



Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT

Fábio Almeida Ribeiro

MÉTODOS ANALÍTICOS PARA AS DESIGUALDADES DE BENNETT E KAHANE–SALEM–ZYGmund

São Luís - MA
2025

Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT

Fábio Almeida Ribeiro

MÉTODOS ANALÍTICOS PARA AS DESIGUALDADES DE
BENNETT E KAHANE–SALEM–ZYGmund

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do
Programa de Pós-Graduação em Matemática
(PPGMAT) da UFMA como requisito parcial
para a obtenção do título de Mestre em Ma-
temática.

Este exemplar corresponde a versão final
da dissertação defendida pelo aluno Fábio
Almeida Ribeiro e aprovada pela comissão
julgadora.

Anselmo Baganha Raposo Júnior
(Orientador)

São Luís - MA
2025

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Almeida Ribeiro, Fábio.

Métodos analíticos para as desigualdades de Bennett e
Kahane-Salem-Zygmund / Fábio Almeida Ribeiro. - 2025.
73 p.

Orientador(a): Anselmo Baganha Raposo Júnior.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São
Luís, 2025.

1. Desigualdade de Bennett. 2. Desigualdade de
Kahane-salem-zygmund. 3. Dominação Superior. 4. Formas
Multilineares. I. Baganha Raposo Júnior, Anselmo. II.
Título.

Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMAT) da UFMA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise Funcional

Aprovada em: 14 de março de 2025

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior
Orientador
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho
Examinador Interno
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. Geivison dos Santos Ribeiro
Examinador Externo
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

São Luís - MA
2025

Dedicatória

Esta dissertação é dedicada a todos que acreditaram em mim e me ajudaram a alcançar este objetivo. Aos meus pais, por seu amor e apoio incondicional. Aos meus colegas e amigos, por compartilharem conhecimentos e experiências. E ao meu orientador, por sua orientação e confiança.

Agradecimentos

A cada passo que consigo concluir, renovo minha gratidão aos que me apoiaram nesta jornada acadêmica e agradeço imensamente àqueles que contribuíram para o sucesso desta jornada.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, pela força e inspiração, que foram elementos fundamentais para nunca pensar em desistir e encarar os estudos sempre com foco e determinação.

Agradeço ao meu orientador Anselmo pela valiosa orientação, pela grandiosa dedicação e por toda a contribuição proporcionada à minha formação enquanto matemático. Pude apreender muito com ele em todas as disciplinas que tive o grande privilégio de ser aluno dele.

À minha família e amigos também agradeço muito por sempre acreditarem e torcerem por mim, por sempre aplaudirem e valorizarem as minhas conquistas.

Agradeço também, de forma muito especial, a todos os professores que tive ao longo da minha vida estudantil. Desde os do Ensino Fundamental I até os do Ensino Superior e Mestrado, todos contribuíram significativamente para minha formação. Agradeço, pois foi através dessa base sólida que consegui chegar aqui, onde tanto sonhei chegar.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Esta conquista não consegui sozinho. Tive apoio, inspiração, orientação e muito incentivo. Por isso, mais uma vez refaço meus agradecimentos. Obrigado!

Sua espada só reflete medo. Quando você desvia do meu ataque, você tem medo de ser cortado. Quando você ataca, tem medo de cortar. Quando você protege alguém, você tem medo de deixar morrer. Sim, sua espada só me fala de um absurdo medo. Não é assim. Numa batalha, nada do que você fizer pode vir do medo. Se você desviar, você não será cortado. Se você proteger, não vai deixar morrer. E se você atacar... você vai cortar!

Urahara (Bleach)

Resumo

As desigualdades de Kahane-Salem-Zygmund e de Bennett são resultados probabilísticos que garante a existência de matrizes especiais com entradas ± 1 gerando formas m -lineares unimodulares com normas relativamente pequenas. Abordaremos as versões multilineares das desigualdades de Kahane-Salem-Zygmund. Algumas constantes surgem nessas desigualdades e um dos problemas em aberto é determinar os valores exatos dessas constantes. Por esse motivo, este trabalho visa estabelecer limitações superiores para algumas constantes da desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund.

Palavras-chave: Formas multilineares, Desigualdade de Bennett, Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund, Dominação superior.

Abstract

The inequalities of Kahane-Salem-Zygmund and Bennett are probable results. that guarantees the existence of special matrices with ± 1 inputs generating shapes unimodular m-linears with relatively small standards. We will address multilinear versions of the Kahane-Salem-Zygmund inequalities. Certain constants emerge in these inequalities, and an open problem is determining their exact values. This work aims to establish upper bounds for some Kahane-Salem-Zygmund inequality constants.

Key-words: Multilinear forms, Bennett's inequality, Kahane-Salem-Zygmund inequality, Upper domination.

Sumário

Notações e terminologias	1
Introdução	3
1 Resultados Preliminares	5
1.1 Operadores multilineares	5
1.2 Matrizes de Hadamard e densidade assintótica	11
1.3 O Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin	21
2 Dominação universal das constantes nas desigualdades KSZ e Bennett	33
2.1 As desigualdades de Kahane–Salem–Zygmund e Bennett	33
2.2 Constantes da desigualdade KSZ	35
2.3 Constantes da desigualdade de Bennett	40
2.4 Dominação superior para algumas constantes da desigualdade de Bennett .	48
2.5 Dominação superior para algumas constantes da desigualdade de KSZ . . .	51
Referências	61

Notações e terminologias

Os símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotarão neste texto, respectivamente, o conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais, o corpo dos números reais e o corpo dos números complexos. Já o símbolo $\mathbb{K}$ representará, de forma indistinta, os corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Em $\mathbb{K}^n$, a sequência $(e_j)_{j=1}^n$ representará sua base canônica. Se $p \in [1, \infty]$, então a função $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

define uma norma sobre $\mathbb{K}^n$. Chamaremos essa norma de p -norma. A notação ℓ_p^n designará o espaço vetorial normado $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$. Já $\ell_p^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ será a notação usada quando for necessário deixar claro que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

A bola fechada de centro na origem e raio 1 em um espaço vetorial normado E será denotada por B_E , ou seja,

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ denotará o maior inteiro menor do que ou igual a x e, se $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função complexa, então $|F|$ designará a correspondência $z \mapsto |F(z)|$.

O conjugado de Lebesgue de $p \in [1, \infty]$ será o único elemento p^* de $[1, \infty]$ para o qual tenhamos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1.$$

Convencionamos que $\frac{1}{\infty} = 0$ e $\frac{1}{0} = \infty$.

O produto interno de um espaço vetorial E será indicado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Particularmente, quando $E = \mathbb{K}^n$, o produto interno usado será o euclidiano, que é definido como

$$\langle x, y \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j},$$

onde $\overline{y_j}$ representa o complexo conjugado de y_j .

Por fim, a notação

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n$$

indicará sempre o somatório múltiplo

$$\sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n .$$

Introdução

A desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund é um resultado probabilístico que garante a existência de matrizes especiais com entradas ± 1 gerando formas m -lineares unimodulares $A : \ell_{n_1}^{p_1} \times \cdots \times \ell_{n_m}^{p_m} \rightarrow \mathbb{K}$ com normas relativamente pequenas. As desigualdades de Kahane–Salem–Zygmund desempenham um papel fundamental na Análise Moderna, com um grande número de aplicações que envolvem, por exemplo, o raio de Bohr e as desigualdades multilineares de Bohnenblust–Hille e Hardy–Littlewood. Para estas e outras aplicações, vide [1, 3, 4, 7, 17]. Neste trabalho estamos interessados nas versões multilineares das desigualdades de KSZ, que veremos a seguir.

A desigualdade KSZ para formas multilineares estabelece em [1] e [12] que dados $m, n \in \mathbb{N}$ e $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$, existe uma forma m -linear $A_n : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_n(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n \pm z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)},$$

com $z^{(i)} = (z_1^{(i)}, \dots, z_n^{(i)}) \in \ell_{p_i}^n$ e $i = 1, \dots, m$,
tal que

$$\|A_n\| \leq C_m n^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}} + \sum_{k=1}^m \max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\}}, \quad (1)$$

com

$$C_m = \sqrt{32m \log(6m)} \sqrt{m!}. \quad (2)$$

Quando $m = 2$, temos o caso das formas bilineares, que foi estudado por Bennett. A abordagem de Bennett (vide [5]) é mais geral no sentido de permitir dimensões diferentes no domínio das formas bilineares. A desigualdade de Bennett estabelece que existe uma constante $C \geq 1$ tal que, para quaisquer $p_1, p_2 \in [1, \infty]$ e quaisquer inteiros positivos n_1, n_2 , existe uma forma bilinear $A_{n_1, n_2} : \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 de maneira que

$$\|A_{n_1, n_2}\| \leq C \max \left\{ n_1^{1/p_1^*} n_2^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{1/p_2^*} n_1^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}, 0\}} \right\}. \quad (3)$$

A desigualdade KSZ foi recentemente estendida (consulte [2] e [5] para mais detalhes), de modo que temos o seguinte enunciado: sejam $m, n_1, \dots, n_m$ inteiros positivos e $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$. Existem uma constante C_m e uma forma m -linear

$$A_{n_1, \dots, n_m} : \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$$

do tipo

$$A_{n_1, \dots, n_m} (z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)},$$

tais que

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq C_m \left(\sum_{k=1}^m n_k \right)^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} \prod_{k=1}^m n_k^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\}}. \quad (4)$$

Mais generalizações e de amplo espectro podem ser consultadas em [10].

Por meio de uma manipulação simples, que será apresentada no Seção 2.1, vemos que (4) é equivalente a

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq D_m \max_{k=1, \dots, m} \left\{ n_k^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\}} \quad (5)$$

para alguma constante $D_m \geq C_m$. A demonstração elaborada em [2] das desigualdades (4) e (5) segue passos análogos aos traçados na demonstração de (1) e as constantes C_m e D_m são, essencialmente, as constantes que aparecem em (2).

A otimalidade do expoente de n em (1) foi provada por A. Mantero e A. Tonge (vide [12, 14]) e, quando $p_1, \dots, p_m \in [2, \infty]$, todos os expoentes de $n_1, \dots, n_m$ em todas as expressões acima são também ótimos (vide [2]). No entanto, os valores exatos das constantes C , C_m e D_m não são conhecidos. Por esse motivo, este trabalho visa estabelecer limitações superiores para algumas constantes da desigualdade de KSZ e Bennett.

Os Teoremas (2.12) e (2.18) são os mais importantes deste trabalho. O primeiro estabelece que algumas constantes C da desigualdade de Bennett são limitadas superiormente por $\sqrt{\frac{8}{5}}$. Já o segundo estabelece que algumas constantes D_m da desigualdade KSZ são superiormente limitadas por $\left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{m-1}{2}}$.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo veremos alguns conceitos e resultados que são fundamentais para o estudo das versões multilineares das desigualdades de Kahane–Salem–Zygmund. Naturalmente, veremos alguns resultados sobre as formas multilineares. O estudo das matrizes de Hadamard também tem grande relevância neste texto. Por isso, dedicaremos uma seção para discutirmos a respeito desse tema. Por fim, enceraremos este capítulo tratando do Teorema de Interpolação de Riesz–Thorin.

1.1 Operadores multilineares

Nesta seção, estudaremos parte da teoria dos Operadores Multilineares. O objetivo desse estudo é expor alguns fatos relevantes a cerca destes operadores que terão grande relevância neste trabalho. Veremos em especial resultados sobre a norma de operadores multilineares. Isso é importante, pois as desigualdades de Bennett e Kahane–Salem–Zygmund fazem considerações a respeito da norma de operadores multilineares.

Iniciamos recordando o que é um espaço vetorial normado.

Definição 1.1 Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma função

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$$

será dita uma norma sobre E se possui as seguintes propriedades:

- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo par $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in E$.

Um espaço vetorial E sobre $\mathbb{K}$ munido de uma norma $\|\cdot\|$ será dito um espaço vetorial normado. Esses espaços podem ser vistos como um espaço métrico. Para isso, basta munir E da seguinte função

$$\begin{aligned} d: E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\|, \end{aligned}$$

a qual facilmente podemos verificar que é uma métrica em E .

Exemplo 1.2 Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita e $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma base de E . Então, para todo $x \in E$, existem únicos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Consideremos a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i &\mapsto \sum_{i=1}^n |\lambda_i|. \end{aligned}$$

A unicidade da representação de um vetor em uma base garante que a função $\|\cdot\|$ está bem definida. Além disso, claramente $\|\cdot\|$ é uma norma em E , a qual chamaremos de norma da soma.

Um dos conceitos fundamentais no estudo de normas de um espaço vetorial é o de normas equivalentes, que será abordado a seguir.

Definição 1.3 Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ normas sobre E . Diremos que $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são normas equivalentes se existem $a, b > 0$ tais que, para todo $x \in E$,

$$a \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b \|x\|_1.$$

Em [15], é demonstrado que, se E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, então quaisquer duas normas sobre E são equivalentes.

Vejam agora a definição de um operador multilinear.

Definição 1.4 Sejam $m \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_m, E$ espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Diremos que uma aplicação $A: E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow E$ é um operador m -linear ou multilinear se é linear em cada uma de suas m variáveis. Isso significa dizer que, para qualquer $k = 1, \dots, m$, temos

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_{k-1}, \lambda x_k + \rho y_k, x_{k+1}, \dots, x_m) &= \lambda A(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \\ &\quad + \rho A(x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m), \end{aligned}$$

para todos

$$(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m), (x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \in E_1 \times \dots \times E_m$$

e $\lambda, \rho \in \mathbb{K}$.

Quando $E = \mathbb{K}$, chamaremos A de forma m -linear. Quando $E_1, \dots, E_m$ são espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$, consideraremos em $E_1 \times \dots \times E_m$ uma das seguintes normas equivalentes

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_m)\|_1 &= \sum_{k=1}^m \|x_k\|, \\ \|(x_1, \dots, x_m)\|_\infty &= \max \{\|x_1\|, \dots, \|x_m\|\}, \end{aligned}$$

conhecidas, respectivamente, como norma da soma e norma do máximo.

Os resultados a seguir apresentam alguns fatos relacionados às aplicações multilineares, que serão utilizados ao longo do texto.

Exemplo 1.5 Sejam $m, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ e $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$. A função

$$A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \dots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$$

definida por

$$A\left(\left(z_1^{(1)}, \dots, z_{n_1}^{(1)}\right), \dots, \left(z_1^{(m)}, \dots, z_{n_m}^{(m)}\right)\right) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)}$$

é uma forma m -linear.

Com efeito, sejam $k_0 \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda, \rho \in \mathbb{K}$ e

$$x_0 = (x^{(1)}, \dots, x^{(k_0)}, \dots, x^{(m)}), y_0 = (x^{(1)}, \dots, y^{(k_0)}, \dots, x^{(m)}) \in \ell_{p_1}^{n_1} \times \dots \times \ell_{p_m}^{n_m}.$$

Observamos que

$$\begin{aligned} A(x^{(1)}, \dots, \lambda x^{(k_0)} + \rho y^{(k_0)}, \dots, x^{(m)}) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm x_{i_1}^{(1)} \dots (\lambda x_{i_{k_0}}^{(k_0)} + \rho y_{i_{k_0}}^{(k_0)}) \dots x_{i_m}^{(m)} \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm x_{i_1}^{(1)} \dots \lambda x_{i_{k_0}}^{(k_0)} \dots x_{i_m}^{(m)} \\ &\quad + \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm x_{i_1}^{(1)} \dots \rho y_{i_{k_0}}^{(k_0)} \dots x_{i_m}^{(m)} \\ &= \lambda \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_{k_0}}^{(k_0)} \dots x_{i_m}^{(m)} \\ &\quad + \rho \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm x_{i_1}^{(1)} \dots y_{i_{k_0}}^{(k_0)} \dots x_{i_m}^{(m)} \\ &= \lambda A(x_0) + \rho A(y_0), \end{aligned}$$

de onde segue que A é linear.

As formas m -lineares como as desse exemplo têm grande importância para nosso trabalho. Veremos agora que elas são contínuas. Para realizar a demonstração desse fato, apresentaremos e demonstraremos o seguinte lema.

Lema 1.6 Sejam $m \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_m, F$ espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e

$$A: E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$$

uma aplicação multilinear. Então A é contínua se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|A(x)\| \leq C \|x_1\| \dots \|x_m\|, \quad (1.1)$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \dots \times E_m$.

Demonstração: Se A é contínua, então, em particular, é contínua no vetor nulo. Daí, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x\| < \delta$, então $\|A(x)\| < 1$. Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \dots \times E_m$. Se algum $x_i = 0$, teremos $\|A(x)\| = 0$, o que assegura a validade do nosso resultado.

Suponhamos então que $x_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$. Nesse caso, podemos considerar o seguinte vetor

$$\left(\frac{\delta x_1}{2 \|x_1\|}, \dots, \frac{\delta x_m}{2 \|x_m\|} \right),$$

o qual tem norma do máximo igual a $\frac{\delta}{2}$. Logo, da continuidade de A na origem, temos

$$\left\| A \left(\frac{\delta x_1}{2 \|x_1\|}, \dots, \frac{\delta x_m}{2 \|x_m\|} \right) \right\| \leq 1 \Leftrightarrow \|A(x)\| \leq \frac{2^m}{\delta^m} \|x_1\| \cdots \|x_m\|.$$

Tomando $C = \frac{2^m}{\delta^m}$ e observando que x foi tomado genericamente, concluímos que (1.1) vale para todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$.

Suponhamos agora que, para todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, (1.1) seja verificado. Dados $\varepsilon > 0$, $x_0 = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, tomando

$$\delta = \frac{\sqrt[m]{\varepsilon}}{\sqrt[m]{C} \sqrt[m]{2}},$$

notamos que

$$\|y - x_0\|_\infty \leq \delta \Leftrightarrow \|y_1 - x_1\|, \dots, \|y_m - x_m\| \leq \delta.$$

Daqui e de (1.1), temos

$$\begin{aligned} \|A(y) - A(x_0)\| &= \|A(y - x_0)\| \\ &\leq C \|y_1 - x_1\| \cdots \|y_m - x_m\| \\ &= C \frac{\sqrt[m]{\varepsilon}}{\sqrt[m]{C} \sqrt[m]{2}} \cdots \frac{\sqrt[m]{\varepsilon}}{\sqrt[m]{C} \sqrt[m]{2}} = C \frac{\varepsilon}{2C} = \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

de onde segue que A é contínua em x_0 . Como esse ponto foi escolhido arbitrariamente, A é contínua. ■

Denotamos por $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ o espaço dos operadores multilineares contínuos $A: E_1 \times \cdots \times E_m \rightarrow F$. Quando $F = \mathbb{K}$, é comum escrever $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m)$ em vez de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$. Observamos que a correspondência

$$A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F) \mapsto \|A\| = \sup_{\|x_1\|, \dots, \|x_m\| \leq 1} \|A(x_1, \dots, x_m)\|$$

define uma norma. Um resultado da Teoria de Operadores multilineares afirma que

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\| = \cdots = \|x_m\| = 1} \|A(x_1, \dots, x_m)\|.$$

OBSERVAÇÃO 1.7 Se $A: E_1 \times \cdots \times E_m \rightarrow F$ é uma forma multilinear contínua, sabemos, do Lema 1.6, que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|A(x)\| \leq C \|x_1\| \cdots \|x_m\|, \quad \forall (x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m.$$

Um resultado importante que usaremos neste texto é que $\|A\|$ é a menor das constantes para a qual temos a desigualdade acima, isto é,

$$\|A\| = \inf \{C : \|A(x)\| \leq C \|x_1\| \cdots \|x_m\|, \quad \forall (x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m\}.$$

Para mais detalhes, consulte o primeiro capítulo de [6].

Teorema 1.8 *Sejam $E_1, \dots, E_m, E$ espaços vetoriais normados. Se $E_1, \dots, E_m$ têm dimensão finita, então o operador m -linear $A: E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow E$ é contínuo.*

Demonstração: Seja n_i a dimensão de cada espaço E_i (com $i = 1, \dots, m$). Se $n_i = 0$ para algum $i \in \{1, \dots, m\}$, então o operador A terá como imagem o conjunto $\{0\}$. Daí, claramente A será contínuo. Suponhamos então que $n_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$. Para cada i seja

$$\{v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)}\} \subset E_i$$

uma base do espaço E_i . Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \dots \times E_m$, digamos

$$x_1 = \sum_{i_1=1}^{n_1} \lambda_{i_1}^{(1)} v_{i_1}^{(1)}, \dots, x_m = \sum_{i_m=1}^{n_m} \lambda_{i_m}^{(m)} v_{i_m}^{(m)}.$$

Seja

$$L = \max_{1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_m \leq n_m} \left\{ \left\| A \left(v_{i_1}^{(1)}, \dots, v_{i_m}^{(m)} \right) \right\| \right\},$$

Como A é uma aplicação multilinear, temos que

$$\begin{aligned} \|A(x)\| &= \|A(x_1, \dots, x_m)\| = \left\| A \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \lambda_{i_1}^{(1)} v_{i_1}^{(1)}, \dots, \sum_{i_m=1}^{n_m} \lambda_{i_m}^{(m)} v_{i_m}^{(m)} \right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \lambda_{i_1}^{(1)} \dots \lambda_{i_m}^{(m)} A \left(v_{i_1}^{(1)}, \dots, v_{i_m}^{(m)} \right) \right\| \\ &\leq \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \lambda_{i_1}^{(1)} \dots \lambda_{i_m}^{(m)} \right| \left\| A \left(v_{i_1}^{(1)}, \dots, v_{i_m}^{(m)} \right) \right\| \\ &\leq \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \lambda_{i_1}^{(1)} \dots \lambda_{i_m}^{(m)} \right| L \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \lambda_{i_1}^{(1)} \right| \dots \left| \lambda_{i_m}^{(m)} \right| L \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \left| \lambda_{i_1}^{(1)} \right| \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \lambda_{i_m}^{(m)} \right| L \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left| \lambda_{i_1}^{(1)} \right| \right) \dots \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \lambda_{i_m}^{(m)} \right| \right) L \end{aligned} \tag{1.2}$$

Notemos que a expressão

$$\sum_{i_j=1}^{n_j} \left| \lambda_{i_j}^{(j)} \right|,$$

com $j = 1, \dots, m$, é a norma da soma do vetor $x_j \in E_j$. Além disso, como esse espaço possui dimensão finita, quaisquer duas normas definidas em E_j são equivalentes. Assim, existe $M_j \geq 0$ tal que

$$\sum_{i_j=1}^{n_j} \left| \lambda_{i_j}^{(j)} \right| \leq M_j \|x_j\|. \tag{1.3}$$

Usando (1.2) e (1.3) e pondo $C = \prod_{j=1}^m L M_j$, temos

$$\|A(x)\| = \|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq C \|x_1\| \dots \|x_m\|.$$

Da arbitrariedade de $x \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e do Lema 1.6, isso equivale a dizer que A é contínuo. ■

Com esse resultado, podemos concluir que as formas m -lineares

$$A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$$

do tipo

$$A(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)},$$

com $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ e $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$, são sempre contínuas. Isso nos garante que as normas dessas funções sempre estarão bem definidas.

Exemplo 1.9 Sejam $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$, $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ e $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma m -linear com norma igual a $\|A\|$. Seja $1 \leq i < j \leq m$. Sempre podemos encontrar uma forma m -linear T definida sobre

$$\ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_{i-1}}^{n_{i-1}} \times \ell_{p_j}^{n_j} \times \ell_{p_{i+1}}^{n_{i+1}} \times \cdots \times \ell_{p_{j-1}}^{n_{j-1}} \times \ell_{p_i}^{n_i} \times \ell_{p_{j+1}}^{n_{j+1}} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m}$$

com norma igual a $\|A\|$. Com efeito, basta definirmos T como

$$T(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_m) = A(x_1, \dots, x_m).$$

Por simplicidade, ponhamos

$$\begin{cases} F = \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m}, \\ G = \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_{i-1}}^{n_{i-1}} \times \ell_{p_j}^{n_j} \times \ell_{p_{i+1}}^{n_{i+1}} \times \cdots \times \ell_{p_{j-1}}^{n_{j-1}} \times \ell_{p_i}^{n_i} \times \ell_{p_{j+1}}^{n_{j+1}} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} B_1 = \{|A(x)| : x \in B_F\}, \\ B_2 = \{|T(y)| : y \in B_G\}. \end{cases}$$

Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in B_F$. Daí, obtemos

$$y = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_m) \in B_G.$$

Logo, segue-se que $B_1 \subset B_2$. De maneira inteiramente análoga, podemos ver que $B_2 \subset B_1$. Logo, $B_1 = B_2$ e, consequentemente, $\|T\| = \|A\|$. Uma das consequências desse resultado é que, se $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ é uma forma m -linear, então podemos supor sem perda de generalidade que $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_m$.

Exemplo 1.10 Sejam $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$, $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ e $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma m -linear com coeficientes ± 1 . Se $A_0: \ell_{p_1}^{n_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}),$$

então $\|A_0\| \leq \|A\|$. De fato, fazendo

$$\begin{cases} E = \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m}, \\ F = \ell_{p_1}^{n_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} & \{ |A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})|; (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in B_F \} \\ & \subset \{ |A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})|; (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in B_E \}, \end{aligned}$$

de onde segue imediatamente o resultado desejado.

Assim, quando estivermos interessados em estabelecer resultados acerca de limitações superiores para a norma de formas m -lineares, pode ser suficiente apenas considerar o contexto de escalares complexos para que tenhamos garantida a sua validade no contexto de escalares reais.

Exemplo 1.11 Sejam $p, q \in [1, \infty]$ com $p \leq q$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $B_{\ell_p^n} \subset B_{\ell_q^n}$. Com efeito, seja $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_{\ell_p^n}$. Então $|x_j| \leq 1$, para cada $1 \leq j \leq n$. Dessa forma, para $p, q \in [1, \infty)$, temos

$$\sum_{n=1}^n |x_n|^q \leq \sum_{n=1}^n |x_n|^p \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^n |x_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{n=1}^n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow \|x\|_q \leq 1 \Leftrightarrow x \in B_{\ell_q^n}.$$

Isso garante que $B_{\ell_p^n} \subset B_{\ell_q^n}$ quando $p, q \in [1, \infty)$ e $p \leq q$. Os casos em que temos $p \in [1, \infty), q = \infty$ e $p = q = \infty$ podem ser verificados facilmente. Sejam $A_1: \ell_{p_1}^{n_1} \times \dots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ e $A_2: \ell_{q_1}^{n_1} \times \dots \times \ell_{q_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ formas m -lineares definidas pela mesma regra. Ponhamos

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ |A_1(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| : (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in B_{\ell_{p_1}^{n_1}} \times \dots \times B_{\ell_{p_m}^{n_m}} \right\}, \\ B_2 &= \left\{ |A_1(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| : (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in B_{\ell_{q_1}^{n_1}} \times \dots \times B_{\ell_{q_m}^{n_m}} \right\}. \end{aligned}$$

Se $p_k \leq q_k$, para todo $k = 1, \dots, m$, então $B_{\ell_{p_k}^{n_k}} \subset B_{\ell_{q_k}^{n_k}}$ para todo $k = 1, \dots, m$. Segue desse fato que $B_1 \subset B_2$. Portanto,

$$\|A_1\| = \sup B_1 \leq \sup B_2 = \|A_2\|.$$

1.2 Matrizes de Hadamard e densidade assintótica

Diremos que uma matriz quadrada $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{n \times n}$ é uma matriz de Hadamard se $h_{ij} \in \{-1, 1\}$ para todo i e todo j e

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^\top = n\mathbf{I}_n,$$

onde $\mathbf{H}^\top$ é a matriz transposta de $\mathbf{H}$ e $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n .

Exemplo 1.12 As matrizes

$$[1], \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

são de Hadamard.

Notemos que, quando $\mathbf{H}$ é uma matriz de ordem n e $u_1, \dots, u_n$ são seus vetores linha, então as entradas c_{ij} da matriz $\mathbf{H}\mathbf{H}^\top$ são dadas por

$$c_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle, \text{ com } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Isso indica que $\mathbf{H}$ é uma matriz de Hadamard se, e somente se,

$$c_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle = n\delta_{ij}, \quad (1.4)$$

para todo i e todo j , onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Um resultado análogo vale para os vetores coluna de $\mathbf{H}$. Se n é um inteiro positivo para o qual existe uma matriz de Hadamard de ordem n , então n será dito um **inteiro de Hadamard** ou uma **ordem de Hadamard**. Veremos ainda nesta seção que nem todo inteiro positivo é uma ordem de Hadamard.

Exemplo 1.13 Dada uma matriz $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{n \times n}$ de Hadamard, podemos construir, a partir dessa matriz, outras matrizes de Hadamard. Por exemplo, quando permutamos linhas (ou colunas) de uma matriz de Hadamard, a matriz obtida por esse processo é ainda uma matriz de Hadamard, pois a Equação (1.4) será verificada. Outra maneira de construir matrizes de Hadamard a partir de $\mathbf{H}$ consiste em tomar $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ e considerar os seguintes produtos de matrizes

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 h_{11} & \varepsilon_1 h_{12} & \cdots & \varepsilon_1 h_{1n} \\ \varepsilon_2 h_{21} & \varepsilon_2 h_{22} & \cdots & \varepsilon_2 h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_n h_{n1} & \varepsilon_n h_{n2} & \cdots & \varepsilon_n h_{nn} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 h_{11} & \varepsilon_2 h_{12} & \cdots & \varepsilon_n h_{1n} \\ \varepsilon_1 h_{21} & \varepsilon_2 h_{22} & \cdots & \varepsilon_n h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1 h_{n1} & \varepsilon_2 h_{n2} & \cdots & \varepsilon_n h_{nn} \end{bmatrix}.$$

Claramente, as duas matrizes obtidas por meio desses produtos são matrizes de Hadamard.

Mostraremos agora que é possível obter, a partir de $\mathbf{H}$, uma matriz de Hadamard com ordem n do tipo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix}$$

Para isso, para todo $i = 1, \dots, n$, sejam $\varepsilon_i = h_{1i}$ e $\rho_i = \varepsilon_1 h_{i1}$. Com esses escalares definidos dessa maneira, claramente temos

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_n \end{bmatrix} \mathbf{H} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \varepsilon_1 h_{11} & \rho_1 \varepsilon_2 h_{12} & \cdots & \rho_1 \varepsilon_n h_{1n} \\ \rho_2 \varepsilon_1 h_{21} & \rho_2 \varepsilon_2 h_{22} & \cdots & \rho_2 \varepsilon_n h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_n \varepsilon_1 h_{n1} & \rho_n \varepsilon_2 h_{n2} & \cdots & \rho_n \varepsilon_n h_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix}.$$

Uma matriz de Hadamard nestas condições será dita uma matriz de Hadamard normalizada.

Uma pergunta interessante que podemos fazer acerca das ordens de Hadamard é se todo número natural é uma ordem de Hadamard. O próximo resultado nos afirma que não.

Teorema 1.14 *Seja $\mathbf{H}$ matriz de Hadamard com ordem n . Então*

$$n \in \{1, 2\} \cup \{4k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstração: No Exemplo 1.12, vimos que existem matrizes de Hadamard com ordens 1 e 2. Dessa forma, podemos supor que $n > 2$. Seja $\mathbf{H}$ uma matriz de Hadamard de ordem n . Como vimos anteriormente, podemos obter a partir de $\mathbf{H}$ uma matriz de Hadamard normalizada também com ordem n . Assim, podemos supor sem perda de generalidade que $\mathbf{H}$ é normalizada.

Denotaremos o i -ésimo vetor linha de $\mathbf{H}$ por u_i . Como $\mathbf{H}$ é normalizada, temos que $u_1 = (1, 1, \dots, 1)$. Além disso, sabemos também que

$$\langle u_1, u_i \rangle = 0 \quad (1.5)$$

sempre que $i \neq 1$. Isso indica que $u_1 \perp u_i$ sempre que $i \neq 1$, de onde decorre que u_1 e u_i são linearmente independentes sempre que $i \neq 1$.

Sejam n_i e m_i , respectivamente, a quantidade de entradas iguais a 1 e a quantidade de entradas iguais a -1 de u_i . Para todo $i \neq 1$, devemos ter $n_i, m_i \neq 0$, pois, caso contrário a Equação (1.5) não seria verificada para $i = 2, \dots, n$. Agora, observamos que

$$\begin{cases} n_i + m_i = n \\ n_i - m_i = \langle u_1, u_i \rangle = 0 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos

$$n_i = m_i = \frac{n}{2}.$$

sempre que $i \neq 1$, o que implica em n ser par. Em particular, isso indica que u_2 possui $\frac{n}{2}$ entradas iguais a 1 e $\frac{n}{2}$ entradas iguais a -1 . Podemos supor sem perda de generalidade que u_2 é da forma

$$\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{\frac{n}{2} \text{ entradas}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\frac{n}{2} \text{ entradas}} \right),$$

pois podemos permutar as colunas de $\mathbf{H}$ de modo que u_2 seja dessa forma. É importante notar que a matriz obtida por eventuais permutações de colunas resulta em uma matriz de

Hadamard de acordo com o Exemplo 1.13. Notemos também que essa possível reordenação não altera u_1 .

Como u_1 tem todas as suas entradas iguais a 1, para que a Equação (1.5) seja satisfeita, é necessário que u_3 tenha $\frac{n}{2}$ entradas iguais a 1 e $\frac{n}{2}$ entradas iguais a -1 . Nas $\frac{n}{2}$ primeiras entradas de u_3 devemos encontrar entradas iguais a 1 e a -1 , pois, caso contrário teríamos

$$u_3 = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\frac{n}{2} \text{ entradas}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\frac{n}{2} \text{ entradas}}).$$

ou

$$u_3 = (\underbrace{-1, \dots, -1}_{\frac{n}{2} \text{ entradas}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\frac{n}{2} \text{ entradas}}),$$

ou seja, $u_2 = \pm u_3$, o que é um absurdo, pois u_1 e u_3 são linearmente independentes. O mesmo resultado vale para as $\frac{n}{2}$ últimas entradas de u_3 . Podemos novamente permutar as colunas de $\mathbf{H}$, mas, desta vez, faremos isso reordenando separadamente as $\frac{n}{2}$ primeiras colunas e as $\frac{n}{2}$ últimas colunas de $\mathbf{H}$ se necessário. Como estamos fazendo as permutações como descrito, esse processo não alterará u_1 e u_2 . Dessa forma, podemos supor sem perda de generalidade que

$$u_3 = (\underbrace{1, \dots, 1}_w, \underbrace{-1, \dots, -1}_x, \underbrace{1, \dots, 1}_y, \underbrace{-1, \dots, -1}_z).$$

Isso nos dá o seguinte sistema

$$\begin{cases} w + x + y + z = n \\ w - x + y + z = \langle u_1, u_3 \rangle = 0 \\ w - x - y + z = \langle u_2, u_3 \rangle = 0 \\ w + x - y - z = \langle u_1, u_3 \rangle = 0 \end{cases}$$

cujas soluções são $w = x = y = z = \frac{n}{4}$. Sendo w, x, y, z inteiros positivos, concluímos que n é múltiplo de 4. ■

Ainda não se sabe se a recíproca do resultado é verdadeira. No entanto, é sabido que, para todo $k = 1, \dots, 166$, $4k$ é uma ordem de Hadamard (vide [11] para mais detalhes).

Teorema 1.15 (Sylvester) *Se $\mathbf{H}$ é uma matriz de Hadamard de ordem n , então*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & -\mathbf{H} \end{bmatrix}$$

é uma matriz de Hadamard de ordem $2n$.

Demonstração: Devemos mostrar que

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = 2n\mathbf{I}_{2n}.$$

Para isso, denotamos os vetores linha de $\mathbf{H}$ por $u_1, \dots, u_n$ e observamos que $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ sempre que $i \neq j$, onde $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & -\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & -\mathbf{H} \end{bmatrix}^\top &= \begin{bmatrix} u_1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & u_n \\ u_1 & -u_1 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & -u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & \cdots & u_n & -u_1 & \cdots & -u_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2\langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & 2\langle u_1, u_n \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2\langle u_n, u_1 \rangle & \cdots & 2\langle u_n, u_n \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2\langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & 2\langle u_1, u_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2\langle u_n, u_1 \rangle & \cdots & 2\langle u_n, u_n \rangle \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n \end{bmatrix} = 2n\mathbf{I}_{2n}.
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.16 Como vimos anteriormente, a matriz

$$\mathbf{H}_1 = [1]$$

é de Hadamard. Podemos definir recursivamente uma sequência $(\mathbf{H}_n)_{n=1}^\infty$ de matrizes da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_1 = [1] \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_n & \mathbf{H}_n \\ \mathbf{H}_n & -\mathbf{H}_n \end{bmatrix},$$

Cada termo dessa sequência é uma matriz de Hadamard de acordo com o *Teorema de Sylvester*. Assim, para cada $t \in \mathbb{N}$, existe uma matriz de Hadamard de ordem 2^t .

Definição 1.17 Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times m}$ uma matriz de ordem m com entradas escalares. Se $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m$ são matrizes de ordem n com entradas escalares então o **produto de Kronecker** (ou **produto direto**) $\mathbf{A} \otimes [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m]$ é a matriz quadrada de ordem mn definida por

$$\mathbf{A} \otimes [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m] = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B}_1 & a_{12}\mathbf{B}_1 & \cdots & a_{1m}\mathbf{B}_1 \\ a_{21}\mathbf{B}_2 & a_{22}\mathbf{B}_2 & \cdots & a_{2m}\mathbf{B}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B}_m & a_{m2}\mathbf{B}_m & \cdots & a_{mm}\mathbf{B}_m \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Quando $\mathbf{B}_1 = \cdots = \mathbf{B}_m = \mathbf{B}$, escreveremos simplesmente $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = [a_{ij}\mathbf{B}]$.

O próximo resultado estende de modo natural o Teorema de Sylvester.

Teorema 1.18 *Sejam*

$$\mathbf{H}_1 = [h_{ij}^{(1)}]_{m \times m} \quad e \quad \mathbf{H}_2 = [h_{ij}^{(2)}]_{n \times n}$$

matrizes de Hadamard de ordens m e n , respectivamente. Então $\mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{H}_2$ é uma matriz de Hadamard de ordem mn .

Demonstração: Seja u_i a i -ésima linha de $\mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{H}_2$, onde $i \in \{1, 2, \dots, mn\}$. Tomamos $i, j \in \{1, 2, \dots, mn\}$ e r_1 e r_2 , respectivamente, os restos na divisão de i e j por n e definimos

$$r = \begin{cases} n, & \text{se } r_1 = 0, \\ r_1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad e \quad s = \begin{cases} n, & \text{se } r_2 = 0, \\ r_2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Existem únicos inteiros positivos p, q tais que

$$(p-1)n < i \leq pn \quad e \quad (q-1)n < j \leq qn.$$

Logo,

$$\begin{aligned} u_i &= (h_{p1}^{(1)}h_{r1}^{(2)}, \dots, h_{p1}^{(1)}h_{rn}^{(2)}, \dots, h_{pm}^{(1)}h_{r1}^{(2)}, \dots, h_{pm}^{(1)}h_{rn}^{(2)}) \\ u_j &= (h_{q1}^{(1)}h_{s1}^{(2)}, \dots, h_{q1}^{(1)}h_{sn}^{(2)}, \dots, h_{qm}^{(1)}h_{s1}^{(2)}, \dots, h_{qm}^{(1)}h_{sn}^{(2)}). \end{aligned}$$

Dessa forma, observamos que

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_j \rangle &= h_{p1}^{(1)}h_{r1}^{(2)}h_{q1}^{(1)}h_{s1}^{(2)} + \dots + h_{p1}^{(1)}h_{rn}^{(2)}h_{q1}^{(1)}h_{sn}^{(2)} \\ &\quad + \dots + h_{pm}^{(1)}h_{r1}^{(2)}h_{qm}^{(1)}h_{s1}^{(2)} + \dots + h_{pm}^{(1)}h_{rn}^{(2)}h_{qm}^{(1)}h_{sn}^{(2)} \\ &= h_{p1}^{(1)}h_{q1}^{(1)}(h_{r1}^{(2)}h_{s1}^{(2)} + \dots + h_{rn}^{(2)}h_{sn}^{(2)}) + \dots + h_{pm}^{(1)}h_{qm}^{(1)}(h_{r1}^{(2)}h_{s1}^{(2)} + \dots + h_{rn}^{(2)}h_{sn}^{(2)}) \\ &= (h_{p1}^{(1)}h_{q1}^{(1)} + \dots + h_{pm}^{(1)}h_{qm}^{(1)})(h_{r1}^{(2)}h_{s1}^{(2)} + \dots + h_{rn}^{(2)}h_{sn}^{(2)}) \\ &= (m\delta_{pq})(n\delta_{rs}). \end{aligned}$$

Notemos que, se $i \neq j$, então ou $p \neq q$ ou $r \neq s$. Neste caso, $\delta_{pq} = 0$ ou $\delta_{rs} = 0$. Independentemente do caso, teremos $\langle u_i, u_j \rangle = 0$. Se $i = j$, então $p = q$ e $r = s$. Deste modo, $\delta_{pq} = 1 = \delta_{rs}$ e $\langle u_i, u_j \rangle = mn$, o que permite concluir que $\mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{H}_2$ é uma matriz de Hadamard. ■

Exemplo 1.19 Uma das consequências imediatas do *Teorema 1.18* é que, se m e n são ordens de Hadamard, então mn também o é. Além disso, como as matrizes

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

são matrizes de Hadamard, segue do Teorema 1.18 que, dados $i, j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, existe uma matriz de Hadamard de ordem $4^i 12^j$.

O próximo resultado pode ser encontrado em [13].

Teorema 1.20 (Teorema da Aproximação de Dirichlet) *Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então*

$$\{m + n\alpha : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$.

Demonstração: A fim de mostrar a validade do resultado, é suficiente mostrar que, dados $x_0 \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}$, existem $m, n \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$m + n\alpha \in \left[x_0 - \frac{1}{N}, x_0 + \frac{1}{N} \right].$$

Para mostrarmos esse fato, iniciamos definindo a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

Observamos que, para cada $i = 1, \dots, N+1$, claramente $f(i\alpha) \in [0, 1]$. Dividindo o intervalo $[0, 1]$ em intervalos de comprimento $\frac{1}{N}$, podemos concluir usando o Princípio das Casas de Pombo que existem $i, j \in \{1, \dots, N+1\}$ tais que

$$0 < f(i\alpha) - f(j\alpha) < \frac{1}{N},$$

que é equivalente a

$$0 < (\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor) + (i - j)\alpha < \frac{1}{N}. \quad (1.7)$$

Ponhamos $m_0 = \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$ e $n_0 = i - j$ e definamos, para cada $k \in \mathbb{Z}$, o intervalo

$$[k(m_0 + n_0\alpha), (k+1)(m_0 + n_0\alpha)]$$

Como $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, temos

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k(m_0 + n_0\alpha), (k+1)(m_0 + n_0\alpha)].$$

Segue daí que existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ de forma que

$$k_0(m_0 + n_0\alpha) \leq x_0 \leq (k_0 + 1)(m_0 + n_0\alpha). \quad (1.8)$$

Fazendo $m = k_0 m_0$, $n = k_0 n_0$ e somando $-k_0(m_0 + n_0\alpha)$ a cada membro de (1.8), temos

$$0 \leq x_0 - (m + n\alpha) \leq m_0 + n_0\alpha. \quad (1.9)$$

Combinando (1.7) e (1.9), vemos que

$$0 \leq x_0 - (m + n\alpha) \leq \frac{1}{N} \Leftrightarrow m + n\alpha \in \left[x_0 - \frac{1}{N}, x_0 + \frac{1}{N} \right],$$

o que encerra nossa demonstração. ■

Corolário 1.21 *Se $\alpha > 0$ é um número irracional e $\varepsilon > 0$, então existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, sempre que $x \geq n_\varepsilon$, existem $a, b \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ tais que*

$$0 < a + b\alpha - x < \varepsilon.$$

Demonstração: Podemos supor, sem perda de generalidade, que $0 < \varepsilon < 1$. Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

O Teorema da Aproximação de Dirichlet nos permite concluir que existem $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$0 < a_0 + b_0\alpha < \varepsilon. \quad (1.10)$$

Desde que $0 < a_0 + b_0\alpha$, a_0 e b_0 não podem ser simultaneamente negativos. Resta-nos três casos que estudaremos a seguir.

• **Caso I:** $a_0, b_0 \geq 0$. Seja $x_0 > 0$. Vimos na demonstração do teorema anterior que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k(a_0 + b_0\alpha), (k+1)(a_0 + b_0\alpha)].$$

Além disso, como

$$\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} (k(a_0 + b_0\alpha), (k+1)(a_0 + b_0\alpha)) = \emptyset,$$

deve existir um único k inteiro não-negativo tal que

$$(k-1)(a_0 + b_0\alpha) < f(x_0) \leq k(a_0 + b_0\alpha). \quad (1.11)$$

Vejamos que, multiplicando (1.11) por -1 , somando $k(a_0 + b_0\alpha)$ a ambos os membros das desigualdades obtidas e usando (1.10), obtemos

$$0 \leq k(a_0 + b_0\alpha) - f(x_0) < a_0 + b_0\alpha < \varepsilon. \quad (1.12)$$

Seja $n_\varepsilon = 1$. Se $\lfloor x_0 \rfloor \geq n_\varepsilon$, fazendo $a = \lfloor x_0 \rfloor + ka_0$ e $b = kb_0$. Claramente, $a, b \geq 0$. Além disso, observamos também que

$$a + b\alpha - x_0 = \lfloor x_0 \rfloor + ka_0 + kb_0\alpha - x_0 = k(a_0 + b_0\alpha) - f(x_0). \quad (1.13)$$

De (1.13) e (1.12) segue que

$$0 \leq a + b\alpha - x_0 < \varepsilon,$$

onde a e b são inteiros não-negativos.

• **Caso II:** $a_0 < 0$ e $b_0 \geq 0$. Como $0 < a_0 + b_0\alpha < \varepsilon$, então existe um inteiro z tal que $z(a_0 + b_0\alpha) \geq 1$. Seja m o inteiro não-negativo dado por

$$m = \min\{z \in \mathbb{N}; z(a_0 + b_0\alpha) \geq 1\}.$$

Fixamos $x_0 > 0$. Como vimos no caso anterior, existe um único inteiro não-negativo, o qual denotaremos por k , tal que

$$(k-1)(a_0 + b_0\alpha) < f(x_0) \leq k(a_0 + b_0\alpha). \quad (1.14)$$

Multiplicando cada membro de (1.14) por -1 , adicionando $k(a_0 + b_0\alpha)$ a ambos os membros de cada uma das desigualdades obtidas e usando (1.10), obtemos

$$0 \leq k(a_0 + b_0\alpha) - f(x_0) < a_0 + b_0\alpha < \varepsilon. \quad (1.15)$$

Pela definição da função f , obviamente, $f(x_0) < 1$. Desse modo, temos

$$m(a_0 + b_0\alpha) \geq 1 > f(x_0) > (k-1)(a_0 + b_0\alpha).$$

Isso implica que $m > k-1$, de onde concluímos que $m \geq k$. Seja $n_\varepsilon = -ma_0$. Se $\lfloor x_0 \rfloor \geq n_\varepsilon$, fazendo $a = \lfloor x_0 \rfloor + ka_0$ e $b = kb_0$ e lembrando que $m \geq k$, observamos que $a, b \geq 0$ e que

$$a + b\alpha - x_0 = \lfloor x_0 \rfloor + ka_0 + kb_0\alpha - x_0 = k(a_0 + b_0\alpha) - f(x_0). \quad (1.16)$$

De (1.15) e (1.16), vemos que

$$0 \leq a + b\alpha - x_0 < \varepsilon,$$

com a e b inteiros não-negativos.

• **Caso III:** $a_0 \geq 0$ e $b_0 < 0$. Seja m o maior inteiro não-negativo para o qual tenhamos $1 - m(a_0 + b_0\alpha) \geq 0$. Novamente fixamos $x_0 > 0$ e observamos que existe um k tal que k é o único inteiro não-negativo para o qual temos

$$1 - (k+1)(a_0 + b_0\alpha) < f(x_0) \leq 1 - k(a_0 + b_0\alpha). \quad (1.17)$$

Multiplicando (1.17) por -1 , obteremos novas desigualdades, as quais somamos o número $1 - k(a_0 + b_0\alpha)$ e aplicando (1.10), segue que

$$0 \leq 1 - k(a_0 + b_0\alpha) - f(x_0) < a_0 + b_0\alpha < \varepsilon. \quad (1.18)$$

Claramente $1 - k(a_0 + b_0\alpha) \geq 0$, pois

$$0 \leq 1 - k(a_0 + b_0\alpha) - f(x_0) \text{ e } -f(x_0) < 0,$$

de onde decorre que $m \geq k$. Tomamos $n_\varepsilon = ma_0$. Se $\lfloor x_0 \rfloor \geq n_\varepsilon$, fixamos $a = \lfloor x_0 \rfloor + 1 - ka_0$ e $b = -kb_0$. Como $m \geq k$, devemos ter

$$1 - ka_0 \geq 1 - ma_0 \geq 1 - m(a_0 + b_0\alpha) \geq 0.$$

Assim, $a \geq 0$. Além disso, é óbvio que $b \geq 0$. Desse modo,

$$\begin{aligned} a + b\alpha - x_0 &= \lfloor x_0 \rfloor + 1 - ka_0 - kb_0\alpha - x_0 \\ &= 1 - ka_0 - kb_0\alpha - (x_0 - \lfloor x_0 \rfloor) \\ &= 1 - k(a_0 + b_0\alpha) - f(x_0). \end{aligned} \tag{1.19}$$

por fim, de (1.19) e (1.18), podemos concluir que

$$0 \leq a + b\alpha - x_0 < \varepsilon,$$

com a e b inteiros não-negativos. ■

Definição 1.22 *Um subconjunto infinito $\mathbb{N}_0$ de números naturais é dito **assintoticamente denso** em $\mathbb{N}$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq n_\varepsilon$ então existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que*

$$m \leq n \leq (1 + \varepsilon)m.$$

Lema 1.23 *O conjunto $\{4^i 12^j : i, j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}\}$ é assintoticamente denso em $\mathbb{N}$.*

Demonstração: Vejamos que o número $\log_4 3$ é irracional. Para tanto, observamos que, se $\log_4 3$ fosse racional, então deveriam existir inteiros positivos p e q tais que

$$\log_4 3 = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 3^q = 4^p.$$

Em particular, isso indica que 3 divide 4^p , o que é um absurdo, pois 3 não divide 4. De acordo com Corolário 1.21, se tomarmos $\alpha = 1 + \log_4 3$, então, dado $\varepsilon > 0$, deve existir um $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que, sempre que $m \geq n_\varepsilon$, existem $i, j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ tais que

$$0 \leq i + j(1 + \log_4 3) - m \leq \varepsilon. \tag{1.20}$$

Mas observamos que, se $m \geq 4^{n_\varepsilon}$, então

$$\log_4 m \geq \log_4 4^{n_\varepsilon} = n_\varepsilon. \tag{1.21}$$

Além disso, como podemos supor sem perda de generalidade que $0 < \varepsilon < 1$, temos

$$\varepsilon < 1 < \log_4(1 + \varepsilon). \tag{1.22}$$

Por (1.21) e (1.22), temos então que (1.20) pode ser reescrita como

$$0 \leq i + j(1 + \log_4 3) - \log_4 m \leq \log_4(1 + \varepsilon),$$

desde que $m \geq 4^{n_\varepsilon}$. Notemos que isso é equivalente a escrever

$$\log_4 m \leq i + j(1 + \log_4 3) \leq \log_4(1 + \varepsilon) + \log_4 m = \log_4((1 + \varepsilon)m). \tag{1.23}$$

Usando as propriedades do logaritmo, obtemos

$$\begin{aligned} i + j(1 + \log_4 3) &= i + j + j \log_4 3 \\ &= (i + j) \log_4 4 + j \log_4 3 \\ &= \log_4 4^{i+j} + \log_4 3^j \\ &= \log_4 4^{i+j} 3^j = \log_4 4^i 12^j. \end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que (1.23) é equivalente a

$$\log_4 m \leq \log_4 4^i 12^j \leq \log_4 ((1 + \varepsilon) m)$$

sempre que $m \geq 4^{n_\varepsilon}$. Uma consequência imediata desse fato é que existem $i, j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ tais que

$$m \leq 4^i 12^j \leq (1 + \varepsilon) m,$$

sempre que $m \geq 4^{n_\varepsilon}$. Por definição, isso significa dizer que o conjunto

$$\{4^i 12^j : i, j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}\}$$

é assintoticamente denso em $\mathbb{N}$. ■

OBSERVAÇÃO 1.24 Se o conjunto

$$\{4^i 12^j : i, j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}\}$$

é assintoticamente denso em $\mathbb{N}$ e cada elemento desse conjunto é uma ordem de Hadamard de acordo com o Exemplo 1.19, então o conjunto das ordens de Hadamard é assintoticamente denso em $\mathbb{N}$.

1.3 O Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin

Nesta seção, apresentaremos e demonstraremos uma versão do Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, que pode ser encontrada em [16]. Para a demonstração desse teorema, precisamos de alguns resultados da Análise Complexa, que também serão vistos nesta seção.

Um resultado simples e que usaremos em vários momentos garante que, se $a > 0$ e $z = x + iy \in \mathbb{C}$, então

$$|a^z| = |a^{x+iy}| = |a|^x |a^{iy}| = |a|^x \left| (e^{\ln(a)})^{iy} \right| = a^x |e^{iy \ln(a)}| = a^x = a^{\operatorname{Re}(z)}. \quad (1.24)$$

Outro resultado da Análise Complexa que usaremos é o Princípio do Módulo Máximo, o qual pode ser encontrado em [9]. Esse resultado estabelece que, se $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica sobre um aberto conexo limitado D e contínua sobre seu fecho $\overline{D}$, então $\max \{|F(z)| : z \in \overline{D}\}$ é atingido em algum ponto z da fronteira de D .

Teorema 1.25 (Princípio de Phragmén-Lindelöf) *Seja $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica sobre a faixa aberta*

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) < \frac{\pi}{2} \right\}$$

e contínua sobre a faixa fechada

$$\overline{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Suponhamos que $|F| \leq 1$ sobre as retas verticais $\operatorname{Re}(z) = -\frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{Re}(z) = \frac{\pi}{2}$ e que existam $\alpha, C > 0$ tais que

$$|F(z)| \leq Ce^{\alpha|z|}$$

sempre que $z \in \overline{S}$. Então, $|F| \leq 1$ sobre $\overline{S}$.

Demonstração: Fixamos $0 < \beta < 1$ e definimos para cada $\varepsilon > 0$ uma função $G_\varepsilon: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$G_\varepsilon(z) = F(z) e^{-2\varepsilon \cos(\beta z)},$$

a qual claramente é analítica em S e contínua em $\overline{S}$. Usando a representação polar dos números complexos, podemos escrever $z = \theta + it$. Como a função cosseno complexo $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

temos

$$\begin{aligned} \cos(\beta z) &= \frac{e^{i\beta z} + e^{-i\beta z}}{2} = \frac{e^{i\beta(\theta+it)} + e^{-i\beta(\theta+it)}}{2} \\ &= \frac{e^{i\beta\theta-\beta t} + e^{-i\beta\theta+\beta t}}{2} = \frac{e^{-\beta t}e^{i\beta\theta} + e^{\beta t}e^{-i\beta\theta}}{2} \\ &= \frac{1}{2} [e^{-\beta t}(\cos(\beta\theta) + i \operatorname{sen}(\beta\theta)) + e^{\beta t}(\cos(\beta\theta) - i \operatorname{sen}(\beta\theta))] \\ &= \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} \cos(\beta\theta) - i \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \operatorname{sen}(\beta\theta). \end{aligned}$$

Como

$$\frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} \cos(\beta\theta) \text{ e } \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \operatorname{sen}(\beta\theta)$$

são números reais, temos que

$$2 \operatorname{Re}(\cos(\beta z)) = (e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \cos(\beta\theta).$$

Se $0 < \beta < 1$ e $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, então $\beta\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Segue daí que existe uma constante $c > 0$ tal que $\cos(\beta\theta) \geq c$, para todo $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Isso nos permite concluir que $-\varepsilon(e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \cos(\beta\theta) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Assim, se $z \in \overline{S}$ e fazendo $|z| \rightarrow \infty$, então

$$\alpha|z| - 2\varepsilon \operatorname{Re}(\cos(\beta z)) = \alpha\sqrt{\theta^2 + t^2} - \varepsilon(e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \cos(\beta\theta) \rightarrow -\infty$$

Usando esse fato e (1.24), temos

$$\begin{aligned}
 |G_\varepsilon(z)| &= |F(z) e^{-2\varepsilon \cos(\beta z)}| \\
 &= |F(z)| |e^{-2\varepsilon \cos(\beta z)}| \\
 &= |F(z)| e^{-2\varepsilon \operatorname{Re}(\cos(\beta z))} \\
 &\leq C e^{\alpha|z|} e^{-2\varepsilon \operatorname{Re}(\cos(\beta z))} \\
 &= C e^{\alpha|z| - 2\varepsilon \operatorname{Re}(\cos(\beta z))} \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

quando $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \bar{S}$. Essa convergência para 0 garante que existe uma constante $K_0 > 0$ tal que, sempre que $K \geq K_0$, temos $|G_\varepsilon(\theta \pm iK)| \leq 1$, para todo $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Se $|F| \leq 1$ sobre as retas verticais $\operatorname{Re}(z) = -\frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{Re}(z) = \frac{\pi}{2}$, então, sobre estas mesmas retas, temos

$$|G_\varepsilon(z)| = |F(z)| e^{-2\varepsilon \operatorname{Re}(\cos(\beta z))} \leq e^{-2\varepsilon \operatorname{Re}(\cos(\beta z))} = e^{-\varepsilon(e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \cos(\beta \theta)} \leq 1,$$

de onde temos que $|G_\varepsilon| \leq 1$ sobre as retas verticais $\operatorname{Re}(z) = -\frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{Re}(z) = \frac{\pi}{2}$. Isso nos permite concluir que $|G_\varepsilon(z)| \leq 1$ sempre que

$$z \in \left\{ \theta + it \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } t \leq -K \text{ ou } K \geq t \right\}, \quad (1.25)$$

sempre que $K > K_0$. Aplicando o Princípio do Módulo Máximo vemos que, se $K \geq K_0$, então o valor máximo de $|G_\varepsilon|$ é atingido em algum ponto z da fronteira de S . Daí, inferimos que $|G_\varepsilon(z)| \leq 1$ sempre que z pertence ao retângulo

$$\left\{ \theta + it \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } -K \leq t \leq K \right\}. \quad (1.26)$$

Decorre de (1.25) e (1.26) que $|G_\varepsilon(z)| \leq 1$ sobre $\bar{S}$, de onde segue que

$$|F(z)| \leq e^{2\varepsilon \operatorname{Re}(\cos(\beta z))}, \quad (1.27)$$

para todo $z \in \bar{S}$ e todo $\varepsilon > 0$. Fixando $z_0 \in \bar{S}$ e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ em (1.27), vemos que

$$|F(z_0)| \leq 1.$$

Como z_0 foi escolhido arbitrariamente em $\bar{S}$, isso implica que $|F| \leq 1$ sobre $\bar{S}$. ■

Corolário 1.26 *Seja $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica sobre a faixa aberta*

$$S = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re}(z) < b\}$$

e contínua sobre a faixa fechada

$$\bar{S} = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b\}.$$

Suponhamos que $|F| \leq M_1$ sobre a reta vertical $\operatorname{Re}(z) = a$, $|F| \leq M_2$ sobre a reta vertical $\operatorname{Re}(z) = b$, com $M_1, M_2 > 0$, e que existam $\alpha, C > 0$ tais que

$$|F(z)| \leq C e^{\alpha|z|}$$

sempre que $z \in \bar{S}$. Então, $|F| \leq \max\{M_1, M_2\}$ sobre $\bar{S}$.

Demonstração: Sejam $\varphi, G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ as funções definidas, respectivamente, por

$$\varphi(z) = \varphi(\theta + it) = \left(\frac{b-a}{\pi} \theta + \frac{b+a}{2} \right) + it$$

e

$$G(z) = \frac{(F \circ \varphi)(z)}{\max\{M_1, M_2\}}.$$

Observamos φ é analítica sobre a faixa aberta

$$S_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) < \frac{\pi}{2} \right\}$$

e contínua sobre a faixa fechada

$$\overline{S_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Assim, G é analítica sobre S_0 e contínua sobre $\overline{S_0}$. Sejam $t \in \mathbb{R}$, $z_1 = \frac{\pi}{2} + it$ e $z_2 = -\frac{\pi}{2} + it$. Vejamos que

$$\begin{aligned} G(z_1) &= \frac{(F \circ \varphi)(z_1)}{\max\{M_1, M_2\}} = \frac{1}{\max\{M_1, M_2\}} F\left(\frac{b-a}{\pi} \frac{\pi}{2} + \frac{b+a}{2} + it\right) \\ &= \frac{1}{\max\{M_1, M_2\}} F\left(\frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2} + it\right) \\ &= \frac{1}{\max\{M_1, M_2\}} F(b + it) \leq \frac{M_2}{\max\{M_1, M_2\}} \leq 1. \end{aligned}$$

Isso indica que $|G| \leq 1$ sobre a reta $\operatorname{Re}(z) = \frac{\pi}{2}$. De modo semelhante observamos que $|G| \leq 1$ sobre a reta $\operatorname{Re}(z) = -\frac{\pi}{2}$. Outro fato que podemos observar é que φ define uma correspondência biunívoca entre $\overline{S_0}$ e $\overline{S}$. Com efeito, se $z \in \overline{S_0}$, então $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{\pi}{2}$. Logo,

$$\frac{b-a}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{b+a}{2} \leq \operatorname{Re}(\varphi(z)) \leq \frac{b-a}{\pi} \frac{\pi}{2} + \frac{b+a}{2} \Leftrightarrow a \leq \operatorname{Re}(\varphi(z)) \leq b.$$

Isso mostra que $\varphi(z) \in \overline{S}$. Além disso, se $z_1, z_2 \in \overline{S_0}$ são tais que $\operatorname{Re}(\varphi(z_1)) \neq \operatorname{Re}(\varphi(z_2))$, então

$$\frac{b-a}{\pi} \operatorname{Re}(\varphi(z_1)) + \frac{b+a}{2} \neq \frac{b-a}{\pi} \operatorname{Re}(\varphi(z_2)) + \frac{b+a}{2},$$

de onde podemos inferir que $\varphi(z_1) \neq \varphi(z_2)$. Para concluir que de fato temos uma correspondência biunívoca entre $\overline{S_0}$ e $\overline{S}$, resta-nos mostrar que, dado $w = x + it \in \overline{S}$, existe um $z \in \overline{S_0}$ tal que $\varphi(z) = w$. Basta tomar

$$z = \frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{\pi}} + it \in \overline{S_0},$$

pois, como $a \leq x \leq b$, devemos ter

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{\pi}} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Notemos agora que

$$\begin{aligned}
 |G(z)| &= |G(\theta + it)| \\
 &= \left| F\left(\frac{b-a}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2} + it\right) \right| \\
 &= \frac{C}{\max\{M_1, M_2\}} \\
 &\leq \frac{C}{\max\{M_1, M_2\}} e^{\alpha\left|\frac{b-a}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2} + it\right|} \\
 &= \frac{C}{\max\{M_1, M_2\}} e^{\alpha\left|\left(\frac{b-a}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2} - \theta\right) + (\theta + it)\right|} \\
 &\leq \frac{C}{\max\{M_1, M_2\}} e^{\alpha\left(\left|\frac{b-a}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2} - \theta\right| + |(\theta + it)|\right)} \\
 &= \frac{C}{\max\{M_1, M_2\}} e^{\alpha\left|\frac{b-a}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2} - \theta\right|} e^{\alpha|\theta + it|} \\
 &= \frac{C}{\max\{M_1, M_2\}} e^{\alpha\left|\frac{b-a-\pi}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2}\right|} e^{\alpha|z|}. \tag{1.28}
 \end{aligned}$$

Observamos que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(\theta) = \frac{C}{\max\{M_1, M_2\}} e^{\alpha\left|\frac{b-a-\pi}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2}\right|}$$

é contínua. Assim, existe $\theta_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que

$$\frac{C}{\max\{M_1, M_2\}} e^{\alpha\left|\frac{b-a-\pi}{\pi}\theta + \frac{b+a}{2}\right|} = f(\theta) \leq f(\theta_0) = C_0, \tag{1.29}$$

para todo $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. De (1.28) e (1.29), temos

$$|G(z)| \leq C_0 e^{\alpha|z|},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Do Princípio de Phragmén-Lindelöf segue que $|G| \leq 1$ sobre $\overline{S_0}$. Portanto,

$$|F| \leq \max\{M_1, M_2\}$$

sobre $\overline{S}$. ■

Teorema 1.27 (Teorema das Três Linhas) *Seja $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica sobre a faixa aberta*

$$S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$$

e limitada e contínua sobre a faixa fechada

$$\overline{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}.$$

Se

$$|F(it)| \leq M_1 \quad e \quad |F(1+it)| \leq M_2, \quad M_1, M_2 > 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, então

$$|F(\theta + it)| \leq M_1^{1-\theta} M_2^\theta$$

para todo $0 \leq \theta \leq 1$ e todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Definimos a função $G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pondo

$$G(z) = M_1^{z-1} M_2^{-z} F(z).$$

Como as funções $H_1, H_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$H_1(z) = M_1^{z-1} \quad \text{e} \quad H_2(z) = M_2^{-z}$$

são analíticas sobre S e contínuas sobre $\bar{S}$, G é analítica sobre S e contínua sobre $\bar{S}$. Seja $M \geq \max\{M_1, M_2\}$ tal que $|F| \leq M$ sobre $\bar{S}$. Usando (1.24) observamos que, se $z = \theta + it \in \bar{S}$, então

$$|G(z)| = |G(\theta + it)| = \left| M_1^{(\theta-1)+it} M_2^{-\theta-it} F(z) \right| = M_1^{\theta-1} M_2^{-\theta} |F(z)|.$$

Se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $\operatorname{Re}(z) = 0$, então

$$|G(z)| = M_1^{-1} |F(it)| \leq M_1^{-1} M_1 = 1. \quad (1.30)$$

Para o caso em que $z \in \mathbb{C}$ é tal que $\operatorname{Re}(z) = 1$, temos que

$$|G(z)| = M_2^{-1} |F(1+it)| \leq M_2^{-1} M_2 = 1. \quad (1.31)$$

De (1.30) e (1.31), obtemos que $|G| \leq 1$ sobre as retas verticais $\operatorname{Re}(z) = 0$ e $\operatorname{Re}(z) = 1$. Além disso, como $|F| \leq M$, temos

$$|G(z)| \leq M_1^{\theta-1} M_2^{-\theta} M$$

sobre $\bar{S}$. Seja $\theta \in (0, 1)$. Então $-\theta, \theta - 1 < 0$, o que implica no seguinte:

$$M_1^{\theta-1} M_2^{-\theta} = \frac{1}{M_1^{1-\theta} M_2^{\theta}} \leq \frac{1}{(\min\{M_1, M_2\})^{1-\theta} (\min\{M_1, M_2\})^{\theta}} = \frac{1}{\min\{M_1, M_2\}}.$$

Se $\theta = 0$, então

$$M_1^{\theta-1} M_2^{-\theta} = M_1^{-1} = \frac{1}{M_1} \leq \frac{1}{\min\{M_1, M_2\}}.$$

No caso em que $\theta = 1$, temos

$$M_1^{\theta-1} M_2^{-\theta} = M_2^{-1} = \frac{1}{M_2} \leq \frac{1}{\min\{M_1, M_2\}}.$$

Obtemos assim que

$$M_1^{\theta-1} M_2^{-\theta} M \leq \frac{M}{\min\{M_1, M_2\}} = C$$

para todo $\theta \in [0, 1]$ e, como $e^{|z|} = e^{\operatorname{Re}(z)} \geq 1$ para todo $z \in \bar{S}$, temos

$$|G| \leq C e^{|z|},$$

sempre que $z \in \bar{S}$. Do Corolário 1.26,

$$M_1^{\theta-1} M_2^{-\theta} |F(\theta + it)| = |G(\theta + it)| \leq 1,$$

para todo $\theta \in [0, 1]$ e todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$|F(\theta + it)| \leq M_1^{1-\theta} M_2^{\theta},$$

para todo $\theta \in [0, 1]$ e todo $t \in \mathbb{R}$. ■

Teorema 1.28 (Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin) *Sejam*

$$T: \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_m} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

um operador m -linear e

$$r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_m, q_1, q_2 \in [1, \infty].$$

Consideremos os operadores m -lineares $T_1: \ell_{r_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{r_m}^{n_m} \rightarrow \ell_{q_1}^n$ e $T_2: \ell_{s_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{s_m}^{n_m} \rightarrow \ell_{q_2}^n$ definidos por

$$T_1(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = T_2(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = T(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}).$$

Fixado $0 < \theta < 1$, sejam

$$\frac{1}{p_k} = \frac{1-\theta}{r_k} + \frac{\theta}{s_k}, \quad k = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}.$$

O operador m -linear $T_0: \ell_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \ell_q^n$ definido por

$$T_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = T(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$$

é tal que

$$\|T_0\| \leq \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^\theta.$$

Demonstração: Para cada $k = 1, \dots, m$, sejam

$$a^{(k)} = \left(a_{j_k}^{(k)} \right)_{j_k=1}^{n_k} = \left(\left| a_{j_k}^{(k)} \right| e^{i\theta_{j_k}^{(k)}} \right)_{j_k=1}^{n_k} \in \mathbb{C}^{n_k}.$$

e

$$b = (b_j)_{j=1}^n = (|b_j| e^{i\beta_j})_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n.$$

Definimos, para cada $k = 1, \dots, m$, as funções $p_k, q^*: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de modo que

$$\frac{1}{p_k(z)} = \frac{1-z}{r_k} + \frac{z}{s_k} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q^*(z)} = \frac{1-z}{q_1^*} + \frac{z}{q_2^*},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. É fácil ver que

$$p_k(0) = r_k, \quad p_k(\theta) = p_k \quad \text{e} \quad p_k(1) = s_k,$$

e que

$$q^*(0) = q_1^*, \quad q^*(\theta) = q^* \quad \text{e} \quad q^*(1) = q_2^*.$$

Para todo $z \in \mathbb{C}$ e todo $k = 1, \dots, m$ definamos

$$a^{(k,z)} = \left(a_{j_k}^{(k,z)} \right)_{j_k=1}^{n_k} = \begin{cases} \left(a_{j_k}^{(k)} \right)_{j_k=1}^{n_k}, & \text{se } p_k = \infty, \\ \left(\left| a_{j_k}^{(k)} \right|^{\frac{p_k}{p_k(z)}} e^{i\theta_{j_k}^{(k)}} \right)_{j_k=1}^{n_k}, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

e

$$b^{(z)} = \left(b_j^{(z)}\right)_{j=1}^n = \begin{cases} (b_j)_{j=1}^n, & \text{se } q = 1, \\ \left(|b_j|^{\frac{q^*}{q^*(z)}} e^{i\beta_j}\right)_{j=1}^n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Denotemos a j -ésima coordenada, com $j = 1, \dots, n$, de $T(a^{(1,z)}, \dots, a^{(m,z)}) \in \mathbb{C}^n$ por $(T(a^{(1,z)}, \dots, a^{(m,z)}))_j$ e consideremos a função $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = \sum_{j=1}^n (T(a^{(1,z)}, \dots, a^{(m,z)}))_j \cdot b_j^{(z)}.$$

Suponhamos $1 \leq p_k < \infty$ para todo k e $q \neq 1$. Nesse caso, para todo $k = 1, \dots, m$ e todo $j_k = 1, \dots, n_k$, temos

$$\begin{aligned} \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{\frac{p_k}{p_k(z)}} &= \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{p_k \left(\frac{1-z}{r_k} + \frac{z}{s_k}\right)} \\ &= \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{p_k \left[\frac{1}{r_k} + z \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{r_k}\right)\right]} \\ &= \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{\frac{p_k}{r_k}} \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{p_k z \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{r_k}\right)} \\ &= \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{\frac{p_k}{r_k}} \left(\left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{p_k \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{r_k}\right)}\right)^z. \end{aligned}$$

Obtemos também que

$$\begin{aligned} |b_j|^{\frac{q^*}{q^*(z)}} &= |b_j|^{q^* \left(\frac{1-z}{q_1^*} + \frac{z}{q_2^*}\right)} \\ &= |b_j|^{q^* \left[\frac{1}{q_1^*} + z \left(\frac{1}{q_2^*} - \frac{1}{q_1^*}\right)\right]} \\ &= |b_j|^{\frac{q^*}{q_1^*}} |b_j|^{q^* z \left(\frac{1}{q_2^*} - \frac{1}{q_1^*}\right)} \\ &= |b_j|^{\frac{q^*}{q_1^*}} \left(|b_j|^{q^* \left(\frac{1}{q_2^*} - \frac{1}{q_1^*}\right)}\right)^z. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} &|b_j|^{\frac{q^*}{q^*(z)}} \cdot \prod_{k=1}^m \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{\frac{p_k}{p_k(z)}} \\ &= |b_j|^{\frac{q^*}{q_1^*}} \left(|b_j|^{q^* \left(\frac{1}{q_2^*} - \frac{1}{q_1^*}\right)}\right)^z \cdot \prod_{k=1}^m \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{\frac{p_k}{r_k}} \left(\left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{p_k \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{r_k}\right)}\right)^z \\ &= \left(|b_j|^{\frac{q^*}{q_1^*}} \cdot \prod_{k=1}^m \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{\frac{p_k}{r_k}}\right) \left(|b_j|^{q^* \left(\frac{1}{q_2^*} - \frac{1}{q_1^*}\right)} \cdot \prod_{k=1}^m \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{p_k \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{r_k}\right)}\right)^z. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Sejam $(e_{j_k}^{(k)})_{j_k=1}^{n_k}$ a base canônica de $\mathbb{C}^{n_k}$ e

$$\alpha_{j_1, \dots, j_m, j} = |b_j|^{\frac{q^*}{q_1^*}} \cdot \left(\prod_{k=1}^m \left|a_{j_k}^{(k)}\right|^{\frac{p_k}{r_k}}\right) e^{i(\theta_{j_1}^{(1)} + \dots + \theta_{j_m}^{(m)} + \beta_j)} \left(T(e_{j_1}^{(1)}, \dots, e_{j_m}^{(m)})\right)_j, \quad (1.33)$$

e

$$\mu_{j_1, \dots, j_m, j} = |b_j|^{q^* \left(\frac{1}{q_2^*} - \frac{1}{q_1^*} \right)} \cdot \prod_{k=1}^m |a_{j_k}^{(k)}|^{p_k \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{r_k} \right)} \quad (1.34)$$

Assim, segue-se das definições de $a^{(k,z)}$ e $b^{(z)}$, da multilinearidade de T , de (1.32), de (1.33) e de (1.34) que

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{j=1}^n \left(T \left(a^{(1,z)}, \dots, a^{(m,z)} \right) \right)_j \cdot b_j^{(z)} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(T \left(\left(a_{j_1}^{(1,z)} \right)_{j_1=1}^{n_1}, \dots, \left(a_{j_m}^{(m,z)} \right)_{j_m=1}^{n_m} \right) \right)_j \cdot b_j^{(z)} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(T \left(\left(a_1^{(1,z)} e_1^1, \dots, a_{n_1}^{(1,z)} e_{n_1}^1 \right), \dots, \left(a_1^{(m,z)} e_1^m, \dots, a_{n_m}^{(m,z)} e_{n_m}^m \right) \right) \right)_j \cdot b_j^{(z)} \\ &= \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} \sum_{j=1}^n b_j^{(z)} \left(\prod_{k=1}^m a_{j_k}^{(k,z)} \right) \left(T \left(e_{j_1}^{(1)}, \dots, e_{j_m}^{(m)} \right) \right)_j \\ &= \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} \sum_{j=1}^n |b_j|^{\frac{q^*}{q^*(z)}} \left(\prod_{k=1}^m |a_{j_k}^{(k)}|^{\frac{p_k}{p_k(z)}} \right) e^{i(\theta_{j_1}^{(1)} + \dots + \theta_{j_m}^{(m)} + \beta_j)} \left(T \left(e_{j_1}^{(1)}, \dots, e_{j_m}^{(m)} \right) \right)_j \\ &= \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} \sum_{j=1}^n \alpha_{j_1, \dots, j_m, j} \mu_{j_1, \dots, j_m, j}^z. \end{aligned}$$

Isto nos permite concluir que F é uma combinação linear finita de funções do tipo $f(z) = a^z$ com $a > 0$. Funções desse tipo são analíticas, de onde segue que F é analítica sobre $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ e contínua sobre $\overline{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$. Se $a > 0$ e $z \in \overline{S}$, de (1.24), obtemos

$$|a^z| = a^{\operatorname{Re}(z)} \leq \max \{1, a\}$$

de onde vemos que F é limitada sobre $\overline{S}$. Dentro dessas condições, podemos aplicar o Teorema das Três Linhas e concluir que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F(\theta + it)| \leq \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |F(it)| \right)^{1-\theta} \cdot \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |F(1 + it)| \right)^{\theta}. \quad (1.35)$$

Usando desigualdade de Hölder e a Observação 1.7, temos

$$\begin{aligned} |F(it)| &= \left| \sum_{j=1}^n \left(T \left(a^{(1,it)}, \dots, a^{(m,it)} \right) \right)_j \cdot b_j^{(it)} \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \left(T \left(a^{(1,it)}, \dots, a^{(m,it)} \right) \right)_j \right| |b_j^{(it)}| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n \left| \left(T \left(a^{(1,it)}, \dots, a^{(m,it)} \right) \right)_j \right|^{\frac{1}{q_1}} \right)^{q_1} \left(\sum_{j=1}^n |b_j^{(it)}|^{\frac{1}{q_1^*}} \right)^{q_1^*} \\ &= \|T(a^{(1,it)}, \dots, a^{(m,it)})\|_{q_1} \|b^{(it)}\|_{q_1^*} \leq \|T_1\| \|b^{(it)}\|_{q_1^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k,it)}\|_{r_k} \quad (1.36) \end{aligned}$$

e

$$|F(1 + it)| = \left| \sum_{j=1}^n \left(T \left(a^{(1,1+it)}, \dots, a^{(m,1+it)} \right) \right)_j \cdot b_j^{(1+it)} \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^n \left| (T(a^{(1,1+it)}, \dots, a^{(m,1+it)}))_j \right| |b_j^{(1+it)}| \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^n \left| (T(a^{(1,1+it)}, \dots, a^{(m,1+it)}))_j \right|^{\frac{1}{q_2^*}} \right)^{q_2} \left(\sum_{j=1}^n |b_j^{(1+it)}|^{\frac{1}{q_2^*}} \right)^{q_2^*} \\
&= \|T(a^{(1,1+it)}, \dots, a^{(m,1+it)})\|_{q_2} \|b^{(1+it)}\|_{q_2^*} \\
&\leq \|T_2\| \|b^{(1+it)}\|_{q_2^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k,1+it)}\|_{s_k}. \tag{1.37}
\end{aligned}$$

Notamos agora que

$$\frac{p_k}{p_k(it)} = p_k \left(\frac{1-it}{r_k} + \frac{it}{s_k} \right) = \frac{p_k}{r_k} + ip_k \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{r_k} \right) t. \tag{1.38}$$

e que

$$\frac{p_k}{p_k(1+it)} = p_k \left(\frac{1-1+it}{r_k} + \frac{1+it}{s_k} \right) = \frac{p_k}{s_k} + ip_k \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{r_k} \right) t. \tag{1.39}$$

Usando a definição de $a^{(k,it)}$, (1.24) e (1.38), inferimos que, para todo $k = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned}
\|a^{(k,it)}\|_{r_k}^{r_k} &= \sum_{j_k=1}^{n_k} \left(\left| a_{j_k}^{(k)} \right|^{\frac{p_k}{p_k(it)}} e^{i\theta_{j_k}^{(k)}} \right)^{\frac{1}{r_k} \cdot r_k} \\
&= \sum_{j_k=1}^{n_k} \left| a_{j_k}^{(k)} \right|^{\frac{p_k}{p_k(it)}} \left| e^{i\theta_{j_k}^{(k)}} \right|^{r_k} \\
&= \sum_{j_k=1}^{n_k} \left| a_{j_k}^{(k)} \right|^{\frac{p_k}{p_k(it)}} \\
&= \sum_{s=1}^{n_k} |a_s^{(k)}|^{\operatorname{Re}\left(\frac{p_k}{p_k(it)}\right) r_k} \\
&= \sum_{s=1}^{n_k} |a_s^{(k)}|^{\frac{p_k}{r_k} r_k} \\
&= \sum_{s=1}^{n_k} |a_s^{(k)}|^{p_k} = \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k}.
\end{aligned}$$

Usando a definição de $a^{(k,1+it)}$, (1.24) e (1.39), concluimos que, para todo $k = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned}
\|a^{(k,1+it)}\|_{s_k}^{s_k} &= \sum_{j_k=1}^{n_k} \left(\left| a_{j_k}^{(k)} \right|^{\frac{p_k}{p_k(1+it)}} e^{i\theta_{j_k}^{(k)}} \right)^{\frac{1}{s_k} \cdot s_k} \\
&= \sum_{j_k=1}^{n_k} \left| a_{j_k}^{(k)} \right|^{\frac{p_k}{p_k(1+it)}} \left| e^{i\theta_{j_k}^{(k)}} \right|^{s_k} \\
&= \sum_{j_k=1}^{n_k} \left| a_{j_k}^{(k)} \right|^{\frac{p_k}{p_k(1+it)}} \\
&= \sum_{s=1}^{n_k} |a_s^{(k)}|^{\operatorname{Re}\left(\frac{p_k}{p_k(1+it)}\right) s_k} \\
&= \sum_{s=1}^{n_k} |a_s^{(k)}|^{\frac{p_k}{s_k} s_k}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{s=1}^{n_k} |a_s^{(k)}|^{p_k} = \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k}.$$

Assim,

$$\|a^{(k,it)}\|_{r_k}^{r_k} = \|a^{(k,1+it)}\|_{s_k}^{s_k} = \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k} \quad (1.40)$$

Seguindo passos análogos, podemos verificar que

$$\|b^{(it)}\|_{q_1^*}^{q_1^*} = \|b^{(1+it)}\|_{q_2^*}^{q_2^*} = \|b\|_{q^*}^{q^*}. \quad (1.41)$$

Portanto, de (1.36), de (1.37), de (1.40) e de (1.41), obtemos

$$|F(it)| \leq \|T_1\| \|b\|_{q^*}^{q^*/q_1^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k/r_k} \quad (1.42)$$

e

$$|F(1+it)| \leq \|T_2\| \|b\|_{q^*}^{q^*/q_2^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k/s_k}, \quad (1.43)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. De (1.35), (1.42) e (1.43), segue que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(\theta + it)| &\leq \left(\|T_1\| \|b\|_{q^*}^{q^*/q_1^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k/r_k} \right)^{1-\theta} \left(\|T_2\| \|b\|_{q^*}^{q^*/q_2^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k/s_k} \right)^{\theta} \\ &= \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^{\theta} \|b\|_{q^*}^{q^* \left(\frac{1-\theta}{q_1^*} + \frac{\theta}{q_2^*} \right)} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k \left(\frac{1-\theta}{r_k} + \frac{\theta}{s_k} \right)} \\ &= \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^{\theta} \|b\|_{q^*}^{q^* \frac{1}{q^*}} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}^{p_k \frac{1}{p_k}} \\ &= \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^{\theta} \|b\|_{q^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}. \end{aligned}$$

Tomando $t = 0$ e observando que, como $p_k(\theta) = p_k$ e $q^*(z) = q^*$, temos $a^{(k,\theta)} = a^{(k)}$, para todo $k = 1, \dots, n$, e $b^{(\theta)} = b$, vemos que

$$\left| \sum_{j=1}^n (T(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}))_j \cdot b_j \right| = |F(\theta)| \leq \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^{\theta} \|b\|_{q^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}.$$

Desde que

$$\|T(a^{(1)}, \dots, a^{(n)})\|_q = \sup_{\|b\|_{q^*} \leq 1} \left| \sum_{j=1}^n (T(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}))_j \cdot b_j \right|,$$

inferimos que

$$\begin{aligned} \|T(a^{(1)}, \dots, a^{(n)})\|_q &\leq \sup_{\|b\|_{q^*} \leq 1} \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^{\theta} \|b\|_{q^*} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k} \\ &= \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^{\theta} \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|T_0\| = \sup_{\|a^{(1)}\|_{p_1}, \dots, \|a^{(m)}\|_{p_m} \leq 1} \|T(a^{(1)}, \dots, a^{(n)})\|_q$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{\|a^{(1)}\|_{p_1}, \dots, \|a^{(m)}\|_{p_m} \leq 1} \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^\theta \prod_{k=1}^m \|a^{(k)}\|_{p_k} \\
&= \|T_1\|^{1-\theta} \|T_2\|^\theta.
\end{aligned}$$

Resta-nos verificar o caso em que $p_k = \infty$ para todo k em um subconjunto não-vazio de $\{1, \dots, m\}$ e/ou $q = 1$. Mas essa verificação é feita de modo semelhante ao que fizemos para verificar a validade quando $1 \leq p_k < \infty$ para todo k e $q \neq 1$. Com efeito, basta observar que, se $p_{k_0} = \infty$, então $r_{k_0} = s_{k_0} = \infty$. Neste caso,

$$\|a^{(k_0, it)}\|_\infty = \|a^{(k_0, 1+it)}\|_\infty = \|a^{(k)}\|_\infty$$

e, se $q = 1$, então $q_1 = q_2 = 1$ e, neste caso, $q_1^* = q_2^* = q^* = \infty$, de onde segue que

$$\|b^{(it)}\|_\infty = \|b^{(1+it)}\|_\infty = \|b\|_\infty.$$

■

Dominação universal das constantes nas desigualdades KSZ e Bennett

Neste capítulo, veremos resultados que estabelecem dominações universais para algumas constantes que surgem nas desigualdades de Kahane–Salem–Zygmund e de Bennet. Para enunciar e demonstrar esses resultados, veremos neste capítulo alguns conceitos e resultados. Para cumprir com esses objetivos, faremos uso da teoria abordada no Capítulo 1 deste texto. A referência principal consultada para elaborar este capítulo foi [16]. Também foram consultadas as referências [2], [8] e [14].

2.1 As desigualdades de Kahane–Salem–Zygmund e Bennett

A desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund, que, por questões de simplicidade, denominaremos simplesmente de desigualdade KSZ ao longo deste texto, é um resultado probabilístico que garante a existência de matrizes especiais com entradas ± 1 gerando formas m -lineares $A_{n_1, \dots, n_m} : \ell_{p_1}^{n_1} \times \dots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ com normas relativamente pequenas. Em [14] é apresentada e demonstrada a seguinte versão desse resultado: Sejam $m, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ e $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$. Existem uma constante positiva C_m , que depende apenas de m , e uma forma m -linear $A_{n_1, \dots, n_m} : \ell_{p_1}^{n_1} \times \dots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_{n_1, \dots, n_m} (z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

tais que

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq C_m \left(\sum_{k=1}^m n_k \right)^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} \prod_{k=1}^m n_k^{\max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\right\}}. \quad (2.1)$$

Observamos que

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq C_m \left(\sum_{k=1}^m n_k \right)^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} \prod_{k=1}^m n_k^{\max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\right\}}$$

$$\leq C_m \left(m \cdot \max_{k=1, \dots, m} \{n_k\} \right)^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} \prod_{k=1}^m n_k^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\}}.$$

Dessa forma, escrever (2.1) equivale a escrever

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq D_m \max_{k=1, \dots, m} \left\{ n_k^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\}}, \quad (2.2)$$

onde

$$D_m = C_m \cdot m^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}}.$$

A constante D_m não depende da escolha dos inteiros $n_1, \dots, n_m$. Depende apenas de m e dos números $p_1, \dots, p_m$.

O caso bilinear, devido a Bennett, garante a existência de uma constante $C \geq 1$ de modo que, para quaisquer $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e quaisquer $p_1, p_2 \in [1, \infty]$, existe uma forma bilinear $A_{n_1, n_2} : \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 satisfazendo

$$\|A_{n_1, n_2}\| \leq C \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} n_1^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}, 0\}} \right\}. \quad (2.3)$$

Denotaremos o conjunto das formas multilineares $A_{n_1, \dots, n_m} : \ell_{p_1}^{n_1} \times \dots \times \ell_{p_m}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_{n_1, \dots, n_m} (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_m}^{(m)}$$

por $\mathcal{A}_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m}$. É importante observar que, independente da escolha de cada $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$, esse conjunto é o mesmo. Também observamos que a cardinalidade de $\mathcal{A}_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m}$ é finita. Dessa forma, podemos considerar os seguintes números

$$\min \{\|A\|; A \in \mathcal{A}_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m}\} \text{ e } \min \{\|A\|; A \in \mathcal{A}_{p_1, p_2; n_1, n_2}\}.$$

Sendo assim, dados $m > 2$, $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$ e $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, definimos

$$C_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m} := \frac{\min \{\|A\|; A \in \mathcal{A}_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m}\}}{\max_{k=1, \dots, m} \left\{ n_k^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_1^*\}, \dots, \max\{2, p_m^*\}\}}} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\}}}. \quad (2.4)$$

Sendo $\mathcal{A}_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m}$ finito, temos que $C_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m}$ é a menor das constantes positivas para as quais existe uma forma m -linear satisfazendo uma desigualdade como (2.2). Para o caso bilinear, definimos

$$C_{p_1, p_2; n_1, n_2} := \frac{\min \{\|A\|; A \in \mathcal{A}_{p_1, p_2; n_1, n_2}\}}{\max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} n_1^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}, 0\}} \right\}}. \quad (2.5)$$

Segue da finitude de $\mathcal{A}_{p_1, p_2; n_1, n_2}$ que $C_{p_1, p_2; n_1, n_2}$ é a menor das constantes positivas entre as quais existe uma forma bilinear satisfazendo uma desigualdade como (2.3).

Fixados $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$, as desigualdades KSZ e de Bennett garantem, respectivamente, que os conjuntos

$$\{C_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m; n_1, \dots, n_m} \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad \{C_{p_1, p_2; n_1, n_2; n_1, n_2} \in \mathbb{N}\}$$

são limitados superiormente. Faz sentido então definirmos a seguinte constante

$$C_{p_1, \dots, p_m} := \sup\{C_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m; n_1, \dots, n_m} \in \mathbb{N}\}, \quad (2.6)$$

onde $C_{p_1, \dots, p_m; n_1, \dots, n_m}$ é como em (2.4) se $m > 2$ e como em (2.5) se $m = 2$.

Exemplo 2.1 Consideremos os números naturais n_1, n_2 e $n = \max\{n_1, n_2\}$. Seja $A : \ell_2^n \times \ell_2^n \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear do tipo

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pm x_i y_j$$

com

$$\|A\| \leq C_{2,2;n,n} \max\left\{n^{\frac{1}{2}} n^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 0\}}, n^{\frac{1}{2}} n^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 0\}}\right\} = C_{2,2;n,n} n^{\frac{1}{2}}.$$

Seja também $A_0 : \ell_2^{n_1} \times \ell_2^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear definida por

$$A_0((x_1, \dots, x_{n_1}), (y_1, \dots, y_{n_2})) = A((x_1, \dots, x_{n_1}, 0, \dots, 0), (y_1, \dots, y_{n_2}, 0, \dots, 0)).$$

Como

$$\left\{ \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm x_i y_j \right| ; x = (x_1, \dots, x_{n_1}) \in \ell_2^{n_1}, y = (y_1, \dots, y_{n_2}) \in \ell_2^{n_2} \right\} \subset \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pm x_i y_j \right| ; x_0 = (x_1, \dots, x_{n_1}, 0, \dots, 0), y_0 = (y_1, \dots, y_{n_2}, 0, \dots, 0) \in \ell_2^n \right\}.$$

Obtemos

$$\|A_0\| \leq \|A\| \leq C_{2,2;n,n} n^{\frac{1}{2}} = C_{2,2;n,n} \max\left\{n_1^{\frac{1}{2}}, n_2^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Assim, $C_{2,2;n_1,n_2} \leq C_{2,2;n,n}$. Além disso, como $\{C_{2,2;n,n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \{C_{2,2;n_1,n_2} : n_1, n_2 \in \mathbb{N}\}$, devemos obter que $C_{2,2;n_1,n_2} \geq C_{2,2;n,n}$. Isso nos permite concluir que

$$\sup\{C_{2,2;n,n} ; n \in \mathbb{N}\} = \sup\{C_{2,2;n_1,n_2} ; n_1, n_2 \in \mathbb{N}\} = C_{2,2}.$$

2.2 Constantes da desigualdade KSZ

Para provar o seguinte resultado, faremos uso da desigualdade de Hölder (vide [8]), apresentada a seguir. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer escalares $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$.

Lema 2.2 *Sejam $n_1, n_2, \dots, n_m$ inteiros positivos tais que, para todo $k = 2, \dots, m$, existe uma matriz de Hadamard*

$$\mathbf{H}_{n_k} = \left[h_{ij}^{(k)} \right]_{n_k \times n_k}.$$

Então, a forma m -linear $A: \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m h_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^m x_{i_s}^{(s)} \right)$$

é tal que

$$\|A\| \leq n_m^{1/2} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2}$$

Demonstração: Inicialmente, observemos que, de acordo com o Exemplo 1.10, podemos supor $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m$. Além disso, para cada $\mu = 2, \dots, m$, seja $u_i^{(\mu)}$, $i = 1, \dots, n_\mu$, a i -ésima linha de $\mathbf{H}_{n_\mu}$. Como já vimos no capítulo anterior, temos que

$$\langle u_i^{(\mu)}, u_j^{(\mu)} \rangle = n_\mu \delta_{ij}. \quad (2.7)$$

Consideremos as matrizes quadradas de ordem n_m definidas por

$$\left[\mathfrak{h}_{ij}^{(\mu)} \right]_{n_m \times n_m} := \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{n_\mu} & \mathbf{0}_{n_\mu \times (n_m - n_\mu)} \\ \mathbf{0}_{(n_m - n_\mu) \times n_\mu} & \mathbf{0}_{(n_m - n_\mu) \times (n_m - n_\mu)} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

para cada $\mu = 2, \dots, m$. Para cada $k = 1, \dots, m$, seja $x^{(k)} \in \mathbb{S}_{\ell_\infty^{n_k}}$, façamos

$$y^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}_{\ell_\infty^{n_m}}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, observamos que

$$\begin{aligned} & |A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| \\ &= \left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^m y_{i_s}^{(s)} \right) \right| \\ &\leq \sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \dots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \right) \right| |y_{i_m}^{(m)}| \\ &\leq \sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \dots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \right) \right|^2 \Big| y_{i_m}^{(m)} \Big| \\ &\leq \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} |y_{i_m}^{(m)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \dots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq n_m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \dots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Podemos ver a expressão

$$\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \right) \right|^2$$

como um produto interno entre o vetor

$$\underbrace{\left(\left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \right) \right|, \dots, \left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \right) \right| \right)}_{n_m \text{ entradas}}$$

por ele mesmo. Vejamos que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \right) \right| \cdot \left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{j_s}^{(s)} \right) \right| \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_m} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \right) \cdot \sum_{i_1=1}^{n_m} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{j_s}^{(s)} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_m} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \right) \cdot \sum_{i_1=1}^{n_m} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \mathfrak{h}_{i_{m-1}i_m}^{(m)} \mathfrak{h}_{j_{m-1}i_m}^{(m)} \left(\prod_{r=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right). \end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que

$$\begin{aligned} & n_m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1=1}^{n_m} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^m \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= n_m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{i_m=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \mathfrak{h}_{i_{m-1}i_m}^{(m)} \mathfrak{h}_{j_{m-1}i_m}^{(m)} \left(\prod_{r=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} & |A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| \\ &\leq n_m^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_m=1}^{n_m} \mathfrak{h}_{i_{m-1}i_m}^{(m)} \mathfrak{h}_{j_{m-1}i_m}^{(m)} \right)^{1/2} \\ &= n_m^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_m=1}^{n_m} h_{i_{m-1}i_m}^{(m)} h_{j_{m-1}i_m}^{(m)} \right)^{1/2} \\ &= n_m^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{m-1} h_{i_{r-1}i_r}^{(r)} h_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{m-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \langle u_{i_{m-1}}^{(m)}, u_{j_{m-1}}^{(m)} \rangle \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Supondo que $m \geq 3$, para todo $t \in \{3, \dots, m\}$, de (2.7) e (2.8), temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{t-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{t-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{t-1} \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{t-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \langle u_{i_{t-1}}^{(t)}, u_{j_{t-1}}^{(t)} \rangle \\
&= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{t-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{t-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{t-1} \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{t-1} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) n_t \delta_{i_{t-1}j_{t-1}} \\
&= n_t \sum_{\substack{i_{t-1}=1 \\ i_1, \dots, i_{t-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{t-2}=1}}^{n_m} \sum_{\substack{i_{t-2}i_{t-1} \\ j_{t-2}i_{t-1}}} \mathfrak{h}_{i_{t-2}i_{t-1}}^{(t-1)} \mathfrak{h}_{j_{t-2}i_{t-1}}^{(t-1)} \left(\prod_{r=2}^{t-2} \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{t-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) |y_{i_{t-1}}|^2 \\
&\leq n_t \sum_{\substack{i_{t-1}=1 \\ i_1, \dots, i_{t-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{t-2}=1}}^{n_m} \sum_{\substack{i_{t-2}i_{t-1} \\ j_{t-2}i_{t-1}}} \mathfrak{h}_{i_{t-2}i_{t-1}}^{(t-1)} \mathfrak{h}_{j_{t-2}i_{t-1}}^{(t-1)} \left(\prod_{r=2}^{t-2} \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{t-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \\
&= n_t \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{t-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{t-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{t-2} \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{t-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_{t-1}=1}^{n_m} \mathfrak{h}_{i_{t-2}i_{t-1}}^{(t-1)} \mathfrak{h}_{j_{t-2}i_{t-1}}^{(t-1)} \\
&= n_t \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{t-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{t-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{t-2} \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{t-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \sum_{i_{t-1}=1}^{n_{t-1}} h_{i_{t-2}i_{t-1}}^{(t-1)} h_{j_{t-2}i_{t-1}}^{(t-1)} \\
&= n_t \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{t-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{t-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{r=2}^{t-2} \mathfrak{h}_{i_{r-1}i_r}^{(r)} \mathfrak{h}_{j_{r-1}j_r}^{(r)} \right) \left(\prod_{s=1}^{t-2} y_{i_s}^{(s)} \overline{y_{j_s}^{(s)}} \right) \langle u_{i_{t-2}}^{(t-1)}, u_{j_{t-2}}^{(t-1)} \rangle, \tag{2.10}
\end{aligned}$$

ficando subentendido que $\left(\prod_{r=a}^b \alpha_r \beta_r \right) = 1$ se $b < a$. Fazendo uso recursivo de (2.10) em (2.9), obtemos

$$\begin{aligned}
|A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| &\leq n_m^{\frac{1}{2}} \prod_{j=3}^m n_j^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_1, j_1=1}^{n_m} y_{i_1}^{(1)} \overline{y_{j_1}^{(1)}} \langle u_{i_1}^{(2)}, u_{j_1}^{(2)} \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= n_m^{\frac{1}{2}} \prod_{j=3}^m n_j^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_1, j_1=1}^{n_m} y_{i_1}^{(1)} \overline{y_{j_1}^{(1)}} n_2 \delta_{i_1 j_1} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(n_m^{\frac{1}{2}} \prod_{j=3}^m n_j^{\frac{1}{2}} \right) n_2^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_1=1}^{n_m} |y_{i_1}^{(1)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= n_m^{\frac{1}{2}} \prod_{j=2}^m n_j^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} |x_{i_1}^{(1)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(n_m^{\frac{1}{2}} \prod_{j=2}^m n_j^{\frac{1}{2}} \right) n_1^{\frac{1}{2}} = n_m^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^m n_j^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Se $m = 2$, então podemos evitar o procedimento recursivo e obter desigualdade acima diretamente. Assim,

$$\|A\| = \sup_{\|x^{(1)}\|_\infty = \dots = \|x^{(m)}\|_\infty = 1} |A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| \leq n_m^{1/2} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2},$$

como desejado. ■

Usando esse lema, podemos mostrar que as constantes em (2.1) e (2.2) são assintoticamente limitadas por 1 como segue no próximo resultado.

Teorema 2.3 *Dados um inteiro positivo m e $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N de modo que, para quaisquer inteiros positivos $n_1, \dots, n_m > N$ dados, existe uma forma m -linear $A_{n_1, \dots, n_m}: \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A_{n_1, \dots, n_m}(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

tal que

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq (1 + \varepsilon) \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2}.$$

Demonstração: Sabemos da que o conjunto das ordens de Hadamard é assintoticamente denso em $\mathbb{N}$ e, portanto, para

$$\delta = (1 + \varepsilon)^{\frac{2}{m+1}} - 1 > 0,$$

existe um inteiro positivo N tal que, para todo $k = 1, \dots, m$, sempre que $n_k > N$ é um inteiro, existe uma ordem de Hadamard t_k satisfazendo

$$n_k \leq t_k < (1 + \delta) n_k.$$

Observemos que, sem perda de generalidade, podemos supor $n_1 \leq \dots \leq n_m$, de onde temos que $t_1 \leq \dots \leq t_m$. Do Lema 2.2, segue-se que existe uma forma m -linear $A_0: \ell_\infty^{t_1} \times \dots \times \ell_\infty^{t_m} \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 tal que

$$\|A_0\| \leq t_m^{1/2} \prod_{k=1}^m t_k^{1/2}.$$

Caso $n_k = t_k$ para todo k , é suficiente considerar $A_{n_1, \dots, n_m} = A_0$. Caso contrário, consideramos a forma m -linear

$$A_{n_1, \dots, n_m}: \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$$

definida por

$$\begin{aligned} & A_{n_1, \dots, n_m} \left(\left(z_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^{n_1}, \dots, \left(z_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^{n_m} \right) \\ &= A_0 \left(\left(z_1^{(1)}, \dots, z_{n_1}^{(1)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{t_1 - n_1 \text{ zeros}} \right), \dots, \left(z_1^{(m)}, \dots, z_{n_m}^{(m)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{t_m - n_m \text{ zeros}} \right) \right). \end{aligned}$$

Então, dado $x^{(k)} \in B_{\ell_\infty^{n_k}}$, $k = 1, \dots, m$, notemos que

$$\left| A_{n_1, \dots, n_m} \left(\left(x_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^{n_1}, \dots, \left(x_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^{n_m} \right) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| A_0 \left(\left(x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}, 0, \dots, 0 \right), \dots, \left(x_1^{(m)}, \dots, x_{n_m}^{(m)}, 0, \dots, 0 \right) \right) \right| \\
&\leq \|A_0\| \leq t_m^{1/2} \prod_{j=1}^m t_j^{1/2} \\
&\leq (1 + \delta)^{1/2} n_m^{1/2} \prod_{j=1}^m (1 + \delta)^{1/2} n_j^{1/2} \\
&\leq (1 + \delta)^{\frac{m+1}{2}} \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2} \\
&= (1 + \varepsilon) \max \left\{ n_1^{1/2}, \dots, n_m^{1/2} \right\} \prod_{j=1}^m n_j^{1/2},
\end{aligned}$$

de onde concluímos nossa demonstração. ■

Corolário 2.4 *Sejam m um inteiro positivo e $\varepsilon > 0$ dados. Existe um inteiro positivo N tal que, para todo $n > N$, existe uma forma m -linear $A_n: \ell_\infty^n \times \dots \times \ell_\infty^n \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A_n(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

satisfazendo

$$\|A_n\| \leq (1 + \varepsilon) n^{\frac{m+1}{2}}.$$

2.3 Constantes da desigualdade de Bennett

Nesta seção veremos que $C_{2,2}$ domina universalmente a maioria das constantes que surgem no estudo da desigualdade de Bennett. Este resultado será crucial para a Seção 2.4, onde estudamos a dominação superior das constantes na desigualdade de Bennett. Começamos com o seguinte lema.

Lema 2.5 *Sejam $2 \leq p \leq q \leq \infty$ e $x \in \mathbb{K}^n$. Se $x \in B_{\ell_p^n}$, então $z = n^{(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} x \in B_{\ell_q^n}$.*

Demonstração: Se $p = q$, claramente o resultado é válido. Consideremos então o caso em que $2 \leq p < q \leq \infty$. Se $q = \infty$, então

$$\|z\|_p = n^{-\frac{1}{p}} \|x\|_p = n^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $x \in B_{\ell_\infty^n}$, temos $|x_j| \leq 1$ para todo j . Logo:

$$\|z\|_p \leq n^{-\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}} = 1$$

Por outro lado, suponhamos que $q < \infty$. Claramente, $\frac{q}{p}$ e $\frac{q}{q-p}$ são conjugados de Lebesgue. Daí, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\|z\|_p = n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|x\|_p = n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\left(\sum_{j=1}^n (|x_j|^p)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{j=1}^n 1^{\frac{q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^q \right)^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{j=1}^n 1^{\frac{p-q}{p}} \right)^{1-\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \\
 &= n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\|x\|_q^p n^{1-\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \\
 &= n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_q \\
 &= \|x\|_q \leq 1.
 \end{aligned}$$

■

Teorema 2.6 Se $p_1, p_2 \in [2, \infty]$, então

$$C_{p_1, p_2} \leq C_{p, p}$$

sempre que $2 \leq p \leq \min\{p_1, p_2\}$. Em particular,

$$C_{p, p} \leq C_{2, 2}$$

sempre que $2 \leq p$.

Demonstração: Sejam $2 \leq p \leq \min\{p_1, p_2\}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Sabemos que $C_{p, p; n_1, n_2}$ é a menor das constantes positivas entre as quais existe uma forma bilinear satisfazendo uma desigualdade como (2.3). Logo, deve existir uma forma bilinear $A_0: \ell_p^{n_1} \times \ell_p^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_0((x_1, \dots, x_{n_1}), (y_1, \dots, y_{n_2})) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm x_i y_j$$

tal que

$$\begin{aligned}
 \|A_0\| &\leq C_{p, p; n_1, n_2} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p^*}} n_2^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}, 0\}}, n_2^{\frac{1}{p^*}} n_1^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}, 0\}} \right\} \\
 &\leq C_{p, p; n_1, n_2} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p^*}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, n_2^{\frac{1}{p^*}} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Definimos a forma bilinear $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$A(x, y) = A_0(x, y).$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
 \|A\| &= \sup_{\|x\|_{p_1}, \|y\|_{p_2} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm x_i y_j \right| \\
 &= \sup_{\|x\|_{p_1}, \|y\|_{p_2} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm n_1^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} n_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}} n_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}} x_i y_j \right|
 \end{aligned}$$

$$= n_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}} \sup_{\|x\|_{p_1}, \|y\|_{p_2} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm n_1^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} n_2^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}} x_i y_j \right|.$$

Sejam $z = n_1^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} x$ e $w = n_2^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}} y$. Como $\|x\|_{p_1}, \|y\|_{p_2} \leq 1$, então, de acordo com o Lema 2.5, $\|z\|_p, \|w\|_p \leq 1$. Segue desse fato que

$$\sup_{\|x\|_{p_1}, \|y\|_{p_2} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm n_1^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} n_2^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}} x_i y_j \right| \leq \sup_{\|z\|_p, \|w\|_p \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm z_i w_j \right| = \|A_0\|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|A\| &\leq n_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}} \|A_0\| \\ &\leq n_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}} C_{p,p;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p^*}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, n_2^{\frac{1}{p^*}} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \right\} \\ &= C_{p,p;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}} n_1^{\frac{1}{p^*}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, n_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}} n_2^{\frac{1}{p^*}} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \right\} \\ &= C_{p,p;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p^*}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}, n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{p^*}} \right\}. \end{aligned}$$

Como sabemos que $C_{p_1,p_2;n_1,n_2}$ é a menor entre as constantes positivas para as quais existe uma forma bilinear $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ satisfazendo

$$\|A\| \leq C_{p_1,p_2;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p^*}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}, n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{p^*}} \right\},$$

necessariamente devemos ter, para quaisquer $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$,

$$C_{p_1,p_2;n_1,n_2} \leq C_{p,p;n_1,n_2}.$$

Assim,

$$C_{p_1,p_2} \leq C_{p,p}.$$

■

Teorema 2.7 Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então $C_{p,p} \leq C_{2,2}$ para todo $p \in [1, \infty]$.

Demonstração: O caso em que $p \in [2, \infty]$ é um caso particular do Teorema 2.6. Suponhamos então que $p \in [1, 2)$ e seja $A_2: \ell_2^{n_1} \times \ell_2^{n_2} \rightarrow \ell_1$ uma forma bilinear do tipo

$$A_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm x_i y_j$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} \|A_2\| &\leq C_{2,2;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2^*}} n_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}, n_2^{\frac{1}{2^*}} n_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \right\} \\ &= C_{2,2;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, n_2^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

Definimos uma forma bilinear $A_1: \ell_1^{n_1} \times \ell_1^{n_2} \rightarrow \ell_1$ de modo que

$$A_1(x, y) = A_0(x, y).$$

Calculando a norma de A_1 , temos

$$\begin{aligned} \|A_1\| &= \sup_{\|x\|_1, \|y\|_1 \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm x_i y_j \right| \\ &\leq \sup_{\|x\|_1, \|y\|_1 \leq 1} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} |\pm x_i y_j| \\ &\leq \sup_{\|x\|_1, \|y\|_1 \leq 1} \sum_{j=1}^{n_2} \left(\sum_{i=1}^{n_1} |x_i| \right) |y_j| \\ &\leq \sup_{\|y\|_1 \leq 1} \sum_{j=1}^{n_2} \|x\|_1 |y_j| \\ &\leq \|x\|_1 \sup_{\|y\|_1 \leq 1} \sum_{j=1}^{n_2} |y_j| \\ &\leq \sup_{\|y\|_1 \leq 1} \sum_{j=1}^{n_2} |y_j| \leq 1. \end{aligned}$$

Quando tomamos $x = (1, \dots, 0)$ e $y = (1, \dots, 0)$, vemos que o número 1 pertence ao conjunto

$$\left\{ \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm x_i y_j \right| ; x = (x_1, \dots, x_{n_1}) \in \ell_1^{n_1}, y = (y_1, \dots, y_{n_2}) \in \ell_1^{n_2} \text{ e } \|x\|_1, \|y\|_1 \leq 1 \right\}.$$

Isso nos permite concluir que $\|A_1\| = 1$.

Seja

$$\theta = 2 \left(1 - \frac{1}{p} \right) = \frac{2}{p^*} < 1.$$

Notamos que

$$\frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{2}{p^*} + \frac{1}{p^*} = 1 - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} \quad (2.11)$$

e que

$$\frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{1} = 1. \quad (2.12)$$

Além disso, como $\ell_1 \subset \mathbb{C}$, podemos considerar que o contra domínio de A_1 e A_2 é $\mathbb{C}$. Note que isso não altera as normas dessas aplicações.

Essas considerações nos permitem concluir que, se $A_p: \ell_p^{n_1} \times \ell_p^{n_2} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma forma bilinear definida pela mesma regra que define A_2 e A_1 , podemos aplicar o Teorema de Riesz-Thorin, pois A_p, A_1 e A_2 são definidas pela mesma regra e p e 1 foram escolhidos de modo que (2.11) e (2.12) fossem verificadas. Aplicando esse resultado, temos

$$\begin{aligned} \|A_p\| &\leq \|A_1\|^{1-\theta} \|A_2\|^\theta \\ &\leq \left(C_{2,2;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, n_2^{\frac{1}{2}} \right\} \right)^{\frac{2}{p^*}} \end{aligned}$$

$$= C_{2,2;n_1,n_2}^{\frac{2}{p^*}} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p^*}}, n_2^{\frac{1}{p^*}} \right\}.$$

Verificaremos agora que $C_{2,2;1,1} = 1$. Já sabemos que

$$C_{p_1,p_2;n_1,n_2} = \frac{\min \{ \|A\| : A \in \mathcal{A}_{p_1,p_2;n_1,n_2} \}}{\max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2},0\}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} n_1^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1},0\}} \right\}}.$$

Observe que

$$\max \left\{ 1^{\frac{1}{2^*}} 1^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2},0\}}, 1^{\frac{1}{2^*}} 1^{\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2},0\}} \right\} = 1.$$

Além disso, como $A \in \mathcal{A}_{2,2;1,1}$, então

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\|_2, \|y\|_2 \leq 1} |\pm xy| = \sup_{\|x\|_2, \|y\|_2 \leq 1} |xy| \\ &= \sup_{\|x\|_2, \|y\|_2 \leq 1} |x| |y| = \sup_{\|x\|_2, \|y\|_2 \leq 1} (x^2)^{\frac{1}{2}} |y| \\ &= \sup_{\|y\|_2 \leq 1} \|x\| |y| \leq \sup_{\|y\|_2 \leq 1} (y^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1. \end{aligned}$$

Quando tomamos $x = y = 1$, vemos que o número 1 pertence ao conjunto

$$\{ |\pm xy| : x \in \ell_2^1, y \in \ell_2^1 \text{ e } \|x\|_2, \|y\|_2 \leq 1 \}.$$

Isso nos permite concluir que $\|A\| = 1$. Daí, obtemos que

$$\min \{ \|A\| : A \in \mathcal{A}_{2,2;1,1} \} = 1.$$

Esses fatos, permitem-nos concluir que $C_{2,2;1,1} = 1$. Dessa forma, como $C_{2,2} \geq C_{2,2;1,1}$, temos $C_{2,2} \geq 1$. Além disso, usando o fato de que $\frac{2}{p^*} < 1$, obtemos que

$$C_{p,p} = \sup \{ C_{p,p;n_1,n_2} ; n_1, n_2 \in \mathbb{N} \} \leq \sup \left\{ C_{2,2;n_1,n_2}^{\frac{2}{p^*}} ; n_1, n_2 \in \mathbb{N} \right\} \leq C_{2,2}^{\frac{2}{p^*}} \leq C_{2,2},$$

como desejado. ■

Teorema 2.8 *Se algum dos seguintes casos ocorre*

1. $1 \leq p_1 < 2 \leq p_2$ e $n_1 \leq n_2$;
2. $1 \leq p_2 < 2 \leq p_1$ e $n_1 \geq n_2$,

então

$$C_{p_1,p_2;n_1,n_2} \leq C_{2,2}.$$

Demonstração:

Para simplificar a notação, ponhamos

$$\gamma_2 = \max \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0 \right\} \quad \text{e} \quad \gamma_1 = \max \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}, 0 \right\}.$$

• **Caso I:** $1 \leq p_1 < 2 \leq p_2$ e $n_1 \leq n_2$. Levando em conta que $1 \leq p_1 < 2 \leq p_2$, obtemos

$$\begin{aligned} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\gamma_2}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} n_1^{\gamma_1} \right\} &= \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \right\} \\ &= \max \left\{ \left(n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}} n_2^{-\frac{1}{p_2^*}} \right) n_2^{\frac{1}{p_2^*}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \right\} \\ &= \max \left\{ \left[n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\frac{1}{2}} n_2^{-\left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^*}\right)} \right] n_2^{\frac{1}{p_2^*}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \right\} \\ &= \max \left\{ \left(n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\frac{1}{2}} n_2^{-1} \right) n_2^{\frac{1}{p_2^*}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \right\} \\ &= \max \left\{ \left(\frac{n_1^{\frac{1}{p_1^*}}}{n_2^{\frac{1}{2}}} \right) n_2^{\frac{1}{p_2^*}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \right\}. \end{aligned}$$

Como $p_1 < 2$, temos $\frac{1}{p_1^*} < \frac{1}{2}$. Considerando esse fato e que $n_1 \leq n_2$, obtemos

$$n_1^{\frac{1}{p_1^*}} < n_1^{\frac{1}{2}} \leq n_2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{n_1^{\frac{1}{p_1^*}}}{n_2^{\frac{1}{2}}} < 1.$$

Isso implica que

$$\frac{n_1^{\frac{1}{p_1^*}}}{n_2^{\frac{1}{2}}} n_2^{\frac{1}{p_2^*}} < n_2^{\frac{1}{p_2^*}}.$$

Assim, de acordo com o que vimos acima,

$$\max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\gamma_2}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} n_1^{\gamma_1} \right\} = n_2^{\frac{1}{p_2^*}}.$$

Sabemos que existe uma forma bilinear $A_0: \ell_2^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_0(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm x_i y_j$$

de forma que

$$\|A_0\| \leq C_{2,p_2;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}} n_2^{\gamma_2}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} n_1^{\gamma_1} \right\} = C_{2,p_2;n_1,n_2} n_2^{\frac{1}{p_2^*}}.$$

Seja $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $A(x, y) = A_0(x, y)$ e satisfazendo

$$\|A\| \leq C_{p_1,p_2;n_1,n_2} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\gamma_2}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} n_1^{\gamma_1} \right\} = C_{p_1,p_2;n_1,n_2} n_2^{\frac{1}{p_2^*}}.$$

Como $2 \leq 2 \leq \min\{2, p_2\}$, do Teorema 2.6, obtemos

$$\|A_0\| \leq C_{2,p_2;n_1,n_2} n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \leq C_{2,p_2} n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \leq C_{2,2} n_2^{\frac{1}{p_2^*}}. \quad (2.13)$$

Além disso, segue do Exemplo 1.11 que $\|A\| \leq \|A_0\|$. Usando esse fato e (2.13), temos

$$C_{p_1, p_2; n_1, n_2} \leq C_{2, p_2; n_1, n_2} \leq C_{2, p_2} \leq C_{2, 2},$$

como queríamos mostrar.

• **Caso II:** $1 \leq p_2 < 2 \leq p_1$ e $n_1 \geq n_2$. Levando em conta que $1 \leq p_2 < 2 \leq p_1$, observamos que

$$\begin{aligned} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\gamma_2}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} n_1^{\gamma_1} \right\} &= \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} n_1^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}} \right\} \\ &= \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \left(n_1^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}} n_1^{-\frac{1}{p_1^*}} \right) n_1^{\frac{1}{p_1^*}} \right\} \\ &= \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \left[n_1^{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^*} \right)} \right] n_1^{\frac{1}{p_1^*}} \right\} \\ &= \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \left(n_1^{\frac{1}{2}} n_1^{-1} \right) n_1^{\frac{1}{p_1^*}} \right\} \\ &= \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} n_1^{-\frac{1}{2}} n_1^{\frac{1}{p_1^*}} \right\} \\ &= \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}}, \frac{n_2^{\frac{1}{p_2^*}}}{n_1^{\frac{1}{2}}} n_1^{\frac{1}{p_1^*}} \right\}. \end{aligned}$$

Desde que $p_2 < 2$, temos $\frac{1}{p_2^*} < \frac{1}{2}$. Como $n_1 \geq n_2$, temos

$$n_1^{\frac{1}{2}} > n_1^{\frac{1}{p_2^*}} \geq n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \Leftrightarrow \frac{n_2^{\frac{1}{p_2^*}}}{n_1^{\frac{1}{2}}} < 1,$$

de onde obtemos que

$$\frac{n_2^{\frac{1}{p_2^*}}}{n_1^{\frac{1}{2}}} n_1^{\frac{1}{p_1^*}} < n_1^{\frac{1}{p_1^*}}.$$

Assim, de acordo como que vimos acima,

$$\max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\gamma_2}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} n_1^{\gamma_1} \right\} = n_1^{\frac{1}{p_1^*}}.$$

Sabemos que existe uma forma bilinear $A_0 : \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_2^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_0(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm x_i y_j$$

de forma que

$$\|A_0\| \leq C_{p_1, 2; n_1, n_2} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\gamma_2}, n_2^{\frac{1}{2}} n_1^{\gamma_1} \right\} = C_{2, p_2; n_1, n_2} n_1^{\frac{1}{p_1^*}}.$$

Seja $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $A(x, y) = A_0(x, y)$ e satisfazendo

$$\|A\| \leq C_{p_1, p_2; n_1, n_2} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\frac{1}{p_2^*}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} n_1^{\frac{1}{p_1^*}} \right\} = C_{p_1, p_2; n_1, n_2} n_1^{\frac{1}{p_1^*}}.$$

Como $2 \leq 2 \leq \min\{2, p_1\}$, do Teorema 2.6, obtemos

$$\|A_0\| \leq C_{p_1, 2; n_1, n_2} n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \leq C_{p_1, 2} n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \leq C_{2, 2} n_1^{\frac{1}{p_1^*}}. \quad (2.14)$$

Além disso, segue do Exemplo 1.11 que $\|A\| \leq \|A_0\|$. Usando esse fato e (2.14), temos

$$C_{p_1, p_2; n_1, n_2} \leq C_{p_1, 2; n_1, n_2} \leq C_{p_1, 2} \leq C_{2, 2},$$

como queríamos mostrar. ■

Teorema 2.9 *Se algum dos seguintes casos for verificado*

1. $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq 2$ e $n_1 \leq n_2$;
2. $1 \leq p_2 \leq p_1 \leq 2$ e $n_1 \geq n_2$,

então

$$C_{p_1, p_2; n_1, n_2} \leq C_{2, 2}.$$

Demonstração: • Caso I: Inicialmente, vejamos que o resultado vale se $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq 2$ e $n_1 \leq n_2$. Para isso, começamos observando que, se $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq 2$, então

$$\max \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0 \right\} = \max \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}, 0 \right\} = 0.$$

Logo,

$$\max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}} n_2^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} n_1^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}, 0\}} \right\} = \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_1^*}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \right\} = n_2^{\frac{1}{p_2^*}}$$

Portanto, existe uma forma bilinear $A_0: \ell_{p_2}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$A_0(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \pm x_i y_j$$

de modo que

$$\|A_0\| \leq C_{p_2, p_2; n_1, n_2} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{p_2^*}} n_2^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0\}}, n_2^{\frac{1}{p_2^*}} n_1^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, 0\}} \right\} = C_{p_2, p_2; n_1, n_2} n_2^{\frac{1}{p_2^*}}. \quad (2.15)$$

Seja $A: \ell_{p_1}^{n_1} \times \ell_{p_2}^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $A(x, y) = A_0(x, y)$. De acordo com o Exemplo 1.11 e (2.15), temos o seguinte:

$$\|A\| \leq \|A_0\| \leq C_{p_2, p_2; n_1, n_2} n_2^{\frac{1}{p_2^*}} \leq C_{p_2, p_2} n_2^{\frac{1}{p_2^*}}. \quad (2.16)$$

De (2.16) e do Teorema 2.7, obtemos

$$C_{p_1, p_2; n_1, n_2} \leq C_{p_2, p_2} \leq C_{2, 2}.$$

• **Caso II:** $1 \leq p_2 \leq p_1 \leq 2$ e $n_1 \geq n_2$. Assim como a demonstração do **Caso II** do Teorema 2.16 seguiu um caminho análogo ao traçado para a demonstração do caso **Caso I** do mesmo teorema, o caso **Caso II** deste teorema é demonstrado seguindo o mesmo princípio. ■

O corolário seguinte resume todos os resultados que vimos nesta seção.

Corolário 2.10 *Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então*

$$C_{2, 2} \geq \begin{cases} C_{p_1, p_2}, & \text{se } p_1, p_2 \in [2, \infty] . \\ C_{p, p}, & \text{se } p \in [1, \infty] . \\ C_{p_1, p_2; n_1, n_2}, & \text{se } p_1, p_2, n_1, n_2 \text{ são como nos Teoremas 2.8 ou 2.9.} \end{cases}$$

2.4 Dominação superior para algumas constantes da desigualdade de Bennett

O objetivo central desta seção é estabelecer uma limitação universal para as constantes C_{p_1, p_2} , com $p_1, p_2 \in [2, \infty]$; $C_{p, p}$, com $p \in [1, \infty]$, e $C_{p_1, p_2; n_1, n_2}$, onde p_1, p_2, n_1, n_2 são como nos Teoremas 2.8 ou 2.9. Para isso, usaremos alguns resultados apresentados nas seções anteriores e o lema seguinte, o qual evidencia que o uso de matrizes de Hadamard é uma estratégia bem consolidada para obter cotas superiores.

Lema 2.11 *Sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e r uma ordem de Hadamard de modo que $\max\{n_1, n_2\} \leq r$. Então,*

$$C_{2, 2; n_1, n_2} \leq \left(\frac{r}{\max\{n_1, n_2\}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: Se r é uma ordem de Hadamard, então existe uma matriz de Hadamard $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{r \times r}$ de ordem r . A partir dessa matriz, definimos a forma bilinear $A: \ell_2^{n_1} \times \ell_2^{n_2} \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$A_{n_1, n_2}(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} h_{ij} x_i y_j.$$

Sejam $x = (x_1, \dots, x_{n_1}) \in B_{\ell_2^{n_1}}$ e $y = (y_1, \dots, y_{n_2}) \in B_{\ell_2^{n_2}}$. Se

$$\begin{cases} u = (u_1, \dots, u_r) &= (x_1, \dots, x_{n_1}, 0, \dots, 0), \\ v = (v_1, \dots, v_r) &= (y_1, \dots, y_{n_2}, 0, \dots, 0), \end{cases}$$

então, $u, v \in B_{\ell_2^r}$. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\|A\| = \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} h_{ij} x_i y_j \right| = \left| \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r h_{ij} u_i v_j \right| \leq \sum_{j=1}^r \left| \sum_{i=1}^r h_{ij} u_i \right| |v_j|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \left\langle \left(\left| \sum_{i=1}^r h_{ij} u_i \right|, \dots, \left| \sum_{i=1}^r h_{ir} u_i \right| \right), (|v_1|, \dots, |v_r|) \right\rangle \right| \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^r |v_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^r \left| \sum_{i=1}^r h_{ij} u_i \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^r \left| \sum_{i=1}^r h_{ij} u_i \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Podemos ver a expressão

$$\sum_{j=1}^r \left| \sum_{i=1}^r h_{ij} u_i \right|^2$$

como um produto interno entre o vetor

$$\underbrace{\left(\left| \sum_{i=1}^r h_{ij} u_i \right|, \dots, \left| \sum_{i=1}^r h_{ir} u_i \right| \right)}_{r \text{ entradas}}$$

por ele mesmo. Observamos que

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^r h_{ij} u_i \right| \cdot \left| \sum_{k=1}^r h_{kj} u_k \right| &= \sum_{i=1}^r h_{ij} u_i \overline{\sum_{k=1}^r h_{kj} u_k} \\
&= \sum_{i=1}^r h_{ij} u_i \sum_{k=1}^r \overline{h_{kj} u_k} \\
&= \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_{ij} \overline{h_{kj}} u_i \overline{u_k}.
\end{aligned}$$

Notemos que, quando $i, k = 1, \dots, r$ e $i = k$, $\sum_{j=1}^r h_{ij} h_{kj}$ é igual ao produto interno de uma

linha de $\mathbf{H}$ por si mesma. Nesse caso, $\sum_{j=1}^r h_{ij} h_{kj} = r$. Por outro lado, se $i \neq k$, o somatório

$\sum_{j=1}^r h_{ij} h_{kj}$ nada mais é do que o produto interno de duas linhas distintas de $\mathbf{H}$. Nesse caso,

$\sum_{j=1}^r h_{ij} h_{kj} = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^r \left| \sum_{i=1}^r h_{ij} u_i \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_{ij} h_{kj} u_i \overline{u_k} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r r \delta_{ik} u_i \overline{u_k} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= r^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^r |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= r^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{r}{\max\{n_1, n_2\}} \right)^{\frac{1}{2}} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, n_2^{\frac{1}{2}} \right\}.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\max \left\{ n_1^{\frac{1}{2} \max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 0\}} n_2^{\frac{1}{2} \max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 0\}}, n_2^{\frac{1}{2} \max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 0\}} n_1^{\frac{1}{2} \max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 0\}} \right\} = \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, n_2^{\frac{1}{2}} \right\}$$

e, como $C_{2,2;n_1,n_2}$ é a menor das constantes positivas para as quais existe uma forma bilinear satisfazendo uma desigualdade como (2.3), necessariamente devemos ter

$$C_{2,2;n_1,n_2} \leq \left(\frac{r}{\max\{n_1, n_2\}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

o que conclui nossa demonstração. ■

Este resultado é relevante porque estabelece uma cota independente de n_1 e n_2 separadamente, dependendo apenas do maior deles. Isso é útil em aplicações que envolvem otimização de estimativas assintóticas e análise de estruturas multilineares em espaços de Banach.

Munidos desse lema e dos resultados da seção anterior, estamos prontos para verificar a seguinte dominação superior para algumas das constantes da desigualdade de Bennett:

Teorema 2.12 *Se $p_1, p_2, p \in [1, \infty]$, então*

$$\sqrt{\frac{8}{5}} \geq \begin{cases} C_{p_1, p_2}, & \text{se } p_1, p_2 \in [2, \infty], \\ C_{p, p}, & \text{se } p \in [1, \infty]. \\ C_{p_1, p_2, n_1, n_2}, & \text{se } p_1, p_2, n_1, n_2 \text{ são como nos Teoremas 2.8 ou 2.9.} \end{cases}$$

Demonstração: De acordo com o Corolário 2.10 e o Exemplo 2.1, é suficiente mostrarmos que $C_{2,2;n,n} \leq \sqrt{\frac{8}{5}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como já vimos, $C_{2,2;1,1} = 1$. Como 2 e 4 são ordens de Hadamard, então, segundo o Lema 2.11, $C_{2,2;2,2}, C_{2,2;4,4} \leq 1$. Como 4 é a menor ordem de Hadamard que é maior do que 3, então

$$C_{2,2;3,3} \leq \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15$$

é a melhor limitação superior que o Lema 2.11 nos fornece. Já sabemos que, se $k = 1, \dots, 166$, então $4k$ é uma ordem de Hadamard. Tomamos $n = 5, \dots, 664$. Se n for uma ordem de Hadamard, seguirá imediatamente do Lema 2.11 que $C_{2,2;n,n} \leq 1$. Por outro lado, se $4k + 1 \leq n \leq 4k + 3$, observamos que

$$C_{2,2;n,n} \leq \left(\frac{4(k+1)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{4(k+1)}{4k+1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Já sabemos que, se p e q são duas ordens de Hadamard, então pq também o é. Portanto, se $p \in \{1, \dots, 166\}$ e $r \in \mathbb{N}$, então $2^r \cdot 4p$ é uma ordem de Hadamard. Para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada $k \in \{8, \dots, 63\}$, seja

$$A_{m,k} = \{8^m k + 1, \dots, 8^m(k+1)\}.$$

Notemos que $8^m(k+1) = 2^{3m-2} \cdot 4(k+1)$ é uma ordem de Hadamard. Aplicando novamente o Lema 2.11, se $n \in A_{m,k}$, então

$$C_{2,2;n,n} \leq \left(\frac{8^m(k+1)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{8^m(k+1)}{8^m k} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{8}{5}}.$$

Mostramos então que, se $n \in A_{m,k}$, então o resultado vale. Se mostrarmos que, quando $n \geq 665$, então $n \in A_{m,k}$ para algum ponto $(m, k) \in \mathbb{N} \times \{8, \dots, 63\}$, teremos concluído a demonstração do resultado. Sendo assim, seja $n \geq 665$. Claramente, existe $m \geq 3$ tal que

$$8^{m-1} \cdot 8 = 8^m < n \leq 8^{m+1} = 8^{m-1} \cdot 64.$$

Isso indica que $n \in A_{m-1,8} \cup \dots \cup A_{m-1,63}$. Assim,

$$\mathbb{N} = \{1, \dots, 664\} \cup \left(\bigcup_{m=2}^{\infty} A_{m,k} \right).$$

Esse fato conclui nossa demonstração. ■

2.5 Dominação superior para algumas constantes da desigualdade de KSZ

A finalidade desta seção é estabelecer novas cotas superiores universais para as constantes na desigualdade de KSZ para formas m -lineares $A: \ell_{\infty}^{n_1} \times \dots \times \ell_{\infty}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 . Isso significa dizer que estabeleceremos cotas superiores que não dependem das dimensões $n_1, \dots, n_m$ dos espaços que compõem o domínio de A . Além disso, também obtemos estimativas melhores ainda para elas no caso particular em que $n_1 = \dots = n_m = n$.

Teorema 2.13 *Para cada número natural m existe uma forma m -linear*

$$A_{n_1, \dots, n_m}: \ell_{\infty}^{n_1} \times \dots \times \ell_{\infty}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$$

do tipo

$$A_{n_1, \dots, n_m} (z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

satisfazendo

$$\|A_{n_1, \dots, n_m}\| \leq 2^{\frac{m+1}{2}} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, \dots, n_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: No Exemplo 1.9, vimos que podemos supor sem perda de generalidade que $n_1 \leq \dots \leq n_m$. Para cada $k = 1, \dots, m$, claramente existe um único inteiro positivo t_k tal que

$$2^{t_k} < n_k \leq 2^{t_k+1},$$

onde $t_1 + 1 \leq \dots \leq t_m + 1$, pois $n_1 \leq \dots \leq n_m$. O Lema 2.2 nos garante que existe uma forma m -linear $A_0: \ell_{\infty}^{2^{t_1+1}} \times \dots \times \ell_{\infty}^{2^{t_m+1}} \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 tal que

$$\|A_0\| \leq (2^{t_m+1})^{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^m (2^{t_k+1})^{\frac{1}{2}}.$$

No caso em que $n_k = 2^{t_k+1}$ para todo $k = 1, \dots, m$, basta consideramos $A_{n_1, \dots, n_m} = A_0$. Caso isso não aconteça, definimos $A_{n_1, \dots, n_m} : \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ de modo que

$$\begin{aligned} & A_{n_1, \dots, n_m} \left(\left(z_1^{(1)}, \dots, z_{n_1}^{(1)} \right), \dots, \left(z_1^{(m)}, \dots, z_{n_m}^{(m)} \right) \right) \\ &= A_0 \left(\left(z_1^{(1)}, \dots, z_{n_1}^{(1)}, 0, \dots, 0 \right), \dots, \left(z_1^{(m)}, \dots, z_{n_m}^{(m)}, 0, \dots, 0 \right) \right). \end{aligned}$$

Seja $x^{(k)} \in B_{\ell_\infty^{n_k}}$ e $k = 1, \dots, m$. Notemos que

$$\begin{aligned} & \left| A_{n_1, \dots, n_m} \left(\left(x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)} \right), \dots, \left(x_1^{(m)}, \dots, x_{n_m}^{(m)} \right) \right) \right| = \\ & \left| A_0 \left(\left(z_1^{(1)}, \dots, z_{n_1}^{(1)}, 0, \dots, 0 \right), \dots, \left(z_1^{(m)}, \dots, z_{n_m}^{(m)}, 0, \dots, 0 \right) \right) \right| \leq \\ & \|A_0\| \leq (2^{t_m+1})^{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^m (2^{t_k+1})^{\frac{1}{2}} = \\ & \frac{(2^{t_m+1})^{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^m (2^{t_k+1})^{\frac{1}{2}}}{\max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, \dots, n_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{\frac{1}{2}}} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, \dots, n_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \frac{(2^{t_m+1})^{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^m (2^{t_k+1})^{\frac{1}{2}}}{(2^{t_m})^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^m (2^{t_j})^{\frac{1}{2}}} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, \dots, n_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{\frac{1}{2}} = \\ & 2^{\frac{m+1}{2}} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, \dots, n_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

o que completa nossa prova. ■

Lema 2.14 *Sejam m um inteiro positivo e $f : \mathbb{N}^m \rightarrow [0, \infty)$ uma função. Se para cada $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ existe uma forma m -linear $A_0 : \ell_2^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \times \dots \times \ell_\infty^{n_{m-1}} \times \ell_2^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A_{n_1, \dots, n_m} (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_m}^{(m)} \quad (2.17)$$

tal que

$$\|A_0\| \leq f(n_1, \dots, n_m),$$

então existe uma forma m -linear $A : \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ para cada $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ como em (2.17) de forma que

$$\|A\| \leq (n_1 n_2)^{\frac{1}{2}} f(n_1, \dots, n_m).$$

Demonstração: Seja $A_0 : \ell_2^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \times \dots \times \ell_\infty^{n_{m-1}} \times \ell_2^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma m -linear como em (2.17) de modo que

$$\|A_0\| \leq f(n_1, \dots, n_m).$$

Definimos uma forma m -linear $A : \ell_\infty^{n_1} \times \dots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}).$$

Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup_{\|x^{(1)}\|_\infty, \dots, \|x^{(m)}\|_\infty \leq 1} \left| \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_m}^{(m)} \right| \\
&= \sup_{\|x^{(1)}\|_\infty, \dots, \|x^{(m)}\|_\infty \leq 1} \left| \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm n_1^{\frac{1}{2}} n_1^{-\frac{1}{2}} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_{m-1}}^{(m-1)} n_m^{\frac{1}{2}} n_m^{-\frac{1}{2}} x_{i_m}^{(m)} \right| \\
&= (n_1 n_m)^{\frac{1}{2}} \sup_{\|x^{(1)}\|_\infty, \dots, \|x^{(m)}\|_\infty \leq 1} \left| \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm n_1^{-\frac{1}{2}} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_{m-1}}^{(m-1)} n_m^{-\frac{1}{2}} x_{i_m}^{(m)} \right|. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Definimos

$$z^{(1)} = n_1^{-\frac{1}{2}} x^{(1)} = n_1^{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{2}} x^{(1)} \text{ e } z^{(m)} = n_m^{-\frac{1}{2}} x^{(m)} = n_m^{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{2}} x^{(m)}.$$

Do Lema (2.5), sabemos que, como $x^{(1)} \in B_{\ell_\infty^{n_1}}$ e $x^{(m)} \in B_{\ell_\infty^{n_m}}$, $z^{(1)} \in B_{\ell_2^{n_1}}$ e $z^{(m)} \in B_{\ell_2^{n_m}}$. Assim, segue de (2.18) que

$$\begin{aligned}
\|A\| &\leq (n_1 n_m)^{\frac{1}{2}} \sup_{\|z^{(1)}\|_2, \|x^{(2)}\|_\infty, \dots, \|x^{(m-1)}\|_\infty, \|z^{(m)}\|_2 \leq 1} \left| \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm z_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_{m-1}}^{(m-1)} z_{i_m}^{(m)} \right| \\
&= (n_1 n_m)^{\frac{1}{2}} \|A_0\| \\
&\leq (n_1 n_m)^{\frac{1}{2}} f(n_1, \dots, n_m).
\end{aligned}$$

Isso conclui nossa demonstração. ■

Teorema 2.15 *Sejam $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tais que $n_1 = \min\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$. Então*

$$C_{\infty, \dots, \infty; n_1, \dots, n_m} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m}.$$

Demonstração: Inicialmente, definimos a função $f: \mathbb{N}^m \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$f(n_1, \dots, n_m) = C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, \dots, n_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{\frac{1}{2}}.$$

A definição de $C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m}$ nos garante que, para cada $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$, existe uma forma m -linear $A_0: \ell_2^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \times \cdots \times \ell_\infty^{n_{m-1}} \times \ell_2^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo

$$A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \pm x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_m}^{(m)}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\|A_0\| &\leq C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m} \max_{k=1, \dots, m} \left\{ n_k^{\frac{1}{\min\{\max\{2, 2^*\}, \max\{2, \infty^*\}\}}} \right\} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{\infty}, 0\}} \\
&= C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, \dots, n_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

De acordo com o Lema 2.14, existe uma forma m -linear $A_1: \ell_\infty^{n_1} \times \cdots \times \ell_\infty^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$ com coeficientes ± 1 tal que

$$\|A_1\| \leq (n_1 n_2)^{\frac{1}{2}} f(n_1, \dots, n_m)$$

$$\begin{aligned}
&= (n_1 n_2)^{\frac{1}{2}} C_{2,\infty,\dots,\infty,2;n_1,\dots,n_m} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, \dots, n_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{\frac{1}{2}} \\
&= C_{2,\infty,\dots,\infty,2;n_1,\dots,n_m} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, \dots, n_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Como $C_{\infty,\dots,\infty;n_1,\dots,n_m}$ é a menor entre as constantes positivas para as quais existe uma forma m -linear satisfazendo uma desigualdade como (2.2), devemos necessariamente obter

$$C_{\infty,\dots,\infty;n_1,\dots,n_m} \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, \dots, n_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{k=1}^m n_k^{\frac{1}{2}} \leq \|A_1\|. \tag{2.20}$$

Assim, de (2.20) e (2.19), temos que

$$C_{\infty,\dots,\infty;n_1,\dots,n_m} \leq C_{2,\infty,\dots,\infty,2;n_1,\dots,n_m},$$

para todos $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tais que $n_1 = \min\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$. ■

Teorema 2.16 *Sejam $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tais que*

$$n_1 = \min\{n_1, n_2, \dots, n_m\} \quad e \quad n_m = \max\{n_1, n_2, \dots, n_m\}.$$

Além disso, suponhamos também que, para cada, $k = 2, \dots, m$, existe uma matriz de Hadamard de ordem n_k

$$\mathbf{H}_k = \left[h_{ij}^{(k)} \right]_{n_k \times n_k}.$$

Então, a forma m -linear

$$A_0: \ell_2^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \times \dots \times \ell_\infty^{n_{m-1}} \times \ell_2^{n_m} \rightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} h_{i_1 i_2}^{(2)} h_{i_2 i_3}^{(3)} \dots h_{i_{m-1} i_m}^{(m)} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_m}^{(m)}$$

satisfaz

$$\|A_0\| \leq n_m^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{\frac{1}{2}} = \max \left\{ n_1^{\frac{1}{2}}, \dots, n_m^{\frac{1}{2}} \right\} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: Para cada $k = 2, \dots, m$, denotemos a i -ésima linha de $\mathbf{H}_k$ por $u_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, n_k$. Como já vimos,

$$\langle u_i^{(k)}, u_j^{(k)} \rangle = n_k \delta_{ij}. \tag{2.21}$$

A partir de cada matriz $\mathbf{H}_k$, definimos as seguintes matrizes quadradas de ordem n_m por

$$\left[\mathbf{h}_{ij}^{(k)} \right]_{n_m \times n_m} := \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k & \mathbf{0}_{n_k \times (n_m - n_k)} \\ \mathbf{0}_{(n_m - n_k) \times n_k} & \mathbf{0}_{(n_m - n_k) \times (n_m - n_k)} \end{bmatrix}$$

para cada $k = 2, \dots, m$. Considerando $p_k = 2$ quando $k \in \{1, m\}$ e $p_k = \infty$ quando $k \in \{2, \dots, m-1\}$, seja $x^{(k)} \in \ell_{p_k}^{n_k}$. Denotemos

$$y^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}, 0, \dots, 0 \right) \in \ell_{p_k}^{n_m}.$$

Definamos a forma m -linear

$$A_0: \ell_2^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \times \cdots \times \ell_\infty^{n_{m-1}} \times \ell_2^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$$

por

$$\begin{aligned} A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m h_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^m x_{i_k}^{(k)} \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^m y_{i_k}^{(k)} \right). \end{aligned}$$

Para cada $k = 1, \dots, m$, fixemos $x^{(k)} \in B_{\ell_{p_k}^{n_k}}$. Claramente, $y^{(k)} \in B_{\ell_{p_k}^{n_k}}$ para cada $k = 1, \dots, m$. Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| &= \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^m y_{i_k}^{(k)} \right) \right| \\ &\leq \sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \right| \\ &\leq \sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \right| |y_{i_m}^{(m)}| \\ &\leq \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} |y_{i_m}^{(m)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|y^{(m)}\|_2 \\ &\leq \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Podemos ver a expressão

$$\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \right|^2$$

como um produto interno do vetor

$$\underbrace{\left(\sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left| \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \right|, \dots, \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \right)}_{n_m \text{ entradas}}$$

por ele mesmo. Observemos que

$$\left| \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \right| \cdot \left| \sum_{j_1, \dots, j_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{j_k}^{(k)} \right) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \cdot \overline{\sum_{j_1, \dots, j_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{j_k}^{(k)} \right)} \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \cdot \sum_{j_1, \dots, j_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \\
&= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \\
&= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \mathfrak{h}_{i_{m-1}i_m}^{(m)} \mathfrak{h}_{j_{m-1}i_m}^{(m)} \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right).
\end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^m \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \mathfrak{h}_{i_{m-1}i_m}^{(m)} \mathfrak{h}_{j_{m-1}i_m}^{(m)} \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

onde deixamos subentendido que $\left(\prod_{r=a}^b \alpha_r \beta_r \right) = 1$ se $b < a$. Portanto,

$$\begin{aligned}
|A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| &\leq \left(\sum_{i_m=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \mathfrak{h}_{i_{m-1}i_m}^{(m)} \mathfrak{h}_{j_{m-1}i_m}^{(m)} \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \sum_{i_m=1}^{n_m} \mathfrak{h}_{i_{m-1}i_m}^{(m)} \mathfrak{h}_{j_{m-1}i_m}^{(m)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \sum_{i_m=1}^{n_m} h_{i_{m-1}i_m}^{(m)} h_{j_{m-1}i_m}^{(m)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-1}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \langle u_{i_{m-1}}^{(m)}, u_{j_{m-1}}^{(m)} \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) n_m \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade foi obtida usando (2.21). Usando novamente esse resultado, vejamos que

$$|A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq n_m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-1} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= n_m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-2} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-2} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \mathfrak{h}_{i_{m-2}i_{m-1}}^{(m-1)} \mathfrak{h}_{j_{m-2}i_{m-1}}^{(m-1)} \left| y_{i_{m-1}}^{(m-1)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq n_m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-2} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-2} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \sum_{i_{m-1}=1}^{n_m} \mathfrak{h}_{i_{m-2}i_{m-1}}^{(m-1)} \mathfrak{h}_{j_{m-2}i_{m-1}}^{(m-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= n_m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-2}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-2}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-2} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-2} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \langle u_{i_{m-2}}^{(m-1)}, u_{j_{m-2}}^{(m-1)} \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= n_m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_{m-2}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-2} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-2} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) n_{m-1} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= n_m^{\frac{1}{2}} n_{m-1}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_{m-2}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-2} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-2} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 &n_m^{\frac{1}{2}} n_{m-1}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_{m-2}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-2} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-2} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= n_m^{\frac{1}{2}} n_{m-1}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_{m-2}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-3} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-3} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \mathfrak{h}_{i_{m-3}i_{m-2}}^{(m-2)} \mathfrak{h}_{j_{m-3}i_{m-2}}^{(m-2)} \left| y_{i_{m-2}}^{(m-2)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq n_m^{\frac{1}{2}} n_{m-1}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_{m-2}=1}^{n_m} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-3} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-3} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \mathfrak{h}_{i_{m-3}i_{m-2}}^{(m-2)} \mathfrak{h}_{j_{m-3}i_{m-2}}^{(m-2)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= n_m^{\frac{1}{2}} n_{m-1}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-3} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-3} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \sum_{i_{m-2}=1}^{n_m} \mathfrak{h}_{i_{m-3}i_{m-2}}^{(m-2)} \mathfrak{h}_{j_{m-3}i_{m-2}}^{(m-2)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= n_m^{\frac{1}{2}} n_{m-1}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^N \left(\prod_{k=2}^{m-3} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-3} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \langle u_{i_{m-2}}^{(m-2)}, u_{j_{m-2}}^{(m-2)} \rangle \right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} & |A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| \\ & \leq n_m^{1/2} n_{m-1}^{1/2} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m-3}=1 \\ j_1, \dots, j_{m-3}=1}}^{n_m} \left(\prod_{k=2}^{m-3} \mathfrak{h}_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \mathfrak{h}_{j_{k-1}j_k}^{(k)} \right) \left(\prod_{k=1}^{m-3} y_{i_k}^{(k)} \overline{y_{j_k}^{(k)}} \right) \langle u_{i_{m-2}}^{(m-2)}, u_{j_{m-2}}^{(m-2)} \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Usando este procedimento mais algumas vezes, podemos concluir que

$$\begin{aligned} |A_0(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| & \leq n_m^{\frac{1}{2}} n_{m-1}^{\frac{1}{2}} \cdots n_2^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_1=1}^{n_m} |y_{i_1}^{(1)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq n_m^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

o que finaliza nossa demonstração. ■

Corolário 2.17 *Sejam $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tais que*

$$n_1 = \min\{n_1, n_2, \dots, n_m\} \text{ e } n_m = \max\{n_1, n_2, \dots, n_m\}.$$

Sejam também $r_1 = n_1$ e, para cada $k = 2, \dots, m$, $r_k \geq n_k$ uma ordem de Hadamard, com $r_m = \max\{r_1, \dots, r_m\}$. Então,

$$C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m} \leq \left(\frac{r_m}{n_m} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} \left(\frac{r_k}{n_k} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: Como vimos no Teorema 2.16, existe uma forma m -linear

$$A: \ell_2^{r_1} \times \ell_\infty^{r_2} \times \cdots \times \ell_\infty^{r_{m-1}} \times \ell_2^{r_m} \rightarrow \mathbb{K}$$

do tipo

$$A(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1=1}^{r_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{r_m} \pm z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)}$$

tal que

$$\|A\| \leq r_m^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} r_k^{\frac{1}{2}}. \quad (2.22)$$

Se A_0 é a restrição de A a $\ell_2^{n_1} \times \ell_\infty^{n_2} \times \cdots \times \ell_\infty^{n_{m-1}} \times \ell_2^{n_m}$, então $\|A_0\| \leq \|A\|$. Da definição de $C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m}$, temos

$$C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m} n_m^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{\frac{1}{2}} \leq \|A_0\|. \quad (2.23)$$

De (2.22) e (2.23), temos

$$C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m} n_m^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} n_k^{\frac{1}{2}} \leq r_m^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} r_k^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n_1, \dots, n_m} \leq \left(\frac{r_m}{n_m} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} \left(\frac{r_k}{n_k} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Isto termina a prova. ■

Teorema 2.18 *Para cada $m \in \mathbb{N}$, temos*

$$C_{\infty, \dots, \infty; n, \dots, n} \leq \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Demonstração: Por meio de um processo análogo ao que executamos no Teorema 2.7 para calcular a norma de A_1 , podemos concluir facilmente que $C_{\infty, \dots, \infty; 1, \dots, 1} = 1$. Além disso, combinando o Teorema 2.15 e o Corolário 2.17, obtemos as seguinte aproximações.

1. $C_{\infty, \dots, \infty; 2, \dots, 2} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2, 2, \dots, 2} \leq \left(\frac{2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} \left(\frac{2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} (1)^{\frac{1}{2}} = 1.$
2. $C_{\infty, \dots, \infty; 3, \dots, 3} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2, 3, \dots, 3} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m-1}{2}}.$
3. $C_{\infty, \dots, \infty; 4, \dots, 4} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2, 4, \dots, 4} \leq \left(\frac{4}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} \left(\frac{4}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} (1)^{\frac{1}{2}} = 1.$
4. $C_{\infty, \dots, \infty; 5, \dots, 5} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2, 5, \dots, 5} \leq \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{m-1}{2}}.$
5. $C_{\infty, \dots, \infty; 6, \dots, 6} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2, 6, \dots, 6} \leq \left(\frac{8}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} \left(\frac{8}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8}{6}\right)^{\frac{m-1}{2}}.$
6. $C_{\infty, \dots, \infty; 7, \dots, 7} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2, 7, \dots, 7} \leq \left(\frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} \left(\frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8}{7}\right)^{\frac{m-1}{2}}.$
7. $C_{\infty, \dots, \infty; 8, \dots, 8} \leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2, 8, \dots, 8} \leq \left(\frac{8}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} \left(\frac{8}{8}\right)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{m-1} (1)^{\frac{1}{2}} = 1.$

Para $9 \leq n \leq 64$, seja k o único inteiro positivo tal que

$$4k < n \leq 4(k+1). \quad (2.24)$$

Como já vimos no capítulo anterior, $4(k+1)$ é uma ordem de Hadamard. Daí, combinando novamente o Teorema 2.15 e Corolário 2.17, para k como em (2.24), temos

$$\begin{aligned} C_{\infty, \dots, \infty; n, \dots, n} &\leq C_{2, \infty, \dots, \infty; 2, n, \dots, n} \leq \left(\frac{4(k+1)}{n}\right)^{\frac{m-1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{4(k+1)}{4k}\right)^{\frac{m-1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{m-1}{2}} \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}}. \end{aligned}$$

Para cada $t \in \mathbb{N}$ e cada $k \in \{8, \dots, 63\}$, seja

$$A_{t,k} = \{8^t k + 1, \dots, 8^t(k+1)\}.$$

Vimos no Teorema 2.12 que $8^t(k+1)$ é uma ordem de Hadamard e, se $n \geq 65$, existe um par $(t, k) \in \mathbb{N} \times \{8, \dots, 63\}$ de modo que $n \in A_{t,k}$. Por definição, temos

$$8^t < n \leq 8^t(k+1),$$

onde $t \in \mathbb{N}$ e $k \in \{8, \dots, 63\}$. Aplicando mais uma vez o Teorema 2.15 e Corolário 2.17, obtemos

$$\begin{aligned} C_{\infty, \dots, \infty; n, \dots, n} &\leq C_{2, \infty, \dots, \infty, 2; n, \dots, n} \leq \left(\frac{8^t(k+1)}{n} \right)^{\frac{m-1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{8^t(k+1)}{8^t k} \right)^{\frac{m-1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{\frac{m-1}{2}} \leq \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{\frac{m-1}{2}} = \left(\frac{9}{8} \right)^{\frac{m-1}{2}}. \end{aligned}$$

Concluimos assim a demonstração. ■

Considerações Finais

À guisa de conclusão, é possível destacar alguns pontos importantes que emergiram da análise realizada ao longo desta dissertação. Um dos resultados mais importantes apresentado neste texto estabelece uma limitação universal para as constantes da desigualdade de Bennett C_{p_1, p_2} , com $p_1, p_2 \in [2, \infty]$; $C_{p, p}$, com $p \in [1, \infty]$, e $C_{p_1, p_2; n_1, n_2}$, onde p_1, p_2, n_1, n_2 são como nos Teoremas 2.8 ou 2.9. Tal resultado estabelece que essas constantes são superiormente limitadas por $\sqrt{\frac{8}{5}}$.

Também conseguimos resultados que estabelecem limitações superiores para algumas constantes da desigualdade de KSZ. Temos, por exemplo, o seguinte resultado: para cada $m \in \mathbb{N}$, temos

$$C_{\infty, \dots, \infty; n, \dots, n} \leq \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Para mostrar a validade desses e de outros resultados, tivemos que fazer uso de uma vasta teoria que envolveu operadores lineares, matrizes de Hadamard e o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin. Cabe destacar o grande destaque que alguns resultados envolvendo as ordens de Hadamard desempenharam neste trabalho uma vez que o uso de matrizes de Hadamard mostrou-se um estratégia bem consolidada para obter cotas superiores.

Por meio dos resultados obtidos neste trabalho, podemos fornecer aproximações mais precisas para as constantes C e C_m , respectivamente, das desigualdades de Bennett e KSZ. Isso é importante, pois os valores exatos dessas constantes não são conhecidos.

Referências Bibliográficas

- [1] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, *Optimal Hardy–Littlewood type inequalities for polynomials and multilinear operators*, Israel J. Math., **211** (2016), 197–220.
- [2] N. Albuquerque, L. Rezende, *Asymptotic estimates for unimodular multilinear forms with small norms on sequence spaces*, Bull. Braz. Math. Soc. **52** (2021), 23–39.
- [3] F. Bayart, *Maximum modulus of random polynomials*, Quart. J. Math. **63** (2012), 21–39.
- [4] F. Bayart, D. Pellegrino, J.B. Seoane-Sepúlveda, *The Bohr radius of the n -dimensional polydisk is equivalent to $\sqrt{(\log n)/n}$* , Adv. Math. **264** (2014) 726–746.
- [5] G. Bennett, *Schur multipliers*. Duke Math. J. **44** (1977), no. 3, 603–639.
- [6] A.T.L. Bernardino, *Ideais de Aplicações Multilineares e Polinômios entre Espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2008.
- [7] H.P. Boas, D. Khavinson, *Bohr’s power series theorem in several variables*, Proc. Am. Math. Soc. **125** (10) (1997), 2975–2979.
- [8] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, 3ª ed., Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2023.
- [9] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, 2ª ed., vol. 1. Springer, 1978.
- [10] A. Defant, M. Mastylo, *Subgaussian Kahane–Salem–Zygmund inequalities in Banach spaces*, preprint (2020), 47 pp. arXiv:2008.00429.
- [11] H. Kharaghani, B. Tayfeh-Rezaie, *A Hadamard matrix of order 428*, J. Combin. Des. **13** (2005), 435–440.
- [12] A. Mantero, A. Tonge, *The Schur multiplication in tensor algebras*, Studia Math. **68** (1980), no. 1, 1–24.
- [13] F.E.B. Martinez, C.G.T.A. Moreira, N.C. Saldanha, E. Tengan, *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, 5ª edição, Projeto Euclides, IMPA (2018).

-
- [14] D. Pellegrino, D. Serrano-Rodríguez, J. Silva, *On unimodular forms with small norms on sequence spaces*, Linear Algebra Appl. **595** (2020), 24–32.
 - [15] A.B. Raposo Jr., *Introdução à Análise Funcional*, Notas de aula, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2024.
 - [16] A.B. Raposo Jr., *Sobre Normas de Formas Unimodulares em Espaços de Sequências*, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2022.
 - [17] J. Santos, T. Velanga, *On the Bohnenblust-Hille inequality for multilinear forms*, Results Math. **72** (1–2) (2017) 239–244.