 F.R. Klinkhamer and C. Rupp, “Spacetime foam, CPT anomaly, and photon propagation,” *Phys. Rev. D* **70**, 045020 (2004). Citado na página 3.
- 16 S. Bernadotte and F.R. Klinkhamer, “Bounds on length scales of classical spacetime foam models,” *Phys. Rev. D* **75**, 024028 (2007). Citado na página 3.
- 17 S. Hossenfelder, “Theory and phenomenology of space-time defects,” *Adv. High Energy Phys.* **2014**, 950672 (2014). Citado na página 3.
- 18 F.R. Klinkhamer, “Z-string global gauge anomaly and Lorentz non-invariance,” *Nucl. Phys. B* **535**, 233 (1998). Citado na página 3.

- 19 F.R. Klinkhamer, “A CPT anomaly,” Nucl. Phys. B **578**, 277 (2000). Citado na página 3.
- 20 F.R. Klinkhamer, “A CPT anomaly,” Nucl. Phys. B **578**, 277 (2000). Citado na página 3.
- 21 F.R. Klinkhamer and J. Schimmel, “CPT anomaly: a Rigorous result in four dimensions,” Nucl. Phys. B **639**, 241 (2002). Citado na página 3.
- 22 K.J.B. Ghosh and F.R. Klinkhamer, “Anomalous Lorentz and CPT violation from a local Chern-Simons-like term in the effective gauge-field action,” Nucl. Phys. B **926**, 335 (2018). Citado na página 3.
- 23 P. Hořava, “Quantum gravity at a Lifshitz point,” Phys. Rev. D **79**, 084008 (2009). Citado na página 3.
- 24 M.S. Berger and V.A. Kostelecký, “Supersymmetry and Lorentz violation,” Phys. Rev. D **65**, 091701 (2002). Citado na página 3.
- 25 J. Wess and B. Zumino, “Supergauge Transformations in Four-Dimensions,” Nucl. Phys. B **70**, 39 (1974). Citado na página 3.
- 26 H. Belich, J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayël-Neto and A.L.M.A. Nogueira, “Supersymmetric extension of the Lorentz- and CPT-violating Maxwell-Chern-Simons model,” Phys. Rev. D **68**, 065030 (2003). Citado na página 3.
- 27 M.S. Berger, “Superfield realizations of Lorentz and CPT violation,” Phys. Rev. D **68**, 115005 (2003). Citado na página 3.
- 28 P. Jain and J.P. Ralston, “Supersymmetry and the Lorentz fine tuning problem,” Phys. Lett. B **621**, 213 (2005). Citado na página 4.
- 29 P.A. Bolokhov, S.G. Nibbelink and M. Pospelov, “Lorentz violating supersymmetric quantum electrodynamics,” Phys. Rev. D **72**, 015013 (2005). Citado na página 4.
- 30 D. Colladay and P. McDonald, “Vector superfields and Lorentz violation,” Phys. Rev. D **83**, 025021 (2011). Citado na página 4.
- 31 D. Redigolo, “Lorentz-violating supersymmetric quantum field theories,” Phys. Rev. D **85**, 085009 (2012). Citado na página 4.

- 32 H.P. Robertson, “Postulate versus Observation in the Special Theory of Relativity,” *Rev. Mod. Phys.* **21**, 378 (1949). Citado na página 4.
- 33 R. Mansouri and R.U. Sexl, “A test theory of special relativity: I. Simultaneity and clock synchronization,” *Gen. Relativ. Gravit.* **8**, 497 (1977). Citado na página 4.
- 34 For reviews see, for example, J. Kowalski-Glikman, *Lect. Notes Phys.* **669**, 131 (2005); G. Amelino-Camelia. Citado na página 4.
- 35 S. Judes and M. Visser, “Conservation laws in “doubly special relativity,” *Phys. Rev. D* **68**, 045001 (2003). Citado na página 4.
- 36 D. Colladay and V.A. Kostelecký, “CPT violation and the standard model,” *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997). Citado 3 vezes nas páginas 4, 9 e 97.
- 37 D. Colladay and V.A. Kostelecký, “Lorentz-violating extension of the standard model,” *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998). Citado 3 vezes nas páginas 4, 6 e 9.
- 38 V.A. Kostelecký, “Gravity, Lorentz violation, and the standard model,” *Phys. Rev. D* **69**, 105009 (2004). Citado na página 4.
- 39 O.W. Greenberg, “CPT violation implies violation of Lorentz invariance,” *Phys. Rev. Lett.* **89**, 231602 (2002). Citado na página 5.
- 40 V.A. Kostelecký and M. Mewes, “Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension,” *Phys. Rev. D* **80**, 015020 (2009). Citado 4 vezes nas páginas 5, 9, 18 e 21.
- 41 V.A. Kostelecký and M. Mewes, “Neutrinos with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension,” *Phys. Rev. D* **85**, 096005 (2012). Citado 7 vezes nas páginas 5, 6, 9, 18, 37, 38 e 72.
- 42 V.A. Kostelecký and M. Mewes, “Fermions with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension,” *Phys. Rev. D* **88**, 096006 (2013). Citado 9 vezes nas páginas xix, 5, 8, 9, 18, 26, 28, 33 e 135.
- 43 V.A. Kostelecký and Y. Ding “Lorentz spinor electrodynamics and Penning traps” *Phys. Rev. D* **94**, 056008 (2016). Citado 2 vezes nas páginas 5 e 18.
- 44 V.A. Kostelecký and Z. Li “Gauge field theories with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension,” *Phys. Rev. D* **99**, 056016 (2019) Citado 4 vezes nas páginas 5, 18, 23 e 149.

- 45 V.A. Kostelecký and Z. Li “Backgrounds in gravitational effective field theory,” *Phys. Rev. D* **103**, 024059 (2021) Citado 2 vezes nas páginas 5 e 18.
- 46 R.C. Myers and M. Pospelov, “Ultraviolet Modifications of Dispersion Relations in Effective Field Theory,” *Phys. Rev. Lett.* **90**, 211601 (2003). Citado na página 5.
- 47 C.M. Reyes, L.F. Urrutia, and J.D. Vergara, “Quantization of the Myers-Pospelov model: The photon sector interacting with standard fermions as a perturbation of QED,” *Phys. Rev. D* **78**, 125011 (2008). Citado na página 5.
- 48 J. Lopez-Sarrion and C.M. Reyes, “Microcausality and quantization of the fermionic Myers-Pospelov model,” *Eur. Phys. J. C* **72**, 2150 (2012). Citado na página 5.
- 49 C.M. Reyes, L.F. Urrutia, and J.D. Vergara, “Quantization of the Myers-Pospelov model: The photon sector interacting with standard fermions as a perturbation of QED,” *Phys. Lett. B* **675**, 336 (2009). Citado na página 5.
- 50 C.M. Reyes, “Causality and stability for Lorentz-CPT violating electrodynamics with dimension-5 operators,” *Phys. Rev. D* **82**, 125036 (2010) Citado na página 5.
- 51 C.M. Reyes, “Unitarity in higher-order Lorentz-invariance violating QED,” *Phys. Rev. D* **87**, 125028 (2013). Citado na página 5.
- 52 M. Schreck, “Quantum field theoretic properties of Lorentz-violating operators of nonrenormalizable dimension in the photon sector,” *Phys. Rev. D* **89**, 105019 (2014). Citado na página 5.
- 53 M. Schreck, “Quantum field theoretic properties of Lorentz-violating operators of nonrenormalizable dimension in the fermion sector,” *Phys. Rev. D* **90**, 085025 (2014) Citado 2 vezes nas páginas 5 e 97.
- 54 C.M. Reyes and L.F. Urrutia, “Unitarity and Lee-Wick prescription at one loop level in the effective Myers-Pospelov electrodynamics: The $e^+ + e^-$ annihilation,” *Phys. Rev. D* **95**, 015024 (2017). Citado 2 vezes nas páginas 5 e 97.
- 55 J.A.A.S. Reis and M. Schreck, “Lorentz-violating modification of Dirac theory based on spin-nondegenerate operators,” *Phys. Rev. D* **95**, 075016 (2017). Citado 6 vezes nas páginas 5, 25, 34, 59, 94 e 97.

- 56 M. Tanabashi *et al.* [Particle Data Group], “Review of particle physics,” *Phys. Rev. D* **98**, 030001 (2018). Citado na página 5.
- 57 S.M. Bilenky, “The history of neutrino oscillations,” *Phys. Scripta T* **121**, 17 (2005). Citado na página 5.
- 58 K. von Klitzing, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **8**, 13 (2017); D. Tong, *Lectures on the quantum Hall effect*, hep-th/1606.06687. Citado na página 6.
- 59 M.J. Allen, V.C. Tung, and R.B. Kaner, “Honeycomb Carbon: A Review of Graphene,” *Chem. Rev.* **110**, 132 (2010). Citado na página 6.
- 60 H. Belich Jr., M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayël-Neto, and M.T.D. Orlando, “Dimensional reduction of a Lorentz- and CPT-violating Maxwell-Chern-Simons model,” *Phys. Rev. D* **67**, 125011 (2003); Erratum: [*Phys. Rev. D* **69**, 109903 (2004)]. Citado 3 vezes nas páginas 6, 41 e 42.
- 61 H. Belich Jr., M.M. Ferreira Jr., and J.A. Helayël-Neto, “Dimensional reduction of the Abelian Higgs Carroll-Field-Jackiw model,” *Eur. Phys. J. C* **38**, 511 (2005). Citado 2 vezes nas páginas 6 e 41.
- 62 M.M. Ferreira Jr., “Low-energy Moller scattering in a Maxwell-Chern-Simons Lorentz-violating model,” *Phys. Rev. D* **70**, 045013 (2004). Citado 2 vezes nas páginas 6 e 41.
- 63 R. Casana, E.S. Carvalho, and M.M. Ferreira Jr., “Dimensional reduction of the CPT-even electromagnetic sector of the standard model extension,” *Phys. Rev. D* **84**, 045008 (2011). Citado 4 vezes nas páginas 6, 41, 86 e 96.
- 64 V.A. Kostelecký and N. Russell, “Data tables for Lorentz and CPT violation,” *Rev. Mod. Phys.* **83**, 11 (2011). Citado 3 vezes nas páginas 6, 34 e 38.
- 65 V.A. Kostelecký and N. Russell, “Classical kinematics for Lorentz violation,” *Phys. Lett. B* **693**, 443 (2010). Citado 12 vezes nas páginas 6, 8, 44, 47, 52, 104, 113, 114, 139, 141, 146 e 150.
- 66 D. Colladay and P. McDonald, “Classical Lagrangians for momentum dependent Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **85**, 044042 (2012). Citado 3 vezes nas páginas 6, 48 e 150.
- 67 N. Russell, “Finsler-like structures from Lorentz-breaking classical particles,” *Phys. Rev. D* **91**, 045008 (2015). Citado 5 vezes nas páginas xix, 6, 48, 105 e 150.

- 68 M. Schreck, “Classical kinematics for isotropic, minimal Lorentz-violating fermion operators,” *Phys. Rev. D* **91**, 105001 (2015). Citado 3 vezes nas páginas 6, 48 e 150.
- 69 V. Bargmann, L. Michel, and V.L. Telegdi, “Precession of the Polarization of Particles Moving in a Homogeneous Electromagnetic Field,” *Phys. Rev. Lett.* **2**, 435 (1959). Citado na página 6.
- 70 P. Finsler, “Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen,” University of Göttingen dissertation, 1918 (Verlag Birkhäuser, Basel, Switzerland, 1951). Citado 2 vezes nas páginas 6 e 48.
- 71 V.A. Kostelecký, “Riemann-Finsler geometry and Lorentz-violating kinematics,” *Phys. Lett. B* **701**, 137 (2011). Citado 3 vezes nas páginas 7, 48 e 150.
- 72 G. Randers, “On an Asymmetrical Metric in the Four-Space of General Relativity,” *Phys. Rev.* **59**, 195 (1941). Citado 2 vezes nas páginas 7 e 49.
- 73 M. Schreck, “Classical Lagrangians and Finsler structures for the nonminimal fermion sector of the Standard-Model Extension,” *Phys. Rev. D* **93**, 105017 (2016). Citado 6 vezes nas páginas 7, 48, 104, 105, 113 e 150.
- 74 J. Foster and R. Lehnert, “Classical-physics applications for Finsler b space,” *Phys. Lett. B* **746**, 164 (2015). Citado 2 vezes nas páginas 7 e 48.
- 75 D. Colladay and P. McDonald, “Singular Lorentz-violating Lagrangians and associated Finsler structures,” *Phys. Rev. D* **92**, 085031 (2015). Citado 3 vezes nas páginas 7, 48 e 150.
- 76 D. Colladay, “Extended Hamiltonian formalism and Lorentz-violating Lagrangians,” *Phys. Lett. B* **772**, 694 (2017). Citado 3 vezes nas páginas 7, 48 e 150.
- 77 V.A. Kostelecký, N. Russell, and R. Tso, “Bipartite Riemann-Finsler geometry and Lorentz violation,” *Phys. Lett. B* **716**, 470 (2012). Citado 4 vezes nas páginas 7, 48, 116 e 150.
- 78 J.E.G. Silva and C.A.S. Almeida, “Kinematics and dynamics in a bipartite-Finsler spacetime,” *Phys. Lett. B* **731**, 74 (2014). Citado 3 vezes nas páginas 7, 48 e 150.

- 79 J.E.G. Silva, R.V. Maluf, and C.A.S. Almeida, “Bipartite-Finsler symmetries,” *Phys. Lett. B* **798**, 135009 (2019). Citado 3 vezes nas páginas 7, 48 e 150.
- 80 B.R. Edwards and V.A. Kostelecký, “Riemann-Finsler geometry and Lorentz-violating scalar fields,” *Phys. Lett. B* **786**, 319 (2018). Citado 8 vezes nas páginas 8, 52, 54, 77, 140, 141, 149 e 150.
- 81 H. Belich, T. Costa-Soares, M.A. Santos, and M.T.D. Orlando, “Violação da simetria de Lorentz”, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **29** (2007). Citado 2 vezes nas páginas xvii e 11.
- 82 Diagrama disponível na apresentação do Dr. M. Mewes intitulada “Overview of the Full SME” e pode ser acessada em <https://iucss.sitohost.iu.edu/sme2021/program.html>. Citado 2 vezes nas páginas xvii e 18.
- 83 V.A. Kostelecký and M. Mewes, “Signals for Lorentz violation in electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **66**, 056005 (2002). Citado 4 vezes nas páginas 20, 22, 83 e 96.
- 84 R. Casana, M.M. Ferreira Jr, A.R. Gomes, and P.R.D. Pinheiro, “Gauge propagator and physical consistency of the CPT-even part of the Standard Model Extension,” *Phys. Rev. D* **80**, 125040 (2009). Citado na página 22.
- 85 R. Casana, M.M. Ferreira Jr, A.R. Gomes, and F.E.P. dos Santos, “Feynman propagator for the nonbirefringent CPT-even electrodynamics of the Standard Model Extension,” *Phys. Rev. D* **82**, 125006 (2010). Citado na página 22.
- 86 F.R. Klinkhamer and M. Schreck, “Consistency of isotropic modified Maxwell theory: Microcausality and unitarity,” *Nucl. Phys. B* **848**, 90 (2011). F.R. Klinkhamer and M. Schreck, “Models for low-energy Lorentz violation in the photon sector: Addendum to ‘Consistency of isotropic modified Maxwell theory’,” *Nucl. Phys. B* **856**, 666 (2012). Citado na página 22.
- 87 M. Schreck, “Analysis of the consistency of parity-odd nonbirefringent modified Maxwell theory,” *Phys. Rev. D* **86**, 065038 (2012). Citado 2 vezes nas páginas 22 e 97.
- 88 M.A. Hohensee, D.F. Phillips, and R.L. Walsworth, “Covariant quantization of Lorentz-violating electromagnetism,” *hep-th/1210.2683*. Citado na página 22.
- 89 M. Cambiaso, R. Lehnert, and R. Potting, “Massive photons and Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **85**, 085023 (2012). Citado na página 22.

- 90 M. Schreck, “Quantum field theory based on birefringent modified Maxwell theory,” *Phys. Rev. D* **89**, 085013 (2014). Citado 2 vezes nas páginas 22 e 97.
- 91 L.H.C. Borges, A.G. Dias, A.F. Ferrari, J.R. Nascimento, and A.Yu. Petrov, *Phys. Lett. B* **756**, 332 (2016); L.H.C. Borges, A.F. Ferrari, and F.A. Barone, *Eur. Phys. J. C* **76**, 599 (2016). Citado na página 23.
- 92 L. Bonetti, L.R. dos Santos Filho, J.A. Helayël-Neto, and A.D.A.M. Spallicci, “Effective photon mass by Super and Lorentz symmetry breaking,” *Phys. Lett. B* **764**, 203 (2017) Citado na página 23.
- 93 L. Bonetti, L.R. dos Santos Filho, J.A. Helayël-Neto, and A.D.A.M. Spallicci, “Photon sector analysis of Super and Lorentz symmetry breaking: effective photon mass, bi-refringence and dissipation,” *Eur. Phys. J. C* **78**, 811 (2018). Citado na página 23.
- 94 R. Casana, M.M. Ferreira Jr., L. Lisboa-Santos, F.E.P. dos Santos, and M. Schreck, “Maxwell electrodynamics modified by CPT-even and Lorentz-violating dimension-6 higher-derivative terms,” *Phys. Rev. D* **97**, 115043 (2018). Citado 2 vezes nas páginas 23 e 97.
- 95 M.M. Ferreira Jr., L. Lisboa-Santos, R.V. Maluf, and M. Schreck, “Maxwell electrodynamics modified by a CPT-odd dimension-5 higher-derivative term,” *Phys. Rev. D* **100**, 055036 (2019). Citado 2 vezes nas páginas 23 e 97.
- 96 L.H.C. Borges, A.G. Dias, A.F. Ferrari, J.R. Nascimento, and A.Yu. Petrov, *Phys. Lett. B* **756**, 332 (2016); A.J.G. Carvalho, A.F. Ferrari, A.M. de Lima, J.R. Nascimento, and A.Yu. Petrov, *Nucl. Phys. B* **942**, 393 (2019). Citado na página 23.
- 97 L.H.C. Borges, A.F. Ferrari, and F.A. Barone, “New effects in the interaction between electromagnetic sources mediated by nonminimal Lorentz violating interactions,” *Eur. Phys. J. C* **76**, 599 (2016). Citado na página 23.
- 98 L. Bonetti, L.R. dos Santos Filho, J.A. Helayël-Neto, and A.D.A.M. Spallicci, *Phys. Lett. B* **764**, 203 (2017). Citado na página 23.
- 99 L. Bonetti, L.R. dos Santos Filho, J.A. Helayël-Neto, and A.D.A.M. Spallicci, *Eur. Phys. J. C* **78**, 811 (2018). Citado na página 23.

- 100 M.A. Anacleto, F.A. Brito, E. Maciel, A. Mohammadi, E. Passos, W.O. Santos, and J.R.L. Santos, “Lorentz-violating dimension-five operator contribution to the black body radiation,” *Phys. Lett. B* **785**, 191 (2018). Citado na página 23.
- 101 J.B. Araujo, A.H. Blin, M. Sampaio, and M.M. Ferreira, “Constraining dimension-six nonminimal Lorentz-violating electron-nucleon interactions with EDM physics,” *Phys. Rev. D* **100**, 015046 (2019). Citado na página 23.
- 102 B. Altschul, “Eliminating the CPT-odd f coefficient from the Lorentz-violating standard model extension,” *J. Phys. A* **39**, 13757 (2006). Citado 2 vezes nas páginas 34 e 118.
- 103 M.M. Ferreira, Jr and F.M.O. Moucherek, “Influence of Lorentz- and CPT-violating terms on the Dirac equation,” *Int. J. Mod. Phys. A* **21**, 6211 (2006). Citado na página 34.
- 104 V.A. Kostelecký and R. Lehnert, “Stability, causality, and Lorentz and CPT violation,” *Phys. Rev. D* **63**, 065008 (2001). Citado na página 34.
- 105 R. Casana and M.M. Ferreira and V.E. Mouchrek-Santos and E.O. Silva, “Generation of geometrical phases and persistent spin currents in 1-dimensional rings by Lorentz-violating terms,” *Physics Letters B* **746**, 171 (2015). Citado na página 34.
- 106 R. Bluhm, V.A. Kostelecký and N. Russell, “Testing CPT with Anomalous Magnetic Moments,” *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1432 (1997). Citado na página 34.
- 107 R. Bluhm, V.A. Kostelecký and N. Russell, “CPT and Lorentz Tests in Hydrogen and Antihydrogen,” *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2254 (1999). Citado na página 34.
- 108 V.A. Kostelecký and A.J. Vargas, “Lorentz and CPT tests with hydrogen, antihydrogen, and related systems,” *Phys. Rev. D* **92**, 056002 (2015). Citado na página 34.
- 109 R. Bluhm, V.A. Kostelecký and C.D. Lane, “CPT and Lorentz Tests with Muons,” *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1098 (2000). Citado na página 34.
- 110 A.H. Gomes, V.A. Kostelecký, and A.J. Vargas, “Laboratory tests of Lorentz and CPT symmetry with muons,” *Phys. Rev. D* **90**, 076009 (2014). Citado na página 34.

- 111 R. Bluhm and V.A. Kostelecký, “Lorentz and CPT Tests with Spin-Polarized Solids,” *Phys. Rev. D* **84**, 1381 (2000). Citado na página 34.
- 112 V.A. Kostelecký and A.J. Vargas, “Lorentz and CPT tests with clock-comparison experiments,” *Phys. Rev. D* **98**, 036003 (2018). Citado na página 34.
- 113 M. Schreck “Vacuum Cherenkov radiation for Lorentz-violating fermions,” *Phys. Rev. D* **96**, 095026 (2017). Citado 2 vezes nas páginas 34 e 59.
- 114 E. Majorana, “Teoria simmetrica dell’elettrone e del positrone,” *Il Nuovo Cimento* **14**, 171-84 (1937). Citado na página 35.
- 115 B. Pontecorvo, “Mesonium and anti-mesonium”, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **6**, 429-431 (1957). Citado na página 37.
- 116 T. Katori, V.A. Kostelecký, and R. Tayloe, “Global three-parameter model for neutrino oscillations using Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **74**, 105009 (2006). Citado na página 37.
- 117 J.S. Díaz, V.A. Kostelecký, and M. Mewes, “Perturbative Lorentz and CPT violation for neutrino and antineutrino oscillations,” *Phys. Rev. D* **80**, 076007 (2009). Citado na página 37.
- 118 J.S. Díaz and V.A. Kostelecký, “Three-parameter Lorentz-violating texture for neutrino mixing,” *Phys. Lett. B* **700**, 25 (2011). Citado na página 37.
- 119 T. Katori [MiniBooNE Collaboration], “Test for Lorentz and CPT violation with the MiniBooNE low-energy excess,” hep-ph/1008.0906. Citado na página 37.
- 120 J.S. Díaz and V.A. Kostelecký, “Lorentz- and CPT-violating models for neutrino oscillations,” *Phys. Rev. D* **85**, 016013 (2012). Citado na página 38.
- 121 A.A. Aguilar-Arevalo *et al.* [MiniBooNE Collaboration]. Test of Lorentz and CPT violation with short baseline neutrino oscillation excesses. *Phys. Lett. B* **718**, 1303 (2013). Citado na página 38.
- 122 T. Katori, V.A. Kostelecký and R. Tayloe, “Global three-parameter model for neutrino oscillations using Lorentz violation,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **221**, 357 (2011). Citado na página 38.

- 123 Y. Abe *et al.* [Double Chooz Collaboration], “First test of Lorentz violation with a reactor-based antineutrino experiment,” *Phys. Rev. D* **86**, 112009 (2012). Citado na página 38.
- 124 T. Katori [MiniBooNE Collaboration], “Tests of Lorentz and CPT violation with MiniBooNE neutrino oscillation excesses,” *Mod. Phys. Lett. A* **27**, 1230024 (2012). Citado na página 38.
- 125 J.S. Díaz, V.A. Kostelecký, and R. Lehnert, “Relativity violations and beta decay,” *Phys. Rev. D* **88**, 071902 (2013). Citado na página 38.
- 126 J.S. Díaz, V.A. Kostelecký, and M. Mewes, “Testing relativity with high-energy astrophysical neutrinos,” *Phys. Rev. D* **89**, 043005 (2014). Citado na página 38.
- 127 J.S. Díaz, “Limits on Lorentz and CPT violation from double beta decay,” *Phys. Rev. D* **89**, 036002 (2014). Citado na página 38.
- 128 J.S. Díaz, “Neutrinos as probes of Lorentz invariance,” *Adv. High Energy Phys.* **2014**, 962410 (2014). Citado na página 38.
- 129 J.S. Díaz, “Tests of Lorentz symmetry in single beta decay,” *Adv. High Energy Phys.* **2014**, 305298 (2014). Citado na página 38.
- 130 J.S. Díaz, “Correspondence between nonstandard interactions and CPT violation in neutrino oscillations.” hep-ph/1506.01936. Citado na página 38.
- 131 J.S. Díaz and F.R. Klinkhamer, “Neutrino refraction by the cosmic neutrino background,” *Phys. Rev. D* **93**, 053004 (2016). Citado na página 38.
- 132 J.S. Díaz and T. Schwetz, “Limits on CPT violation from solar neutrinos,” *Phys. Rev. D* **93**, 093004 (2016). Citado na página 38.
- 133 J.S. Díaz. “Testing Lorentz and CPT invariance with neutrinos,” *Symmetry* **8**, 105 (2016). Citado na página 38.
- 134 C.A. Argüelles, G.H. Collin, J.M. Conrad, T. Katori, and A. Kheirandish, “Search for Lorentz violation in km³-scale neutrino telescopes,” hep-ph/1608.02946. Citado na página 38.
- 135 T. Katori, C.A. Argüelles, and J. Salvado, “Test of Lorentz violation with astrophysical neutrino flavor,” hep-ph/1607.08448. Citado na página 38.

- 136 K. Abe *et al.* [T2K Collaboration], “Search for Lorentz and CPT violation using sidereal time dependence of neutrino flavor transitions over a short baseline,” *Phys. Rev. D* **95**, 111101 (2017). Citado na página 38.
- 137 M.G. Aartsen *et al.* [IceCube Collaboration], “Neutrino interferometry for high-precision tests of Lorentz symmetry with IceCube,” *Nature Phys.* **14**, 961 (2018). Citado na página 38.
- 138 G.V. Dunne, *Aspects of Chern-Simons Theory*, Springer Berlin Heidelberg (1999). Citado 4 vezes nas páginas 38, 39, 40 e 77.
- 139 M. Stone, *Quantum Hall Effect*, (World Scientific, Singapore 1992). Citado na página 38.
- 140 M. Stone, “Edge Waves in the Quantum Hall Effect”, *Ann. Phys.* **207**, 38 (1991). Citado na página 38.
- 141 A.A. Abrikosov, “On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group,” *Sov. Phys. JETP* **5**, 1174 (1957). Citado na página 38.
- 142 H. Nielsen and P. Olesen, “Vortex-line models for Dual Strings,” *Nucl. Phys. B* **61**, 45 (1973). Citado na página 38.
- 143 E. Bogomol’nyi, “Stability of Classical Solutions,” *Sov. J. Nucl. Phys* **24**, 449 (1976). Citado na página 38.
- 144 C. Lee, K. Lee and H. Min, “Self-Dual Maxwell Chern-Simons Solitons,” *Phys. Lett. B* **252**, 79 (1990). Citado na página 38.
- 145 A. Jaffe and C. Taubes, *Vortices and Monopoles*, (Birkhauser 1980). Citado na página 38.
- 146 H.J. de Vega and F. Schaposnik, “Electrically Charged Vortices in Nonabelian Gauge Theories with Chern-Simons Term,” *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2564 (1986). Citado na página 38.
- 147 H.J. de Vega and F. Schaposnik, “Vortices and electrically charged vortices in non-abelian gauge theories,” *Phys. Rev. D* **34**, 3206 (1986). Citado na página 38.
- 148 S.-S. Chern and J. Simons. “Characteristic Forms and Geometric Invariants.” *Annals of Mathematics, Second Series* **99**, no. 1, 48-69 (1974). Citado na página 38.

- 149 S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, “Three-Dimensional Massive Gauge Theories,” *Phys. Rev. D* **48**, 975 (1982). Citado na página 39.
- 150 R. Pisarski and S. Rao, “Topologically Massive Chromodynamics in the Perturbative Regime,” *Phys. Rev. D* **32**, 2081 (1985). Citado na página 40.
- 151 S. Deser and Z. Yang, “A Remark on the Higgs Effect in Presence of Chern-Simons Terms,” *Mod. Phys. Lett. A* **3**, 2123 (1989). Citado na página 40.
- 152 A. Lerda, *Anyons: Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics*, Lecture Notes in Physics Vol. **14** (Springer, Berlin 1992). Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- 153 F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, (World Scientific, Singapore, 1990). Citado na página 40.
- 154 F. Wilczek, “Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles,” *Phys. Rev. D* **49**, 957 (1982). Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- 155 F. Wilczek and A. Zee, “Linking Numbers, Spin, and Statistics of Solitons,” *Phys. Rev. D* **51**, 2250 (1983). Citado na página 40.
- 156 D.P. Arovas, R. Schrieffer, F. Wilczek and A. Zee, “Statistical mechanics of anyons,” *Nucl. Phys. B* **251**, 117 (1985). Citado na página 40.
- 157 R. Jackiw and S.-Y. Pi, “Classical and Quantal Nonrelativistic Chern-Simons Theory,” *Phys. Rev. D* **42**, 3500 (1990). Citado na página 41.
- 158 S.C. Zhang, T. H. Hansson, and S. Kivelson, “Effective-Field-Theory Model for the Fractional Quantum Hall Effect,” *Phys. Rev. Lett.* **62**, 980 (1989). Citado na página 41.
- 159 J.K. Jain, “Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect,” *Phys. Rev. Lett.* **63**, 199 (1989). Citado na página 41.
- 160 S.C. Zhang, “The Chern-Simons-Landau-Ginzburg theory of the fractional quantum Hall effect,” *International Journal of Modern Physics B*, vol **06**, 25 (1992), Citado na página 41.
- 161 G. Murthy and R. Shankar, “Field Theory of the Fractional Quantum Hall Effect,” edited by O. Heinonen cond-mat/9802244. Citado na página 41.

- 162 S. Deser and R. Jackiw, “Higher derivative Chern-Simons extensions,” *Phys. Lett. B* **451**, 73 (1999). Citado na página 41.
- 163 R. Avila, J.R. Nascimento, A.Y. Petrov, C.M. Reyes, and M. Schreck, “Causality, unitarity, and indefinite metric in Maxwell-Chern-Simons extensions,” *Phys. Rev. D* **101**, 055011 (2020). Citado na página 41.
- 164 H. Belich Jr, O.M. Del Cima, M.M. Ferreira Jr, and J.A. Helayel-Neto, “Electron-electron bound states in parity-preserving QED3,” *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. **29**, no. 7, p. 1431 (2003). Citado na página 41.
- 165 O.M. Del Cima, D.H.T. Franco, O. Piguet, and M. Schweda, “No parity anomaly in massless QED3 : A BPHZL approach,” *Physics Letters B*, vol. **680**, no. 1, pp. 108-110 (2009). Citado na página 41.
- 166 P. Maris, “Dynamical Mass Generation in QED3 with Chern-Simons Term,” *Progress of Theoretical Physics Supplement*, vol. **123** (1996). Citado na página 41.
- 167 P.M. Lo and E.S. Swanson, “Parity symmetry in QED3,” *Phys. Rev. D* **83**, 065006 (2011). Citado na página 41.
- 168 W. Armour, J.B. Kogut, and C. Strouthos, “Chiral symmetry breaking and monopole dynamics in noncompact QED3 coupled to a four-Fermi interaction,” *Phys. Rev. D* **82**, 014503 (2010). Citado na página 41.
- 169 H. Belich Jr., M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, and M.T.D. Orlando, “Classical solutions in a Lorentz-violating Maxwell-Chern-Simons electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **68**, 025005 (2003). Citado na página 41.
- 170 R. Casana, M.M. Ferreira Jr, and R.P.M. Moreira, “Consistency analysis of a nonbirefringent Lorentz-violating planar model,” *Eur. Phys. J. C* **72**, 2070 (2012). Citado na página 41.
- 171 M.M. Ferreira Jr., “Electron-electron interaction in a Maxwell-Chern-Simons model with a purely spacelike Lorentz-violating background,” *Phys. Rev. D* **71**, 045003 (2011). Citado na página 41.
- 172 R. Casana, M.M. Ferreira Jr., and R.P.M. Moreira, “Aspects of a planar nonbirefringent and CPT-even electrodynamics stemming from the standard model extension,” *Phys. Rev. D* **84**, 125014 (2011). Citado na página 41.

- 173 M. Planck, “Das Prinzip der Relativitat und die Grundgleichungen der Mechanik,” Verh. Deutsch. Phys. Ges. **8**, 136 (1906). Citado na página [43](#).
- 174 A. Einstein, “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,” Ann. der Physik **49**, 769 (1916). Citado na página [43](#).
- 175 J. Frenkel, “Die Elektrodynamik des rotierenden Elektrons,” Z. Phys. **37**, 243 (1926). Citado na página [43](#).
- 176 L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley, Cambridge, MA, 1951. Citado na página [43](#).
- 177 W. Greiner, *Classical mechanics: point particles and relativity*, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, Germany, 1989. Citado na página [43](#).
- 178 V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, USA, 1978. Citado na página [43](#).
- 179 H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Cambridge, MA, 2000. Citado na página [43](#).
- 180 M. Schreck, “From classical Lagrangians to Hamilton operators in the Standard-Model Extension,” Phys. Rev. D **94**, 025019 (2016). Citado na página [48](#).
- 181 M. Schreck, “Classical kinematics and Finsler structures for nonminimal Lorentz-violating fermions,” Eur. Phys. J. C **75**, 187 (2015). Citado 2 vezes nas páginas [48](#) e [150](#).
- 182 B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, in R. Baker, C. Christensen, and H. Orde, *Bernhard Riemann, Collected Papers* (Kendrick Press, Heber City, Utah, 2004) Citado na página [48](#).
- 183 O. Darrigol, “The mystery of Riemann’s curvature,” Hist. Math. **42**, 47 (2015). Citado na página [48](#).
- 184 P.L. Antonelli, R.S. Ingarden, and M. Matsumoto, *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology* (Springer Science + Business Media, Dordrecht, 1993). Citado 2 vezes nas páginas [48](#) e [50](#).
- 185 D. Bao, S.-S. Chern, and Z. Shen, *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry* (Springer, New York, 2000). Citado 3 vezes nas páginas [48](#), [50](#) e [107](#).

- 186 P.L. Antonelli and T.J. Zastawniak, *Fundamentals of Finslerian Diffusion with Applications* (Springer Science + Business Media, Dordrecht, 1999). Citado na página 50.
- 187 Z. Shen, “Finsler Metrics with $K = 0$ and $S = 0$,” *Canadian Journal of Mathematics*, **55**, 112-132,(2003). Citado 2 vezes nas páginas xviii e 51.
- 188 M. Schreck, “Classical Lagrangians for the nonminimal Standard-Model Extension at higher orders in Lorentz violation,” *Phys. Lett. B* **793**, 70 (2019). Citado 2 vezes nas páginas 52 e 140.
- 189 J.A.A.S. Reis and M. Schreck, “Formal Developments for Lorentz-Violating Dirac Fermions and Neutrinos,” *Symmetry* **11**, 10 (2019). Citado 2 vezes nas páginas 57 e 195.
- 190 P.D. Powell, “Calculating determinants of block matrices,” *math.NA/1112.4379*. Citado na página 162.
- 191 M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*; Perseus Books Publishing, L.L.C.: Reading, MA, USA, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 58, 59 e 88.
- 192 J.A.A.S. Reis, M.M. Ferreira Jr, and M. Schreck, “Dimensional reduction of the electromagnetic sector of the nonminimal standard model extension,” *Phys. Rev. D* **100**, 095026 (2019). Citado 2 vezes nas páginas 75 e 195.
- 193 S.M. Carroll, G.B. Field, and R. Jackiw, “Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990). Citado 2 vezes nas páginas 77 e 96.
- 194 C. Adam and F.R. Klinkhamer, “Causality and CPT violation from an Abelian Chern-Simons-like term,” *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001). Citado 2 vezes nas páginas 77 e 96.
- 195 K.T. McDonald, “Electrodynamics in 1 and 2 spatial dimensions,” <http://www.physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/2dem.pdf>; D. Boito, L.N.S. de Andrade, G. de Sousa, R. Gama, and C.Y.M. London, “On Maxwell’s electrodynamics in two spatial dimensions,” *physics.class-ph/1809.07368*. Citado na página 79.

- 196 M. Ostrogradsky, Mem. Ac. St. Petersburg VI **4**, 385 (1850); M. Borneas, Am. J. Phys. **27**, 265 (1959); F. Riahi, Am. J. Phys. **40**, 386 (1972); R.P. Woodard, Scholarpedia **10**, 32243 (2015). Citado na página [81](#).
- 197 C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, “Lagrangian Procedures for Higher Order Field Equations,” Rev. Bras. Fis. **17**, 14 (1987). Citado na página [81](#).
- 198 C.A.P. Galvão and B.M. Pimentel Escobar, “The canonical structure of Podolsky generalized electrodynamics,” Can. J. Phys. **66**, 460 (1988). Citado na página [84](#).
- 199 F.E. Szabo, *The Linear Algebra Survival Guide*, Academic Press, Massachusetts (2015). Citado na página [88](#).
- 200 R. Bronson and G.B. Costa, *Matrix Methods: Applied Linear Algebra and Sabermetrics*, Academic Press, Massachusetts (2020). Citado na página [88](#).
- 201 S. Andrilli and D. Hecker, *Elementary Linear Algebra*, Academic Press, Massachusetts (2010). Citado na página [88](#).
- 202 R.A. Meyers, *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, Academic Press, Massachusetts (2001). Citado na página [88](#).
- 203 B. Altschul, “Vacuum Cherenkov Radiation in Lorentz-Violating Theories Without CPT Violation,” Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007). Citado na página [96](#).
- 204 R. Lehnert and R. Potting, “Cherenkov effect in Lorentz-violating vacua,” Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004); [Erratum: Phys. Rev. D **70**, 129906 (2004)]. Citado na página [99](#).
- 205 Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory,” Phys. Rev. **115**, 485 (1959). Citado na página [101](#).
- 206 Y. Aharonov and A. Casher, “Topological Quantum Effects for Neutral Particles,” Phys. Rev. Lett. **53**, 319 (1984). Citado na página [101](#).
- 207 Y. Aharonov and J. Anandan, “Phase change during a cyclic quantum evolution,” Phys. Rev. Lett. **58**, 1593 (1987). Citado na página [101](#).
- 208 J.A.A.S. Reis and M. Schreck, “Leading-order classical Lagrangians for the nonminimal standard-model extension,” Phys. Rev. D **97**, 065019 (2018). Citado 2 vezes nas páginas [103](#) e [195](#).

- 209 J.A.A.S. Reis and M. Schreck, “Classical Lagrangians for the nonminimal spin-nondegenerate Standard-Model extension at higher orders in Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **103**, 095029 (2021). Citado 2 vezes nas páginas 103 e 195.
- 210 Z. Shen, *Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces*, Kluwer Academic, Dordrecht (2001). Citado na página 137.
- 211 L. Ackerman, M.R. Buckley, S.M. Carroll, and M. Kamionkowski, “Dark matter and dark radiation” *Phys. Rev. D*. **79**, 023519 (2009). Citado na página 147.
- 212 D. Hooper and L.-T. Wang, “Possible evidence for axino dark matter in the galactic bulge,” *Phys. Rev. D*. **70**, 063506 (2004). Citado na página 147.
- 213 M. Schreck, “Eikonal approximation, Finsler structures, and implications for Lorentz-violating photons in weak gravitational fields,” *Phys. Rev. D*, **92**, 125032 (2015). Citado na página 139.
- 214 V.A. Kostelecký and Z. Li, “Backgrounds in gravitational effective field theory,” *Phys. Rev. D* **103**, 024059 (2021). Citado na página 149.

Anexos

ANEXO A

TRABALHOS PUBLICADOS

Os resultados desta Tese proporcionaram os artigos anexados a seguir [189, 192, 208, 209]:

Leading-order classical Lagrangians for the nonminimal standard-model extension

J. A. A. S. Reis^{*} and M. Schreck[†]*Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão, 65080-805 São Luís, Maranhão, Brazil*

(Received 14 December 2017; published 29 March 2018)

In this paper, we derive the general leading-order classical Lagrangian covering all fermion operators of the nonminimal standard-model extension (SME). Such a Lagrangian is considered to be the point-particle analog of the effective field theory description of Lorentz violation that is provided by the SME. At leading order in Lorentz violation, the Lagrangian obtained satisfies the set of five nonlinear equations that govern the map from the field theory to the classical description. This result can be of use for phenomenological studies of classical bodies in gravitational fields.

DOI: [10.1103/PhysRevD.97.065019](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.065019)

I. INTRODUCTION

Effects from gravitational physics and quantum physics are expected to be on an equal footing at the Planck scale, which is a scenario that could induce minuscule violations of Lorentz invariance. On the one hand, indications for such violations exist in closed-string theories [1–5] and loop quantum gravity [6,7]. On the other hand, models of noncommutative spacetimes [8,9], spacetime foam models [10–12], (chiral) field theories defined on spacetimes with nontrivial topologies [13–16], and Hořava-Lifshitz gravity [17] are based on the assumption that Lorentz invariance is violated. For several decades, violations of this fundamental symmetry have been looked for where until the end of the last millennium, these experimental searches had been rather unsystematic. To be able to compare the results of different experiments to each other and to make theoretical predictions of possible experimental signals, the minimal standard-model extension (SME) was established in [18,19]. The minimal SME is a field-theory framework parametrizing all power-counting renormalizable Lorentz-violating contributions that are consistent with both coordinate covariance and the gauge structure of the standard model. Each contribution is decomposed into controlling coefficients and a field operator suitably contracted to form an observer Lorentz scalar. In gravity, Lorentz invariance is a local concept and a parametrization of deviations from local Lorentz invariance, local position invariance, and the

weak equivalence principle in terms of minimal operators was provided in [20]. The nongravitational part of the SME was extended in [21–23] to include all operators of arbitrary mass dimension where this generalization is called the nonminimal SME. It is important to recall that *CPT* violation implies Lorentz violation in effective field theory in Minkowski spacetime [24], which is why all *CPT*-violating operators are contained in the SME, as well.

Most experimental tests of gravity are performed with classical test bodies, cf. [25] for a compilation of all current constraints on controlling coefficients. General relativity is a classical theory, after all. However, the field-theory description of the SME is not entirely suitable to predict effects of Lorentz violation within classical physics, which is why it would be highly desirable to have a map from the Lagrange density in field theory to the classical Lagrangian of a relativistic, pointlike particle. A map that provides a classical Lagrangian from the field-theory dispersion equation was constructed explicitly in [26]. Based on this construction, the first classical Lagrangians for a wide range of controlling coefficients within the minimal SME were obtained in the same paper. These results are exact and are composed of Lagrangians for a combination of a , c , e , f coefficients, the full Lagrangian for the b coefficients, and partial results for the d , H coefficients. This set of Lagrangians was complemented by results for more involved families of d , g coefficients given in [27,28].

Based on some of these findings, the motion of a charged, classical particle under the influence of both a Lorentz-violating background field and an electromagnetic field was studied in [29]. In addition, the modified time evolution of a semiclassical analog of spin was examined with the BMT equation. In [30] it was demonstrated that the procedure of finding Lagrangians from the field theory description can be reversed at first order in Lorentz violation. Thus, it is possible to reobtain parts of the SME Hamilton operator from a

^{*}jalfieres@gmail.com
[†]marco.schreck@ufma.br

Published by the American Physical Society under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International license. Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI. Funded by SCOAP³.

Dimensional reduction of the electromagnetic sector of the nonminimal standard model extension

João A. A. S. Reis^{1,2,*}, Manoel M. Ferreira, Jr.^{1,†} and Marco Schreck^{1,‡}

¹*Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão, Campus Universitário do Bacanga, São Luís—MA 65080-805, Brazil*

²*Departamento de Física, Centro de Educação, Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Maranhão, Cidade Universitária Paulo VI, São Luís—MA 65055-310, Brazil*



(Received 11 September 2019; published 26 November 2019)

We construct a Lorentz-violating electrodynamics in $(1 + 2)$ spacetime dimensions from the electromagnetic sector of the nonminimal standard model extension (SME) in $(1 + 3)$ dimensions. Subsequently, we study some of the basic properties of this framework. We obtain the field equations, the Green's functions, and the perturbative Feynman rules. Furthermore, the modified dispersion relations are computed at leading order in Lorentz violation. We then remove the unphysical degrees of freedom from the electromagnetic Green's function that are present due to gauge invariance. The resulting object is used to construct the general solutions of the uncoupled field equations with external inhomogeneities present. This modified planar electrodynamics may be valuable to describe electromagnetic phenomena in two-dimensional condensed-matter systems. Furthermore, it supports a better understanding of the electromagnetic sector of the nonminimal SME.

DOI: [10.1103/PhysRevD.100.095026](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.095026)

I. INTRODUCTION

Violations of Lorentz invariance have been hypothesized to emerge from phenomena related to Planck-scale physics such as strings [1], spin networks described by loop quantum gravity [2], noncommutative spacetimes [3], spacetime foam [4], nontrivial spacetime topologies [5], and effects connected to UV completions of general relativity with Hořava-Lifshitz gravity [6] as a prominent example. The standard model extension (SME) [7] is a well-established framework to parametrize possible deviations from Lorentz invariance *in vacuo*. It is an effective field theory in $(1 + 3)$ spacetime dimensions including the standard model fields and the Riemann curvature tensor when gravity is taken into account.

Each Lorentz-violating contribution is composed of a background field tensor contracted with a physical field operator of the theory. The Lagrange density of the SME transforms as a Lorentz scalar under coordinate changes

(observer Lorentz transformations). However, the background fields transform trivially under Lorentz transformations of an experimental apparatus (particle Lorentz transformations), whereupon the theory is not invariant under transformations of this kind. Each background field involves preferred spacetime directions and controlling coefficients describing the magnitude of Lorentz violation. At the level of effective field theory, a violation of discrete *CPT* symmetry implies a violation of Lorentz invariance [8]. Therefore, a subset of the contributions in the SME is *CPT* violating.

The minimal SME was constructed including renormalizable field operators of mass dimensions 3 and 4 [7], where Lorentz violation is controlled by a finite number of coefficients. To date, quite a large number of these coefficients has been tightly constrained by experimental tests [9]. The nonminimal SME [10,11] was proposed as an extension of the minimal version that involves higher-dimensional operators. Because of that, the latter contains an infinite amount of controlling coefficients that are contracted with field operators of arbitrary mass dimension d . The mass dimension of these field operators increases when additional four-derivatives are included. The more four-derivatives are present in a certain term, the more dominant this particular term becomes with rising energy.

Contributions of the nonminimal SME were shown to be generated in noncommutative field theories after applying the Seiberg-Witten map [12]. They can also arise from

*jalferes@gmail.com
†manojr.ufma@gmail.com
‡marco.schreck@ufma.br

Published by the American Physical Society under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI. Funded by SCOAP³.

Article

Formal Developments for Lorentz-Violating Dirac Fermions and Neutrinos

João Alfíeres Andrade de Simões dos Reis ^{1,2}  and Marco Schreck ^{1,*} 

¹ Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão, Campus Universitário do Bacanga, São Luís–MA 65080-805, Brazil; jalfieres@gmail.com

² Departamento de Física, Centro de Educação, Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Maranhão, Cidade Universitária Paulo VI, São Luís–MA 65055-310, Brazil

* Correspondence: marco.schreck@ufma.br; Tel.: +55-(98)3272-8293

Received: 31 August 2019; Accepted: 17 September 2019; Published: 24 September 2019



Abstract: The current paper is a technical work that is focused on Lorentz violation for Dirac fermions as well as neutrinos, described within the nonminimal Standard-Model Extension. We intend to derive two theoretical results. The first is the full propagator of the single-fermion Dirac theory modified by Lorentz violation. The second is the dispersion equation for a theory of N neutrino flavors that enables the description of both Dirac and Majorana neutrinos. As the matrix structure of the neutrino field operator is very involved for generic N , we will use sophisticated methods of linear algebra to achieve our objectives. Our main finding is that the neutrino dispersion equation has the same structure in terms of Lorentz-violating operators as that of a modified single-fermion Dirac theory. The results will be valuable for phenomenological studies of Lorentz-violating Dirac fermions and neutrinos.

Keywords: Lorentz and CPT violation; Standard-Model Extension; Dirac fermions; Dirac neutrinos; Majorana neutrinos; determinants of block matrices

1. Introduction

Neutrinos are both interesting and elusive particles. According to the Standard Model of particle physics, there are three neutrino flavors that correspond to the flavors of the three charged leptons—the electron neutrino ν_e , the muon neutrino ν_μ and the tau neutrino ν_τ . Neutrinos do not carry electric charge and are only produced in processes mediated by the weak interaction [1]. When neutrinos propagate a distance, the probability of detecting a certain flavor changes with time. These neutrino oscillations are quantum mechanical in nature. They have their origin in the fact that the eigenstates of the kinematic Hamiltonian and the flavor eigenstates produced in interactions do not correspond to each other. Instead, these two distinct bases are related by the unitary PMNS matrix [2]. Neutrino oscillations indicate that neutrinos have mass, although their mass is that tiny to not have been measured directly, so far. Therefore, they practically propagate with the speed of light.

Measuring the CP -violating phase that is contained in the PMNS matrix is currently one of the hot topics in neutrino physics. Apart from CP -violation, neutrinos may be subject to CPT violation due to physics at the Planck scale such as strings [3,4]. Since they travel almost with the speed of light, they are strongly boosted with respect to the Sun-centered equatorial frame [5] and CPT -violating effects may accumulate over long distances. A violation of CPT symmetry implies a violation of Lorentz invariance in the context of effective field theory [6], whereby it makes sense to use neutrinos as a testbed for the search for Lorentz violation. To do so, a general comprehensive framework to parameterize Lorentz violation is desirable. The latter is provided by the Standard-Model Extension (SME). Its minimal version including field operators of mass dimensions 3 and 4 was developed in References [7,8].

Classical Lagrangians for the nonminimal spin-nondegenerate Standard-Model extension at higher orders in Lorentz violation

João A. A. S. Reis^{1,2,*} and Marco Schreck^{1,†}

¹*Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão, Campus Universitário do Bacanga, São Luís (MA), 65085-580, Brazil*

²*Departamento de Física, Centro de Educação, Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Maranhão, Cidade Universitária Paulo VI, São Luís (MA), 65055-310, Brazil*



(Received 27 March 2021; accepted 5 April 2021; published 26 May 2021)

We present new results for classical-particle propagation subject to Lorentz violation. Our analysis is dedicated to spin-nondegenerate operators of arbitrary mass dimension provided by the fermion sector of the Standard-Model extension. In particular, classical Lagrangians are obtained for the operators $\hat{b}_\mu$ and $\hat{H}_{\mu\nu}$ as perturbative expansions in Lorentz violation. The functional dependence of the higher-order contributions in the background fields is found to be quite peculiar, which is probably attributed to particle spin playing an essential role for these cases. This paper closes one of the last gaps in understanding classical-particle propagation in the presence of Lorentz violation. Lagrangians of the kind presented will turn out to be valuable for describing particle propagation in curved backgrounds with diffeomorphism invariance and/or local Lorentz symmetry explicitly violated.

DOI: [10.1103/PhysRevD.103.095029](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.095029)

I. INTRODUCTION

Theories of physics at the Planck scale such as strings [1], loop quantum gravity [2], noncommutative spacetime structures [3], and spacetime foam [4] as well as nontrivial spacetime topologies [5] and Hořava-Lifshitz gravity [6] predict violations of Lorentz invariance. Planck-scale physics is presently not testable by direct means, but the low-energy fingerprints of Lorentz violation could show up in feasible experiments performed at much lower energies. To be able to translate the absence of signals for Lorentz violation into constraints on meaningful physical quantities, the Standard-Model extension (SME) was constructed [7,8] as an effective field theory framework that parametrizes deviations from Lorentz symmetry. Searches for *CPT* violation are sometimes considered as more important than searches for Lorentz violation. Since *CPT* violation implies Lorentz violation in effective field theory according to a theorem by Greenberg [9], the SME automatically comprises all *CPT*-violating operators.

The SME can be decomposed into a nongravitational [7,10–12] and a gravitational part [8,13], where each of

them on its own consists of a minimal and a nonminimal sector. The minimal SME incorporates Lorentz-violating field operators of mass dimensions 3 and 4, whereas the nonminimal SME comprises all higher-dimensional operators. The nonminimal contributions for photons, neutrinos, and Dirac fermions without gravity are neatly classified in [10,11] where [12] provides a more general classification that respects the gauge structure of the Standard Model (SM). The most recent work [13] clarifies various aspects of Lorentz and diffeomorphism violation in gravity and introduces a method to construct operators of arbitrary mass dimension that are invariant under general coordinate transformations. Besides, a $(3 + 1)$ decomposition of the minimal SME gravity sector was performed in [14] and turned out to be useful for studies of Lorentz violation in cosmology. At large, investigations of Lorentz violation in gravity can be intricate, which is why linearized gravity is taken as the base of a series of papers such as [15,16].

One of the great successes of the SME over the past two decades is the large number of tight constraints on both minimal and nonminimal Lorentz violation in the nongravitational part [17]. Lorentz violation in the gravity sector has also been constrained, but most of these bounds are significantly weaker than those of the nongravitational SME. The reason is undoubtedly that gravitational experiments of high precision are more challenging to perform in comparison to experiments that are insensitive to gravity. After all, the experimental value of Newton's constant has the largest experimental uncertainty in comparison to the remaining constants of nature.

*joao.andrade@discente.ufma.br

†marco.schreck@ufma.br

Published by the American Physical Society under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International license. Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI. Funded by SCOAP³.