

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Luís Fernando Carvalho Pereira

**Quantização de Landau, magnetização e correntes
persistentes em um anel bidimensional no espaço curvo**

São Luís

2022

Luís Fernando Carvalho Pereira

**Quantização de Landau, magnetização e correntes
persistentes em um anel bidimensional no espaço curvo**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Edilberto Oliveira Silva

São Luís

2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Pereira, Luís Fernando Carvalho.

Quantização de Landau, magnetização e correntes persistentes em um anel bidimensional no espaço curvo / Luís Fernando Carvalho Pereira. - 2016.
48 f.

Orientador(a): Edilberto Oliveira Silva.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2016.

1. Anel mesoscópico. 2. Corrente persistente. 3. Magnetização. 4. Potencial geométrico. 5. Quantização de Landau. I. Silva, Edilberto Oliveira. II. Título.

Luís Fernando Carvalho Pereira

Quantização de Landau, magnetização e correntes persistentes em um anel bidimensional no espaço curvo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Física.

Trabalho aprovado. São Luís, setembro de 2016:

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva
(UFMA)

Prof. Dr. Moisés Porfírio Rojas Leyva
(UFLA)

Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro
(UFMA)

Prof. Dr. Eduardo Moraes Diniz
(UFMA)

São Luís
2022

Este trabalho é dedicado aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Wilson Pereira e Maria da Graça Carvalho Pereira, e a minha irmã Keila Maria Carvalho Pereira.

A minha tia Ednólia, a minha madrinha Socorro e a minha irmã Rosete.

Ao professor Edilberto Oliveira Silva pelo aprendizado, compreensão, incentivo e amizade que tenho recebido desde a graduação.

Aos colegas de curso. De fato, estivemos juntos nas árduas horas de estudo, sempre um apoiando o outro.

À Lucimary Marques Ferreira, secretária do Programa de Pós-Graduação em Física.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Física, em especial ao professor Rodolfo Alván Casana Sifuentes. Não raros foram os momentos em que ele indagava sobre minha pesquisa, sempre prestativo em contribuir com alguma informação.

Aos professores da banca de defesa de dissertação por aceitarem o convite e por terem contribuído com boas informações e dicas para a versão final desse trabalho.

Por fim, à CAPES pelo suporte financeiro durante todo o mestrado.

Resumo

Estudamos o movimento de um elétron confinado a um anel 2D na presença de um campo magnético uniforme e um campo de Aharonov-Bohm (AB) atravessando o centro do anel. O anel é definido por um potencial radial. Não levamos em consideração o spin do elétron. O anel está imerso em uma superfície curva, a qual escolhemos como sendo a superfície de um cone. A dinâmica do sistema é governada pela equação de movimento de Schrödinger no espaço curvo. Como consequência da geometria do modelo, surge o chamado potencial geométrico. Esse potencial geométrico é dado em termos das curvaturas média e Gaussiana. Esta última apresenta uma singularidade na região $r = 0$. As funções de onda e os autovalores de energia são calculados. A partir desses dois resultados, estudamos como a curvatura da superfície, bem como os campos magnéticos envolvidos influenciam nas propriedades de um elétron confinado a um anel 2D. Ainda nesse contexto, estudamos a magnetização e a corrente persistente. Por fim, estudamos as propriedades dos principais casos limites obtidos a partir do modelo de potencial do anel, tais como o fio quântico 2D, o anel quântico 1D, o ponto quântico e o anti-ponto quântico.

Palavras-chave: Quantização de Landau. Efeito Aharonov-Bohm. Ponto quântico. Anti-ponto quântico. Magnetização. Corrente persistente. Singularidade. Potencial geométrico. Curvatura média. Curvatura gaussiana. Anel mesoscópico

Abstract

In this study, we investigated the movement of an electron confined to a 2D ring in the presence of a uniform magnetic field and an Aharonov-Bohm (AB) field through the center of the ring. The ring is defined by a radial potential. We do not take into account the electron spin. The ring is immersed in a curved surface, which is chosen as the surface of a cone. The dynamics of the system is governed by the Schrödinger equation of motion in curved space. As a result of the geometry model, called the geometric potential arises. This geometric potential is given in terms of the mean and Gaussian curvatures. The latter presents a singularity at region $r = 0$. The potential that defines the ring is inserted into the Schrödinger equation via coupling vector. The wave functions and the energy eigenvalues are calculated. From these two results we studied how the curvature of the surface, as well as the magnetic fields influence the characteristics of an electron confined to a geometry of a 2D ring. In the same context, we studied the magnetization and the persistent current. Finally, we studied the properties of the main limiting cases derived from the potential of the ring model, such as 2D quantum wire, a quantum ring 1D, the quantum dot and the quantum anti-section.

Keywords: Landau quantization. Aharonov-Bohm effect. Quantum dot. Quantum antidot. Magnetization. Persistent current. Singularity. Geometric potential. Mean curvature. Gaussian curvature. Mesoscopic ring

Lista de Figuras

Figura 1 – Potencial radial (linha preta contínua) definido pela equação $\Delta r = 600$ nm em $E_F = 8$ meV (2.1), que descreve um anel GaAs com $r_0 = 800$ nm e $\Delta r = 600$ nm em $E_F = 8$ meV. A linha vermelha tracejada corresponde ao potencial parabólico definido pela Eq. (2.5) com $\hbar\omega_0 = 0,449$ meV.	13
Figura 2 – Superfície cônica de déficit angular γ	20

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	POTENCIAL RADIAL	12
3	A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NO ESPAÇO CURVO	14
3.1	Equação de movimento	15
4	ANEL QUÂNTICO 2D	19
4.1	Solução da equação radial	22
4.2	Autovalores de energia	25
4.2.1	O campo magnético é nulo	27
4.2.2	O mínimo das sub-bandas com B não nulo	28
4.2.3	O raio e a largura de um estado do anel	29
4.3	Magnetização e correntes persistentes em um anel quântico 2D . .	30
5	OUTROS SISTEMAS MESOSCÓPICOS	33
5.1	O fio quântico	33
5.2	O anel quântico 1D	34
5.3	O ponto quântico	35
5.4	O anti-ponto quântico	36
6	CONCLUSÃO	37
	REFERÊNCIAS	39
	APÊNDICES	43
	APÊNDICE A – NÍVEIS DE LANDAU	44
	APÊNDICE B – O EFEITO AHARONOV-BOHM	46

1 Introdução

Condutores cujas as dimensões estão entre o microscópico e o macroscópico são chamados mesoscópicos [1]. Para sabermos se um sistema é microscópico, mesoscópico ou macroscópico, devemos definir o livre caminho médio L_m e o comprimento de coerência de fase L_ϕ . O livre caminho médio L_m é o percurso médio entre duas colisões, em outras palavras, é o percurso médio até que o momento inicial $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ da partícula seja destruído. O comprimento de coerência de fase é a distância pela qual ainda é possível acompanhar a fase da função de onda antes que ela seja perdida. Agora, seja L o tamanho do sistema físico a ser estudado. Se o sistema físico é mesoscópico, então [2]:

$$L \leq L_m \tag{1.1}$$

e

$$L \leq L_\phi. \tag{1.2}$$

Um condutor em forma de anel sujeito a campos magnéticos é conhecido por exibir vários efeitos de interferência quântica [3]. Como exemplo de interferência quântica, consideremos o efeito Aharonov-Bohm (AB) [4] e correntes persistentes [5, 6]. O fluxo de AB tem um efeito puramente de gauge. Isso resulta em autovalores de energia periódicas com relação ao fluxo de AB com período $\Phi_0 = h/e$. Nessa última expressão, e é a carga do elétron e h é a constante de Planck. Se o anel estiver isolado, então existirá uma corrente persistente que também oscilará com o fluxo de AB [7]. Outros efeitos de interferência quântica são: o efeito Hall quântico [8, 9] e a fase de Berry [10]. Contudo, experimentos mostraram fenômenos que não podem ser explicados usando o modelo de anel 1D. O problema principal está no fato de que a largura de um anel 1D não é finita. Em um anel com largura finita, não somente são importantes os efeitos de múltiplos canais, a penetração do campo magnético na região condutora do anel também tem uma grande importância [7, 11]. Tan e Inkson propõem um modelo de anel bidimensional. Com base nesse modelo apresentaram uma descrição completa para os estados do elétron em um anel bidimensional atravessado por um fluxo de AB e sujeito a um campo magnético uniforme. Outras propriedades físicas que o sistema possa apresentar também foram derivadas, como por exemplo a magnetização e correntes persistentes. O modelo matemático do anel proposto por Tan e Inkson também permite conhecer as energias de um elétron confinado em outros sistemas mesoscópicos sem necessidade de uma outra análise matemática. Isso acontece com uma simples interpretação dos parâmetros do modelo de potencial. Um exemplo seria o dot quântico, no qual o elétron é confinado nas três direções, ou, o que significa a mesma coisa, não tem grau de liberdade. Contudo, os recentes progressos em nanotecnologia têm tornado possível produzir camadas de curvas 2D de tamanhos variados e de diferentes

geometrias [3]. Há a necessidade de conhecer como um sistema mesoscópico se comporta quando imerso em uma superfície curva. Ou, em outras palavras, quais seriam os efeitos da curvatura sobre as propriedades de um sistema nanométrico. Efeitos de curvatura na condutância, na magnetização e em correntes persistentes são alguns fenômenos estudados. Podemos citar o trabalho de Bulaev *et. al.* [3] que estudaram o efeito de uma curvatura negativa (plano de Lobachevsky) sobre a magnetização e correntes persistentes em anéis e dots quânticos. A nossa proposta é entender como as propriedades físicas calculadas por Tan e Inkson mudam quando o anel quântico está imerso em uma superfície curva. Nós escolhemos a superfície como sendo um cone definido pelo elemento de linha em coordenadas polares. A geometria desse elemento de linha estabelece que o movimento de uma partícula pode ocorrer em duas situações: na superfície de um cone ou de um anti-cone. Como uma consequência da topologia não trivial do cone e também devido ao confinamento bidimensional, o potencial geométrico deve ser levado em consideração. Veremos que o potencial geométrico contém um termo singular. Essa situação implica que a função de onda irregular na origem não pode ser desprezada [12]. Contudo, nos limitaremos a estudar somente a função de onda regular ou, o que é equivalente, eliminar o potencial δ da equação de movimento. O caso geral incluindo a região $r = 0$ ainda está sendo estudado e não será considerado em nosso trabalho.

A estrutura deste trabalho é apresentada como segue. No primeiro capítulo, apresentamos o modelo de potencial do anel proposto por Tan e Inkson e apresentamos algumas de suas propriedades. Esse potencial é composto por três termos, sendo um centrífugo, outro representando o potencial de um oscilador e um termo constante. O segundo capítulo é dedicado ao estudo da equação de Schrödinger no espaço curvo. Nessa nova geometria, surge o chamado potencial geométrico. Esse potencial é resultante da curvatura da superfície, que por sua vez, depende intrinsecamente da métrica considerada. No terceiro capítulo, usamos o que foi desenvolvido nos dois primeiros capítulos. O modelo estudado em nosso trabalho é constituído por um anel imerso em um espaço curvo. Em praticamente todos os sistemas investigados aqui consideramos a presença de um campo magnético uniforme e o campo magnético obtido do potencial de Aharonov-Bohm. A razão disso é que podemos investigar algumas propriedades, como por exemplo, a magnetização e correntes persistentes. A função de onda e as energias permitidas a um elétron, confinado a uma região anelar bidimensional, são encontradas. No quarto capítulo, fazemos um estudo sobre outros sistemas mesoscópicos obtidos do modelo de anel: o fio quântico 2D; o anel 1D; o ponto quântico; o anti-ponto quântico. Em todos os casos derivamos o espectro de energia. Basicamente, essa dissertação aborda o problema da quantização não-relativística de Landau para um elétron, sem a contribuição do spin, confinado a um anel quântico no espaço curvo. Desse modo, achamos conveniente acrescentar um breve apêndice sobre os níveis de Landau e o efeito Aharonov-Bohm.

2 Potencial radial

Atualmente, estruturas quânticas tipo anel têm sido bastante estudadas em Matéria Condensada e Óptica Eletrônica [13]. Os anéis quânticos são modelos úteis para estudar fenômenos de interferência quântica. Quando imersos em uma região em que há campos magnéticos, os anéis quânticos exibem vários efeitos, como por exemplo, o efeito Aharonov-Bohm, o efeito Hall, correntes persistentes, etc.

O modelo de potencial representando um anel localizado proposto por Inkson é [7]

$$V(r) = \frac{a_1}{r^2} + a_2 r^2 - V_0. \quad (2.1)$$

O primeiro termo exclui o elétron da região central $r = 0$, o segundo termo representa o potencial do oscilador harmônico, responsável por confinar o elétron em uma região finita [14] e $V_0 = 2\sqrt{a_1 a_2}$ é uma constante. Quando $r \rightarrow \infty$, o segundo termo é dominante enquanto que para $r \rightarrow 0$, o termo dominante é o potencial centrífugo. O potencial (2.1) só admite estados ligados, pois quando $r \rightarrow \pm\infty$ temos que $V(r) \rightarrow \infty$.

Vamos, agora, analisar as propriedades do potencial (2.1). Para $V(r_0) = 0$, obtemos

$$r_0 = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.2)$$

Observe que $V(r_0) = 0$, então as energias do anel quântico não podem ser negativas, já que para uma função de onda normalizável a energia não pode ser menor do que o valor mínimo do potencial, $E < V(r_0)$ [15]. Contudo, essa não é a única condição de normalização. Se a energia for maior do que o potencial, $E > V(r)$, então a função de onda será não normalizável e o estado será de espalhamento. Um exemplo, seria o caso da partícula livre [15]. O ponto r_0 (2.2) também é o ponto de mínimo do potencial, isto é,

$$\frac{dV(r)}{dr} \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (2.3)$$

com

$$\frac{d^2V(r)}{dr^2} \Big|_{r=r_0} > 0. \quad (2.4)$$

Para r muito próximo do mínimo r_0 , o potencial (2.1) tem a seguinte forma parabólica:

$$V_{\text{parab}}(r) \approx \frac{1}{2} \omega_0^2 \mu (r - r_0)^2, \quad (2.5)$$

onde μ é a massa efetiva do elétron e

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8a_2}{\mu}} \quad (2.6)$$

é a frequência de oscilação.

A energia de Fermi E_F é por definição a energia do nível mais alto ocupado no estado fundamental de um sistema de N elétrons. O estado fundamental é caracterizado como o estado de N elétrons à temperatura zero absoluto [16]. Em uma dada energia de Fermi, o raio externo (interno) r_+ (r_-) do anel é dado por

$$r_{\pm} = \sqrt{\frac{(E_F + V_0) \pm \sqrt{E_F^2 + 2V_0E_F}}{2a_2}}. \quad (2.7)$$

Se $E_F \ll V_0$, a largura do anel pode ser dada por

$$\Delta r = \sqrt{\frac{8E_F}{\mu\omega_0^2}}. \quad (2.8)$$

Além disso, o potencial (2.1) é muito flexível. O raio e a largura do anel podem ser ajustados de acordo com a escolha que fazemos para os parâmetros a_1 e a_2 . Usando ainda o potencial (2.1), podemos a partir de certos limites descrever algumas estruturas citadas anteriormente: para $r_0 = \text{constante}$ e $\omega_0 \rightarrow \infty$, temos um anel 1D; para $\omega_0 = \text{constante}$ e $r_0 \rightarrow \infty$, temos um fio 2D; para $a_1 = 0$, um ponto quântico; para $a_2 = 0$, um anti-ponto quântico isolado.

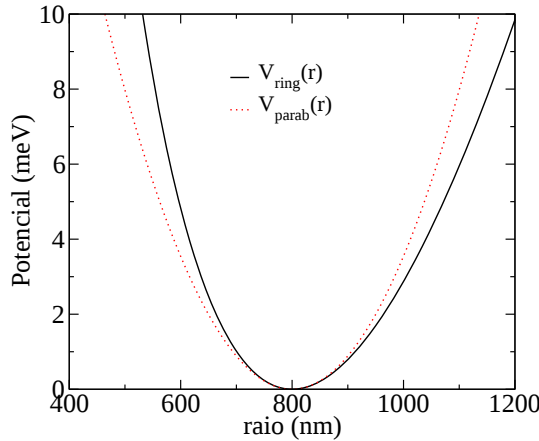


Figura 1 – Potencial radial (linha preta contínua) definido pela equação $\Delta r = 600$ nm em $E_F = 8$ meV (2.1), que descreve um anel GaAs com $r_0 = 800$ nm e $\Delta r = 600$ nm em $E_F = 8$ meV. A linha vermelha tracejada corresponde ao potencial parabólico definido pela Eq. (2.5) com $\hbar\omega_0 = 0,449$ meV.

Na Fig. 1, exibimos o potencial de confinamento $V(r)$ dado pela equação (2.1), que corresponde à linha contínua. Consideramos $a_1 = 9,1022 \times 10^6$ meV nm² e $a_2 = 2,222 \times 10^{-5}$ meV nm⁻² [11]. Com esses valores o raio médio do anel é dado por $r_0 = 800$ nm. Consideramos a massa efetiva do elétron $\mu = 0,0067\mu_e$, onde μ_e é a massa do elétron. Esses dados foram usados na Ref. [7] de modo a simular um anel feito de GaAs/Al_xGa_{1-x}As usado no experimento da Ref. [17]. Próximo ao mínimo do potencial de confinamento, o potencial pode ser aproximado por um potencial parabólico, Eq. (2.5), com $\hbar\omega_0 = 0,449$ meV. O gráfico do potencial parabólico corresponde à linha vermelha tracejada. Para a energia de Fermi $E_F = 8$ meV, a largura do anel é dada por $\Delta r = 600$ nm.

3 A equação de Schrödinger no espaço curvo

Ao longo dos anos, sistemas físicos em matéria condensada têm sido um ambiente adequado para testar modelos de física teórica. Por exemplo, o movimento de uma partícula em um sólido com defeitos topológicos é análogo a um modelo de gravidade 3D com torsão [18]. Além disso, sistemas de fluidos também foram utilizados para verificar a radiação Hawking, o qual, de um outro modo, seria extremamente difícil estudar [19]. Devido ao grande desenvolvimento de novos materiais, como o grafeno [20, 21, 22], o uso de conceitos refinados baseados em geometria diferencial tornou-se obrigatório para descrevê-los adequadamente. Essas ferramentas teóricas tem um papel fundamental na descrição de tais sistemas. Essa característica é similar à que ocorre em Relatividade Geral em que a dinâmica de uma partícula é definida pela curvatura do espaço-tempo [23]. Considere um elétron se movendo sobre uma superfície de grafeno curva 2D, como um nanotubo de carbono. Como a dinâmica do sistema é modificada pela curvatura? Em tal contexto, não é possível construir uma Lagrangeana Clássica que descreva a dinâmica apropriada. É necessário levarmos em conta a curvatura e o tensor métrico da superfície à qual o elétron está vinculado.

Existem duas abordagens que podem ser usadas para estudar o problema do confinamento de uma partícula a uma superfície S imersa em um espaço $3D$. A primeira é baseada em uma geometria puramente $3D$, enquanto a segunda, proposta por da Costa [24], é construída como um limite de um espaço $3D$ para uma superfície curva S . O segundo formalismo é equivalente a imersão de uma superfície no espaço Euclidiano ordinário $3D$. Assim, através deste procedimento, a partícula é sujeita ao chamado potencial geométrico [24]. O formalismo proposto por da Costa tem sido aplicado em diferentes contextos físicos nos últimos anos como, por exemplo, para obter a equação Pauli na presença de um campo electromagnético [25], em um guia de ondas para investigar o aparecimento de um potencial quântico atrativo que afeta crucialmente a dinâmica circuitos de onda-matéria [26], para derivar Hamiltonianas exatas para acoplamentos Rashba e spin-órbita Dresselhaus cúbico sobre uma superfície curva com uma forma arbitrária [27], no estudo de geração de segundo harmônico em sistemas de dimensões reduzidas [28], etc.

O objetivo deste capítulo é revisar o formalismo apresentado na Ref. [29] onde os autores consideram a presença dos campos elétrico e magnético na abordagem de da Costa.

3.1 Equação de movimento

Considere o modelo que descreve o movimento de uma partícula vinculada a mover-se sobre uma superfície curva S . Podemos incluir o efeito de um campo magnético via potencial vetor $\mathbf{A}$ e de um campo elétrico via potencial escalar V . Devemos derivar analiticamente a equação de Schrödinger de modo que ela seja válida para qualquer geometria 2D. Essa equação deve descrever a dinâmica de partículas em variedades curvas na presença de campos elétricos e magnéticos. Assim como no trabalho de da Costa, devemos mostrar que não existe acoplamento entre o campo e a curvatura da superfície. Além disso, também devemos mostrar que a dinâmica sobre a superfície é desacoplada da transversal por meio de um calibre apropriado e sem aproximações. Por tanto, começamos com a equação de Schrödinger na forma covariante, contendo ambos os potenciais elétrico e vetorial,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu} G^{ij} D_i D_j \psi + QV\psi, \quad (3.1)$$

onde o tensor métrico G_{ij} e seu inverso G^{ij} têm sido introduzidos para levarmos em conta a geometria do espaço. Na equação (3.1), i, j, k referem-se aos índices espaciais e assumem valores 1, 2, 3 e μ é a massa da partícula. Também fazemos uso da convenção de soma de Einstein para as componentes covariantes e contravariantes do tensor. A derivada covariante de calibre D_j é dada por

$$D_j = \nabla_j - \frac{iQ}{\hbar} A_j \quad (3.2)$$

onde Q é a carga da partícula e A_j são as componentes do potencial vetor $\mathbf{A}$. Para uma variedade arbitrária a derivada covariante ∇_j é definida como

$$\nabla_j v^i = \partial_j v^i + \Gamma_{jk}^i v^k, \quad (3.3)$$

onde v^i são as componentes contravariantes de um campo vetorial $3D \mathbf{v}$, Γ_{jk}^i são os símbolos de Christoffel e ∂_j é a derivada com respeito a variável espacial q_j .

Definindo o potencial escalar $A_0 = -V$, podemos definir uma derivada covariante de calibre para a variável temporal como

$$D_0 = \partial_t - \frac{i}{\hbar} Q A_0, \quad (3.4)$$

de modo que a equação de Schrödinger (3.1) pode ser escrita como

$$i\hbar D_0 \psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu} G^{ij} D_i D_j \psi. \quad (3.5)$$

Nesta equação, a invariância de calibre pode ser verificada fazendo uso das seguintes transformações de calibre:

$$A_j \rightarrow A'_j = A_j + \partial_j \gamma, \quad (3.6)$$

$$A_0 \rightarrow A'_0 = A_0 + \partial_t \gamma, \quad (3.7)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{\frac{i}{\hbar} Q \gamma}, \quad (3.8)$$

onde γ é uma função escalar. A equação (3.5) pode ser escrita mais explicitamente como

$$i\hbar D_0\psi = \frac{1}{2\mu} \left[-\frac{\hbar^2}{\sqrt{G}} \partial_i \left(\sqrt{G} G^{ij} \partial_j \psi \right) + \frac{iQ\hbar}{\sqrt{G}} \partial_i \left(\sqrt{G} G^{ij} A_j \right) \psi + 2iQ\hbar G^{ij} A_j \partial_i \psi + Q^2 G^{ij} A_i A_j \psi \right], \quad (3.9)$$

onde $G = \det(G_{ij})$. A equação (3.9) é a equação de Schrödinger covariante escrita em um sistema de coordenadas curvilínea 3D genérico, quando campos elétricos e magnéticos são incluídos. Até então, nenhum calibre foi escolhido, mas o potencial vetor $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ válido para qualquer calibre e qualquer campo magnético será mantida ao longo do formalismo.

Antes de aplicarmos o formalismo de da Costa, devemos descrever o sistema de coordenadas. Basicamente, a descrição do sistema é análoga ao proposto por da Costa. Ela é dada como segue. A superfície S é parametrizada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2)$, onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição de um ponto arbitrário sobre a superfície. O espaço 3D na vizinhança de S pode ser parametrizado como

$$\mathbf{R}(q_1, q_2, q_3) = \mathbf{r}(q_1, q_2) + q_3 \mathbf{n}(q_1, q_2), \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{n}(q_1, q_2)$ é um vetor unitário normal a superfície S . Para fins de esclarecimento, vamos introduzir os índices a, b para indicar os parâmetros da superfície, os quais evidentemente assumem valores 1, 2. A relação entre o tensor métrico 3D, G_{ij} e o 2D induzido,

$$g_{ab} = \partial_a \mathbf{r} \cdot \partial_b \mathbf{r}, \quad (3.11)$$

é dada por

$$G_{ab} = g_{ab} + [\alpha g + (\alpha g)^T]_{ab} q_3 + (\alpha g \alpha^T)_{ab} q_3^2, \quad G_{a3} = G_{3a} = 0, \quad G_{33} = 1, \quad (3.12)$$

onde α_{ab} é a matriz de curvatura de Weingarten para a superfície [24]. A forma do tensor métrico dada na Eq. (3.12) permite-nos separar a equação de Schrödinger (3.9) em uma parte superficial para $a, b = 1, 2$ e outra normal. Além disso, o potencial de confinamento $V_\lambda(q_3)$ tem o papel de localizar a partícula sobre a superfície S , onde λ é um parâmetro que mede a magnitude do confinamento. Seguindo o trabalho de da Costa, agora devemos obter uma função de onda superficial que depende somente de (q_1, q_2) . Para isso, propomos a seguinte função de onda separada:

$$\chi(q_1, q_2, q_3) = \chi_S(q_1, q_2) \chi_n(q_3). \quad (3.13)$$

Essa função de onda separada é apenas uma hipótese e deve ser verificada. A condição de conservação da norma fornece a relação:

$$\psi(q_1, q_2, q_3) = \left[1 + \text{Tr}(\alpha) q_3 + \det(\alpha) q_3^2 \right]^{-1/2} \chi(q_1, q_2, q_3). \quad (3.14)$$

Com essa condição em mãos, podemos substituí-la na Eq. (3.9). Em seguida, devemos levar em conta o efeito do potencial $V_\lambda(q_3)$: no limite de confinamento, a função de onda é localizada sobre a superfície S por duas barreiras de potenciais degraus de ambos os lados da superfície. Isso significa que o valor da função de onda é diferente de zero apenas na vizinhança de S . Assim, podemos realizar o limite $q_3 \rightarrow 0$ na equação de Schrödinger. Como resultado, encontramos

$$\begin{aligned} i\hbar D_0 \chi = & \frac{1}{2\mu} \left\{ -\frac{\hbar^2}{\sqrt{g}} \partial_a (\sqrt{g} g^{ab} \partial_b \chi) + \frac{iQ\hbar}{\sqrt{g}} \partial_a (\sqrt{g} g^{ab} A_b) \chi + 2iQ\hbar g^{ab} A_a \partial_b \chi \right. \\ & + Q^2 [g^{ab} A_a A_b + (A_3)^2] \chi - \hbar^2 (\partial_3)^2 \chi + iQ\hbar (\partial_3 A_3) \chi + 2iQ\hbar A_3 (\partial_3 \chi) \\ & \left. - \hbar^2 \left(\left[\frac{1}{2} \text{Tr}(\alpha) \right]^2 - \det(\alpha) \right) \chi \right\} + V_\lambda(q_3) \chi, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $g = \det(g_{ab})$ e todas as componentes de $\mathbf{A}$ e suas derivadas são calculadas em $q_3 = 0$. Da equação acima, podemos concluir o seguinte: *Não existe acoplamento entre o campo magnético e a curvatura da superfície, independente da forma da superfície, do campo magnético e do calibre.* De fato, na Eq. (3.15), não aparecem termos mistos envolvendo A_j e a matriz de curvatura α_{ab} . Esse resultado conflita com o encontrado por Ensinosa [30], onde surgimento do acoplamento entre o campo e a curvatura é devido a escolha de um calibre particular na derivação da fórmula. Note que na Eq. (3.15) aparece o conhecido potencial geométrico [24]

$$V_S(q_1, q_2) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \left[\frac{1}{2} \text{Tr}(\alpha) \right]^2 - \det(\alpha) \right\}, \quad (3.16)$$

onde o primeiro termo é o quadrado da curvatura média e o segundo é a curvatura Gaussiana.

A seguir, vamos verificar que o procedimento acima preserva a invariância de calibre da equação resultante. Definindo um novo tensor métrico $\tilde{G}$ como

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

podemos reescrever a Eq. (3.15) em uma forma compacta:

$$i\hbar D_0 \chi = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \tilde{G}^{ij} \tilde{D}_i \tilde{D}_j \chi + V_S \chi + V_\lambda(q_3) \chi, \quad (3.18)$$

de modo que a invariância com respeito às transformações de calibre (3.6) é evidente na equação acima.

Para finalizar, agora vamos demonstrar a separabilidade da dinâmica sobre a superfície e perpendicular a superfície. Na Eq. (3.15) apenas o termo $A_3(q_1, q_2, 0) \partial_3 \chi$ acopla a dinâmica ao longo de q_3 com a dinâmica sobre S . Desde que a invariância de

calibre da Eq. (3.18) é preservada, podemos impor um calibre que permite cancelar a componente A_3 do potencial vetor, cancelando o termo de acoplamento. Aplicando as transformações de calibre (3.6), a melhor escolha adequada para γ é

$$\gamma(q_1, q_2, q_3) = - \int_0^{q_3} A_3(q_1, q_2, z) dz. \quad (3.19)$$

Obtemos,

$$A'_3 = 0, \quad \partial_3 A'_3 = 0, \quad (3.20)$$

e uma vez tendo fixado o limite de integração inferior a zero, no limite $q_3 \rightarrow 0$, A_1 e A_2 permanecem inalterados. Após usarmos a transformação de calibre, podemos separar a equação de Schrödinger em duas equações independentes:

$$i\hbar \partial_t \chi_n = - \frac{\hbar^2}{2\mu} (\partial_3)^2 \chi_n + V_\lambda(q_3) \chi_n, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \chi_S = & - \frac{1}{2\mu} \left\{ \frac{\hbar^2}{\sqrt{g}} \partial_a (\sqrt{g} g^{ab} \partial_b \chi_S) + \frac{iQ\hbar}{\sqrt{g}} \partial_a (\sqrt{g} g^{ab} A_b) \chi_S + 2iQ\hbar g^{ab} A_a \partial_b \chi_S \right. \\ & \left. + Q^2 g^{ab} A_a A_b \chi_S \right\} + V_S \chi_S + QV \chi_S, \end{aligned} \quad (3.22)$$

A equação (3.21) é a equação de Schrödinger 1D para uma partícula confinada pelo potencial V_λ , enquanto que a (3.22) descreve a dinâmica de uma partícula movendo-se sobre a superfície sob efeitos de campos elétrico e magnético. Note que a separação da dinâmica foi obtida analiticamente sem qualquer aproximação. Para finalizar esse capítulo de revisão, podemos concluir que, com uma escolha apropriada do calibre, a dinâmica sobre a superfície e a dinâmica transversal são desacopladas. No trabalho de Ensinosa [30] essa separação não é evidente por causa da escolha não ideal feita para o calibre.

4 Anel quântico 2D

Agora vamos analisar os estados do elétron em um anel quântico bidimensional no espaço curvo através da equação (3.22). Vale a pena mencionar que essa análise foi feita anteriormente por Tan e Inkson [7], no espaço plano. Posteriormente, Bulaev *et. al.* analisaram esse problema no plano de Lobachevsky [3]. A ideia aqui é estudar os efeitos de curvatura nas propriedades físicas do modelo (2.1).

Assim como na Ref. [12], fazemos um estudo em conexão com a descrição de distribuição contínua de deslocamentos e disclinações no contexto da geometria de Riemann-Cartan [18]. Se a partícula está vinculada a uma superfície com uma disclinação localizada na região $r = 0$, o correspondente tensor métrico em coordenadas polares é definido pelo elemento de linha [31, 32]

$$ds^2 = dr^2 + \alpha^2 r^2 d\theta^2, \quad (4.1)$$

com $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, o qual descreve uma superfície cônica. A Fig. 2 mostra a construção de um cone a partir de uma folha plana, onde uma seção angular é removida com uma posterior identificação das fronteiras produzidas. Se γ é o ângulo que define a seção removida, então a superfície remanescente corresponde a um setor angular dado por $2\pi\alpha = 2\pi - \gamma$. A incorporação do termo α^2 à métrica planar em coordenadas polares faz com que o ângulo total na superfície seja

$$\int_0^{2\pi} \alpha d\theta = 2\pi\alpha < 2\pi, \quad (0 < \alpha < 1). \quad (4.2)$$

Sendo 2β o ângulo de abertura do cone (veja figura 2), podemos encontrar a seguinte relação:

$$\alpha = \sin \beta. \quad (4.3)$$

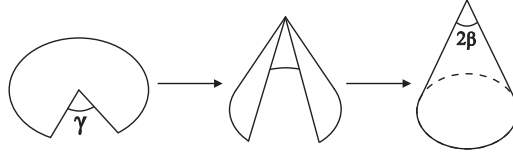
Este resultado é obtido se identificarmos o comprimento de um círculo em torno do cone sem o setor, dado por $2\pi\alpha r$, com o comprimento deste círculo em termos de 2β , dado por $2\pi r \sin \beta$. Quanto mais próximo α se aproxima da unidade (ou 2β tendendo a π), mais o cone se aproxima do plano. Para $\alpha = 1$, o cone se torna um plano. Se $\alpha > 1$, a relação (4.1) ainda existe e a superfície cônica corresponde a uma inserção de um setor (isto é, $2\beta > \pi$). Chamamos a superfície resultante de anti-cone.

É conhecido que o tensor de curvatura da métrica (4.1), quando considerado como uma distribuição é dado por [33]

$$R_{12}^{12} = R_1^1 = R_2^2 = 2\pi \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \delta_2(r), \quad (4.4)$$

onde $\delta_2(\mathbf{r})$ é a função δ bidimensional no espaço plano. Da equação Eq. (4.4), segue que

$$R_{12}^{12} : \begin{cases} > 0, & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ < 0, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}. \quad (4.5)$$

Figura 2 – Superfície cônica de déficit angular γ .

Em outras palavras, quando o defeito tem uma curvatura negativa, temos um excesso de ângulo planar, o qual corresponde a um anti-cone. Contudo, se o defeito tem uma curvatura positiva, temos um déficit de ângulo e o resultado leva a um cone. Para o movimento da partícula sobre o cone, o potencial geométrico $V_s(r)$, que é uma consequência de um confinamento bidimensional sobre a superfície é dado pela expressão [24]

$$V_s(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} (\mathcal{H}^2 - \mathcal{K}), \quad (4.6)$$

onde $\mathcal{H}$ é a curvatura média e $\mathcal{K}$ é a curvatura gaussiana da superfície. Para o cone ($\alpha < 1$), essas grandezas são dadas por [34]:

$$\mathcal{K}_{cone} = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{\delta(r)}{r}, \quad (4.7)$$

e

$$\mathcal{H}_{cone} = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{2\alpha r}. \quad (4.8)$$

Neste caso, o potencial $V_s(\mathbf{r})$ é

$$[V_s(r)]_{cone} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[-\frac{(1-\alpha^2)}{4\alpha^2 r^2} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{\delta(r)}{r} \right]. \quad (4.9)$$

Contudo, para o anti-cone ($\alpha > 1$), para ficar consistente com o fato de que ele tem uma curvatura negativa, a curvatura média é agora dada por [32]

$$\mathcal{H}_{anti-cone} = \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{2\alpha r}, \quad (4.10)$$

de modo que o potencial geométrico $V_s(r)$ assume a forma

$$[V_s(r)]_{anti-cone} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{(1-\alpha^2)}{4\alpha^2 r^2} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{\delta(r)}{r} \right]. \quad (4.11)$$

A configuração de campo na métrica (4.1) ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $A_3 = 0$) é dada por [35, 36]

$$\mathbf{A} = \frac{Br}{2\alpha} \hat{\varphi} + \frac{l\hbar}{e r \alpha} \hat{\varphi}, \quad (4.12)$$

onde o primeiro termo fornece os níveis de Landau usuais e o segundo é o potencial Aharonov-Bohm. Este último, nos dá o fluxo magnético de Aharonov-Bohm:

$$\Phi_{AB} = l\Phi_0, \quad (4.13)$$

onde $\Phi_0 = h/e$. Usando o potencial vetor (Eq.(4.12)), a equação de movimento que rege a dinâmica de um elétron com massa efetiva μ no espaço curvo, com seu movimento restrito a uma região anelar (Eq. (3.22)), pode ser escrita como

$$H\chi_s(\mathbf{r}) = E\chi_s(\mathbf{r}), \quad (4.14)$$

onde H é o Hamiltoniano do sistema dado por:

$$\begin{aligned} H = & -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\alpha^2 r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - il \right)^2 - \frac{ieB}{\hbar \alpha^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - il \right) - \frac{e^2 B^2 r^2}{4\hbar^2 \alpha^2} \right] \\ & - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1-\alpha^2}{4\alpha^2 r^2} - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{\delta(r)}{r} \right] + V(r), \end{aligned} \quad (4.15)$$

com $V(r)$ dado pela Eq. (2.1). Seguindo a literatura, definimos o Hamiltoniano efetivo

$$H' = H + \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{\delta(r)}{r}, \quad (4.16)$$

onde

$$\begin{aligned} H = & -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\alpha^2 r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - il \right)^2 - \frac{ieB}{\hbar \alpha^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - il \right) - \frac{e^2 B^2 r^2}{4\hbar^2 \alpha^2} \right] \\ & - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1-\alpha^2}{4\alpha^2 r^2} + V(r). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Desde que o comutador $[H', L_z] = 0$, podemos admitir soluções da forma

$$\chi_S(r, \varphi) = e^{im\varphi} f_m(r), \quad (4.18)$$

com $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e a função $f_m(r)$ satisfaz a equação radial do movimento:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{M^2}{r^2} - \frac{r^2}{4\lambda^4} + k_\alpha^2 \right] f_m(r) - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{\delta(r)}{r} f_m(r) = 0, \quad (4.19)$$

onde, definimos: o momento angular efetivo,

$$M = \sqrt{\left(\frac{m-l}{\alpha} \right)^2 + \frac{2a_1\mu}{\hbar^2} - \frac{1-\alpha^2}{4\alpha^2}}; \quad (4.20)$$

a frequência efetiva,

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_c^2}{\alpha^2} + \omega_0^2}; \quad (4.21)$$

onde $\omega_c = eB/\mu$ é a frequência ciclotrônica usual e ω_0 é dado pela Eq. (2.6); o comprimento magnético efetivo

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}; \quad (4.22)$$

e

$$k^2 = \frac{2\mu(V_0 + E)}{\hbar^2} + \frac{m-l}{\lambda^2 \alpha^2}, \quad (4.23)$$

é uma constante definida para fins de simplificação. Multiplicando a Eq. (4.19) por $\hbar^2/2\mu$, vemos que o termo proporcional à r^{-2} está associado à energia cinética de rotação e o termo proporcional à r^2 ao potencial de um oscilador harmônico clássico. Neste último, contudo, a frequência resultante não é aquela encontrada para um oscilador harmônico simples; ela é agora definida por uma frequência efetiva (4.21). Como podemos ver na Eq. (4.20), a energia cinética de rotação é corrigida pelo fluxo AB e pelo confinamento bidimensional da superfície através da Eq. (4.8). Note também que para uma escolha apropriada dos campos, a Eq. (4.19) descreve o movimento de um elétron em um campo magnético uniforme com suas respectivas energias dando os níveis de Landau usuais [37].

Na equação (4.19) aparece um potencial tipo delta. Esse potencial permite analisarmos a região $r = 0$, o que não ocorre no caso tratado por Tan e Inkson [11], onde $\alpha = 1$. Contudo, mesmo no plano, um termo tipo delta poderia aparecer no Hamiltoniano que descreve o movimento da partícula. Isso ocorre ao considerarmos o spin do elétron. Logicamente que devemos adicionar o termo de spin à equação de Schrödinger, resultando na equação de Schrödinger-Pauli [38]. Para o cone, vimos que $0 < \alpha < 1$. Neste caso, a quantidade $(1 - \alpha)/\alpha > 0$ e o potencial $\delta(r)$ se torna repulsivo. Contudo, a presença do oscilador harmônico garante a existência de estados ligados.

Neste trabalho, estamos interessados somente no movimento do elétron na região $r \neq 0$, de modo que o potencial função δ pode ser negligenciado. Isso ocorre devido ao potencial do tipo anti-ponto quântico que exclui o movimento do elétron da região $r = 0$ e é nessa região onde se encontra a singularidade. Assim, a equação diferencial relevante é

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{M^2}{r^2} - \frac{r^2}{4\lambda^4} + k^2 \right] f_m(r) = 0. \quad (4.24)$$

A partir desse resultado, podemos definir um potencial efetivo dado por

$$V_{efe}(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{M^2}{r^2} + \frac{r^2}{4\lambda^4} - \frac{m-l}{\lambda^2\alpha^2} - \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \right), \quad (4.25)$$

que será usado no cálculo do raio de um estado $r_{n,m}$.

4.1 Solução da equação radial

A meta agora é encontrar as autofunções e autovalores da equação radial. Partindo da Eq. (4.24), temos

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(\frac{M^2}{r^2} + \frac{r^2}{4\lambda^4} - k^2 \right) \right] f_m(r) = 0. \quad (4.26)$$

Fazendo a mudança de variável

$$\rho = \frac{r^2}{2\lambda^2}, \quad (4.27)$$

a equação (4.26) é reescrita como

$$\left[4\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + 4 \frac{d}{d\rho} - \left(\frac{M^2}{\rho} + \rho - 2\lambda^2 k^2 \right) \right] f_m = 0. \quad (4.28)$$

Agora, consideremos o ansatz

$$f_m = \rho^{-\frac{1}{2}} g_m, \quad (4.29)$$

de modo que

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{M^2 - 1}{\rho^2} + 1 - \frac{2k^2}{\lambda^2} \frac{1}{\rho} \right) \right] g_m = 0. \quad (4.30)$$

A ideia agora é estudar o comportamento assintótico da função $g_m(\rho)$. No limite de $\rho \rightarrow 0$, o primeiro termo dentro dos parênteses domina, daí:

$$\frac{d^2 g_m(\rho \rightarrow 0)}{d\rho^2} - \frac{M^2 - 1}{4\rho^2} g_m(\rho \rightarrow 0) = 0. \quad (4.31)$$

As soluções dessa equação são do tipo

$$g_m(\rho \rightarrow 0) = C_1 \rho^{\frac{1+M}{2}} + C_2 \rho^{\frac{1-M}{2}}. \quad (4.32)$$

A segunda solução pode apresentar problemas de divergência quando $\rho \rightarrow 0$. É conveniente fazer $C_2 = 0$, de modo que a solução será

$$g_m(\rho \rightarrow 0) = C_1 \rho^{\frac{1+M}{2}}. \quad (4.33)$$

Agora vamos analisar o comportamento de $g_m(\rho)$ quando $\rho \rightarrow \infty$. Nesse limite, o segundo termo é dominante, logo ficamos com

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4} \right) g_m(\rho \rightarrow \infty) = 0. \quad (4.34)$$

A solução desse equação é do tipo

$$g_m(\rho \rightarrow \infty) = C_3 \exp\left(\frac{1}{2}\rho\right) + C_4 \exp\left(-\frac{1}{2}\rho\right). \quad (4.35)$$

Fazemos $C_3 = 0$, para evitar a divergência da função de onda no limite $\rho \rightarrow \infty$. Então

$$g_m(\rho \rightarrow \infty) = C_4 \exp\left(-\frac{1}{2}\rho\right). \quad (4.36)$$

Usando (4.33) e (4.36), obtemos a solução

$$g_m(\rho) = N \rho^{\frac{1+M}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho\right) h_m(\rho), \quad (4.37)$$

onde, N é a constante de normalização e $h_m(\rho)$ define o comportamento da função radial no intervalo $]0, \infty[$. Substituindo a solução acima na equação (4.30), obtemos uma equação do tipo hipergeométrica confluyente:

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (1 + M - \rho) \frac{d}{d\rho} - \left(\frac{M + 1 - k^2 \lambda^2}{2} \right) \right] h_m(\rho) = 0, \quad (4.38)$$

cuja solução é dada por

$$h_m(\rho) = c_1 M\left(\frac{1+M-k^2\lambda^2}{2}, 1+M, \rho\right) + c_2 x^{-M_\alpha} M\left(\frac{1-M-k^2\lambda^2}{2}, 1-M, \rho\right). \quad (4.39)$$

Vamos analisar a solução $h_m(\rho)$. Primeiro, devemos levar em conta apenas o setor que é bem comportado quando $\rho \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0$). Isso requer que façamos $c_2 = 0$. Assim, a solução fisicamente aceitável quando $\rho \rightarrow 0$ é dada por

$$h_m(\rho) = c_1 M\left(\frac{1+M-k^2\lambda^2}{2}, 1+M, \rho\right). \quad (4.40)$$

Agora, vamos impor a segunda condição de contorno $\rho \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$). O comportamento assintótico da função hipergeométrica confluyente de primeiro tipo para $\rho \rightarrow \infty$ é dado por

$$M(a, c, \rho \rightarrow \infty) \rightarrow e^{i\pi a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} \rho^{-a} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \rho^{a-c} e^\rho, \quad (4.41)$$

onde $\Gamma(x)$ é a função gama. Vemos que $M(a, c, \rho \rightarrow \infty)$ diverge devido ao segundo termo em (4.41). De uma forma mais geral, consideremos a função de onda $g_m(\rho)$ (Eq. (4.37)), com $h_m(\rho)$ dada pela Eq. (4.40):

$$g_m(\rho) \propto \rho^{\frac{c}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho\right) M(a, c, \rho), \quad (4.42)$$

onde, temos definido

$$a = \frac{1+M-k^2\lambda^2}{2} \quad (4.43)$$

e

$$c = 1+M. \quad (4.44)$$

Para $\rho \rightarrow \infty$, inicialmente, tínhamos retirado a divergência para grandes valores de ρ . Mas, devido a função hipergeométrica confluyente, teremos um outro resultado. Para $\rho \rightarrow \infty$, obtemos

$$g_m(\rho \rightarrow \infty) \propto e^{i\pi a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} \rho^{\frac{c}{2}-a} e^{-\frac{1}{2}\rho} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \rho^{a-c/2} e^{\frac{1}{2}\rho}. \quad (4.45)$$

Portanto, a exponencial $e^{\frac{1}{2}\rho}$ que aparece no segundo termo faz com que a solução tenha um comportamento não físico. Assim, para um comportamento adequado da função $g_m(\rho \rightarrow \infty)$ é necessário eliminarmos o segundo termo na equação acima. Isso é atingido com a seguinte condição sobre o parâmetro a :

$$a = -n, \quad (4.46)$$

com n sendo um número inteiro não-negativo. Desse modo, a função gama torna-se infinita:

$$\Gamma(a) = \Gamma(-n) \rightarrow \infty. \quad (4.47)$$

e, conseqüentemente, eliminamos a divergência de $g_m(\rho \rightarrow \infty)$. No comportamento assintótico da função hipergeométrica conflüente (Eq.(4.41)), ficamos com

$$M(a, c, \rho \rightarrow \infty) \rightarrow e^{-i\pi n} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \rho^n. \quad (4.48)$$

Em resumo, ao tornarmos a função radial normalizável, automaticamente fazemos com que a função hipergeométrica conflüente, antes uma série infinita, torne-se um polinômio de grau n . Usando o valor de a dado por (4.43), a condição (4.46), obtemos

$$\frac{1 + M - k^2 \lambda^2}{2} = -n. \quad (4.49)$$

Com esta condição, a solução (4.40) assume a forma

$$h_m(r) = c_1 M(-n, 1 + M, \rho), \quad (4.50)$$

A função radial completa (Eq.(4.29)) é

$$f_m = N \left(\frac{r^2}{2\lambda^2} \right)^{\frac{M}{2}} \exp \left(-\frac{r^2}{4\lambda^2} \right) M \left(-n, 1 + M, \frac{r^2}{2\lambda^2} \right), \quad (4.51)$$

onde, temos retornado à variável r usando a Eq. (4.27). A solução geral (4.18) torna-se

$$\chi_{n,mS}(r, \varphi) = N e^{im\varphi} \left(\frac{r^2}{2\lambda^2} \right)^{\frac{M}{2}} e^{-\frac{r^2}{4\lambda^2}} M \left(-n, 1 + M, \frac{r^2}{2\lambda^2} \right). \quad (4.52)$$

Podemos ver que essas soluções são periódicas em φ e o fluxo de AB muda a regra de quantização [39]. Além disso, o fluxo também aparece no momento angular M , implicando diretamente na trajetória da partícula. A constante de normalização é calculada de

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty [\chi_{n,m}(r, \varphi)]^2 r dr d\varphi = 1. \quad (4.53)$$

4.2 Autovalores de energia

As energias permitidas ao elétron confinado a um anel quântico sobre a influência do campo magnético uniforme, do fluxo de AB e da curvatura da superfície pode ser encontrada a partir da condição (4.49). Então, da condição (4.49) obtemos os autovalores de energia

$$E_{n,m} = \left(n + \frac{1}{2} + \frac{M}{2} \right) \omega \hbar - \frac{\hbar \omega_c}{2\alpha^2} (m - l) - \frac{\mu}{4} \omega_0^2 r_0^2. \quad (4.54)$$

Também, vemos que a presença do potencial AB no modelo leva a uma mudança no espectro de energia e na funções de onda da partícula que pode ser identificada através do número quântico m como $m \rightarrow m - l$. Esse efeito é uma consequência da substituição mínima,

$$p \rightarrow p - eA. \quad (4.55)$$

A energia é uma função periódica de l (com período $\Phi_0 = h/e$) e uma função aperiódica do campo transversal [11]. Como foi mostrado acima, o parâmetro de fluxo que aparece no momento angular M altera a trajetória da partícula. Como resultado, temos em uma dependência não-parabólica nas energias em relação ao fluxo de AB. Além disso, também vemos que o número quântico m e a frequência ciclotron ω_c são ambos afetados por efeitos de curvatura, isto é,

$$m \rightarrow \frac{m}{\alpha} \quad (4.56)$$

e

$$\omega_c \rightarrow \frac{\omega_c}{\alpha}. \quad (4.57)$$

Observe que na presença do fluxo magnético de AB, temos $m - l \rightarrow (m - l)/\alpha$. Como os valores permitidos de α estão no intervalo $0 < \alpha < 1$, as quantidades acima são aumentadas por um fator α^{-1} . As energias (4.54) têm uma dependência não-parabólica com relação à curvatura média (Eq. (4.8)). Em outras palavras, o efeito da curvatura média presente na expressão para as energias da partícula é semelhante ao do potencial centrífugo. Na verdade, o papel da curvatura consiste em alterar a dispersão não-parabólica. Claramente, o espectro de energia é não-degenerado. A razão para isso se deve ao fato de que o campo magnético transversal é modificado pelo parâmetro α . Na expressão para o momento angular efetivo, podemos interpretar o termo $(1 - \alpha^2)/4$ de modo semelhante ao que fizemos para o fluxo de AB, isto é, alterando o número quântico m . A diferença é que para o cone esta quantidade não leva a um número inteiro. Os números quânticos n e m se referem aos movimentos radial e angular, respectivamente. Veremos depois que ao tratarmos de um fio reto e um anel 1D, n pode ser interpretado como índice de sub-bandas enquanto que m se refere ao movimento longitudinal no fio [11].

Fazendo $\alpha = 1$, obtemos exatamente o resultado de Tan e Inkson [11]:

$$E = \left(n + \frac{1}{2} + \frac{M}{2}\right) \hbar \omega_c - \frac{m - l}{2} \hbar \omega_c - \frac{\mu}{4} \omega_0^2 r_0^2, \quad (4.58)$$

que são os níveis de Landau em anel bidimensional no espaço plano. Além disso, fazendo $a_1 = a_2 = l = 0$, temos que $V(r) = 0$ (estamos retirando o potencial que define o anel) e não há fluxo de AB. Neste caso, a partícula interage somente com o campo magnético transversal B e o espectro de energia torna-se

$$E = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m|}{2} - \frac{m}{2}\right), \quad (4.59)$$

que são os níveis de Landau usuais. Podemos ver em (4.59) que os níveis de energias são infinitamente degenerados [37], diferentemente dos níveis de Landau para um elétron considerando o modelo de anel bidimensional (4.58).

Um outro caso limite que podemos obter é o caso quando a partícula interage com o campo magnético uniforme no espaço cônico. Neste caso, devemos fazer $a_1 = a_2 = l = 0$

(4.54). Como resultado, temos os níveis de Landau para uma partícula no espaço cônico (4.54):

$$E_{n,m} = \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2}{\alpha^2} - \frac{1 - \alpha^2}{4\alpha^2}} \right) \frac{\omega_c \hbar}{\alpha} - \frac{m \hbar \omega_c}{2\alpha^2}, \quad (4.60)$$

que por sua vez, diferente das energias da Eq. (4.59), são não-degeneradas; a curvatura é responsável pela quebra da degenerescência dos níveis de Landau. Esse resultado, contudo, exige que uma condição seja imposta para que o espectro de energia tenha valores reais. Podemos ver que para $m = 0$, temos um espectro imaginário para diferentes valores de n . Se $m \neq 0$, temos que m^2 é sempre maior do que $1 - \alpha^2$ de modo que o autovalores são reais para qualquer valor de n e m . Dessas investigações, podemos afirmar que os níveis de Landau de um elétron no espaço curvo são não degenerados devido aos efeitos da curvatura média da superfície, que por sua vez exibe um espectro incompleto, pois $m = 0$ não é um estado físico. Portanto, podemos concluir que o estado $m = 0$ não é um estado quântico desse sistema quando $a_1 = a_2 = l = 0$. Por outro lado, quando analisamos os níveis de Landau em um anel quântico no espaço plano, o estado $m = 0$ é um estado quântico permitido para o sistema.

No que segue, estamos nos limitando ao caso em que $l = 0$, exceto quando formos calcular a magnetização e a corrente persistente do anel 2D.

4.2.1 O campo magnético é nulo

Agora, vamos supor que o campo magnético transversal seja desligado. Como resultado, o espectro de energia, que antes dependia do campo magnético, depende agora somente dos potenciais $V(r)$ e $V_s(r)$:

$$E_{n,m} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \hbar + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4m^2 - (1 - \alpha^2)}{4\alpha^2}} + \frac{2a_1\mu}{\hbar^2} \omega_0 \hbar - \frac{\mu}{4} \omega_0^2 r_0^2. \quad (4.61)$$

O primeiro termo representa as energias do oscilador quântico, o segundo é uma consequência do momento efetivo e o terceiro termo resulta da constante V_0 .

O estado que define a mínima energia do sistema, quando na ausência de campos magnéticos, é dado por

$$m_{\min} = 0. \quad (4.62)$$

Esse resultado representa o mínimo de todas as sub-bandas de energias quando o campo magnético é nulo. Esse é o mesmo resultado encontrado por Tan e Inkson [11]. Logo, podemos afirmar que a curvatura da superfície não altera o mínimo das sub-bandas de energia. Isso de certa forma faz sentido, isto é, estamos simplesmente acrescentado um termo constante no momento angular efetivo.

A energia do estado $m_{\min}$ é dada por

$$E_{n,m_{\min}} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \hbar + \frac{1}{2} \omega_0 \hbar \sqrt{\frac{2a_1\mu}{\hbar^2} - \frac{1 - \alpha^2}{4\alpha^2}} - \frac{\mu}{4} \omega_0^2 r_0^2. \quad (4.63)$$

Note que o resultado acima mostra dependência com o parâmetro vindo da curvatura da superfície. Também observamos que embora tenhamos simetria com relação ao estado $m_{\min} = 0$, a dispersão das sub-bandas tem um comportamento não parabólico. Essa característica é típica de um anel 2D e devido basicamente ao potencial centrífugo. Para valores grandes de m o termo $4m^2 - (1 - \alpha^2) \rightarrow 4m^2$ e, assim, o espectro de energias (4.61) teria um comportamento semelhante ao caso do anel no espaço plano. Contudo, há um parâmetro α^2 no denominador que sempre irá alterar o resultado independente da quantidade no numerador.

4.2.2 O mínimo das sub-bandas com B não nulo

Retornamos à situação em que o campo magnético está presente. Logicamente que o campo magnético influencia o movimento da partícula tanto quanto as energias permitidas. Mas, qual realmente é o papel do campo magnético quando penetra na região condutora do anel? Usando os autovalores de energia (4.52), encontramos que, na presença do campo magnético transversal B , o mínimo das sub-bandas não é mais o da Eq. (4.62). Ele agora é dado pela relação

$$m_0 = \sqrt{\frac{e^2 B^2 r_0^4}{4\hbar^2} - \frac{1 - \alpha^2}{4\alpha^2} \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}}. \quad (4.64)$$

Comparando esse resultado com o obtido na ausência de campos (equação (4.62)), observamos a presença do campo magnético B . Esse resultado nos mostra claramente a função do campo magnético ao penetrar na região condutora do anel, ou seja, uma dependência do mínimo das sub-bandas com relação ao campo magnético. Observe que o campo magnético trás consigo o termo resultante do potencial geométrico, o qual tende a diminuir o efeito do campo magnético no mínimo das sub-bandas. Se $B = 0$, recuperamos o resultado obtido na equação (4.62). Se em (4.64) fazemos $\alpha = 1$, retornamos ao plano e o mínimo das sub-bandas é dado por

$$m_0 = \frac{eBr_0^2}{2\hbar}, \quad (4.65)$$

o qual equivale ao número de fluxo quântico que atravessa a área do anel. O fluxo magnético que passa por uma área circular de raio r_0 é dado por

$$\Phi = B\pi r_0^2. \quad (4.66)$$

Usando a Eq. (4.65), obtemos

$$m_0 = \frac{\Phi}{\phi_0} = l \quad (4.67)$$

A velocidade de grupo é obtida dos autovalores de energia a partir da equação abaixo:

$$v_g = \frac{r_0}{\hbar} \frac{\partial E_{n,m}}{\partial m}. \quad (4.68)$$

Portanto, usando (4.54) encontra-se:

$$v_g = \frac{r_0}{2\alpha^2} \left(\frac{m\omega_\alpha}{\sqrt{\frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{2a_1\mu}{\hbar^2} - \frac{1-\alpha^2}{4\alpha^2}}} - \omega_c \right) \quad (4.69)$$

Para o estado m_0 , a velocidade de grupo $v_g = 0$. Os estados $m > m_0$ movem-se com $v_g > 0$, enquanto os estados $m < m_0$ movem-se com $v_g < 0$.

4.2.3 O raio e a largura de um estado do anel

Consideremos agora o potencial efetivo dado pela Eq. (4.25),

$$V_{efe}(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{M^2}{r^2} + \frac{r^2}{4\lambda^4} - \frac{m-l}{\lambda^2\alpha^2} - \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \right). \quad (4.70)$$

Vamos estudar o comportamento de V_{eff} com relação a r . O mínimo desse potencial efetivo pode ser obtido calculando

$$\frac{dV_{efe}(r)}{dr} = 0, \quad (4.71)$$

cujos resultado é

$$r_{min} = \sqrt{2M}\lambda. \quad (4.72)$$

Esse é o valor de r que minimiza o potencial efetivo e, claramente, depende do número quântico m . Assim, podemos afirmar que r_{min} define o raio do estado m . Desse modo, reescrevemos o resultado acima como

$$r_m = \sqrt{2M}\lambda. \quad (4.73)$$

Para $m = m_0$ (Eq. (4.64)), obtemos

$$r_{n,m_0} = r_0 \left(1 - \frac{1}{a_1} \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1-\alpha^2}{4\alpha^2} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.74)$$

Se o anel está na superfície plana, então o raio do estado referente ao mínimo das sub-bandas é justamente o raio médio do anel, r_0 . Isso só ocorre no plano. Na Eq. (4.74), não há dependência com o campo magnético. Dessa última informação podemos compreender o comportamento dos elétrons na região condutora do anel. Para $B = 0$, vimos que o mínimo de todas as sub-bandas é $m_0 = 0$ e, assim, todos os estados $m \neq 0$ têm raios maiores que r_{n,m_0} . Logo, somente a região radial $r \geq r_{n,m_0}$ do anel é ocupada. Para campos magnéticos não-nulos, o estado mínimo de todas as sub-bandas muda de acordo com a Eq. (4.64), conseqüentemente, os estados $|m| < |m_0|$ têm raios $r_{n,m} < r_{n,m_0}$, enquanto que os estados $|m| \geq |m_0|$ raios $r_{n,m} \geq r_{n,m_0}$. Então, aumentando o campo magnético mais estados negativos vão ocupar a região radial $r_{n,m} < r_{n,m_0}$.

Vamos agora definir o comprimento e um estado (n, m) como sendo a região permitida classicamente no potencial de confinamento efetivo. Essa região clássica pode

ser compreendida com mais clareza com o seguinte exemplo: Em mecânica quântica não-relativística, sabemos que o oscilador quântico é visivelmente diferente de seu equivalente clássico; não somente as energias são quantizadas, mas também as distribuições de posição têm algumas características diferentes [15]. Por exemplo, a probabilidade de encontrar a partícula fora do intervalo classicamente permitido não é zero, e em todos os estados ímpares a probabilidade de encontrar a partícula no centro é zero. Somente em grandes valores de n' , o qual define os estados do oscilador quântico, começamos a notar alguma semelhança com o caso clássico [15]. Observe que já definimos o número quântico do oscilador como sendo n' , que é o mesmo número quântico que aparece no espectro de energias do anel quântico (4.54), $n = n'$. A situação no caso do anel quântico é semelhante; há um potencial efetivo (Eq. (4.25)) que confina a partícula fazendo um papel análogo ao potencial do oscilador. Classicamente, a partícula não pode ser encontrada fora do intervalo de confinamento, mas na mecânica quântica essa situação muda; existe uma probabilidade da partícula ser encontrada fora dessa região. Portanto, classicamente, é correto definir a energia de um estado (n, m) (Eq.(4.54)) como sendo igual a energia potencial efetiva (Eq.(4.25)),

$$E_{n,m} = V_{efe}(r), \quad (4.75)$$

da qual extraímos os raios $r_{\pm}$,

$$r_{\pm} = 2\lambda \left[n + \frac{1}{2} + \frac{M}{2} \pm \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2} + M\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.76)$$

e conseqüentemente, podemos calcular a largura do estado (n, m) usando a expressão $d = r_+ - r_-$. Na maior parte dos casos de interesse, $M \gg n$ o que nos fornece

$$d_{n,m} = 2\lambda\sqrt{2n+1}. \quad (4.77)$$

Tanto o raio de um estado $r_{n,m}$ (4.73) como a largura $d_{n,m}$ (4.77) encolhem quando o campo magnético aumenta e/ou quando o confinamento radial aumenta.

4.3 Magnetização e correntes persistentes em um anel quântico 2D

Os fenômenos magnéticos são uma consequência dos movimentos das cargas elétricas em um meio material. Se pudéssemos examinar um pedaço de material magnético em escala atômica, encontraríamos, de fato, correntes minúsculas resultantes dos elétrons orbitando em volta dos núcleos. As órbitas dos elétrons (espiras de correntes) podem ser tratadas como dipolos magnéticos, as quais normalmente são cancelados devido à orientação aleatória dos átomos. Porém, quando há um campo magnético, um alinhamento

ocorre fazendo com que o material torne-se magneticamente polarizado ou magnetizado [40].

Os materiais que adquirem magnetização paralela ao campo magnético são chamados de paramagnéticos, e aqueles que adquirem magnetização oposta ao campo magnético são definidos como diamagnéticos [40].

O campo magnético quando aplicado em um material gera um torque τ dado por

$$\tau = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (4.78)$$

onde $\mathbf{m}$ é o momento de dipolo magnético da espira e $\mathbf{B}$ o campo magnético aplicado. Esse torque tende alinhar os dipolos na direção do campo magnético. É justamente esse efeito que gera o paramagnetismo.

Agora, analisemos o movimento de um elétron em torno do núcleo do átomo. Podemos imaginá-lo como uma corrente estacionária que resultará em um momento de dipolo orbital. A aplicação de um campo magnético ao átomo produzirá uma variação na velocidade orbital. Consequentemente, haverá uma variação no momento orbital do elétron dependendo do campo magnético aplicado. O diamagnetismo é gerado por essa variação do momento do elétron orbitando o átomo [40].

À temperatura zero, a magnetização de um sistema contendo um número fixo N de elétrons é dada por

$$\mathcal{M} = \left(-\frac{\partial U}{\partial B} \right)_N, \quad (4.79)$$

onde U é a energia total do sistema, dada por

$$U = \sum_{n,m} E_{n,m}, \quad (4.80)$$

com $E_{n,m}$ dada pela equação (4.54), e a soma é tomada sobre todos os N estados ocupados. Podemos reescrever a magnetização $\mathcal{M}$ como

$$\mathcal{M}(B) = \sum_{n,m} \left(-\frac{\partial E_{n,m}}{\partial B} \right)_N = \sum_{n,m} \mathcal{M}_{n,m}, \quad (4.81)$$

onde

$$\mathcal{M}_{n,m} = \left(-\frac{\partial E_{n,m}}{\partial B} \right)_N, \quad (4.82)$$

é o momento magnético do estado (n, m) . Segue que,

$$\mathcal{M}_{n,m} = -\frac{\hbar e}{\mu \alpha^2} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{M}{2} \right) \frac{\omega_c}{\omega} + \frac{\hbar e}{2\mu \alpha^2} (m - l). \quad (4.83)$$

Como podemos ver, o momento magnético é alterado pela curvatura da superfície cônica.

Para um anel no espaço plano ($\alpha = 1$), recuperamos o resultado encontrado por Tan e Inkson da Ref. [5]

$$\mathcal{M}_{n,m} = -\frac{\hbar e}{\mu} \left[\left(n + \frac{1}{2} + \frac{M}{2} \right) \frac{\omega_c}{\omega} - \frac{1}{2} (m - l) \right]. \quad (4.84)$$

Vamos considerar o modelo de um anel quântico 1D de raio R . Assumimos que o anel é atravessado por um fluxo magnético de AB confinado no centro. O fluxo de campo tem um efeito puramente de gauge. Isso resulta em uma dependência periódica nas autoenergias com relação ao fluxo Φ (o mesmo Φ que é dado na Eq. (4.13)) com um período de oscilação Φ_0 . O anel está isolado e em equilíbrio térmico. Usando a energia total do sistema, podemos mostrar que existe uma corrente persistente, a qual é uma função periódica com relação ao fluxo de AB [7, 41]. Essa corrente persistente é dada por

$$I_m = \frac{e\hbar}{2\pi m_e R^2} (m - l), \quad (4.85)$$

onde $m = 0, \pm 1, \dots$, $l = \Phi/\Phi_0$ e m_e é a massa do elétron.

A corrente persistente é dada pela relação de Byers-Yang [5]

$$I_{n,m} = -\frac{\partial E_{n,m}}{\partial \Phi}, \quad (4.86)$$

ou, mudando a variável de Φ para l ,

$$I_{n,m} = -\frac{1}{\phi_0} \frac{\partial E_{n,m}}{\partial l}. \quad (4.87)$$

Desta relação, encontramos

$$I_{n,m} = \frac{e}{4\pi\alpha^2} \left(\frac{m-l}{M} - \frac{\omega_c}{\omega} \right), \quad (4.88)$$

onde temos feito $\phi_0 = 2\pi\hbar/e$. Consequentemente, a corrente total é dada por

$$I = \frac{e\omega_\alpha}{4\pi\alpha^2} \sum_{n,m} \left(\frac{m-l}{M} - \frac{\omega_c}{\omega} \right). \quad (4.89)$$

A relação entre o momento magnético $\mathcal{M}_{n,m}$ e a corrente $I_{n,m}$ é dada por

$$\mathcal{M}_{n,m} = \pi r_m^2 I_{n,m} - \frac{e\hbar}{\mu\alpha^2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\omega_c}{\omega}. \quad (4.90)$$

O primeiro termo mantém a mesma forma clássica do momento magnético [42]. O segundo termo, é causado pela penetração do campo magnético na região anelar. Ele quebra a proporcionalidade entre o momento magnético e a corrente persistente; é o diamagnetismo de Landau. Contudo, para campos magnéticos fracos ou quando o confinamento $\omega_0 \gg \omega_c$, obtemos $\omega_c/\omega \rightarrow 0$ e recuperamos a proporcionalidade entre momento magnético e a corrente persistente.

5 Outros sistemas mesoscópicos

A redução de dimensionalidade resulta em mudanças no comportamento dos elétrons em um semicondutor. A dimensionalidade refere-se ao número de graus de liberdade no momento dos elétrons: de fato, dentro de um fio quântico, os elétrons estão confinados em duas direções ao contrário do confinamento em poço quântico que ocorre em uma dimensão, com consequente redução nos graus de liberdade para um. Rotulando o número de graus de liberdade por $\mathcal{D}_f$ e o número de direções de confinamento por $\mathcal{D}_c$, escrevemos

$$\mathcal{D}_f + \mathcal{D}_c = 3 \quad (5.1)$$

para todos os sistemas do estado sólido [43]. O anel quântico 2D que consideramos neste trabalho tem dois graus de liberdade.

Veremos a seguir que, reduzindo o grau de liberdade do anel quântico, podemos encontrar um fio quântico 1D, um anel quântico 1D, um ponto quântico e um anti-ponto quântico.

5.1 O fio quântico

No caso do fio quântico, temos somente um grau de liberdade e dois graus de confinamento. Consideremos o modelo estudado por Weichao Tan *et. al.* [44], onde eles consideram um fio alinhado ao longo do eixo- y e o confinamento ao longo dos demais eixos. Se aplicamos um campo magnético paralelo ao eixo- z o movimento ao longo dessa direção não é alterado e, assim, considera-se somente o plano $x - y$. Escolhendo o potencial de confinamento

$$V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 x^2, \quad (5.2)$$

encontra-se os níveis de Landau do fio 2D

$$E_{n,k_y} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2\bar{\mu}}, \quad (5.3)$$

onde $\bar{\mu} = \mu [1 + (\omega_c/\omega_0)^2]$ é a massa efetiva e $\omega = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_0^2}$ é a frequência efetiva. Observamos que o campo magnético produz um potencial parabólico ao longo do eixo- x levando a partícula a mover-se livremente ao longo do eixo- y , com vetor de onda k_y^2 [43]. Podemos ver que a dispersão é parabólica.

Vamos agora usar nossos resultados para derivar o da Eq. (5.3). Antes, fazemos a observação de que o movimento dos elétrons está confinado ao plano. Dito isso, vamos considerar um estado m' muito próximo à m_0 . Isso permite que a dispersão do anel tenha um comportamento bem semelhante ao do fio. Fazendo ω_0 constante e $r_0 \rightarrow \infty$, podemos

considerar, com boa aproximação, uma faixa do anel como sendo um fio reto 2D. A partir disso, temos a seguinte condição:

$$\frac{m'^2}{\alpha^2} - \frac{1 - \alpha^2}{4\alpha^2} \ll \frac{2a_1\mu}{\hbar^2}. \quad (5.4)$$

Notamos que, neste caso,

$$m_0 \simeq \frac{eBr_0^2}{2\hbar}. \quad (5.5)$$

Isto é, o efeito da curvatura é desprezível no mínimo das sub-bandas (Eq.(4.64)). É possível mostrar que

$$E_{n,m} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2\alpha^2\bar{\mu}} \left(\frac{m'}{r_0}\right)^2, \quad (5.6)$$

onde

$$\bar{\mu} = \mu \left[1 + \left(\frac{\omega_c}{\alpha\omega_0} \right)^2 \right] \quad (5.7)$$

é a massa efetiva do elétron movendo-se ao longo do fio. Definindo $k_m = m'/r_0$, a dispersão encontrada acima é semelhante àquela dada na equação (5.3). A diferença é que a superfície cônica altera a massa efetiva do elétron $\bar{\mu}$ e também está presente na frequência efetiva ω_α .

O modelo do fio 2D, embora trate alguns problemas, como por exemplo a interação elétron-elétron, apresenta bons resultados somente quando poucas sub-bandas são ocupadas com um número pequeno de elétrons [45].

5.2 O anel quântico 1D

O espectro de energias de uma partícula confinada a um anel 1D é encontrado fazendo r_0 constante e $\omega_0 \rightarrow \infty$ [11]. A primeira condição limita a dependência do movimento à coordenada angular, enquanto que a segunda nos dá um potencial de confinamento intenso. É possível mostrar que a condição (5.4) ainda é válida. Usando o resultado (5.6), as energias permitidas para um único elétron são dadas por:

$$E_{n,m} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2\mu\alpha^2} \left(\frac{m'}{r_0}\right)^2. \quad (5.8)$$

Nesse caso, a massa efetiva da partícula não é alterada pela curvatura da superfície cônica. Contudo, a curvatura continua alterando os autovalores de energia. Aqui, semelhante ao fio 2D, as sub-bandas de energia são parabólicas.

Se fazemos $\alpha = 1$ e fazer campo magnético nulo, bem como o potencial de confinamento, temos como resultado

$$E_m = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{m'}{r_0}\right)^2, \quad (5.9)$$

que é bem conhecido na literatura (veja por exemplo a Ref. [41]).

O modelo do anel 1D embora tenha dado uma melhor compreensão dos efeitos de interferência quântica [46, 47, 48, 49, 50], estudos experimentais sobre o efeito Aharonov-Bohm e correntes persistentes em anéis mostraram interessantes fenômenos [51, 52] que não podem ser explicados pela teoria 1D. Essa situação decorre principalmente da largura finita dos anéis. Em um anel com uma largura finita os efeitos dos múltiplos canais são importantes bem como a influência do campo magnético uniforme na região condutora [11].

5.3 O ponto quântico

Um sistema de elétrons cujo confinamento se dá nas três dimensões apresenta níveis de energia quantizados como os dos átomos e moléculas e são chamados de pontos quânticos [16]. Também podem ser chamados de sistemas de *dimensão-zero* [43].

Devemos construir um modelo de potencial que seja confinante nas três direções. Mas, enfatizamos mais uma vez que o movimento se dá no plano. Assim, esse potencial de confinamento deve ser bidimensional. O modelo de potencial do Inkson *et. al* da Ref. [11] nos dá essa possibilidade. Para isso, basta fazer o parâmetro $a_1 = 0$. Contudo, observando com cuidado, o potencial geométrico impõe um potencial confinante (4.15). Esse potencial, excluindo a função δ , adiciona um termo proporcional a r^{-2} ao modelo de potencial do anel quântico. Abaixo, reescrevemos o potencial do anel (2.1) somado ao potencial geométrico (4.9) para uma melhor visualização (com $l = 0$):

$$[V_s(r)]_{cone} + V(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[-\frac{(1-\alpha^2)}{4\alpha^2 r^2} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{\delta(r)}{r} \right] + \frac{a_1}{r^2} + a_2 r^2 - V_0. \quad (5.10)$$

Excluindo o potencial $\delta(r)$ e reunindo os termos de mesma potência, ficamos com

$$[V_s(r)]_{cone} + V(r) = \left[a_1 - \frac{\hbar^2 (1-\alpha^2)}{2\mu 4\alpha^2 r^2} \right] \frac{1}{r^2} + a_2 r^2 - V_0. \quad (5.11)$$

Fica claro que o potencial de confinamento, no qual a origem faz parte do movimento, só terá o termo proporcional a r^{-2} nulo se e somente se

$$a_1 - \frac{\hbar^2 (1-\alpha^2)}{2\mu 4\alpha^2 r^2} = 0. \quad (5.12)$$

Desta condição, obtemos o espectro de energia de uma partícula presa a um potencial do tipo ponto quântico no espaço cônico. Substituindo o resultado acima na equação de autovalores de um elétron confinado a um anel 2D (Eq.(4.54)), encontramos o espectro de energia de um elétron em um potencial do tipo ponto quântico:

$$E_{n,m} = \hbar\omega_\alpha \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m|}{2\alpha} \right) - \frac{m\hbar\omega_c}{2\alpha^2} - \frac{\mu}{4}\omega_0^2 r_0^2. \quad (5.13)$$

Para recuperarmos os autovalores de um elétron em um potencial tipo ponto quântico no plano [53], fazemos $\alpha = 1$ na expressão acima. Isso resulta em:

$$E_{n,m} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m|}{2} \right) - \frac{m\hbar\omega_c}{2}, \quad (5.14)$$

onde $\omega = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_0^2}$.

5.4 O anti-ponto quântico

Se em um potencial que descreve um ponto quântico, a partícula está confinada nas três direções (no plano, nas duas direções), em um potencial do tipo anti-ponto quântico a partícula pode se mover em qualquer lugar do espaço exceto a origem. Em nosso modelo, o potencial centrífugo nos dá a idealização de tal modelo mesoscópico. Semelhante ao caso do ponto quântico, olhamos a equação (5.11). Fazendo $a_2 = 0$ juntamente com a condição

$$a_1 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1 - \alpha^2}{4\alpha^2} > 0, \quad (5.15)$$

obtemos as energias permitidas a um elétron sobre a influência de um potencial tipo anti-ponto quântico no espaço curvo:

$$E_{n,m} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar\omega_c}{\alpha} + \left(M - \frac{m}{\alpha} \right) \frac{\hbar\omega_c}{2\alpha}. \quad (5.16)$$

O primeiro termo representa os níveis de Landau no espaço cônico e o segundo termo o potencial do anti-dot, o qual também é alterado pela curvatura da superfície, como deve ser. Observe que, se $\alpha = 1$, recuperamos o resultado obtido por Tan e Inkson [11]:

$$E_{n,m} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c + (M - m) \frac{\hbar\omega_c}{2}. \quad (5.17)$$

6 Conclusão

A dinâmica quântica não-relativística de um elétron em um anel quântico bidimensional na presença de um campo magnético uniforme e do potencial Aharonov-Bohm no espaço curvo foi estudado. A partícula tem seu movimento confinado em uma região finita do espaço e não temos levado em conta os efeitos de spin. O movimento da partícula é decomposto em dois, sendo um sobre a superfície e o outro na direção normal em relação a superfície. A dinâmica sobre a superfície é governada pela equação de Schrödinger com acoplamento mínimo (3.22), enquanto o movimento na direção normal é governado pela Eq. (3.21). As curvaturas média e gaussiana entram na equação de Schrödinger por meio do potencial geométrico e o potencial do anel quântico (2.1) é inserido via acoplamento vetorial. Como aplicação, fizemos um estudo em conexão com a descrição de distribuição contínua de deslocações e disclinações no contexto da geometria de Riemann-Cartan. A partícula tem seu movimento vinculada a uma superfície com uma disclinação localizada na região $r = 0$ com elemento de linha dado pela equação (4.1). Em nosso estudo, consideramos o movimento da partícula vinculada a superfície de um cone. Obtivemos os autovalores de energia e funções da partícula considerando o seu movimento fora da região $r = 0$ e verificamos que eles são afetados por efeitos de curvatura. Também obtivemos expressões para o raio médio e largura dos estados do elétron no anel 2D e mostramos que eles também são afetados por efeitos de curvatura.

Também fizemos um estudo sobre a magnetização e correntes persistentes em um anel bidimensional no espaço curvo e comparamos com os resultados obtidos por Tan e Inkson. Verificamos que tanto a magnetização quanto a corrente persistente são afetados por efeitos de curvatura. Uma relação entre a magnetização e a corrente persistente foi também obtida e verificamos o fenômeno do diamagnetismo de Landau. Para este resultado, temos mostrado que para campos magnéticos fracos, o resultado clássico em que o momento magnético é proporcional à corrente é obtido.

Por fim, temos feito um estudo sobre outros sistemas mesoscópicos através da redução do grau de liberdade do anel quântico. Consideramos o caso de um fio quântico 1D, um anel quântico 1D, um ponto quântico e um anti-ponto quântico.

Para o fio quântico, mostramos o mínimo das sub-bandas não é afetado por efeitos de curvatura. Por outro lado, verificamos que as energias e massa efetiva são afetados pela curvatura da superfície. No anel quântico 1D, mostramos que a massa efetiva não é alterada pela curvatura da superfície e os autovalores de energia continuam sendo corrigidos por efeitos de curvatura.

No ponto quântico, mostramos que esse fenômeno só pode ocorrer se impusermos a

condição (5.12). Impondo essa condição, obtemos as energias e verificamos que elas são modificadas por efeitos de curvatura.

No caso do anti-ponto quântico, verificamos que ela também só ocorre se impusermos a condição (5.15). Assim como para o caso do ponto quântico, também verificamos que as energias são afetadas pela curvatura da superfície.

Todos os resultados obtidos em nosso trabalho que foram modificados por efeitos de curvatura, grande parte deles tal modificação é dada através do momento angular efetivo M_α ou simplesmente pelo parâmetro α . Em se tratando de modelos que exibem níveis análogos aos níveis de Landau usual, também temos mostrado que os espectros de energia derivados em cada caso estudado são não-degenerados, justamente por causa do parâmetro α que não assume valores inteiros. A degenerescência por sua vez é recuperada quando fazemos $\alpha = 1$ e consequentemente, os resultados obtidos por Tan e Inkson.

Referências

- 1 DATTA, S. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. New York: Cambridge University Press, 1995. Citado na página 10.
- 2 HEINZEL, T. *Mesoscopic Electronics in Solid State Nanostructures*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006. Citado na página 10.
- 3 BULAEV, D. V.; GEYLER, V. A.; MARGULIS, V. A. Effect of surface curvature on magnetic moment and persistent currents in two-dimensional quantum rings and dots. *Physical Review B*, v. 69, p. 195313, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 10, 11 e 19.
- 4 AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, v. 115, p. 485, 1959. Citado na página 10.
- 5 TAN, W.-C.; INKSON, J. C. Magnetization, persistent currents, and their relation in quantum rings and dots. *Physical Review B*, v. 60, p. 5626, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 10, 31 e 32.
- 6 NETTO, A. S.; CHESMAN, C.; FURTADO, C. Influence of topology in a quantum ring. *Physical Letters A*, v. 372, p. 3894, 2008. Citado na página 10.
- 7 TAN, W.-C.; INKSON, J. C. Landau quantization and the Aharonov-Bohm effect in a two-dimensional ring. *Physical Review B*, v. 53, p. 6947, 1996. Citado 5 vezes nas páginas 10, 12, 13, 19 e 32.
- 8 HALPERIN, B. I. Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential. *Physical Review B*, v. 25, p. 2185, 1982. Citado na página 10.
- 9 GOERBIG, M. O. Quantum Hall effects. *arXiv:0909.1998*, set. 2009. Citado na página 10.
- 10 BERRY, M. V.; KEATING, J. P. Persistent current flux correlations calculated by quantum chaology. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 27, p. 6167, 1994. Citado na página 10.
- 11 TAN, W.-C.; INKSON, J. C. Electron states in a two-dimensional ring - an exactly soluble model. *Semiconductor Science and Technology*, v. 11, p. 1635, 1996. Citado 8 vezes nas páginas 10, 13, 22, 26, 27, 34, 35 e 36.
- 12 SILVA, E. O. et al. Quantum motion of a point particle in the presence of the Aharonov-Bohm potential in curved space. *Annals of Physics*, v. 362, p. 739, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 19.
- 13 JIA, B.-Y. et al. Donor-bound electron states in a two-dimensional quantum ring under uniform magnetic field. *Chinese Physics B*, v. 20, p. 067301, 2011. Citado na página 12.

- 14 AQUINO, N.; CASTAÑO, E.; LEY-KOO, E. The Aharonov-Bohm effect on quantum antidot Landau states. *Chinese Journal of Physics*, v. 41, p. 276, 2003. Citado na página 12.
- 15 GRIFFITHS, D. J. *Mecânica quântica*. 2^a. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 12, 30, 45 e 48.
- 16 KITTEL, C. *Introdução à Física do Estado Sólido*. 8^a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 13, 35 e 47.
- 17 LIU, J. et al. Correlations between Aharonov-Bohm effects and one-dimensional subband populations GaAs/Al_xGa_{1-x}As in rings. *Physical Review. B*, v. 48, p. 15148, 1993. Citado na página 13.
- 18 KATANAEV, M. O.; VOLOVICH, I. V. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. *Annals of Physics*, v. 216, p. 1, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 19.
- 19 UNRUH, W. Has hawking radiation been measured? *arXiv:1401.6612 [gr-qc]*, 2014. Citado na página 14.
- 20 NOVOSELOV, K. S. et al. Electric field effect in atomically thin carbon films. *Science*, v. 306, p. 666, 2004. Citado na página 14.
- 21 GEIM, A. K.; NOVOSELOV, K. S. The rise of graphene. *Nature Materials*, v. 6, p. 183, 2007. Citado na página 14.
- 22 NETO, A. H. C. et al. The electronic properties of graphene. *Reviews of Modern Physics*, v. 81, p. 109, 2009. Citado na página 14.
- 23 CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Addison Wesley, 2004. Citado na página 14.
- 24 COSTA, R. C. T. d. Quantum mechanics of a constrained particle. *Physical Review A*, v. 23, p. 1982, 1981. Citado 4 vezes nas páginas 14, 16, 17 e 20.
- 25 WANG, Y.-L. et al. Pauli equation for a charged spin particle on a curved surface in an electric and magnetic field. *Physical Review A*, v. 90, p. 042117, 2014. Citado na página 14.
- 26 CAMPO, A. d.; BOSHIER, M. G.; SAXENA, A. Bent waveguides for matter-waves: supersymmetric potentials and reflectionless geometries. *Scientific Reports*, v. 4, p. 5274, 2014. Citado na página 14.
- 27 CHANG, J.-Y.; WU, J.-S.; CHANG, C.-R. Exact Hamiltonians with Rashba and cubic Dresselhaus spin-orbit couplings on a curved surface. *Physical Review B*, v. 87, p. 174413, 2013. Citado na página 14.
- 28 CASTIGLIA, G. et al. High-order-harmonic generation in dimensionally reduced systems. *Physical Review A*, v. 88, p. 033837, 2013. Citado na página 14.
- 29 FERRARI, G.; CUOGHI, G. Schrödinger equation for a particle on a curved surface in an electric and magnetic field. *Physical Review Letters*, v. 100, p. 230403, 2008. Citado na página 14.

- 30 ENCINOSA, M. Coupling curvature to a uniform magnetic field: An analytic and numerical study. *Physical Review A*, v. 73, p. 012102, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- 31 FILGUEIRAS, C.; MORAES, F. On the quantum dynamics of a point particle in conical space. *Annals of Physics*, v. 323, p. 3150, 2008. Citado na página 19.
- 32 FILGUEIRAS, C.; SILVA, E. O.; ANDRADE, F. M. Nonrelativistic quantum dynamics on a cone with and without a constraining potential. *Journal of Mathematical Physics*, v. 53, p. 122106, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- 33 SOKOLOV, D. D.; STAROBINSKI, A. A. On the structure of curvature tensor on conical singularities. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, v. 234, p. 1043, 1977. Citado na página 19.
- 34 CARVALHO, A. M. d. M.; SÁTIRO, C.; MORAES, F. Aharonov-Bohm-like effect for light propagating in nematics with disclinations. *Europhysics Letters*, v. 80, p. 46002, 2007. Citado na página 20.
- 35 CASTRO, L. B.; SILVA, E. O. Quantum dynamics of a spin-1/2 charged particle in the presence of a magnetic field with scalar and vector couplings. *The European Physical Journal C*, v. 75, p. 321, 2015. Citado na página 20.
- 36 FURTADO, C.; ROSAS, A.; AZEVEDO, S. Landau quantization and curvature effects in a two-dimensional quantum dot. *Europhysics Letters*, v. 79, p. 57001, 2007. Citado na página 20.
- 37 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum Mechanics: Non relativistic theory*. 3ª. ed. London: Pergamon, 1977. Citado 4 vezes nas páginas 22, 26, 44 e 45.
- 38 MESSIAH, A. *Quantum Mechanics*. 2ª. ed. Mineola, New York: Dover, 1999. Citado na página 22.
- 39 TSVELIK, A. M. *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*. 2ª. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. Citado na página 25.
- 40 GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. 3ª. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011. Citado na página 31.
- 41 VIEFERS, S. et al. Quantum rings for beginners: energy spectra and persistent currents. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, v. 21, p. 1, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 35.
- 42 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Eletromagnetismo*. 2ª. ed. São Paulo: Blucher, 2013. Citado na página 32.
- 43 HARRISON, P. *Quantum Wells, Wires and Dots: Theoretical and Computational Physics of Semiconductor Nanostructures*. 3ª. ed. New Jersey: Wiley, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.
- 44 TAN, W.-C.; INKSON, J. C.; SRIVASTAVA, G. P. A microscopic study of Landau level states in quantum wires. *Semiconductor Science and Technology*, v. 9, p. 1305, 1994. Citado na página 33.

-
- 45 LAUX, S. E.; FRANK, D. J.; STERN, F. Quasi-one-dimensional electron states in a split-gate GaAs/AlGaAs heterostructure. *Surface Science*, v. 196, p. 101, 1988. Citado na página 34.
- 46 GEFEN, Y.; IMRY, Y.; AZBEL, M. Y. Quantum oscillations and the Aharonov-Bohm effect for parallel resistors. *Physical Review Letters*, v. 52, p. 129, 1984. Citado na página 35.
- 47 BÜTTIKER, M.; IMRY, Y.; AZBEL, M. Y. Quantum oscillations in one-dimensional normal-metal rings. *Physical Review A*, v. 30, p. 1982, 1984. Citado na página 35.
- 48 BÜTTIKER, M. Small normal-metal loop coupled to an electron reservoir. *Physical Review B*, v. 32, p. 1846, 1985. Citado na página 35.
- 49 BÜTTIKER, M. et al. Generalized many-channel conductance formula with application to small rings. *Physical Review B*, v. 31, p. 6207, 1985. Citado na página 35.
- 50 BÜTTIKER, M.; IMRY, Y.; LANDAUER, R. Josephson behavior in small normal one-dimensional rings. *Physics Letters A*, v. 96, p. 365, 1983. Citado na página 35.
- 51 WASHBURN, S.; WEBB, R. A. Quantum transport in small disordered samples from the diffusive to the ballistic regime. *Reports on Progress in Physics*, v. 55, p. 1311, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 48.
- 52 TIMP, G. et al. Observation of the Aharonov-Bohm effect for $\omega_c\tau > 1$. *Physical Review Letters*, v. 58, p. 2814, 1987. Citado na página 35.
- 53 MAKSYM, P. A.; CHAKRABORTY, T. Quantum dots in a magnetic field: Role of electron-electron interactions. *Physical Review Letters*, v. 65, p. 108, 1990. Citado na página 36.
- 54 RUBAKOV, V. *Classical Theory of Gauge Fields*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2002. Citado na página 44.

Apêndices

APÊNDICE A – Níveis de Landau

A dinâmica quântica de uma partícula de massa μ em uma região livre de campos é governada pela equação de Schrödinger independente do tempo

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi = \mathcal{E}\Psi. \quad (\text{A.1})$$

Se a partícula interage com um campo eletromagnético, essa informação pode ser inserida na equação de Schrödinger através da prescrição mínima $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ e $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} - \varphi$. Com isso, a equação de Schrödinger fica escrita como

$$\frac{1}{2\mu}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2\Psi = (\mathcal{E} - \varphi)\Psi, \quad (\text{A.2})$$

onde $\mathbf{p} \equiv -i\hbar\nabla$, $\mathbf{A}$ é o potencial vetorial e φ é o potencial escalar. Os potenciais vetorial e escalar descrevem o campo eletromagnético.

Para que a equação (A.2) seja invariante de gauge, os potenciais e a função de onda devem se transformar como [54]

$$A_j \rightarrow A_j + \frac{1}{e} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad (\text{A.3})$$

$$\varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{e} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (\text{A.4})$$

$$\Psi \rightarrow \Psi e^{\frac{ief}{\hbar}}, \quad (\text{A.5})$$

onde o índice j se refere às coordenadas x , y e z .

Escolhendo o calibre de Landau [37],

$$A_x = -By, \quad (\text{A.6})$$

podemos mostrar que

$$f = -\frac{1}{2}Bxy. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo (A.6) na Eq. (A.2) e considerando que não há interação com o campo elétrico, obtemos

$$\frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} + eBy \right)^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Psi = \mathcal{E}\Psi. \quad (\text{A.8})$$

Observe que o campo magnético está direcionado ao longo do eixo z . Para ver isso, basta usarmos a relação entre o campo magnético e o potencial vetor:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B\mathbf{z}. \quad (\text{A.9})$$

Isso significa que o movimento ao longo do campo não é quantizado [37]. Por isso, vamos considerar somente o movimento no plano $x - y$. Observe que ao longo do eixo- x não há nenhuma interação. Assim, podemos tratar o movimento nessa direção como se fosse o de uma onda plana. Com essas informações, a função de onda pode ser escrita como

$$\Psi = e^{ip_x x/\hbar} \chi(y), \quad (\text{A.10})$$

onde o autovalor p_x é contínuo e pode assumir qualquer valor no intervalo $-\infty < p_x < +\infty$. Substituindo a função de onda acima na equação (A.8), encontramos

$$\frac{1}{2\mu} \left[(p_x + eBy)^2 - \hbar^2 \frac{d^2}{dy^2} \right] \chi(y) = \mathcal{E} \chi(y), \quad (\text{A.11})$$

que pode ser escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \chi(y)}{dy^2} + \frac{\mu \omega_c^2}{2} (y - y_0)^2 \chi(y) = \mathcal{E} \chi(y) \quad (\text{A.12})$$

onde

$$y_0 = -\frac{p_x}{eB} \quad (\text{A.13})$$

e

$$\omega_c = \frac{eB}{\mu} \quad (\text{A.14})$$

é a frequência ciclotrônica.

A equação (A.12) é a equação de um oscilador harmônico. Observe que o centro é deslocado da origem para o ponto y_0 . As energias são dadas por [15]

$$\mathcal{E} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c, \quad (\text{A.15})$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$, que são os níveis de Landau.

Podemos ver que para um autovalor de energia definido por um número quântico n , há infinitas autofunções com o mesmo autovalor. Portanto, os níveis de Landau são infinitamente degenerados.

Se consideramos coordenadas cilíndricas ao invés de coordenadas cartesianas, as energias são dadas por

$$\mathcal{E} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m|}{2} - \frac{m}{2} \right). \quad (\text{A.16})$$

APÊNDICE B – O efeito Aharonov-Bohm

Os primeiros estudos sobre o potencial vetor $\mathbf{A}$ foram realizados pelo físico alemão Franz Ernst Neumann entre os anos de 1845 e 1847, onde ele estudou o processo de indução magnética em um circuito devido ao movimento relativo de circuitos próximos. A idéia da existência desse potencial também foi analisada pelos físicos alemães Wilhelm Eduard Weber, em 1848, e Gustav Robert Kirchhoff, em 1857. Embora esses físicos tenham apresentado expressões analíticas para representar $\mathbf{A}$, foi o físico e matemático escocês James Clerk Maxwell, em 1865, quem propôs o primeiro conceito formal. Outros desenvolvimentos importantes baseado na existência de um potencial vetor também foram realizados pelo físico dinamarquês Ludwig Valentin Lorenz, em 1863, e o físico holandês Hendrik Antoon Lorentz, em 1895. Muitas contribuições foram desenvolvidas na tentativa de encontrar um significado físico para o potencial $\mathbf{A}$. Foi somente em 1931 que o físico inglês Paul Adrien Maurice Dirac alcançou este feito fazendo previsões sobre monopólos magnéticos, usando, contudo, a mecânica quântica. Mais tarde, em 1949, W. Eherenberg e R. S. Siday discutiram os efeitos dos potenciais eletromagnéticos na mecânica quântica.

Foi somente em 1959 que o físico israelense Yakir Aharonov e o físico norte-americano David Joseph Bohm publicaram um artigo no qual apresentaram claramente a importância física de $\mathbf{A}$ por intermédio de um fenômeno quântico de interferência, passando a ser conhecido depois como efeito Aharonov-Bohm. Eles consideraram propriedades de interferência de uma partícula carregada em uma superposição dos caminhos que passam por ambos os lados de uma linha de fluxo magnético isolada. Em outras palavras, em regiões do espaço onde não existem campos, as propriedades físicas do sistema dependem do potencial vetor $\mathbf{A}$, em contraste com a física clássica. O efeito Aharonov-Bohm é de interesse para o estudo de linhas de fluxo em materiais magnéticos. Sua verificação experimental foi dada por Chambers, Peshkim e Tonomura. Após o influente trabalho de Aharonov e Bohm outros efeitos topológicos foram descobertos, como por exemplo, o efeito Aharonov-Casher onde a função de onda de uma partícula neutra que possui momento de dipolo magnético não-nulo, movendo-se em uma região onde não existem forças provenientes de campos eletromagnéticos é afetada por um campo elétrico de maneira similar ao efeito Aharonov-Bohm. Outro efeito de fase topológica conhecido é o He-Mackellar-Wilkens o qual pode ser verificado por meio de uma transformação de dualidade para o efeito Aharonov-Casher.

Consideremos um solenoide muito longo e de raio a carregando uma corrente elétrica constante I . Sabemos que o campo magnético fica concentrado dentro do solenoide. Já, o potencial vetor é diferente de zero dentro e fora do solenoide.

O potencial vetor na região $r > a$ é dado por

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r}\theta, \quad (r > a), \quad (\text{B.1})$$

onde $\Phi = \pi a^2 B$ é o fluxo de campo magnético que passa através de uma seção de área πa^2 . A partícula se movimenta no plano perpendicular ao eixo do solenoide, o qual podemos fazer paralelo ao eixo- z . Além disso, ela executa um movimento circular com um raio fixo $r = b$, com $b > a$. Queremos estudar a dinâmica dessa partícula. Se não há potencial elétrico, a equação (A.2) é reescrita como

$$\frac{1}{2\mu} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 \Psi = \mathcal{E} \Psi. \quad (\text{B.2})$$

Substituindo (B.1) em (B.2), ficamos com

$$-\frac{\hbar^2}{b^2} \frac{d^2 \Psi}{d\theta^2} + \frac{i\hbar\Phi}{\pi b^2} \frac{d\Psi}{d\theta} + \left(\frac{\Phi^2}{4\pi^2 b^2} - 2\mu\mathcal{E} \right) \Psi = 0. \quad (\text{B.3})$$

A solução da equação diferencial acima é dada por

$$\Psi = C e^{ik\theta}, \quad (\text{B.4})$$

onde

$$k = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \pm \sqrt{\frac{2\mu b^2 \mathcal{E}}{\hbar^2}} \quad (\text{B.5})$$

e C é a constante de normalização.

Como a função de onda deve ser unívoca em todo o espaço, então $k = n$, com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Essa condição nos permite calcular as energias permitidas para o movimento da partícula. Tais energias são dadas por

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2}{2\mu b^2} (n - l)^2. \quad (\text{B.6})$$

com $l = \Phi/\Phi_0$, onde temos definido o período de oscilação ou quantum de fluxo magnético e $\Phi_0 = h/e$ [16].

O fluxo de campo magnético muda a regra de quantização da energia da partícula, o que de certa forma não deixa de ser surpreendente, já que a partícula está em uma região de campo nulo. A interação da partícula com o campo dentro do solenoide se dá via potencial vetorial.

Há uma outra maneira de calcular a função de onda e o espectro de energia. A ideia é que, sendo $\mathbf{A}$ estático, podemos simplificar a equação de Schrödinger escrevendo

$$\Psi(\theta) = e^{ig} f(\theta), \quad (\text{B.7})$$

onde $g(\mathbf{r})$ representa a fase adquirida pela partícula dada pela expressão

$$g(\mathbf{r}) = \frac{e}{\hbar} \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \quad (\text{B.8})$$

com $\mathcal{O}$ sendo um ponto de referência arbitrário. Essa definição faz sentido somente se $B = 0$ na região em questão, pois, caso contrário, a integral de linha dependeria do trajeto escolhido e, portanto, não definiria uma função de $\mathbf{r}$ [15, 51]. Substituindo (B.1) na equação (B.8), obtemos

$$g = \frac{e\Phi}{2\pi\hbar}\theta. \quad (\text{B.9})$$

Consequentemente, a função de onda é dada por

$$\Psi(\theta) = e^{i\frac{e\Phi}{2\pi\hbar}\theta} f(\theta). \quad (\text{B.10})$$

Agora, substituindo (B.10) em (B.2), encontramos a equação diferencial

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} = -\frac{2\mu\mathcal{E}b^2}{\hbar^2} f. \quad (\text{B.11})$$

A solução da equação acima é dada por

$$f = C e^{\pm i\sqrt{\frac{2\mu\mathcal{E}b^2}{\hbar^2}}\theta}. \quad (\text{B.12})$$

Desse resultado, obtemos

$$\Psi(\theta) = C e^{i\left(\frac{e\Phi}{2\pi\hbar} \pm \sqrt{\frac{2\mu\mathcal{E}b^2}{\hbar^2}}\right)\theta}, \quad (\text{B.13})$$

que é o mesmo resultado da Eq. (B.4). As energias permitidas são encontradas com o mesmo argumento usado para obter (B.6).