

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Plasmas quirais com aplicações em efeitos ópticos, conversão
áxion-fóton e em cenários astrofísicos**

Filipe dos Santos Ribeiro

ORIENTADOR: MANOEL MESSIAS FERREIRA JR.
COORIENTADOR: PEDRO DIEGO DA SILVA E SILVA

SÃO LUÍS
2026

FILIPPE DOS SANTOS RIBEIRO

**Plasmas quirais com aplicações em efeitos ópticos, conversão
áxion-fóton e em cenários astrofísicos**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como pré-requisito para obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Física de Partículas Elementares e Campos.

Linha de Pesquisa: Teoria de Campos e Partículas sob efeitos da violação da simetria de Lorentz.

Orientador: Prof. Manoel Messias Ferreira Junior

Coorientador: Prof. Pedro Diego da Silva e Silva

SÃO LUÍS

2026

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Ribeiro, Filipe dos Santos.

Plasmas quirais com aplicações em efeitos ópticos,
conversão áxion-fóton e em cenários astrofísicos / Filipe
dos Santos Ribeiro. - 2026.
226 f.

Coorientador(a) 1: Pedro Diego da Silva e Silva.

Orientador(a): Manoel Messias Ferreira Junior.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em
Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luis,
Ma, 2026.

1. Física de Plasmas. 2. Áxions. 3. Violação da
Simetria de Lorentz. 4. Plasmas Quirais. 5. Conversão
Fóton-áxion. I. Silva e Silva, Pedro Diego da. II.
Ferreira Junior, Manoel Messias. III. Título.

PLASMAS QUIRAIS COM APLICAÇÕES EM EFEITOS ÓPTICOS, CONVERSÃO ÁXION-FÓTON E EM CENÁRIOS ASTROFÍSICOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como pré-requisito para obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Física de Partículas Elementares e Campos.

Linha de Pesquisa: Teoria de Campos e Partículas sob efeitos da violação da simetria de Lorentz.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Jr.

Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Prof. Dr. Pedro Diego da Silva e Silva

Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Prof. Dr. Hugo Fernando Santos Terças

Instituto de Plasmas e Fusão Nuclear (IPFN) – Universidade de Lisboa
Instituto Superior de Engenharia de Lisboa – Instituto Politécnico de Lisboa

Prof. Dr. José Abdalla Helayël Neto

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF

Prof. Dr. Mario Junior de Oliveira Neves

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

SÃO LUÍS

2026

À minha família

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Maria Damiana dos Santos Ribeiro e Benedito Correia Ribeiro, por todo apoio e carinho a mim oferecido durante toda minha vida. Aos meus irmãos, Márcio Samuel e Daniel Ribeiro, por seus exemplos como irmãos mais velhos.

Dedico agradecimento especial à minha namorada e parceira Valéria Gonçalves, com quem compartilho cada etapa de minha vida com muito carinho e satisfação.

Agradeço também ao meu orientador Manoel Messias Ferreira Júnior, por sua orientação e pela confiança depositada em mim durante toda a minha vida acadêmica. Ao meu coorientador prof. Pedro Diego, um grande companheiro de Física que tem me oferecido sua colaboração, um agradecimento especial.

*“Os poetas, como os cegos,
Podem ver na escuridão.”*

–Chico Buarque e Edu Lobo, “Choro Bandido”

SUMÁRIO

RESUMO	21
Abstract	22
1 Introdução	23
2 Propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas frios	29
2.1 Plasmas frios	30
2.2 Descrição fluida e equações básicas	31
2.3 Plasmas não magnetizados	33
2.3.1 Modo longitudinal	35
2.3.2 Modo transversal	36
2.3.3 Propagação e absorção	37
2.4 Plasmas frios magnetizados	38
2.4.1 Propagação paralela ao campo magnético	41
2.4.1.1 Modo longitudinal	41
2.4.1.2 Modo transversal	41
2.4.2 Índices de refração $n_{\pm}$, propagação e absorção	42
2.4.3 Modos de propagação e polarizações	43
2.4.4 Propagação ortogonal ao campo magnético	46
2.4.4.1 Modo transversal ordinário	46
2.4.4.2 Modo extraordinário	46
2.4.5 Índice n_X	47
2.5 Modos de baixas frequências	48
2.6 Birrefringência	49
2.6.1 Efeito Faraday	50
2.6.2 Ângulo de rotação do plano de polarização e o poder de rotação	50
2.6.3 Birrefringência em plasma magnetizado	52
2.6.4 Coeficiente de dicroísmo	53
2.7 Oscilações de densidade	54

3	Eletrodinâmica de meios quirais	57
3.1	A eletrodinâmica de áxions	59
3.1.1	Simetrias discretas	60
3.2	Equações de movimento da eletrodinâmica de áxions	62
3.3	A eletrodinâmica de áxions na descrição de meios quirais	63
3.4	A eletrodinâmica de MCFJ	65
3.5	A teoria de MCFJ e o Modelo Padrão Estendido	66
3.6	Setor de gauge CPT-ímpar do MPE	66
3.7	Análise das simetrias discretas: Operador CPT	67
3.8	Equações de movimento	69
3.9	Equação de onda e relações de dispersão	70
3.9.1	Relações de dispersão	71
3.10	Birrefringência na eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw	72
4	Plasmas frios no contexto de MCFJ com fator quiral tipo-tempo	75
4.1	Eletrodinâmica de MCFJ em meios contínuos	75
4.2	Propagação de ondas em plasmas quirais	77
4.2.1	Modo longitudinal	78
4.2.2	Modo transversal	78
4.2.3	Sobre o índice n_R	79
4.2.4	Sobre o índice n_L	81
4.2.5	Sobre o índice n_E	81
4.2.6	Sobre o índice n_M	82
4.2.7	Modos de baixa frequência	84
4.2.8	Comportamento das relações de dispersão	84
4.3	Birrefringencia em plasmas quirais	85
4.3.1	Poder de rotação	85
4.3.2	Coefficiente de dicroísmo	89
5	Plasmas frios no contexto de MCFJ com vetor quiral tipo-espaco	92
5.1	Propagação de onda ao longo do eixo do campo magnético	92
5.1.1	Vetor quiral paralelo ao campo magnético	93
5.1.1.1	Sobre o índice n_R	95
5.1.1.2	Sobre o índice n_L	95
5.1.1.3	Modos de baixa frequência	97
5.1.1.4	Comportamento das relações de dispersão	98
5.1.1.5	Poder de rotação	99
5.1.1.6	Coefficiente de dicroísmo	100
5.1.2	Vetor quiral ortogonal ao campo magnético	102

5.1.2.1	Sobre o índice n_A	103
5.1.2.2	Sobre o índice n_B	104
5.1.2.3	Efeitos ópticos	104
6	Plasma não magnetizado no contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw	107
6.1	Propagação de ondas em plasmas quirais não magnetizados	108
6.1.1	Sobre o índice n_R	109
6.1.2	Sobre o índice n_M	110
6.1.3	Sobre o índice n_L	110
6.1.4	Sobre o índice n_E	111
6.1.5	Modos de baixa frequência	112
6.1.6	Comportamento das relações de dispersão	113
6.1.7	Poder de rotação	114
6.1.8	Coeficiente de dicroísmo	116
7	Plasma frio bi-isotrópico	119
7.1	Propagação de ondas em plasma quiral do tipo bi-isotrópico	119
7.1.1	Modos de baixa frequência	122
7.1.2	Poder de rotação	123
7.1.3	Coeficiente de dicroísmo	124
8	Restrições sobre os parâmetros quirais usando pulsares	126
8.1	Tempo de atraso e ângulo de Faraday	127
8.2	Tempo de atraso e medida de dispersão na eletrodinâmica MCFJ	131
8.2.1	Restrições dos parâmetros quirais a partir do <i>dispersion measure</i>	133
8.2.1.1	O caso tipo-tempo	133
8.2.1.2	O caso tipo-espaço	134
8.3	Ângulo de Faraday na eletrodinâmica de MCFJ	134
8.3.1	Restrições dos parâmetros quirais a partir da medida de rotação	135
8.4	Comparação com restrições de outros modelos	136
8.5	Medida de dispersão e medida de rotação em meio interestelar quiral bi-isotrópico	137
8.5.1	Restrições usando o conjunto de dados do LOFAR	138
8.6	Restrições sobre os parâmetros quirais usando Fast-Radio-Bursts	139
8.6.1	Medida de dispersão na eletrodinâmica MCFJ	141
8.6.2	Rotação de Faraday na eletrodinâmica MCFJ	142
8.6.3	Restrições utilizando FRBs	143
8.6.4	Restrições de DM utilizando FRBs	143
8.6.5	Restrições de RM utilizando FRBs repetidoras	145
8.6.6	Restrições de RM utilizando FRBs não repetidoras	146

9	Plasmas em rotação no contexto de MCFJ com fator quiral tipo-tempo	148
9.1	Plasma frio magnetizado em rotação	149
9.2	Propagação de ondas eletromagnéticas em plasma quiral em rotação	150
9.2.1	Birrefringência em plasma quiral em rotação	151
10	Conversão fóton-áxion em plasmas quirais	154
10.1	Oscilação áxion-fóton	155
10.1.1	Oscilação axion-fóton em plasmas	159
10.1.2	Decoerência associada à massa do áxion na conversão no vácuo	162
10.2	Conversão fóton-áxion em plasma quiral com AHE e CME	165
10.2.1	Conversão fóton-áxion em plasma na presença de AHE	165
10.2.2	Oscilações entre áxion e fótons circularmente polarizados	167
10.2.2.1	Probabilidade de conversão $\gamma_{R,L} \rightarrow a$	168
10.3	Conversão fóton-áxion na presença de CME	171
10.4	Conversão ressonante $a \rightarrow \gamma$ em plasma quiral	176
10.4.1	Conversão ressonante no vácuo	177
10.4.2	Conversão ressonante em plasma quiral	177
11	Considerações Finais	180
	Apêndices	186
A	Oscilações de densidade longitudinais (linearização do termo de pressão)	187
B	Transformações discretas	189
B.1	Comportamento de algumas grandezas sob operação de paridade	189
B.2	Comportamento de algumas grandezas sob reversão temporal	191
B.3	Comportamento de algumas grandezas sob conjugação de carga	192
C	Equações de movimento da eletrodinâmica de áxions	193
D	Equação de movimento MCFJ	196
D.1	Forma indicial	196
D.2	Forma vetorial das equações de movimento	197
E	Matriz de dispersão MCFJ	199
E.1	Determinante da matriz de dispersão de Carroll-Field-Jackiw	199
F	Eletrodinâmica em Meios Contínuos	201
G	Equação de onda em meios materiais na eletrodinâmica de MCFJ	202

H Autovalores e autovetores da matriz de mistura áxion-fóton	204
Referências	210

LISTA DE FIGURAS

2.1	Índice de refração (2.3.29). A linha tracejada corresponde à parte imaginária de n , enquanto a linha sólida representa a parte real de n . A zona sombreada corresponde a uma zona de absorção para onda EM.	37
2.2	(a) Gráficos dos índices de refração n_+^2 e n_-^2 , dados em (2.4.35). (b) Gráfico das relações de dispersão ($\omega \times k$) associadas aos índices n_+ (linha sólida vermelha) e n_- (linha tracejada azul). Aqui, usamos $\omega = \omega_p$	44
2.3	Gráficos dos índice de refração n_+ (a) e n_- (b). A linha tracejada corresponde à parte imaginária de $n_{\pm}$, enquanto a linha sólida representa a parte real de $n_{\pm}$. As regiões sombreadas correspondem a zonas de absorção para modo associado. Aqui, usamos $\omega = \omega_p$	45
2.4	Índice de refração (2.4.55). A linha tracejada corresponde à parte imaginária de n_X , enquanto a linha sólida representa a parte real de n_X . As zonas sombreadas correspondem a zonas de absorção para para o modo extraordinário.	48
2.5	Birrefringência em cristais ópticos.	50
2.6	Poder de rotação (2.6.16) em termos de ω . Aqui, $\omega_c = \omega_p$ (curva vermelha) e $\omega_c = 2\omega_p$ (curva azul), adotando $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$	53
2.7	Coeficiente de dicroísmo (2.6.21) em função de ω . Aqui, $\omega_c = \omega_p$ (linha vermelha) e $\omega_c = \omega_p/2$ (linha azul), com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$	53
3.1	Ilustração simplificada para efeito magnético quiral (CME). Aqui $\theta = \Delta\mu$, a diferença de potencial químico.	64
4.1	Índice de refração n_R em função da frequência ω . A linha azul tracejada (preta) corresponde à parte imaginária de n_R (n_-), enquanto a linha azul sólida (preta) representa a parte real de n_R (n_-). Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 2\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$	80
4.2	Linhas azuis: índice de refração n_L para a condição (4.2.14), $R_+ > 0$. Linhas pretas: índice de refração n_+ , dado em Eq. (2.4.35). As linhas tracejadas (sólidas) correspondem às partes imaginárias (reais) de n_L e n_+ . Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 2\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$	82

- 4.3 Linhas azuis: índice de refração n_L para a condição (4.2.15), $R_+ < 0$. Linhas pretas: índice de refração n_+ , dado em Eq. (2.4.35). As linhas tracejadas (sólidas) correspondem às partes imaginárias (reais) de n_L e n_+ . Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 0.7\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 82
- 4.4 Linha vermelha: gráfico do índice n_E para a condição (4.2.14), $R_+ > 0$. Linha preta: gráfico do índice $-n_+$, dado em Eq. (2.4.35). Linhas tracejadas (sólidas) representam as partes imaginárias (reais) de n_E e $-n_+$. Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$ e $V_0 = 2\omega_p$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 83
- 4.5 Linha vermelha: gráfico do índice n_E para a condição (4.2.15), $R_+ < 0$. Linha preta: gráfico do índice $-n_+$, dado em Eq. (2.4.35). Linhas tracejadas (sólidas) representam as partes imaginárias (reais) de n_E e $-n_+$. Aqui, definimos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 0.7\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 83
- 4.6 Linha azul: gráfico do índice n_M . Linha preta: gráfico da parte real de $-n_-$, dado em Eq. (2.4.35). Linhas tracejadas (sólidas) representam as partes imaginárias (reais) de n_M e $-n_-$. Aqui, usamos: $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 2\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 83
- 4.7 Gráfico das relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_R (linha vermelha sólida) e n_M (linha azul sólida). A linha preta tracejada corresponde aos índices do caso usual ($\pm n_-$). A área destacada em vermelho (cinza) indica a zona de absorção para $n_{R,M}$ ($\pm n_-$). Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$ e $V_0 = 2\omega_p$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 85
- 4.8 Gráfico das relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_L (linha vermelha sólida) e n_E (linha azul sólida). A linha tracejada corresponde aos índices $\pm n_+$ do caso usual. A área destacada em cinza indica a zona de absorção para $\pm n_+$, onde também ocorre propagação. Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$ e $V_0 = \omega_p$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 86
- 4.9 Gráfico das relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_L (linha vermelha sólida) e n_E (linha azul sólida). A linha tracejada corresponde ao caso usual com índices $\pm n_+$. As áreas destacadas em vermelho (cinza) indicam a zona de absorção para $n_{L,E}$ ($\pm n_+$). Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$ e $V_0 = 0.7\omega_c$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 86
- 4.10 A linha azul sólida representa o poder de rotação (4.3.2) definido pelos índices de refração n_L e n_R , para a condição (4.2.14). A linha preta tracejada corresponde ao poder de rotação usual (2.6.16). Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = \omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 87
- 4.11 Linhas azuis sólidas: gráfico do poder de rotação (4.3.8) associado aos índices de refração n_E e n_R para a condição (4.2.14). A linha tracejada representa o poder de rotação usual (2.6.16). Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = \omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. O gráfico em destaque mostra o comportamento de δ em torno de $\omega = \omega''$ 88
- 4.12 Linhas vermelhas sólidas: poder de rotação (4.3.8) associado aos índices de refração n_E e n_R para a condição (4.2.15). A linha tracejada representa o poder de rotação usual (2.6.16). Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 0.7\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. O gráfico em destaque mostra o comportamento de δ em torno de $\omega = \omega''$ 88
- 4.13 Gráfico do coeficiente de dicroísmo (4.3.11) (linhas vermelhas sólidas) associado aos índices de refração n_L e n_R , sob a condição (4.2.14). A linha preta tracejada representa o coeficiente de dicroísmo usual (2.6.21). Aqui $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = (3/2)\omega_c$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 89

4.14	Gráfico do coeficiente de dicroísmo (4.3.12) (linhas vermelhas sólidas) associado aos índices de refração n_L e n_R , sob a condição (4.2.15). A linha tracejada representa o coeficiente de dicroísmo usual (2.6.21). Aqui, definimos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 0.7\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$	89
4.15	Gráfico dos coeficientes de dicroísmo (4.3.14) associados aos índices de refração n_E e n_R [para a condição (4.2.15)]. A linha tracejada representa o coeficiente de dicroísmo usual (2.6.21). Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 0.7\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$	90
5.1	Índice de refração n_R , sob a condição (5.1.15). A linha tracejada azul (preta) corresponde à parte imaginária de n_R (n_-), enquanto a linha sólida azul (preta) representa a parte real de n_R (n_-). Note que o fator quiral abre uma nova janela de perda próxima da origem e amplia a segunda zona de absorção. Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $ \mathbf{V} = 2\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. As linhas (tracejadas e sólidas) azuis que representam n_R são mais grossas do que a linha preta para n_-	96
5.2	Índice de refração n_R , sob a condição (5.1.17). A linha tracejada azul (preta) corresponde à parte imaginária de n_R (n_-), enquanto a linha sólida azul (preta) representa a parte real de n_R (n_-). O fator quiral aumenta a zona de absorção próxima à ressonância. Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $ \mathbf{V} = 0.5\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. As linhas (tracejadas e sólidas) azuis que representam n_R são mais grossas do que a linha preta para n_-	96
5.3	Índice de refração n_L (linhas vermelhas) para a condição (5.1.15) e índice n_+ (linhas pretas) da Eq. (2.4.35). As linhas tracejadas (sólidas) correspondem às partes imaginária (real) de n_L e n_+ . O fator quiral suprime a janela de absorção. Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $ \mathbf{V} = 2\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. A linha (tracejada e sólida) vermelha representando n_L é mais grossa do que a linha preta para n_+	97
5.4	Índice de refração n_L (linhas vermelhas) para a condição (5.1.17) e índice de refração n_+ (linhas pretas) da Eq. (2.4.35). As linhas tracejadas (sólidas) correspondem às partes imaginária (real) de n_L e n_+ . O fator quiral estreita a zona de absorção e aumenta o regime de propagação livre de atenuação. Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $ \mathbf{V} = 0.5\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. A linha (tracejada e sólida) vermelha representando n_L é mais grossa do que a linha preta para n_+	97
5.5	Relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_R (linha azul sólida) e $-n_R$ (linha preta sólida), sob a condição (5.1.15). A linha preta tracejada representa os índices do caso padrão, $\pm n_-$. A área destacada em vermelho indica a ampliação da zona de absorção para n_R em comparação com a zona de absorção cinza dos índices usuais ($\pm n_-$). Aqui usamos $\omega_c = \omega_p$ e $ \mathbf{V} = 2\omega_p$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$	98
5.6	Gráfico das relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_R (linha azul sólida) e $-n_R$ (linha preta sólida), sob a condição (5.1.17). A linha preta tracejada corresponde aos índices do caso usual ($\pm n_-$). A área destacada em vermelho indica a ampliação da zona de absorção para n_R em comparação com a de $\pm n_-$. Aqui usamos $\omega_c = \omega_p$ e $ \mathbf{V} = 0.5\omega_p$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$	98

- 5.7 Relações de dispersão associadas aos índices de refração n_L (linha azul sólida) e $-n_L$ (linha preta sólida), sob a condição (5.1.15). A linha preta tracejada corresponde aos índices do caso usual ($\pm n_+$). A área destacada em cinza indica a zona de absorção para os índices $\pm n_+$, onde se nota a ausência de absorção para n_L . Aqui usamos $\omega_c = \omega_p$ e $|\mathbf{V}| = 2\omega_p$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 99
- 5.8 Relações de dispersão associadas aos índices de refração n_L (linha azul sólida) e $-n_L$ (linha preta sólida), sob a condição (5.1.17). A linha preta tracejada corresponde aos índices do caso usual ($\pm n_+$). A área destacada em vermelho indica a zona de absorção para n_L , estreitada em comparação com a zona de absorção associada a $\pm n_+$. Aqui usamos $\omega_c = \omega_p$ e $|\mathbf{V}| = 0.5\omega_p$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 99
- 5.9 A linha azul sólida representa o PR (5.1.20) definido pelos índices de refração n_L e n_R para a condição (5.1.15). A linha preta tracejada corresponde ao PR usual para um plasma frio convencional. O fator quiral determina a reversão do sinal do PR em $\omega < \hat{\omega}$ e um valor assintótico constante, $-|\mathbf{V}|/2$, para altas frequências. Aqui usamos $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 2\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 101
- 5.10 Linhas azuis sólidas: PR (5.1.20) associada aos índices de refração n_L e n_R para a condição (5.1.17). A linha tracejada representa o PR usual para um plasma frio convencional. Pequenas desvios do PR são originados do fator quiral. A principal diferença em comparação com o caso usual é o valor assintótico não nulo, $-|\mathbf{V}|/2$, para altas frequências. Aqui usamos $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 0.5\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 101
- 5.11 Coeficiente de dicroísmo da Eq. (5.1.26) (linhas vermelhas sólidas) associado a n_L e n_R , sob a condição (5.1.15). A linha preta tracejada representa o coeficiente de dicroísmo de um plasma frio usual. Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 2\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 102
- 5.12 Coeficiente de dicroísmo da Eq. (5.1.27) (linhas vermelhas sólidas) associado a n_L e n_R , sob a condição (5.1.17). A linha tracejada representa o coeficiente de dicroísmo para um plasma frio convencional. Aqui, definimos $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 0.5\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 102
- 5.13 Índice de refração n_A (linhas vermelhas) e n_+ (linhas pretas), dado na Eq. (2.4.35). As linhas tracejadas (sólidas) correspondem às partes imaginárias (reais) de n_A e n_+ . Há uma zona de propagação intermediária no intervalo $\omega_{A1} < \omega < \omega_c$ e um novo intervalo de absorção definido para $\omega_c < \omega < \omega_{A2}$. Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 2\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. As curvas vermelhas (sólidas e tracejadas) são mais espessas que as linhas pretas (sólidas e tracejadas). 104
- 5.14 Índice de refração n_B (linhas azuis) e n_- (linhas pretas) de Eq. (2.4.35). As linhas tracejadas (sólidas) correspondem às partes imaginárias (reais) de n_B e n_- . A zona de absorção intermediária, $\omega_c < \omega < \omega_B$, tem agora um comprimento amplificado. Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 2\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. As curvas azuis (sólidas e tracejadas) são mais espessas que as linhas pretas (sólidas e tracejadas). 104

- 6.1 Índice de refração n_R sob a condição (6.1.8). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_R ($\tilde{n}_+$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_R ($\tilde{n}_+$), onde o índice $\tilde{n}_+$ é dado em (6.1.10). O parâmetro quiral escalar induz uma nova janela de propagação com refração negativa próxima à frequência de plasma. Aqui, $V_0 = (3/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 110
- 6.2 Índice de refração n_R sob a condição (6.1.9). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_R ($\tilde{n}_+$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_R ($\tilde{n}_+$). O parâmetro quiral escalar induz uma janela de propagação com refração negativa para $0 < \omega < \omega_p$. Aqui, $V_0 = (5/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 110
- 6.3 Índice de refração n_M sob a condição (6.1.8). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_M ($\tilde{n}_-$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_M ($\tilde{n}_-$). Aqui, $V_0 = (3/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 111
- 6.4 Índice de refração n_M sob a condição (6.1.9). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_M ($\tilde{n}_-$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_M ($\tilde{n}_-$). Aqui, $V_0 = (5/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 111
- 6.5 Índice de refração n_L sob a condição (6.1.8). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_L ($\tilde{n}_+$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_L ($\tilde{n}_+$). Aqui, $V_0 = (3/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 112
- 6.6 Índice de refração n_L sob a condição (6.1.9). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_L ($\tilde{n}_+$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_L ($\tilde{n}_+$). Aqui, $V_0 = (5/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 112
- 6.7 Índice de refração n_E sob a condição (6.1.8). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_E ($\tilde{n}_-$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_E ($\tilde{n}_-$). Aqui, $V_0 = (3/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 113
- 6.8 Índice de refração n_E sob a condição (6.1.9). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_E ($\tilde{n}_-$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_E ($\tilde{n}_-$). Aqui, $V_0 = (5/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 113
- 6.9 Relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_R (linha sólida azul) e n_M (linha sólida preta), sob a condição (6.1.8). A linha tracejada preta representa os índices do caso padrão, $\tilde{n}_\pm$. A área destacada em $n_{R,M}$ vermelho (cinza mais vermelho) indica a zona de absorção para $n_{R,M}$ ($\tilde{n}_\pm$). Aqui, usamos $V_0 = (3/2)\omega_p$, com $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$. . . 114
- 6.10 Relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_R (linha sólida azul) e n_M (linha sólida preta), sob a condição (6.1.9). A linha tracejada preta representa os índices do caso padrão, $\tilde{n}_\pm$. A área destacada em cinza indica a zona de absorção para $\tilde{n}_\pm$. O gráfico também revela a ausência de região com perdas para $n_{R,M}$. Aqui, usamos $V_0 = (5/2)\omega_p$, com $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 114
- 6.11 Relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_L (linha sólida azul) e n_E (linha sólida preta) sob a condição (6.1.8). A linha tracejada preta representa os índices do caso padrão, $\tilde{n}_\pm$. A área destacada em vermelho (cinza e vermelho) indica a zona de absorção para $n_{R,M}$ ($\tilde{n}_\pm$). Aqui, usamos $V_0 = (3/2)\omega_p$, com $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 115

- 6.12 Relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_L (linha sólida azul) e n_E (linha sólida preta) sob a condição (6.1.9). A linha tracejada preta representa os índices do caso padrão, $\tilde{n}_\pm$. A área destacada em cinza representa a zona de absorção para $\tilde{n}_\pm$. O gráfico também revela a ausência de uma região com perdas para $n_{L,E}$. Aqui, usamos $V_0 = (5/2)\omega_p$, com $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 115
- 6.13 Poder de rotação (6.1.17) definido para os índices de refração n_E e n_R . Ele é representado pela linha sólida azul para a condição (6.1.8) e $V_0 = (3/2)\omega_p$, e pela linha marrom para a condição (6.1.9) e $V_0 = (5/2)\omega_p$. Aqui, usamos $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 116
- 6.14 Poder de rotação (6.1.18) definido para os índices de refração n_L e n_M . Ele é representado pela linha sólida azul para a condição (6.1.8) e $V_0 = (3/2)\omega_p$, e pela linha marrom para a condição (6.1.9) e $V_0 = (5/2)\omega_p$. Aqui, usamos $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 117
- 6.15 Linha vermelha: coeficiente de dicroísmo (6.1.20), definido pelos índices de refração n_E e n_R sob a condição (6.1.8). Linha azul: coeficiente de dicroísmo (6.1.21), definido pelos índices de refração n_L e n_M sob a condição (6.1.8). Aqui, usamos $V_0 = (3/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 117
- 7.1 Índice de refração n_{R+} para $\omega_p = \omega_c$. A linha vermelha sólida (tracejada) corresponde à parte real (imaginária) de n_{R+} . O mesmo padrão vale para o índice n_- de Eq. (2.4.35), mostrado aqui para comparação. Aqui, $\tilde{\xi}_c = 0.8$ e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 121
- 7.2 Índice de refração n_{R-} para $\omega_p = \omega_c$. A linha vermelha tracejada (preta) corresponde à parte imaginária de n_{R-} ($-n_-$), enquanto a linha vermelha sólida (preta) representa a parte real de n_{R-} ($-n_-$). O índice n_- é dado em Eq. (2.4.35). Aqui, $\tilde{\xi}_c = 0.8$ e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 121
- 7.3 Índice de refração n_{L+} para $\omega_p = \omega_c$. A linha vermelha tracejada (preta) corresponde à parte imaginária de n_{L+} ($\tilde{n}_+$), enquanto a linha vermelha sólida (preta) representa a parte real de n_{L+} ($\tilde{n}_+$), onde o índice $\tilde{n}_+$ é dado em Eq. (2.4.35). Aqui, $\tilde{\xi}_c = 0.8$ e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$. 122
- 7.4 Índice de refração n_{L-} para $\omega_p = \omega_c$. A linha vermelha tracejada (preta) corresponde à parte imaginária de n_{L-} ($-\tilde{n}_+$), enquanto a linha vermelha sólida (preta) representa a parte real de n_{L-} ($-\tilde{n}_+$). O índice $\tilde{n}_+$ é dado em Eq. (2.4.35). Aqui, $\tilde{\xi}_c = 0.8$ e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 122
- 7.5 Poder de rotação (7.1.16) para o intervalo $0 < \omega < \omega_c$. É ilustrado na linha azul tracejada com pontos ($\tilde{\xi}_c = 0.6$) e linha vermelha sólida ($\tilde{\xi}_c = 1.0$). O PR do plasma padrão ($\tilde{\xi}_c = 0$) é representado pela linha preta tracejada. Aqui, usamos $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 124
- 7.6 Poder de rotação (7.1.16) para a faixa $\omega > \omega_-$. É representado pela linha azul tracejada com pontos ($\tilde{\xi}_c = 0.6$) e linha vermelha sólida ($\tilde{\xi}_c = 1.0$). O PR do plasma padrão ($\tilde{\xi}_c = 0$) é ilustrado por uma linha preta tracejada. Aqui, usamos $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$ 124
- 7.7 Poder de rotação (7.1.18) para o intervalo $0 < \omega < \omega_+$. É representado pela linha azul tracejada com pontos ($\tilde{\xi}_c = 0.6$) e linha vermelha sólida ($\tilde{\xi}_c = 2.5$), enquanto o PR do plasma padrão ($\tilde{\xi}_c = 0$) é ilustrado pela linha tracejada preta. Aqui, usamos $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$. 125

7.8	Coeficiente de dicroísmo 7.1.19. A linha tracejada preta representa o coeficiente de dicroísmo de um plasma frio usual. Aqui, usamos $\tilde{\xi}_c = 0.8$ e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$	125
8.1	Distribuição de RM de 388 pulsares projetados no plano Galáctico. Aqui, GC marca o centro galáctico. Os tamanhos dos símbolos são proporcionais à raiz quadrada das magnitudes do RM. Os sinais + e $\times$ representam RMs positivos, enquanto círculos e quadrados representam RMs negativos. Pulsares com distâncias estimadas grandes demais para serem mostradas são plotados na borda da figura. [Figura retirada da Ref. [49].]	129
8.2	Padrão global das direções do campo magnético inferido a partir de ajustes RM–DM aos dados de pulsares, assumindo um padrão espiral global para o campo em grande escala. [Figura retirada da Ref. [49].]	130
9.1	Gráfico do poder de rotação (9.2.14). A linha tracejada preta representa o poder de rotação para plasma quiral ($V_0 \neq 0$) com rotação nula ($\Omega = 0$). A linha tracejada vermelha representa o poder de rotação para plasma em rotação ($\Omega \neq 0$) com condutividade magnética nula ($V_0 = 0$). Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = \omega_p$, $\Omega = 0.1\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$	153
9.2	Gráfico do poder de rotação (9.2.14). A linha tracejada preta representa o poder de rotação para plasma quiral ($V_0 \neq 0$) com rotação nula ($\Omega = 0$). A linha sólida azul representa o poder de rotação para plasma quiral em rotação, com $\Omega \neq 0$ e $V_0 \neq 0$. Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = \omega_p$, $\Omega = 0.1\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$	153
9.3	Gráfico do poder de rotação (9.2.14) para o caso $\Omega < 0$. A linha tracejada preta representa o poder de rotação para plasma quiral ($V_0 > 0$) com rotação nula ($\Omega = 0$). A linha sólida vermelha representa o poder de rotação para plasma quiral em rotação, com $\Omega < 0$ e $V_0 > 0$. Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = \omega_p$, $\Omega = 0.1\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$	153
9.4	Gráfico do poder de rotação (9.2.14) para o caso $\Omega < 0$. A linha tracejada preta representa o poder de rotação para plasma quiral ($V_0 > 0$) com rotação nula ($\Omega = 0$). A linha sólida vermelha representa o poder de rotação para plasma quiral em rotação, com $\Omega < 0$ e $V_0 > 0$. Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = \omega_p$, $\Omega = 1.5\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$	153
10.1	Diagrama do processo Primakoff.	155
10.2	Região de exclusão no plano $g_{a\gamma} \times m_a$ obtida pelo experimento CAST com <i>buffer gas</i> . A introdução de ^3He permitiu restaurar a coerência da conversão áxion–fóton para massas na faixa sub-eV/eV, estendendo a sensibilidade do helioscópio para além do regime de operação em vácuo. Figura retirada da Ref. [290].	164
10.3	Comparação entre probabilidades de conversão no vácuo ($\omega_p = 0$) - caso AHE. Linha preta: gráfico da probabilidade de conversão (10.1.51). Linha vermelha: gráfico probabilidade de conversão $\gamma_{\text{RCP}} \rightarrow a$, dada em (10.2.35). Linha azul: gráfico probabilidade de conversão $\gamma_{\text{LCP}} \rightarrow a$, dada em (10.2.37). Aqui, usamos $B = 10^{-6}\text{G}$, $g_{a\gamma} = 10^{-10}\text{eV}$, $m_a = 10^{-6}\text{eV}$, $\omega = 100m_a$ e $ \mathbf{k}_{\text{AF}} = 5 \times 10^{-9}\text{eV}$	170

- 10.4 Comparação entre probabilidades de conversão no vácuo ($\omega_p = 0$) - caso CME. Linha preta: gráfico da probabilidade de conversão (10.1.51). Linha vermelha: gráfico probabilidade de conversão $\gamma_{\text{RCP}} \rightarrow a$, dada em (10.2.35). Linha azul: gráfico probabilidade de conversão $\gamma_{\text{LCP}} \rightarrow a$, dada em (10.2.37). Aqui, usamos $B = 10^{-6}\text{G}$, $g_{a\gamma} = 10^{-10}\text{eV}$, $m_a = 10^{-6}\text{eV}$, $\omega = 100m_a$ e $V_0 = 5 \times 10^{-9}\text{eV}$ 170
- 10.5 Representação esquemática da conversão áxion-fóton na presença de um campo magnético transversal $\vec{B}_\perp$ e de um vetor de fundo $\mathbf{V}$ orientado na direção de propagação. O áxion incidente, representado pela onda vermelha, atravessa a região de conversão, onde eventualmente pode ser convertido em fótons RCP e LCP. Neste caso, o termo de CFJ tipo-espaço favorece a polarização RCP, de modo que $P(a \rightarrow \gamma_{\text{RCP}}) > P(a \rightarrow \gamma_{\text{LCP}})$. . 176
- 10.6 Representação esquemática da conversão áxion-fóton na presença de um campo magnético transversal $\vec{B}_\perp$ e do fator quiral $(k_{AF})_0$. O áxion incidente atravessa a região de conversão onde pode ser convertido em fótons RCP e LCP. Para este caso, a presença do termo tipo-tempo de CFJ favorece a polarização LCP, de modo que $P(a \rightarrow \gamma_{\text{LCP}}) > P(a \rightarrow \gamma_{\text{RCP}})$ 176
- 11.1 Plots dos ramos polaritônicos $\omega_\pm$ para os casos: (a) Eq. (11.0.1) e (b) Eq. (11.0.2), em função de k . As linhas pretas sólidas representam a relação de dispersão usual, enquanto as linhas vermelhas sólidas representam o caso quiral. A curva tracejada vermelha representa a parte imaginária de ω_- , associada à uma zona de não propagação e/ou instabilidade. Aqui escolhemos $\omega_T = \omega_p = 1 \text{ rad/s}$ e $K_{AF}^0 = 1.8\omega_p$ 185

RESUMO

O presente trabalho aborda a propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas frios quirais, no contexto da teoria de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) e das relações constitutivas bi-isotrópicas. Iniciamos revisando os aspectos essenciais da propagação de ondas eletromagnéticas (EM) em plasmas, analisando as relações de dispersão, índice de refração, modos de propagação e o efeito de birrefringência, bem como os modos hélicons de baixa frequência. Na sequência, revisitamos alguns aspectos básicos de meios quirais, cujas propriedades são efetivamente regidas pela eletrodinâmica de áxions, que também se conecta com a eletrodinâmica de Carroll, Field e Jackiw (CFJ). Simetrias discretas e equações de movimento associadas a essas teorias são também investigadas. Em seguida, são analisados os casos de propagação paralela ao campo magnético, considerando separadamente as componentes tipo-tempo e tipo-espaço de CFJ, que desempenham o papel de condutividades anômalas quirais. Os modos eletromagnéticos e índices de refração modificados são derivados, sendo associados a ondas circularmente polarizadas à direita e à esquerda. Para cada índice, as regiões de propagação e absorção são ilustradas para alguns valores específicos dos parâmetros. No regime de baixas frequências, são obtidos hélicons modificados com polarizações circulares à direita e à esquerda, com comportamentos distintos ao hélicon usual. O comportamento óptico é também investigado por meio do poder de rotação (PR) e do coeficiente de dicroísmo. Observa-se a ocorrência de inversão do sinal do PR, propriedade incomum em plasmas magnetizados, mas já reportada em plasmas em rotação. Os mesmos procedimentos são realizados para a propagação em plasmas regidos por relações constitutivas bi-isotrópicas, onde se destaca o surgimento de uma dupla reversão no PR. Dados associados a medidas de dispersão e birrefringência de sinais de rádio provenientes de pulsares e Fast-Radio-Bursts (FRBs) são utilizados para impor restrições sobre os parâmetros quirais. Tais restrições são tabeladas e comparadas com resultados já estabelecidos na literatura. Efeitos quirais em plasma girantes são também analisados, em especial o efeito de birrefringência, onde observa-se novamente a inversão de PR. Por fim, a conversão de fóton-áxion em plasma quiral é proposta e investigada, onde destaca-se a seletividade do meio quiral a fótons de polarização circular específica, possibilitando conversão ressonante entre áxions e fótons RCP ou LCP.

Palavras-Chave: Física de Plasmas. Plasmas Quirais. Áxions. Violação da Simetria de Lorentz. Relações de Dispersão. Birrefringência. Conversão fóton-áxion

Abstract

In this work, we discuss the propagation of electromagnetic waves in cold chiral plasmas within the framework of the Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) theory and bi-isotropic constitutive relations. We initiate by reviewing the essential aspects of electromagnetic wave propagation in plasmas, analyzing dispersion relations, refractive indices, propagation modes, birefringence effects, and low-frequency helicon modes. Next, we revisit fundamental aspects of chiral media, whose properties are effectively ruled by axion electrodynamics, which is also connected to Carroll-Field-Jackiw (CFJ) electrodynamics. Discrete symmetries and the corresponding equations of motion associated with these theories are also examined. We then analyze wave propagation parallel to an external magnetic field, considering the timelike and spacelike components of the CFJ term, which play the role of anomalous chiral conductivities. Modified electromagnetic modes and refractive indices are derived and associated with right- and left-handed circularly polarized waves. For each refractive index, propagation and absorption regions are illustrated for selected parameter values. In the low-frequency regime, modified helicon modes with right- and left-handed circular polarizations are obtained, exhibiting behaviors distinct from the conventional helicon. Optical properties are further investigated through the rotatory power (RP) and the dichroism coefficient. A reversal of the RP sign is observed, an uncommon feature in magnetized plasmas but previously reported in rotating systems. The same analysis is performed for plasmas described by bi-isotropic constitutive relations, where the emergence of a double RP reversal is highlighted. Data from dispersion and birefringence measurements of radio signals emitted by pulsars and Fast-Radio-Bursts (FRBs) are used to impose constraints on the chiral parameters. These constraints are tabulated and compared with previously established results in the literature. Chiral effects in rotating plasmas are also analyzed, particularly birefringence, for which a reversal of PR is again observed. Finally, photon-axion conversion in a chiral plasma is proposed and investigated, highlighting the selectivity of the chiral medium toward photons with a specific circular polarization and enabling resonant conversion between axions and either RCP or LCP photons.

Key-words: Plasma Physics. Chiral Plasmas. Axions. Lorentz Symmetry Violation. Dispersion Relations. Birefringence. Photon-axion conversion.

INTRODUÇÃO

O plasma é geralmente considerado o quarto estado da matéria, composto por partículas eletricamente carregadas e livres, com dinâmica regida por forças eletromagnéticas [1–3]. Apesar de serem muito semelhantes à fase gasosa por não apresentarem forma definida, os plasmas diferem deste estado em diversos fatores, como na condutividade e nas interações, caracterizando-se como um estado distinto da matéria. O nome plasma foi concebido em 1927 por Irving Langmuir (1881-1957) [4], enquanto este estudava equipamentos eletrônicos baseados em gases ionizados. Ele percebeu que a maneira como o fluido eletrificado carregava elétrons de alta velocidade, íons e impurezas, poderia ser comparada ao modo com que o plasma sanguíneo carregava glóbulos brancos e vermelhos e germens [5], [6].

A física de plasmas possui larga aplicação em diversas áreas da física e da química, sendo uma ferramenta de grande importância para compreensão de vários fenômenos como, por exemplo, a aurora boreal. A concentração de partículas emitidas pelo Sol no chamado cinturão de Van Allen¹ é outro exemplo de aplicação da física de plasmas. Gases ionizados e "ventos" (correntes de plasmas), emanados por estrelas, comportam-se como plasmas. Na astrofísica, a física de plasmas tem diversas aplicações, pois, em regiões do espaço onde há campos magnéticos, partículas emanadas por estrelas, juntamente com radiação estelar, são aprisionadas nas linhas de campo, formando nuvens de gás ionizado (plasma). Por isso, o estado de plasma é o mais presente entre toda matéria encontrada no Universo [2,5]. O estudo das nebulosas, compreendido na física de nuvens astrofísicas, assim como a física solar, são exemplos de sistemas onde a compreensão dos plasmas torna-se indispensável.

Em 1939, Hans Albrecht Bethe (1906-2005) [7, 8], mostrou como a fusão nuclear podia produzir a energia responsável pelo brilho (energia emanada) das estrelas, o que despertou o interesse de vários cientistas, que, em seguida, buscaram tornar possível um processo controlado de fusão nuclear, viabilizando uma nova fonte de energia a ser utilizada. Para isso foi criado o Tokamak, um reator nuclear que aprisiona o plasma aquecido, possibilitando a fusão de isótopos pesados de hidrogênio, por exemplo, formando núcleos mais pesados em altas temperaturas [9, 10]. Neste reator, o confinamento ocorre através de um campo magnético com simetria axial (toroidal), uma configuração típica dos Tokamaks. No entanto, reatores com campos magnéticos não simétricos são também utilizados, conhecidos como Stellarators [11, 12]. Tais artefatos conferem à física de plasmas um papel importante na busca de fontes alternativas de energia.

O estudo da propagação de ondas eletromagnéticas na frequência de rádio levou à descoberta da Ionosfera, camada natural de plasma que compõe a atmosfera terrestre, que reflete as ondas de rádio, podendo também absorvê-las. Tal investigação revelou as características dos diversos modos propagantes

¹Região da atmosfera permeada por partículas energéticas carregadas, que são aprisionadas pela magnetosfera terrestre. Acredita-se que parte destas partículas provém vento solar e uma outra parte dos raios cósmicos.

em plasmas, podendo ser longitudinais ou transversais às linhas de campo magnético.

Um dos temas recorrentes dentro do estudo de propagação de ondas em plasmas é o modelo de Appleton, uma formulação teórica criada por Edward Victor Appleton (1892-1965) para descrever a reflexão de ondas de rádio pela atmosfera [13, 14]. Anteriormente ao tratamento teórico, Appleton também realizou investigações experimentais sobre este fenômeno [15–17], onde estudava a intensidade dos sinais das ondas de rádio recebidas em Cambridge vindas da estação da B.B.C em Londres. Imerso neste contexto, juntamente com Miles Barnett (1901-1979), desenvolveram técnicas para estudar os sinais refletidos e estipular a altura de reflexão (altura da camada refletora).

A existência de uma camada refletora (camada ionizada) na atmosfera foi postulada em 1902 por Arthur Edwin Kennelly (1861-1939) e Oliver Heaviside (1850-1925) [18], quando estes tentavam explicar a comunicação via ondas de rádio a longa distâncias. No entanto, a comprovação experimental de tal camada só veio a ser realizada posteriormente por Appleton, em 1935, o que lhe valeu o Prêmio Nobel de Física em 1947. Em suas primeiras observações, Appleton e Barnett constataram que a intensidade dos sinais de rádio recebidos em Cambridge começavam a variar no início do período noturno, alterando-se ao longo de toda noite, ao passo que ao longo do dia mantinha-se sem variações. Propondo-se a verificar se tais ondas eram de fato refletidas, montaram um aparato experimental que variava continuamente o comprimento de onda das ondas transmitidas e estudaram a propagação a curtas e longas distâncias. Além disso, verificaram que a camada ionizada teria alturas diferentes ao longo do dia ou noite, o que foi mais tarde explicado pela atuação do vento solar ao atingir a atmosfera terrestre² [19].

Após os trabalhos de Appleton sobre a Ionosfera, ganhou força a ideia de um meio ionizado como um sistema coletivo, o que consolidou o conceito de plasma previamente enunciado por Langmuir. Atualmente, a propagação de ondas em plasmas é abordada através de uma teoria de perturbação linear, onde considera-se que os parâmetros do meio sofrem pequenas variações sob ação de ondas eletromagnéticas com pequenas amplitudes, cujas velocidades de fase são maiores comparadas à velocidade térmica das partículas - plasma frio. Além disso, tal abordagem permite considerar um plasma multicomponente, admitindo não apenas o movimento dos elétrons, mas também dos íons e de outras partículas eventualmente presentes do meio. Esta é uma extensão do modelo de Appleton, que é reproduzido quando considerada apenas a perturbação sobre elétrons. Dentre outros desenvolvimentos na física de plasmas, uma abordagem fluida para descrever a dinâmica de plasmas e sua interação com campos foi introduzida por Hannes Alfvén (1908-1995), sob uma perspectiva hidrodinâmica, o que deu início à magnetohidrodinâmica [21]. Nos anos 1940/1950 surgiu também a teoria cinética com A. Vlasov (1908-1975) e Lev Landau (1908-1968) [22, 23], uma abordagem microscópica onde a velocidade térmica das partículas ganha relevância, levando à verificação das instabilidades e do celebrado amortecimento de Landau (*damping*).

Nos últimos anos, a introdução de efeitos quirais estabeleceu um novo tipo de plasma, o chamado plasma quiral. Neste contexto, o comportamento coletivo do plasma, bem como a propagação de ondas através deste, sofrem modificações devido a efeitos ocasionados pela quiralidade das partículas, o que redefina sua dinâmica e propriedades eletromagnéticas. Um dos efeitos quirais mais conhecidos é o *chiral magnetic effect* - CME (efeito magnético quiral) [24], que consiste no surgimento de uma densidade de

²A história sobre E. V. Appleton e a descoberta da Ionosfera é rica em detalhes, que são comentados no trabalho de J. A. Ratcliff [20].

corrente anômala devido à assimetria entre o número de densidade de férmions de quiralidade esquerda e direita (*left-handed* e *right-handed*) na presença de um campo magnético. Tal fenômeno foi verificado experimentalmente em sistemas da matéria condensada, como em semimetais de Weyl e Dirac [25, 26]. Além disso, o CME também conduz a possíveis explicações para a amplificação de campos magnéticos primordiais e a geração de campos extremamente intensos em pulsares e magnetars [27–31], que podem estar associadas às instabilidades geradas pela condutividade magnética do meio (instabilidades quirais) [32–34], sendo estas algumas das principais repercussões deste fenômeno em plasmas quirais. Neste cenário, a magnetohidrodinâmica e teoria cinética de plasmas quirais foram formuladas [35–37], onde o CME e suas potenciais aplicações, desde a matéria condensada até a cosmologia, são também investigadas.

Efeitos quirais e suas manifestações macroscópicas podem ser também abordados através de relações constitutivas não usuais, que traduzem a resposta do meio à perturbação de campos eletromagnéticos. Um exemplo são as relações constitutivas bi-isotrópicas, que descrevem as propriedades quirais do meio através dos parâmetros magnetoelétricos. Um dos fenômenos decorrentes de tais relações é a refração negativa, caracterizada pelo surgimento de índices de refração negativos, o que confere ao meio um comportamento similar ao de metamateriais. Tal fenômeno também se manifesta em abordagens de plasmas quirais regidos por relações constitutivas bi-isotrópicas, onde índices de refração negativos ocorrem para determinadas regiões de frequência (como consequências da quiralidade do meio) [38, 39].

Outro fenômeno característico de meios quirais é a birrefringência circular (rotação óptica), que ocorre quando ondas circularmente polarizadas à esquerda (LCP) e à direita (RCP) propagam-se através do meio com velocidades de fase distintas, implicando na rotação do plano de polarização da luz [40]. Este fenômeno decorre da atividade óptica natural do material ou pode ser induzido pela ação de campos externos, como ocorre no efeito Faraday [41–43]. Tal efeito é medido em termos do ângulo de rotação por unidade de comprimento ou do poder rotação (PR) [44], que tem sido utilizado para investigar propriedades de novos materiais, tais como isolantes topológicos [45, 46] e compostos de grafeno [47].

A rotação de Faraday também se manifesta em plasmas magnetizados, o que leva tal efeito a exercer um papel importante no estudo da polarização de ondas eletromagnéticas vindas de galáxias e outros objetos distantes da Terra. De fato, o meio interestelar (meio que permeia o espaço entre os objetos astrofísicos em nossa galáxia) é considerado um plasma de baixíssima densidade, sobre o qual atuam as linhas do campo magnético galático, o que leva os sinais vindos de fontes galáticas ou extragaláticas a sofrerem birrefringência [231]. As propriedades dispersivas e ópticas do meio interestelar são mensuradas através de grandezas como o *dispersion measure* (DM) e *rotation measure* (RM), que são definidos em termos da densidade de elétrons e da magnitude do campo magnético galático. O RM desempenha um papel similar ao do poder de rotação dentro do contexto astrofísico, que serve de ferramenta para estimar a magnitude e direção dos campos magnéticos galáticos examinando a polarização da luz vinda de pulsares [49–51].

A proposta geral deste trabalho é analisar a propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas frios quirais, através de uma abordagem similar ao do modelo de Appleton. Neste contexto, é essencial o conhecimento do formalismo de Fourier, que facilita a determinação dos modos propagantes e das relações de dispersão. São tomadas também as equações de Maxwell em meios materiais, que juntamente com a força de Lorentz são pontos de partida para a obtenção dos índices de refração. Para realizar tal proposta,

serão consideradas a presença de correntes anômalas quirais, que são efetivamente introduzidas através de eletrodinâmicas modificadas, cujos termos adicionais incorporam o papel de tais correntes extras.

O áxion é atualmente um dos postulantes a compor a matéria escura [52], sendo representado por um campo pseudoescalar real a que se acopla ao campo eletromagnético através do termo $a(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$, modificando a eletrodinâmica de Maxwell. Sua origem se dá no contexto do *Quantum chromodynamics* (QCD), dentro da proposta de solução do problema CP-forte formulada por Roberto D. Peccei (1942-2020) e Helen R. Quinn (1943) [53], em 1977. Sua abundante produção no Universo primordial, fraca interação e neutralidade são algumas das características que o tornam um bom candidato à matéria escura [54–58]. Portanto, a possível existência destas partículas impulsiona desde então o estudo de seu acoplamento com outras partículas, incluindo o fóton (eletrodinâmica de áxions) [59, 60].

Recentemente, sistemas de plasma têm sido considerados em propostas experimentais para detecção de matéria escura na conversão plasmon-axion [61], plasmas criogênicos ajustáveis [62] e também em pesquisas experimentais para áxions e fótons escuros no Consórcio Axion Longitudinal Plasma Haloscope (ALPHA) [63]. No contexto da eletrodinâmica de áxions, propriedades ópticas foram discutidas para o sistema áxion-plasma [64]. Além disso, o acoplamento com ondas de Langmuir foi abordado no cenário dinâmico de áxions [65], onde uma nova excitação quasipartícula, chamada áxion-plasmon-poláriton, é identificada a partir da modificação da relação de dispersão das ondas de Langmuir. O acoplamento áxion-plasmon também foi investigado em sombras de buracos negros girantes [66].

De fato, os áxions são descritos por campos pseudoescalares dinâmicos. No entanto, campos não dinâmicos têm sido amplamente considerados na eletrodinâmica de áxions com o objetivo de investigar (de forma efetiva) efeitos quirais anômalos em matéria condensada [24, 67–70], tais como o CME e o efeito Hall anômalo (AHE). Nesse contexto, o áxion é assumido como um campo de fundo linearmente inhomogêneo, $\theta(x) = b_\mu x^\mu$, sendo b_μ um quadrvetor constante.

Uma outra teoria modificada também capaz de descrever fenômenos quirais é a eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) [71]. Esta teoria consiste na Lagrangiana de Maxwell suplementada por um termo CPT-ímpar, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu A^\nu F^{\alpha\beta}$, com estrutura 4-dimensional análoga ao termo de Chern-Simons [72–74], onde $(K_{AF})^\mu$ é um 4-vetor fixo que viola a simetria de Lorentz. Como bem sabemos, a simetria de Lorentz é um dos pilares da Física e do Modelo Padrão (MP). Foi introduzida por Einstein em 1905, através do Princípio da Relatividade, um dos postulados da Teoria da Relatividade Restrita (TRR): *As leis da Física são as mesmas em todos sistemas inerciais. Não existe nenhum sistema inercial preferencial*. No entanto, a possibilidade de quebra espontânea da simetria de Lorentz surgiu em estudos de Gravitação Quântica, no contexto das teorias de cordas [75–78]. Baseado nesta ideia geral, Alan Kostelecky e D. Colladay desenvolveram o Modelo Padrão Estendido (MPE) [79, 80], uma extensão do Modelo Padrão que reúne todas as possibilidades de quebra de simetria em todos os setores do MP, descritas através de acoplamentos com tensores de fundo fixos. Historicamente, a eletrodinâmica de MCFJ é o primeiro tratamento que levou em consideração a quebra de simetria de Lorentz na eletrodinâmica clássica.

Recentemente, Qiu, Cao e Huang [81] adotaram a eletrodinâmica de MCFJ como teoria efetiva para explicar fenômenos anômalos na matéria condensada, associando os termos adicionais advindos da teoria de CFJ a efeitos como o CME. Este trabalho conferiu aos parâmetros de violação uma realidade física na

descrição de fenômenos de transporte da física da matéria condensada.

Em nosso trabalho propomos o estudo de plasmas frios regidos por eletrodinâmicas quirais, que podem ser descritas pela eletrodinâmica de áxions, pela eletrodinâmica modificada de Carroll-Field-Jackiw (CFJ), ou por relações constitutivas bi-isotrópicas.

No Capítulo 2, são apresentados os aspectos básicos sobre a propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas frios. Em seguida, as eletrodinâmicas de áxion e de MCFJ são devidamente apresentadas e conectadas no Capítulo 3. O Capítulo 4 abordará o estudo de plasmas magnetizados adotando a eletrodinâmica de MCFJ dotada de um vetor de violação tipo-tempo, que descreve a condutividade magnética quiral, onde analisaremos as relações de dispersão modificadas e as influências do parâmetro de violação sobre o índice de refração e birrefringência. Os resultados deste capítulo estão publicados na Ref. [82]:

- Filipe S. Ribeiro, Pedro D. S. Silva, M. M. Ferreira Jr., Cold plasma modes in the chiral Maxwell-Carroll-Field-Jackiw electrodynamics, [Phys. Rev. D **107**, 096018 \(2023\)](#).

No Capítulo 5, investiga-se a propagação de ondas adotando a eletrodinâmica de MCFJ dotada de um vetor de violação tipo-espaco, que descreve a condutividade Hall anômala, um outro efeito anômalo quiral. Os resultados deste capítulo estão publicados na Ref. [83]:

- Filipe S. Ribeiro, Pedro D. S. Silva, M. M. Ferreira Jr., Anisotropic cold plasma modes in chiral vector Maxwell-Carroll-Field-Jackiw electrodynamics, [Phys. Rev. D **109**, 076003 \(2024\)](#).

No Capítulo 6, é analisada a propagação de ondas em um plasma frio quiral não magnetizado, considerando apenas o setor tipo-tempo de CFJ. Os resultados deste capítulo estão publicados na Ref. [84]:

- Filipe S. Ribeiro, Pedro D. S. Silva, M. M. Ferreira Jr., Optical effects in unmagnetized cold plasmas by a chiral axion factor, [Plasma Phys. Control. Fusion **67**, 015013 \(2024\)](#).

No Capítulo 7, é abordada a descrição de plasmas quirais através de relações constitutivas bi-isotrópicas. Os resultados deste capítulo estão publicados na Ref. [85]:

- F. S. Ribeiro, P. D. S. Silva, Rodolfo Casana, and M. M. Ferreira Jr, Hypothesis of a bi-isotropic-like plasma permeating the interstellar space, [Phys. Rev. D **112**, 096014 \(2025\)](#).

No Capítulo 8, é realizada uma aplicação dos resultados obtidos nos capítulos anteriores, abordando a propagação de sinais de rádio vindos de pulsares que viajam através do meio interestelar, que será considerado um plasma quiral dentro desta proposta. Restrições sobre os parâmetros quirais de CFJ e bi-isotrópicos são obtidos através de dados astrofísicos. Sinais de rádio vindos de *Fast radio burts* foram também considerados através implicando correções cosmológicas sobre as restrições dos parâmetros quirais. O conteúdo deste capítulo está publicado na Ref. [86], compondo também a versão aceita da Ref. [87]:

- F. S. Ribeiro, P. D. S. Silva, M. M. Ferreira Jr, Constraining CPT-odd electromagnetic chiral parameters with pulsar timing, [Phys. Rev. D **112**, 036002 \(2025\)](#).

- F. S. Ribeiro, P. D. S. Silva, R. Casana and M. M. Ferreira Jr., Tight bounds on the Maxwell-Carroll-Field-Jackiw parameters using Fast Radio Bursts, *Phys. Rev. D* (no prelo), [arXiv:2602.22996 \[astro-ph.HE\]](#).

Parte do capítulo 8 também compõe os resultados publicados na Ref. [85].

No Capítulo 9, investiga-se a propagação de ondas eletromagnética considerando os efeitos do parâmetro quiral tipo-tempo sobre um plasma frio em rotação. Neste contexto, analisamos e comparamos efeitos de birrefringência ocasionados pela rotação do meio e pelo parâmetro quiral.

No Capítulo 10, investiga-se a proposta de um plasma quiral como palco para conversão fóton-áxion, para o qual adotaremos a eletrodinâmica de MCFJ para descrever a corrente Hall anômala e a corrente magnética quiral. A mistura áxion-fóton é derivada neste contexto, bem como as probabilidades de conversão e suas respectivas condições de ressonância, para as quais analisaremos as implicações ocasionadas pelos parâmetros quirais e suas principais assinaturas.

Ao final, fazem-se considerações sobre os resultados obtidos no Capítulo 11.

PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM PLASMAS FRIOS

Neste capítulo, apresenta-se a abordagem básica para o estudo de propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas frios, tal qual a usada em livros tradicionais da literatura da física de plasmas. Inicialmente, comenta-se a definição de plasma frio e suas origens. Em seguida, discute-se a descrição fluida para as equações dinâmicas, bem como o procedimento de linearização destas, em conformidade com a definição de plasma frio. De posse de tais equações dinâmicas, investigam-se efeitos de absorção e propagação para plasmas não magnetizados. Plasmas magnetizados são considerados em seguida, quando também são discutidos os efeitos de birrefringência e dicroísmo.

Sumário

2.1	Plasmas frios	30
2.2	Descrição fluida e equações básicas	31
2.3	Plasmas não magnetizados	33
2.3.1	Modo longitudinal	35
2.3.2	Modo transversal	36
2.3.3	Propagação e absorção	37
2.4	Plasmas frios magnetizados	38
2.4.1	Propagação paralela ao campo magnético	41
2.4.1.1	Modo longitudinal	41
2.4.1.2	Modo transversal	41
2.4.2	Índices de refração $n_{\pm}$, propagação e absorção	42
2.4.3	Modos de propagação e polarizações	43
2.4.4	Propagação ortogonal ao campo magnético	46
2.4.4.1	Modo transversal ordinário	46
2.4.4.2	Modo extraordinário	46
2.4.5	Índice n_X	47
2.5	Modos de baixas frequências	48
2.6	Birrefringência	49
2.6.1	Efeito Faraday	50
2.6.2	Ângulo de rotação do plano de polarização e o poder de rotação	50

2.6.3	Birrefringência em plasma magnetizado	52
2.6.4	Coeficiente de dicroísmo	53
2.7	Oscilações de densidade	54

2.1 Plasmas frios

O estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas origina-se no início do século XX, quando alguns cientistas tentaram compreender detalhes sobre a real natureza da atmosfera terrestre. Na época, embora já muito utilizada, a comunicação via rádio a longas distâncias não era tão bem compreendida. Uma das primeiras hipóteses veio de Arthur Edwin Kennelly (1861-1939), que postulou em 1902 [18] que a atmosfera terrestre devia conter uma camada condutora, que refletia ondas de rádio como um espelho, o que justificaria transmissões entre cidades distantes. Posteriormente, Edward V. Appleton (1892-1965) [13, 14], realizou um estudo teórico de tais reflexões, considerando o que é chamado hoje de modelo de Appleton, uma modelagem para a Ionosfera como uma camada composta por elétrons e íons, que se moviam sob influência de um campo magnético externo.

Tal como a Ionosfera, um plasma frio é constituído por partículas que estão próximas ao equilíbrio, ou seja, com agitação térmica desprezível. Mais precisamente, no estudo da propagação de ondas em plasmas frios, é necessário que o deslocamento da partícula, devido a sua velocidade térmica V_{th} , ao longo de um período da onda em questão, seja menor que o comprimento de onda [2]:

$$\frac{2\pi}{\omega} V_{th} \ll \lambda, \quad (2.1.1)$$

ou simplesmente que

$$V_{th} \ll \frac{\omega}{k} = v_p, \quad (2.1.2)$$

onde v_p é a velocidade de fase da onda. Este é o limite para plasmas frios, que fornece a descrição exata para plasmas livres de colisões entre as partículas no limite em que $V_{th}/v_p \rightarrow 0$. Em uma descrição fluida para plasmas, que será tratada na seção seguinte, é necessário ressaltar que temos, em geral, dois tipos de fluidos, um composto por elétrons e outro por íons, de forma que ambos apresentam comportamentos distintos entre si devido às suas respectivas cargas. Neste sentido, cada espécie α de partículas possui sua velocidade $\mathbf{u}_\alpha$, massa m_α e carga e_α . Definimos, portanto, um conjunto de equações para descrição de um plasma composto por partículas de espécie α , que são as equações de continuidade e movimento,

juntamente com as equações de Maxwell:

$$\partial_t \rho_\alpha + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0; \quad (2.1.3)$$

$$m_\alpha \frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = e_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}); \quad (2.1.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}; \quad (2.1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{J}; \quad (2.1.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = q_\alpha / \epsilon_0; \quad (2.1.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1.8)$$

sendo n_α a densidade de partículas (número de partículas por unidade de volume). As equações acima serão as que utilizaremos para o estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas frios, e também para investigação das oscilações de densidades.

2.2 Descrição fluida e equações básicas

Por se tratar de um sistema de muitas partículas, uma abordagem hidrodinâmica se torna interessante para descrever a dinâmica de um meio plasmônico. Para implementar uma descrição fluida, devemos primeiro determinar a taxa de variação temporal para grandezas que variam com o tempo e com a posição em tal contexto. Considere a variação de determinada quantidade F , dependente do tempo e da posição:

$$dF(r, t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial r_i} dr_i, \quad (2.2.1)$$

sendo a variação no tempo dada por

$$\frac{d}{dt} F(r, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r_i} \frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F, \quad (2.2.2)$$

onde $\mathbf{u}(r, t)$ representa a velocidade de um elemento de fluido no ponto r e tempo t , ou seja, a velocidade de fluxo do fluido. Neste contexto, costuma-se denotar $d/dt \equiv D/Dt$. Assim, para uma quantidade F associada à dinâmica de um fluido, a derivada temporal é

$$\frac{DF}{Dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F. \quad (2.2.3)$$

A expressão acima é conhecida como *derivada substantiva* ou *derivada material*. Já o termo $(\mathbf{u} \cdot \nabla)$, é chamado de *derivada convectiva* e representa a variação da quantidade F originada pelo movimento do fluido. Neste cenário, escreve-se a segunda lei de Newton para um elemento de fluido de densidade de massa $\rho_M = n_\alpha m_\alpha$ e densidade de carga $\rho_e = n_\alpha q_\alpha$,

$$n_\alpha m_\alpha \frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}). \quad (2.2.4)$$

Usando (2.2.3), obtém-se

$$m_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\alpha} \right) = q_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B}). \quad (2.2.5)$$

O estudo de propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas é realizado a partir da equação de movimento acima, da qual é derivada o tensor de permissividade elétrica do meio. Observe que a presença do termo $\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\alpha}$ confere um caráter não linear à equação de movimento (2.2.5). No entanto, uma versão linearizada da Eq. (2.2.5) pode ser obtida assumindo que a onda eletromagnética tenha pequenas amplitudes, o que nos permite considerá-los como pequenas perturbações em primeira ordem. Com isto, consideremos que

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1, \quad (2.2.6)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \quad (2.2.7)$$

$$\mathbf{u}_{\alpha} = \mathbf{u}_{1\alpha}, \quad (2.2.8)$$

$$n_{\alpha} = n_{0\alpha} + n_{1\alpha}. \quad (2.2.9)$$

O sub-índice 0 representa a grandeza não perturbada, enquanto o sub-índice 1 denota o termo perturbativo em primeira ordem. Note que o sistema não possui inicialmente campo elétrico ($\mathbf{E}_0 = 0$), uma vez que esta é uma condição para as partículas estarem inicialmente em repouso. Logo, o campo $\mathbf{E}$ só possui componente "perturbada", ou seja, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$, e por conseguinte, $\mathbf{u}_{\alpha} = \mathbf{u}_{1\alpha}$. Com isto, a equação de movimento dada em (2.2.5) torna-se

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0), \quad (2.2.10)$$

onde foram desprezadas termos em segunda ordem nas quantidades perturbativas. Portanto, nota-se que a equação de movimento linearizada recai na força de Lorentz para uma partícula de carga q_{α} e massa m_{α} na presença de campo elétrico $\mathbf{E}_1$ e campo magnético $\mathbf{B}_0$. O estudo de ondas em plasmas a partir da força de Lorentz é também realizado no modelo de Appleton, que considera ondas eletromagnéticas em um plasma rarefeito, composto por partículas carregadas, cuja amplitude de movimento seja pequena de modo que efeitos de colisões sejam dispensados [88, 89]. Neste sentido, vemos uma compatibilidade entre a descrição fluida que originou (2.2.10) e o procedimento realizado por Appleton.

As equações de Maxwell e a equação de continuidade são também escritas em termos das quantidades perturbadas:

$$\frac{\partial n_{1\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{0\alpha} \mathbf{u}_1) = 0, \quad (2.2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = q_\alpha n_\alpha / \varepsilon_0, \quad (2.2.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0, \quad (2.2.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, \quad (2.2.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.2.15)$$

Como veremos na seções seguintes, Eq. (2.2.10) fornece a susceptibilidade e permissividade elétrica do plasma, que será obtida para o cenário magnetizado ($\mathbf{B}_0 \neq 0$) e não magnetizado ($\mathbf{B}_0 = 0$).

2.3 Plasmas não magnetizados

Inicialmente, vamos abordar a propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas frios dentro do contexto mais simples, quando o sistema é submetido apenas a presença dos campos da onda, com $\mathbf{B}_0 = 0$. Neste caso, considerando um sistema de partículas de carga q e massa m , a equação de movimento (2.2.10) será

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_1. \quad (2.3.1)$$

Neste cenário, adota-se solução do tipo onda-plana para o campo elétrico, $\mathbf{E}_1 \sim \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, que nos permitirá escrever

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.3.2)$$

sendo $d\mathbf{r}_1/dt = \mathbf{u}_1$. As partículas do meio oscilam na mesma frequência do campo elétrico, de modo que $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0(\omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, o que nos leva a

$$-\omega^2 \mathbf{r}_0(\omega) = \frac{q}{m} \tilde{\mathbf{E}}_0 \rightarrow \mathbf{r}_0(\omega) = -\frac{q}{m\omega^2} \tilde{\mathbf{E}}_0. \quad (2.3.3)$$

Multiplicando a expressão acima por $n_0 q / \varepsilon_0$, onde ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo, temos

$$\frac{n_0}{\varepsilon_0} q \mathbf{r}_0(\omega) = -\frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \tilde{\mathbf{E}}_0 \rightarrow \mathbf{P}(\omega) = -\varepsilon_0 \frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \mathbf{E}(\omega), \quad (2.3.4)$$

sendo $\mathbf{P}(\omega) = n_0 \mathbf{p}(\omega)$ a polarização do meio e $\mathbf{p}(\omega) = q \mathbf{r}(\omega)$ o momento de dipolo elétrico de uma partícula. Como bem sabemos, podemos relacionar a polarização do meio ao campo elétrico por meio da relação $\mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega)$, de modo que a susceptibilidade elétrica $\chi(\omega)$ possa ser expressa como

$$\chi(\omega) = -\frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}. \quad (2.3.5)$$

Podemos também escrever a permissividade do sistema, $\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0(1 + \chi)$:

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad (2.3.6)$$

onde

$$\omega_p^2 = n_0 q^2 / \varepsilon_0 m, \quad (2.3.7)$$

é a frequência de plasma. Esta é uma frequência característica do meio em questão, que mede a oscilação natural da densidade de partículas no plasma. Neste capítulo trabalharemos no Sistema Internacional de Unidades (SI). Para estudar a propagação de ondas eletromagnéticas em meios dispersivos, devemos lançar mão das equações de Maxwell em sua forma macroscópica [89]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = qn / \varepsilon_0, \quad (2.3.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.3.11)$$

juntamente com as relações constitutivas $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. Nas equações acima foram retirados os sub-índices 1, uma vez que já é claro que os campos lá escritos são de natureza perturbativa, podendo ser associados a uma dependência do tipo Fourier:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{D}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.3.12)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.3.13)$$

Com isso, as derivadas obedecem à seguinte prescrição operatorial:

$$\nabla \rightarrow i\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad (2.3.14)$$

de forma a reescrevermos as Eqs. (2.3.10) e (2.3.11) como

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}} + i\omega \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \quad (2.3.15)$$

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} - i\omega \tilde{\mu}(\omega) \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}. \quad (2.3.16)$$

Acima foram usadas as relações constitutivas no espaço de Fourier, $\mathbf{D}(\omega) = \tilde{\varepsilon}(\omega) \mathbf{E}(\omega)$ e $\mathbf{B}(\omega) = \mu(\omega) \mathbf{H}(\omega)$. Tomando o produto vetorial do vetor de onda $\mathbf{k}$ com a Eq. (2.3.16), temos

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} = \omega \tilde{\mu}(\omega) \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}, \quad (2.3.17)$$

que substituindo-a em (2.3.15), obtemos:

$$\frac{1}{\omega \tilde{\mu}(\omega)} \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} + \omega \tilde{\epsilon}(\omega) \tilde{\mathbf{E}} = 0. \quad (2.3.18)$$

Podemos também expressar a equação acima como

$$\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - \mathbf{k}^2 \tilde{\mathbf{E}} = -\omega^2 \mu_0 \tilde{\epsilon}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}, \quad (2.3.19)$$

onde consideramos $\tilde{\mu}(\omega) = \mu_0$. Uma forma alternativa de reescrevermos a equação acima é usando notação indicial, que resulta em

$$M_{ij} \tilde{E}^j = 0, \quad (2.3.20)$$

onde definimos a matriz M_{ij} em termos do índice de refração $\mathbf{n} = c\mathbf{k}/\omega$,

$$M_{ij} = \left[n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \frac{\epsilon_{ij}(\omega)}{\epsilon_0} \right]. \quad (2.3.21)$$

Vamos retornar a este resultado ocasionalmente durante o presente capítulo, uma vez que, a partir dele, serão derivados os modos de propagação suportados pelo sistema, bem como suas respectivas relações de dispersão, obtidas através das soluções não triviais da Eq.(2.3.21), para as quais vale $\det [M_{ij}] = 0$.

Tomando a permissividade $\tilde{\epsilon}(\omega)$, dada pela Eq. (2.3.6), escrevemos a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} n^2 - n_x^2 - (1 - \omega_p^2/\omega^2) & -n_x n_y & -n_x n_z \\ -n_x n_y & n^2 - n_y^2 - (1 - \omega_p^2/\omega^2) & -n_y n_z \\ -n_x n_z & -n_y n_z & n^2 - n_z^2 - (1 - \omega_p^2/\omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = 0. \quad (2.3.22)$$

A partir da equação acima podemos examinar os modos de propagação longitudinais e transversais do sistema, descritos a seguir.

2.3.1 Modo longitudinal

O modo longitudinal configura-se quando a polarização do campo $\tilde{\mathbf{E}}$ é paralela ao vetor de onda $\mathbf{k}$, ou seja, $\mathbf{k} \parallel \tilde{\mathbf{E}}$. Trata-se de uma configuração excepcional, que não ocorre para ondas E.M no vácuo, como bem conhecido. Deste modo, a onda possui campo elétrico alinhado à sua direção de propagação. Sem perda de generalidade, vamos adotar $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \hat{z}$ e $\tilde{\mathbf{E}} = E_z \hat{z}$, de forma que a Eq. (2.3.22), torna-se

$$\begin{bmatrix} n^2 - (1 - \omega_p^2/\omega^2) & 0 & 0 \\ 0 & n^2 - (1 - \omega_p^2/\omega^2) & 0 \\ 0 & 0 & - (1 - \omega_p^2/\omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = 0, \quad (2.3.23)$$

levando a

$$- (1 - \omega_p^2/\omega^2) \tilde{E}_z = 0. \quad (2.3.24)$$

Para que $\tilde{E}_z \neq 0$, devemos impor $(1 - \omega_p^2/\omega^2) = 0$, resultando em

$$1 - \omega_p^2/\omega^2 = 0 \rightarrow \omega^2 = \omega_p^2. \quad (2.3.25)$$

Isto mostra que plasmas não magnetizados permitem ondas longitudinais com frequência igual à ω_p (frequência de plasmas), ou seja, que vibre com a mesma frequência característica do meio. Além disso, este modo possui velocidade de grupo ($v_g = d\omega/dk$) nula, uma vez que a relação (2.3.25) não depende de k . Portanto, trata-se de um modo não propagante, conhecido como modo de oscilações de plasmas. Este modo coincide com as oscilações de densidade do meio, conhecidas como plasmons (oscilações de Langmuir), que serão tratadas no final deste capítulo.

2.3.2 Modo transversal

Investigaremos agora o modo transversal, caracterizado por apresentar campo $\mathbf{E}$ ortogonal à direção de propagação, ou seja, $\mathbf{k} \perp \tilde{\mathbf{E}}$. Assim, mantendo $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \hat{z}$, teremos $\tilde{\mathbf{E}} = (\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, 0)$. A Eq. 2.3.22 torna-se:

$$\begin{bmatrix} n^2 - (1 - \omega_p^2/\omega^2) & 0 & 0 \\ 0 & n^2 - (1 - \omega_p^2/\omega^2) & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \omega_p^2/\omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.3.26)$$

fornecendo

$$[n^2 - (1 - \omega_p^2/\omega^2)] \tilde{E}_x = 0, \quad (2.3.27)$$

$$[n^2 - (1 - \omega_p^2/\omega^2)] \tilde{E}_y = 0. \quad (2.3.28)$$

Uma solução não trivial requer $\tilde{\mathbf{E}} \neq 0$, o que nos leva à solução

$$n^2 = 1 - \omega_p^2/\omega^2. \quad (2.3.29)$$

Podemos reescrever a solução acima usando $n = ck/\omega$, que fica

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}. \quad (2.3.30)$$

Esta é a relação de dispersão para o modo de propagação transversal. Evidentemente, trata-se de um modo propagante, para o qual é possível determinar uma velocidade de grupo. Para isso, escrevemos (2.3.29) na forma

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2, \quad (2.3.31)$$

da qual, calculando $d\omega/dk$, é fácil obter

$$v_g = c \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}, \quad (2.3.32)$$

a velocidade de grupo para o modo transversal em plasma não magnetizado.

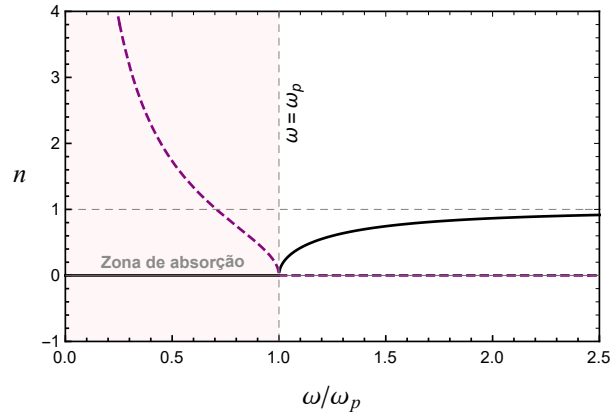


Figura 2.1: Índice de refração (2.3.29). A linha tracejada corresponde à parte imaginária de n , enquanto a linha sólida representa a parte real de n . A zona sombreada corresponde a uma zona de absorção para onda EM.

2.3.3 Propagação e absorção

Os fenômenos de propagação e absorção de ondas eletromagnéticas podem ocorrer em meios dispersivos. A propagação ocorre quando o índice de refração (ou vetor de onda) é real, ou seja, para intervalos de frequência em que $n(\omega) \in \mathbb{R}$, condição que garante um vetor de onda real, o que indica uma onda propagante (proporcional ao termo $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$). Por sua vez, a absorção ocorre quando o índice de refração torna-se complexo, $n(\omega) \in \mathbb{C}$, seja o meio dispersivo ou não dispersivo. Para n complexo corresponde um vetor de onda complexo, $k \in \mathbb{C}$, cuja parte imaginária gera uma onda evanescente (proporcional ao termo $e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$), representando a impossibilidade de propagação no meio.

Retornando ao índice de refração (2.3.29), pode-se observar que a frequência de plasma ω_p demarca a separação entre uma região em que $n \in \mathbb{R}$ e outra em que $n \in \mathbb{C}$, definindo intervalos de propagação ou absorção, vide Figura 2.1:

- (i) Para $\omega < \omega_p$ não ocorre propagação de ondas EM no plasma, pois temos $\text{Im}[n] \neq 0$, levando a $n \in \mathbb{C}$.
- (ii) Se $\omega > \omega_p$, temos $\text{Re}[n] \neq 0$ e $n \in \mathbb{R}$, ocorrendo propagação de ondas EM no plasma.
- (iii) Para o regime de frequências em que $\omega \gg \omega_p$, temos $n \rightarrow 1$, recaindo na relação de dispersão para o vácuo, $\omega = ck$. Neste regime, a onda se propaga como estivesse no vácuo, sem sofrer efeitos do meio, como a dispersão.

Algo interessante relacionado ao item (i), é que tal regime de frequências é extremamente útil para comunicações via rádio. Ondas de rádio podem variar de 10 Hz a 10^9 Hz, mas são frequentemente utilizadas em meios de comunicação na faixa de 10^6 Hz, como acontece nas ondas de rádio de frequência modulada (FM). Tais ondas, emitidas de um ponto aqui da Terra, incidem na atmosfera, onde a densidade de partículas é aproximadamente $n_0 \approx 10^{12} \text{ m}^{-3}$ ($\omega_p \approx 10^6$ Hz), sendo refletidas de volta à superfície, possibilitando que a onda emitida atinja receptores localizados em outras partes do globo [90].

2.4 Plasmas frios magnetizados

Nesta seção, investigaremos a propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas frios magnetizados. Para isso, tomamos a Eq. (2.2.10) considerando agora $\mathbf{B}_0 \neq 0$, o que nos permitirá obter a permissividade para um sistema na presença de *background* magnético. Adotaremos um campo magnético externo uniforme, disposto ao longo de um eixo - z : $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$, atuando num sistema de partículas de carga q e massa m . Neste cenário, cada partícula está submetida à seguinte força:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_1}{\partial t^2} = \frac{q}{m} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t} \times \mathbf{B}_0 \right), \quad (2.4.1)$$

onde $\mathbf{E}_1(t)$ é o campo elétrico perturbativo, pertencente à onda eletromagnética. Propondo transformadas de Fourier para a posição $\mathbf{r}_1(t)$ e para o campo $\mathbf{E}_1(t)$,

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{r}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{e} \quad \mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.4.2)$$

teremos para os termos de derivada temporal a prescrição

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1(t)}{dt^2} \rightarrow -\omega^2 \mathbf{r}_1(\omega), \quad \frac{d\mathbf{r}_1(t)}{dt} \rightarrow -i\omega \mathbf{r}_1(\omega), \quad (2.4.3)$$

que nos leva a

$$-\omega^2 \mathbf{r}_1(\omega) = \frac{q}{m} \mathbf{E}(\omega) - \frac{i\omega}{m} q \mathbf{r}_1(\omega) \times \mathbf{B}_0. \quad (2.4.4)$$

Multiplicando a equação acima pelo densidade de partículas n_0 , e também por q , obtém-se:

$$-\omega^2 n_0 q \mathbf{r}_1(\omega) = \frac{n_0 q^2}{m} \mathbf{E}(\omega) - \frac{i\omega}{m} n_0 q^2 \mathbf{r}_1(\omega) \times \mathbf{B}_0, \quad (2.4.5)$$

$$-\omega^2 \mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E}(\omega) - i \frac{q\omega}{m} \mathbf{P}(\omega) \times \mathbf{B}_0, \quad (2.4.6)$$

onde definimos, novamente, a frequência de plasma, $\omega_p^2 = n_0 q^2 / \varepsilon_0 m$, e a polarização do meio, $\mathbf{P}(\omega) = n_0 \mathbf{p}(\omega)$, onde $\mathbf{p} = q\mathbf{r}$ é momento de dipolo elétrico de apenas uma única partícula de carga q [88]. A Eq. (2.4.6) pode ser escrita na forma indicial,

$$-\omega^2 P^k = \varepsilon_0 \omega_p^2 E^k - i \frac{q\omega}{m} \epsilon_{kmn} P^m B_0^n, \quad (2.4.7)$$

onde foi ocultada a dependência de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{E}$ em termos de ω . Sabendo que o campo magnético está alinhado à direção z , este só contribui com índice 3 no último termo de (2.4.7), de forma que podemos escrever

um sistema de três equações, para as três componentes de $\mathbf{P}$, $k = 1, 2, 3$, ou seja:

$$-\omega^2 P^{(1)} = \varepsilon_0 \omega_p^2 E^{(1)} - i \frac{q\omega}{m} \epsilon_{123} P^{(2)} B_0^{(3)}, \quad (2.4.8)$$

$$-\omega^2 P^{(2)} = \varepsilon_0 \omega_p^2 E^{(2)} - i \frac{q\omega}{m} \epsilon_{213} P^{(1)} B_0^{(3)}, \quad (2.4.9)$$

$$-\omega^2 P^{(3)} = \varepsilon_0 \omega_p^2 E^{(3)} - i \frac{q\omega}{m} \epsilon_{3m3} P^{(m)} B_0^{(3)}, \quad (2.4.10)$$

que recaem em

$$-\omega^2 P_x = \varepsilon_0 \omega_p^2 E_x - i\omega\omega_c P_y, \quad (2.4.11)$$

$$-\omega^2 P_y = \varepsilon_0 \omega_p^2 E_y + i\omega\omega_c P_x, \quad (2.4.12)$$

$$-\omega^2 P_z = \varepsilon_0 \omega_p^2 E_z, \quad (2.4.13)$$

onde usamos as propriedades do símbolo de Levi-Civita e definimos a frequência de ciclotron:

$$\omega_c = qB_0/m. \quad (2.4.14)$$

Esta é frequência angular correspondente à órbita das partículas em torno das linhas do campo magnético B_0 . Tal frequência é um parâmetro inerente a sistemas magnetizados, uma vez que se anula quando $B_0 = 0$. A susceptibilidade elétrica do sistema pode ser obtida escrevendo cada componente da polarização em função das componentes do campo elétrico, uma vez que a relação isotrópica $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ pode ser generalizada na forma tensorial $P^i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E^j$, onde χ_{ij} representa o tensor de susceptibilidade [88, 89]. Tomando as Eqs. (2.4.11) e (2.4.12), podemos isolar a componente P_x em termos das componentes do campo elétrico:

$$P_x = -\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} E_x - i\varepsilon_0 \frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} E_y. \quad (2.4.15)$$

Substituindo este resultado na Eq. (2.4.12), obtemos uma relação similar para a componente P_y :

$$P_y = \varepsilon_0 \frac{i\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} E_x - \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} E_y. \quad (2.4.16)$$

Obtidas as expressões (2.4.13), (2.4.15) e (2.4.16), pode ser montada uma equação matricial para a polarização, $P^i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E^j$, sendo esta:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} -\frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & -i\frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ \frac{i\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & -\frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (2.4.17)$$

Observe que esta é uma expressão bem diferente daquela obtida para a polarização no sistema não magnetizado, dado na Eq. (2.3.4), apresentando-se agora numa estrutura matricial. Neste caso, matriz 3×3 na Eq. (2.4.17) representa a susceptibilidade elétrica, χ_{ij} , que pode ser usada para obter a permissividade

elétrica $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ do sistema. Para isso, utilizamos a relação para o deslocamento elétrico:

$$D^i = \varepsilon_0 E^i + \varepsilon_0 \chi_{ij} E^j = \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}) E^j, \quad (2.4.18)$$

$$D^i = \tilde{\varepsilon}_{ij} E^j, \quad (2.4.19)$$

onde a permissividade é dada por

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}). \quad (2.4.20)$$

A partir de (2.4.17), podemos escrever a forma explícita de $\tilde{\varepsilon}_{ij}$:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & -i \frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ \frac{i \omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix}. \quad (2.4.21)$$

Este é o chamado tensor de permissividade [2, 88], que contém as principais propriedades de um plasma magnetizado, revelando como o meio reage à presença dos campos elétrico e magnético. Podemos observar que a presença do campo magnético $\mathbf{B}_0$ estabelece anisotropia no sistema, o que se manifesta através da diferença do setor 2×2 (da matriz (2.4.21)), que isola as componentes x e y (ortogonais ao campo magnético) em relação ao elemento $\tilde{\varepsilon}_{33}$. Note que fazendo $\mathbf{B}_0 = 0$, teríamos $\omega_c = 0$, e a Eq. (2.4.21) apresentaria componentes não nulas apenas na diagonal principal,

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix}, \quad (2.4.22)$$

uma forma de tensor de permissividade típica de meios isotrópicos. O tensor de permissividade (2.4.21) constitui uma ferramenta fundamental no estudo de propagação de ondas eletromagnéticas em qualquer meio material (eletrodinâmica de meios contínuos), assim como em plasmas diversos. A permissividade (2.4.21) é própria para plasmas na presença de campo magnético (plasmas magnetizados), sendo o ponto de partida para discussão das propriedades destes sistemas.

Como já calculado na Eq. (2.3.20), as equações de Maxwell fornecem uma equação de onda para o campo elétrico na forma tensorial, reescrita abaixo:

$$M_{ij} E^j = 0, \quad (2.4.23)$$

onde

$$M_{ij} = n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \frac{\varepsilon_{ij}(\omega)}{\varepsilon_0}. \quad (2.4.24)$$

Tomando a permissividade (2.4.21), a forma explícita da equação matricial acima é

$$\begin{bmatrix} n^2 - n_x^2 - S & iD - n_x n_y & -n_x n_z \\ -iD - n_x n_y & n^2 - n_y^2 - S & -n_y n_z \\ -n_x n_z & -n_y n_z & n^2 - n_z^2 - P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = 0, \quad (2.4.25)$$

na qual definimos os parâmetros

$$S = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)}, \quad P = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \text{e} \quad D = -\frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega (\omega^2 - \omega_c^2)}. \quad (2.4.26)$$

Podemos investigar separadamente os modos de propagação para ondas que se propagam paralela e ortogonalmente ao campo magnético externo, as chamadas *configuração de Faraday* e *configuração Voigt*, respectivamente.

2.4.1 Propagação paralela ao campo magnético

Iniciamos pela investigação dos modos de propagação do sistema na configuração de Faraday, considerando a propagação da onda ao longo do eixo- z , no qual está disposto o campo magnético externo. Para isso, adotamos $\mathbf{n} = n\hat{z}$ na Eq. (2.4.25), que torna-se

$$\begin{bmatrix} n^2 - S & iD & 0 \\ -iD & n^2 - S & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = 0. \quad (2.4.27)$$

2.4.1.1 Modo longitudinal

Como já dito, no modo longitudinal a onda deve propagar-se na mesma direção do campo elétrico, ou seja, $\mathbf{k} \parallel \tilde{\mathbf{E}}$. Com isso, vamos adotar $\tilde{\mathbf{E}} = (0, 0, \tilde{E}_z)$, de forma que a Eq. (2.4.27), fornece

$$-P\tilde{E}_z = 0. \quad (2.4.28)$$

Para que $\tilde{E}_z \neq 0$, devemos impor $P = 0$, resultando, pela definição (2.4.26), em

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0 \rightarrow \omega^2 = \omega_p^2. \quad (2.4.29)$$

Isto mostra que o modo longitudinal em um plasma magnetizado vibra na mesma frequência de um plasma não magnetizado.

2.4.1.2 Modo transversal

O modo transversal é, por sua vez, caracterizado por apresentar campo $\mathbf{E}$ ortogonal à direção de propagação, ou seja, $\mathbf{k} \perp \tilde{\mathbf{E}}$. Deste modo, o campo elétrico deve se dispor na forma $\tilde{\mathbf{E}} = (\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, 0)$ na Eq. (2.4.27), que reduz-se a um problema matricial 2×2 ,

$$\begin{bmatrix} n^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & \frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \\ -\frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & n^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix} = 0, \quad (2.4.30)$$

ou simplesmente,

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0. \quad (2.4.31)$$

A matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ é a chamada *matriz de dispersão* [2], que contém as informações necessárias para encontrar as relações de dispersão para os modos transversais da teoria. A Eq. (2.4.30) possui solução não trivial quando o determinante da matriz de dispersão se anula: $\det \tilde{\mathbf{A}} = 0$. Com isso, obtemos:

$$\left\{ n^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} \right\}^2 - \left\{ \frac{\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \right\}^2 = 0, \quad (2.4.32)$$

$$n^2 = 1 - \left[\frac{(\omega \mp \omega_c)\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \right], \quad (2.4.33)$$

que fornece duas expressões para o índice de refração:

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \quad \text{ou} \quad n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}. \quad (2.4.34)$$

As expressões acima podem ser agrupadas em apenas uma:

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}. \quad (2.4.35)$$

Veremos a seguir que cada expressão para o índice de refração (n_+ e n_-) está associada a um modo de propagação transversal de polarização distinta.

2.4.2 Índices de refração $n_{\pm}$, propagação e absorção

Nesta seção, vamos destacar os intervalos em que ocorrem propagação e absorção para cada um dos índices obtidos anteriormente. Observe que a Eq. (2.4.35) na verdade fornece quatro soluções para o índice de refração n . No entanto, neste momento, levaremos em consideração apenas índices de refração positivos, uma vez que seus pares negativos correspondem as suas soluções espelhadas ($n \rightarrow -n$). Além disso, índices de refração negativos, ou que apresentem intervalos de negatividade, estão conectados com os chamados metamateriais, que não abordaremos neste trabalho, embora sejam oportunamente mencionados mais adiante. Portanto, quando nos referirmos a n_+ e n_- , estaremos indicando apenas suas soluções positivas, o que significa ter

$$n_{\pm} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}}, \quad (2.4.36)$$

como uma função real.

Como já comentado, em meios dispersivos podem ocorrer os efeitos de propagação e absorção, observados quando $n \in \mathbb{R}$ ou $n \in \mathbb{C}$, respectivamente. Logo, ocorre propagação para um plasma magnetizado nos intervalos de frequência em que $n_{\pm}^2 > 0$, ao passo que ocorre absorção para intervalos onde $n_{\pm}^2 < 0$.

O comportamento dos índices quadráticos n_+^2 e n_-^2 , dados na Eq. (2.4.35), está ilustrado nos gráficos da Figura 2.2, onde também é mostrado o comportamento da frequência ω em função do vetor de onda k . Os índices n_+^2 e n_-^2 possuem raízes reais diferentes, ou seja, tocam no eixo - ω em posições distintas. As raízes positivas relativas a n_+ e n_- estão apresentadas abaixo:

$$\omega_+ = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} - \omega_c \right), \quad (2.4.37)$$

$$\omega_- = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} + \omega_c \right), \quad (2.4.38)$$

sendo chamadas de frequências de corte (*cutoff frequencies*), pois estabelecem frequências limítrofes para os efeitos de absorção e propagação. Analisando a expressão (2.4.35), o comportamento do plasma pode ser descrito de acordo com os intervalos seguintes:

- (i) $0 < \omega < \omega_+$: ocorre absorção para o modo associado ao índice de refração n_+ , uma vez que $n_+^2 < 0$ e $n_+ \in \mathbb{C}$ neste intervalo. O modo relacionado a n_- se propaga neste intervalo.
- (ii) $0 < \omega < \omega_c$: propaga a onda associada ao índice de refração n_- , já que temos $n_-^2 > 0$.
- (iii) $\omega_c < \omega < \omega_-$: temos absorção para o modo correspondente a n_- , pois temos $n_-^2 < 0$.
- (iv) $\omega > \omega_-$: propagam as ondas associadas aos índices n_+ e n_- , tendendo a 1 ($n_{\pm}^2 \rightarrow 1$) no limite em que $\omega \rightarrow \infty$.

Na Figura 2.2b as curvas tracejadas (azul) estão associadas ao índice de refração n_- , enquanto a linha sólida (vermelha) está associada ao índice de refração n_+ . Considerando $\omega_c = \omega_p$, a ressonância de ciclotron ($\omega = \omega_c$) também ocorre para a frequência de plasmas ω_p .

Embora seja a análise acima comum na literatura de física de plasmas, é possível também investigar os índices não quadráticos através do comportamento de suas partes reais e imaginárias. Neste caso, a absorção ocorre quando $\text{Im}[n] \neq 0$, enquanto a propagação ocorre para $\text{Im}[n] = 0$ e $\text{Re}[n] \neq 0$. O comportamento das partes real e imaginária de cada um dos índices n_+ e n_- está ilustrado na Fig. 2.3, representado pelas curvas sólidas e tracejadas, respectivamente. Observe que as mesmas observações listadas acima estão de acordo com os intervalos destacados nas Figs. 2.3, onde as regiões destacadas representam as zonas de absorção para cada índice, demarcando os intervalos em que $\text{Im}[n] \neq 0$.

2.4.3 Modos de propagação e polarizações

Nesta seção determinaremos os modos de propagação eletromagnéticos permitidos pelo sistema. Para isso, retornamos à equação matricial (2.4.30), onde o índice de refração assume dois valores possíveis, dados pela Eq. (2.4.35). Observe que esta é uma equação compatível com autovalores nulos. Logo,

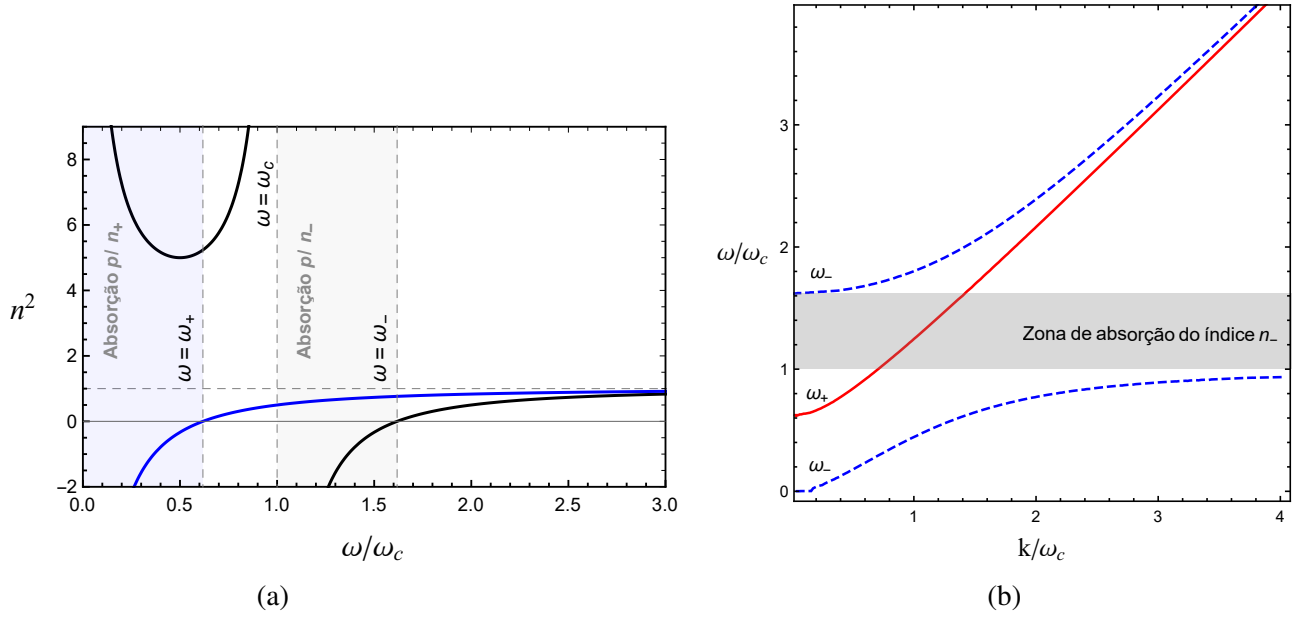


Figura 2.2: (a) Gráficos dos índices de refração n_+^2 e n_-^2 , dados em (2.4.35). (b) Gráfico das relações de dispersão ($\omega \times k$) associadas aos índices n_+ (linha sólida vermelha) e n_- (linha tracejada azul). Aqui, usamos $\omega = \omega_p$.

os autoestados que nos interessam são aqueles associados a autovalores nulos. Iniciamos substituindo a expressão para n_+ em (2.4.30),

$$\begin{bmatrix} n_+^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & \frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \\ -\frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & n_+^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix} = 0, \quad (2.4.39)$$

que fornece os autovalores com seus respectivos autovetores:

$$\lambda_{(1+)} = -\frac{2\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \rightarrow \tilde{E}_{(1+)} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.4.40)$$

$$\lambda_{(2+)} = 0 \rightarrow \tilde{E}_{(2+)} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4.41)$$

Deste modo, nota-se que $\tilde{E}_{(2+)}$ é o autovetor associado ao autovalor nulo, $\lambda_{(2+)}$, sendo este o campo elétrico que se propaga com velocidade de fase $u_{ph} = c/n_+$. O campo elétrico $\tilde{E}_{(2+)}$ pode ser escrito como

$$\tilde{E}_{(2+)} = -i \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad (2.4.42)$$

e representa uma onda circularmente polarizada à esquerda, ou, do inglês, *left-circularly polarized* (LCP).

Substituindo a expressão para n_- na Eq. (2.4.30), temos a equação matricial

$$\begin{bmatrix} n_-^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & \frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \\ -\frac{i\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & n_-^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix} = 0, \quad (2.4.43)$$

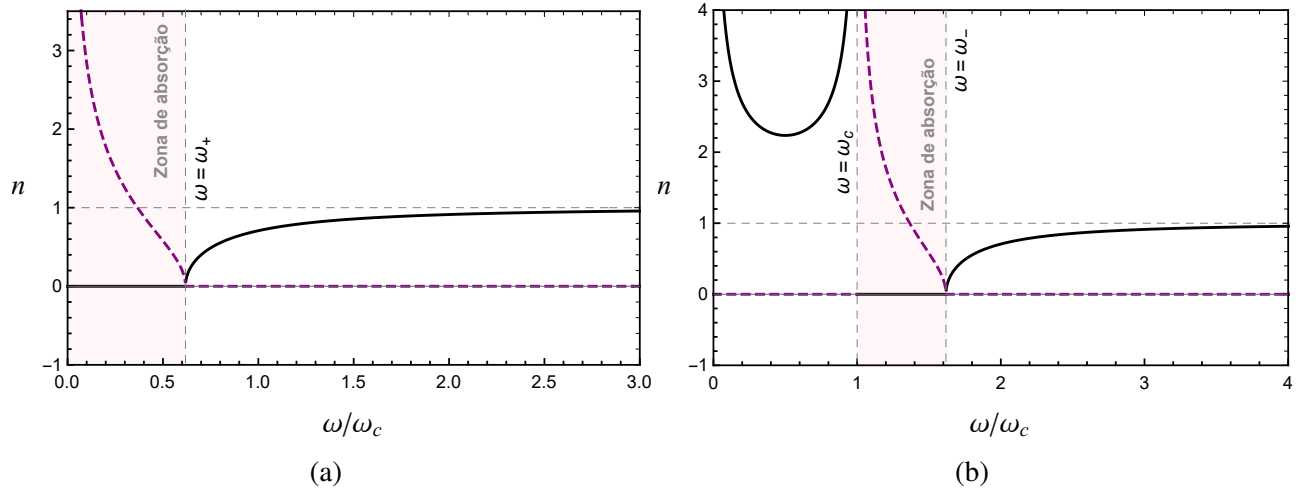


Figura 2.3: Gráficos dos índices de refração n_+ (a) e n_- (b). A linha tracejada corresponde à parte imaginária de $n_{\pm}$, enquanto a linha sólida representa a parte real de $n_{\pm}$. As regiões sombreadas correspondem a zonas de absorção para modo associado. Aqui, usamos $\omega = \omega_p$.

cujos autovalores e autovetores são:

$$\lambda_{(1)} = \frac{2\omega_c\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \rightarrow \tilde{E}_{(1-)} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.4.44)$$

$$\lambda_{(2-)} = 0 \rightarrow \tilde{E}_{(2-)} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4.45)$$

Com isso, vemos que o autovetor $\tilde{E}_{(2-)}$, associado ao autovalor nulo, é quem representa o campo elétrico da onda propagante, no caso, uma onda circularmente polarizada à direita, ou do inglês *right-circularly polarized* (RCP). Portanto, obtemos dois modos propagantes correspondentes a ondas circularmente polarizadas à direita ($E_y = -iE_x$) e à esquerda ($E_y = iE_x$), RCP e LCP, respectivamente [2, 88]. Abaixo é apresentada a polarização relacionada a cada modo transversal encontrado:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{LCP} = \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \text{ associado à } n_+, \quad (2.4.46)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{RCP} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \text{ associado à } n_-. \quad (2.4.47)$$

Algo muito interessante é que neste contexto é possível ocorrer a propagação simultânea dos dois modos (associados aos índices de refração n_+ e n_-). Para isso, é necessário que $n_-^2 > 0$ e $n_+^2 > 0$ para um mesmo intervalo de frequência, fato que ocorre quando $\omega > \omega_-$ e para o intervalo $\omega_+ < \omega < \omega_c$. Note que a frequência de corte ω_+ pode ser maior que a frequência de ciclotron ω_c , como mostrado na Figura 2.2b. Quando isto ocorre, só ocorre propagação de ambos os modos no intervalo $\omega > \omega_-$.

A sobreposição destes dois modos gera uma onda linearmente polarizada. O fato de termos $n_- \neq n_+$ gera uma diferença de velocidade de fase que implica na rotação do vetor campo elétrico da onda

propagante (rotação da direção de polarização), o fenômeno conhecido por birrefringência, que será melhor discutido mais adiante.

2.4.4 Propagação ortogonal ao campo magnético

Investigaremos agora a propagação de ondas ortogonais à direção do campo magnético (configuração Voigt). Para isso, reescrevemos a Eq. (2.4.25) considerando as componentes transversais do índice de refração (ou vetor de onda), tomando $\mathbf{n} = (n_x, n_y, 0)$:

$$\begin{bmatrix} n^2 - n_x^2 - S & iD - n_x n_y & 0 \\ -iD - n_x n_y & n^2 - n_y^2 - S & 0 \\ 0 & 0 & n^2 - P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta E_x \\ \delta E_y \\ \delta E_z \end{bmatrix} = 0. \quad (2.4.48)$$

Adotando uma parametrização polar no plano (x, y) na forma $\mathbf{n} = n (\cos \phi, \sin \phi, 0)$, teremos

$$\begin{bmatrix} n^2 - n^2 \cos^2 \phi - S & iD - n^2 \sin \phi \cos \phi & 0 \\ -iD - n^2 \sin \phi \cos \phi & n^2 - n^2 \sin^2 \phi - S & 0 \\ 0 & 0 & n^2 - P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta E_x \\ \delta E_y \\ \delta E_z \end{bmatrix} = 0, \quad (2.4.49)$$

cujo determinante nulo fornece a seguinte relação de dispersão:

$$-(n^2 - P) (D^2 + S (n^2 - S)) = 0, \quad (2.4.50)$$

que independe do ângulo ϕ . De posse da relação de dispersão, investigamos a seguir os modos de propagação dela derivados.

2.4.4.1 Modo transversal ordinário

Dentro da configuração Voigt, o campo elétrico associado à propagação transversal do campo elétrico é $\delta \mathbf{E} = (0, 0, \delta E_z)$, que fornece o índice

$$n^2 = P \quad \rightarrow \quad n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (2.4.51)$$

Note que este é o mesmo índice de refração obtido no estudo de propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas não magnetizados, dado em (2.3.29), cujo comportamento está ilustrado na Fig. 2.1. Assim, observa-se que o modo transversal não sofre influência do campo magnético externo quando este está alinhado ortogonalmente à direção de propagação, sendo absorvido para $\omega < \omega_p$, enquanto propaga-se no regime em que $\omega > \omega_p$. Tal modo é comumente chamado na literatura como *ordinário*.

2.4.4.2 Modo extraordinário

Observe que foram consideradas duas direções de propagação ortogonais ao campo magnético externo, representadas por $\mathbf{n} = (n_x, n_y, 0)$. Com isso, ao invés de analisarmos configurações de campo

elétrico longitudinais à cada uma destas direções, adotaremos o procedimento usual da literatura [2], explorando ambas as direções mutuamente, com $\delta\mathbf{E} = (\delta E_x, \delta E_y, 0)$, obtendo o chamado modo de propagação *extraordinário*.

Da relação de dispersão (2.4.50), obtém-se o índice

$$n_X^2 = \frac{S^2 - D^2}{S}, \quad (2.4.52)$$

que, juntamente com Eq. (2.4.49), verifica-se estar relacionado ao seguinte modo de propagação:

$$\mathbf{E}_X = iC \begin{bmatrix} S/D \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4.53)$$

sendo C uma constante de normalização a ser determinada. Observe que o modo de propagação extraordinário é elipticamente polarizado, uma vez que o caso $S = D$ implicaria em índice de refração nulo [vide Eq. (2.4.52)], impedindo a possibilidade de modo propagante circularmente polarizado em (2.4.53).

2.4.5 Índice n_X

O índice de refração n_X pode ser escrito explicitamente em termos da frequência ω tomando as relações para S e D , dadas em (2.4.26):

$$S = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)}, \quad D = -\frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega (\omega^2 - \omega_c^2)}. \quad (2.4.54)$$

Assim, escreve-se

$$n_X^2 = \frac{\omega^4 - \omega^2 (2\omega_p^2 + \omega_c^2) + \omega_p^4}{\omega^4 - \omega^2 (\omega_p^2 + \omega_c^2)}. \quad (2.4.55)$$

Note que, a partir do denominador da expressão acima, podemos inferir uma frequência de ressonância para a qual $n_X \rightarrow \infty$, sendo esta

$$\omega_{cp} = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_p^2}, \quad (2.4.56)$$

que depende diretamente da soma das frequências de plasma e ciclotron. Além disso, o numerador em (2.4.55) fornece duas raízes para índice de refração, que coincidem com aquelas obtidas para os índices de refração associados à propagação paralela ao campo magnético, $\omega_{\pm}$, dadas em (2.4.38). O comportamento do índice de refração n_X em função da frequência ω está ilustrado na Fig. (2.4), a partir da qual destacamos:

- (i) Para $0 < \omega < \omega_+$, n_X é imaginário, correspondendo a uma zona de absorção do modo associado.
- (ii) Para $\omega_+ < \omega < \omega_{cp}$, ocorre $\text{Re}[n_X] > 0$ e $\text{Im}[n_X] = 0$, sendo esta uma zona de propagação.
- (iii) Para $\omega \rightarrow \omega_{cp}$, ocorre $n_X \rightarrow +\infty$, uma ressonância. Em seguida, para $\omega_{cp} < \omega < \omega_-$, $\text{Re}[n_X] = 0$ e $\text{Im}[n_X] \neq 0$, e temos uma zona de absorção para o modo extraordinário.

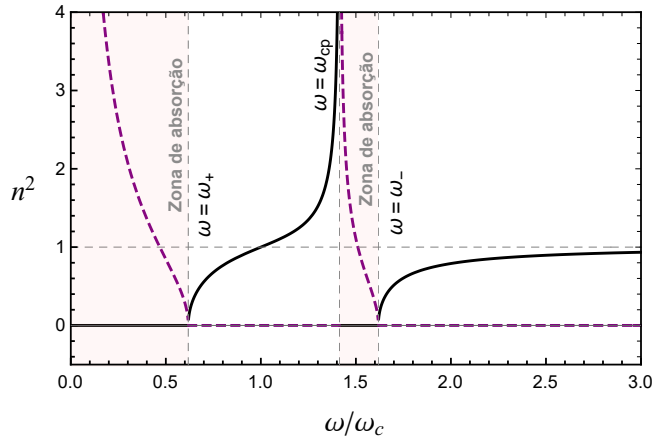


Figura 2.4: Índice de refração (2.4.55). A linha tracejada corresponde à parte imaginária de n_x , enquanto a linha sólida representa a parte real de n_x . As zonas sombreadas correspondem a zonas de absorção para o modo extraordinário.

- (iv) Para $\omega > \omega_-$, o índice de refração n_x é sempre positivo e real, correspondendo a uma zona de propagação.

2.5 Modos de baixas frequências

Algo de grande interesse na física de plasmas, assim como na física do estado sólido, é a possível existência de modos de baixas frequências, chamados hélicons. Para investigar tais modos, considera-se o regime em que

$$\omega \ll \omega_p, \quad \omega_c \ll \omega_p, \quad \omega \ll \omega_c. \quad (2.5.1)$$

Para implementar tal regime, os índices em (2.4.35) podem ser reescritos na forma

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 (1 \pm 1/x)}, \quad (2.5.2)$$

onde $x = \omega/\omega_c \ll 1$, o que permite reescrevê-los na seguinte forma aproximada:

$$n_{\pm}^2 \approx 1 \mp \frac{\omega_p^2}{\omega^2} x \quad \rightarrow \quad n_{\pm}^2 \approx 1 \mp \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega_c}. \quad (2.5.3)$$

Levanto em conta que $\omega \ll \omega_p$, os índices acima tornam-se

$$n_+ = i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c}} \quad \text{e} \quad n_- = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c}}, \quad (2.5.4)$$

revelando que o índice n_+ , associado à onda LCP não se propaga no regime em questão, uma vez que é puramente imaginário. Por outro lado, o índice de refração n_- , associado à onda RCP que propaga no

plasma magnetizado, fornece um modo hélicon, descrito por

$$n_- = \omega_p \sqrt{\frac{1}{\omega \omega_c}}. \quad (2.5.5)$$

No contexto da física de plasmas, o hélicon RCP é conhecido como onda *whistler*, e se realiza muito comumente na atmosfera terrestre: quando um relâmpago ocorre no hemisfério sul entre as nuvens e a Ionosfera, desencadeia-se um pulso de onda (pacote de onda) que se dispersa em ondas de baixa frequência (entre 100 Hz e 10 kHz), propagando ao longo das linhas do campo magnético terrestre, de acordo com o índice de refração (2.5.5). Ao atingir o hemisfério norte, a onda é captada na faixa de frequência audível reproduzindo um som (ruído) que decai lentamente, como um “assobio”, fato que explica o nome “*whistler wave*” para tal fenômeno [vide Ref. [3] (Capítulo 9) para mais detalhes].

2.6 Birrefringência

A birrefringência é um fenômeno óptico em que um material apresenta índices de refração distintos relacionados à da direção de propagação da luz no meio. Tal efeito manifesta-se de duas maneiras: como dupla refração, ou como birrefringência circular. A dupla refração ocorre quando a luz incidente se divide em dois raios refratados em direções diferentes. Um dos raios obedece à Lei de Snell, enquanto o outro surge devido a um segundo valor do índice de refração. Por sua vez, a birrefringência circular ocorre quando dois modos (geralmente de polarizações circulares opostas) propagam-se na mesma direção e com velocidades de fase distintas, associadas a diferentes índices de refração. Neste caso, a defasagem entre os modos resulta em uma rotação do campo elétrico, ou seja, da polarização da luz.

Em cristais ópticos a birrefringência se manifesta de acordo com o ângulo de incidência em relação ao eixo óptico, como mostrado na Figura (2.5): No caso (a) a luz incide obliquamente em relação ao eixo óptico, ocorrendo dupla refração, com raios refratados em direções diferentes. No caso (b) a luz que incide ortogonalmente ao eixo óptico, ocorrendo birrefringência circular, e os raios refratados na mesma direção estão defasados. Para incidência paralela ao eixo óptico, como no caso (c), não ocorre birrefringência e a luz é refratada como em um cristal isotrópico. Para um tratamento melhor sobre birrefringência vide a referência [40].

Tal fenômeno pode manifestar-se dentro do contexto de plasmas magnetizados. Como visto nas seções anteriores, plasmas magnetizados apresentam índices de refração diferentes para ondas que se propagam numa mesma direção - z , sendo associados a modos de polarização circulares, RCP e LCP. Neste caso, tais modos propagam-se com velocidades de fase distintas:

$$u_{ph\pm} = \frac{c}{n_{\pm}}. \quad (2.6.1)$$

Neste cenário a birrefringência ocasiona a rotação do plano de polarização: quando uma onda linearmente polarizada se propaga dentro de um material birrefringente, emerge do meio também como uma onda linearmente polarizada, porém com campo elétrico rotacionado (no plano de polarização). Isso ocorre pelo fato da onda inicial ser decomposta em duas ondas circularmente polarizadas que viajam com

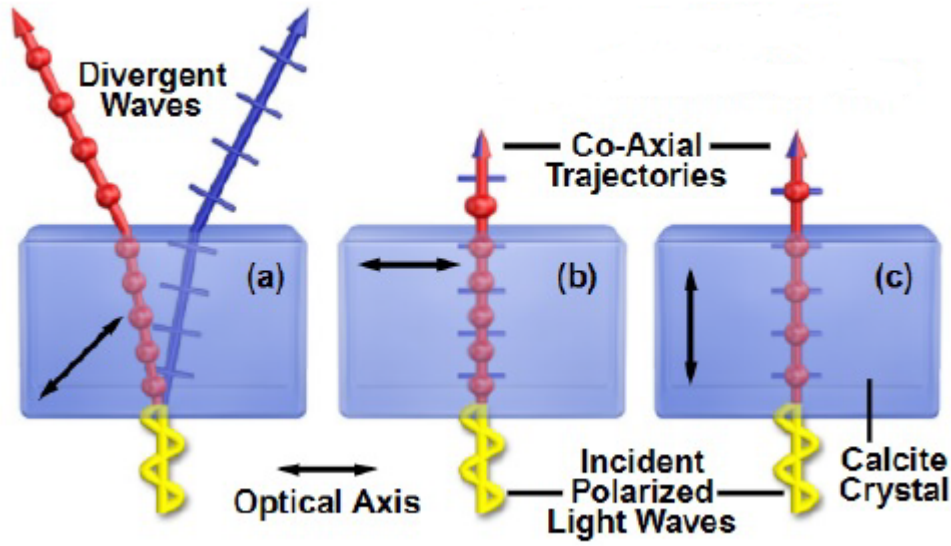


Figura 2.5: Birrefringência em cristais ópticos.

velocidade de fase diferentes. Tal diferença de fase é responsável por rotacionar o plano de polarização, como mostraremos a seguir.

2.6.1 Efeito Faraday

Dentre as várias formas de gerar o fenômeno de birrefringência, existe aquela ocasionada pela presença de campo magnético externo. Tal fenômeno foi observado por Michael Faraday em 1845, um dos mais importantes cientistas do século XIX, quando este percebeu que o plano de polarização da luz girava ao passar por um material (vidro) submetido a influência de um campo magnético de um eletroímã. Esta foi a primeira vez em que se observou uma ligação entre a luz e o magnetismo. Tal fenômeno ficou conhecido como rotação de Faraday ou efeito Faraday. Neste caso, a birrefringência ocorre graças à presença de campo magnético B_0 externo, que gera velocidades de fase distintas para os modos propagantes da luz, tal como ocorre no plasma magnetizado. Observe que, se fizermos $B_0 = 0$, teremos $\omega_c = 0$ na Eq. (2.4.35), e por consequência:

$$n_+ = n_-, \quad (2.6.2)$$

levando à igualdade entre as velocidades de fase dadas na Eq. (2.6.1). Portanto, neste caso, só ocorre birrefringência ou rotação do plano de polarização, quando o meio é submetido a um campo magnético externo.

2.6.2 Ângulo de rotação do plano de polarização e o poder de rotação

Nesta seção, vamos demonstrar que a diferença entre os índices de refração da Eq. (2.4.35), é responsável por rotacionar o plano de polarização da onda resultante que emerge do meio. Para ilustrar tal

rotação, vamos considerar uma onda linearmente polarizada, que se propaga uma distância L ao longo do plasma. Inicialmente, pode-se decompor sua orientação de polarização em duas ondas circularmente polarizadas (à direita e à esquerda), não defasadas, como mostrado a seguir:

$$\mathbf{E}_{\text{Inicial}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}}_{RCP} + \underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}}_{LCP}. \quad (2.6.3)$$

Após a propagação ao longo de uma distância L , durante a qual as ondas RCP e LCP passam a ter vetores de onda distintos (k_+ e k_-), o campo elétrico resultante é expresso como

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{Final}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{ik_-L} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{ik_+L}, \quad (2.6.4)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{Final}} = \frac{1}{2} e^{i(k_++k_-)L/2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i(k_- - k_+)L/2} + \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-i(k_- - k_+)L/2} \right\}, \quad (2.6.5)$$

podendo ser reescrito forma

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{Final}} = \frac{1}{2} e^{i\psi} \left\{ \begin{bmatrix} e^{i\theta} \\ -ie^{i\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-i\theta} \\ ie^{-i\theta} \end{bmatrix} \right\}, \quad (2.6.6)$$

onde foram usadas as seguintes definições:

$$\psi = \frac{L}{2} (k_+ + k_-) \text{ e } \theta = \frac{L}{2} (k_- - k_+). \quad (2.6.7)$$

Simplificando o resultado (2.6.6), obtemos:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{Final}} = e^{i\psi} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (2.6.8)$$

O resultado acima mostra que campo elétrico é rotacionado no plano de polarização (plano da frente de onda) pelo ângulo θ . A fim de melhor ilustrar tal rotação, escrevemos as ondas inicial e final na forma vetorial:

$$\mathbf{E}_{\text{Inicial}} = \hat{\mathbf{e}}_1 \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{E}}_{\text{Final}} = e^{i\psi} [\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2], \quad (2.6.9)$$

sendo $\hat{\mathbf{e}}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_2$ os versores que definem o plano de polarização. Quando $\theta = 0$, que só ocorre quando $k_+ = k_-$, as ondas, inicial e final, presentes na Eq. (2.6.9) apresentam a mesma orientação de campo elétrico:

$$\mathbf{E}_{\text{Inicial}} = \hat{\mathbf{e}}_1 \text{ e } \tilde{\mathbf{E}}_{\text{Final}} = e^{i\psi} \hat{\mathbf{e}}_1, \quad (2.6.10)$$

demonstrando que a polarização linear permanece inalterada quando as relações de dispersão (vetores de onda) são idênticas para as componentes RCP e LCP. No caso em que $\theta = \pi/2$, o campo elétrico

resultante adquire a orientação $\hat{\epsilon}_2$:

$$\mathbf{E}_{\text{Inicial}} = \hat{\epsilon}_1 \text{ e } \tilde{\mathbf{E}}_{\text{Final}} = e^{i\psi} \hat{\epsilon}_2, \quad (2.6.11)$$

evidenciando uma rotação de polarização pelo ângulo θ (neste caso, $\pi/2$).

Observe que isto ocorre exclusivamente por conta da diferença entre os vetores de onda ($k_+ \neq k_-$), ou seja, quando relações de dispersão para os modos RCP e LCP são diferentes, condição essencial para gerar rotação θ não-nula conforme estabelecido pela Eq. (2.6.7).

O ângulo de rotação pode ser expresso em função dos índices de refração. Substituindo $k = n\omega/c$ na Eq. (2.6.7), obtemos:

$$\theta = -\frac{\omega L}{2c} (n_+ - n_-), \quad (2.6.12)$$

O “poder de rotação” (PR) $\delta = \theta/L$ (diferença de fase por unidade de comprimento), é dado como

$$\delta = -\frac{\omega}{2c} (n_+ - n_-). \quad (2.6.13)$$

Como bem sabemos, os modos eletromagnéticos propagam-se em regiões em que os índices de refração são reais, com $\text{Re}[n_{\text{RCP}}] > 0$ e $\text{Im}[n_{\text{LCP}}] = 0$. Assim, torna-se conveniente reescrever o poder de rotação em termos das partes reais dos índices:

$$\delta = -\frac{\omega}{2c} (\text{Re}[n_{\text{LCP}}] - \text{Re}[n_{\text{RCP}}]). \quad (2.6.14)$$

O coeficiente PR (2.6.14) faz parte do arcabouço experimental para o estudo do comportamento óptico de diversos sistemas distintos, como cristais [91, 92], compostos orgânicos [93, 102], fenômenos em grafeno na banda de terahertz [94], e gases de moléculas em rápida rotação [95].

2.6.3 Birrefringência em plasma magnetizado

Como estudado na seção 2.4, plasmas magnetizados admitem dois índices de refração, n_+ e n_- , associados a dois modos eletromagnéticos propagantes de polarização circular, LCP e RCP, respectivamente. Tais modos possuem velocidades de fase dadas por:

$$u_{ph\pm} = \frac{c}{1 - \omega_p^2/\omega(\omega \pm \omega_c)}. \quad (2.6.15)$$

Neste contexto, podemos calcular também o poder de rotação decorrente, tomando os índices de refração dados na Eq. (2.4.35), fornecendo:

$$\delta = -\frac{\omega}{2c} \frac{\pi}{\lambda} \left(\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega(\omega + \omega_c)} - \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega(\omega - \omega_c)} \right). \quad (2.6.16)$$

O comportamento do PR (2.6.16) em função da frequência ω é ilustrado na Fig. 2.6. Observa-se que há uma divergência em ω_c , sendo positivo para $\omega < \omega_c$ e negativo para $\omega > \omega_c$. No limite de altas frequências $\omega \gg (\omega_p, \omega_c)$ [5], onde é garantido que ambos os modos associados aos índices (2.4.35) se

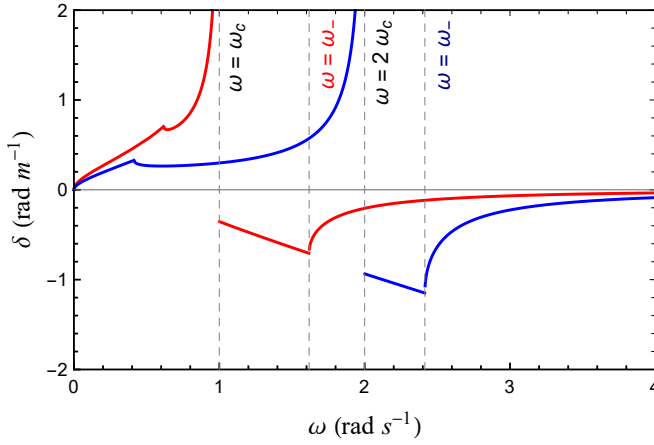


Figura 2.6: Poder de rotação (2.6.16) em termos de ω . Aqui, $\omega_c = \omega_p$ (curva vermelha) e $\omega_c = 2\omega_p$ (curva azul), adotando $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

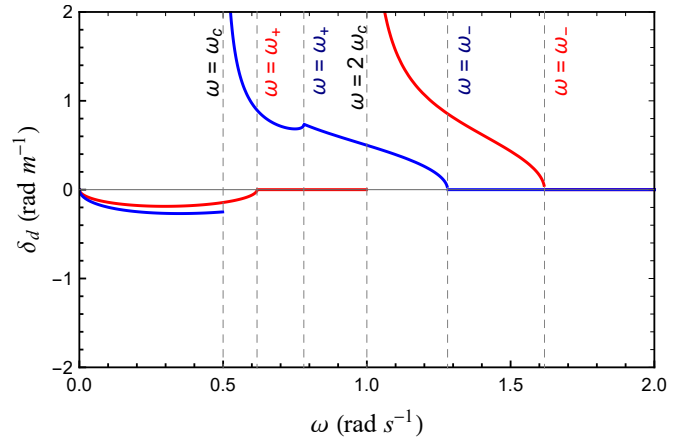


Figura 2.7: Coeficiente de dicroísmo (2.6.21) em função de ω . Aqui, $\omega_c = \omega_p$ (linha vermelha) e $\omega_c = \omega_p/2$ (linha azul), com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

propagam simultaneamente, temos:

$$n_{\pm} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega \pm \omega_c)}, \quad (2.6.17)$$

o que implica no seguinte fator:

$$\delta \approx -\frac{\omega}{2c} \left(\frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega - \omega_c)} - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega + \omega_c)} \right), \quad (2.6.18)$$

$$\delta \approx -\frac{\omega_p^2 \omega_c}{2c\omega^2}, \quad (2.6.19)$$

onde vemos que o PR decai com quadrado da frequência em tal regime.

2.6.4 Coeficiente de dicroísmo

Associado à parte imaginária do índice de refração, o dicroísmo é um efeito óptico que ocorre quando ondas circularmente polarizadas são absorvidas pelo meio em graus diferentes [96, 97]. Assim, o coeficiente de dicroísmo refere-se à diferença de absorção das ondas LCP e RCP, sendo dado por:

$$\delta_d = -\frac{\omega}{2c} (\text{Im}[n_{LCP}] - \text{Im}[n_{RCP}]). \quad (2.6.20)$$

Para os índices de refração (2.4.35), escreve-se

$$\delta_d = -\frac{\omega}{2c} \text{Im} \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}} \right). \quad (2.6.21)$$

O comportamento do coeficiente acima está ilustrado na Fig. 2.7, que mostra singularidade na frequência de ciclotron ω_c . Para $\omega_c = \omega_p$ (curva vermelha), o coeficiente de dicroísmo (2.6.21) é negativo para

$\omega < \omega_+^{red}$, positivo para $2\omega_c < \omega < \omega_-^{red}$ e nulo para outras frequências. O caso para $\omega_c = \omega_p/2$ (curva azul) difere no fato de que ω_+^{blue} é maior que ω_c , mostrando que (2.6.21) é agora negativo para $\omega < \omega_c$.

O dicroísmo é também uma ferramenta útil para a caracterização óptica de materiais, e tem sido utilizado para distinguir semimetais de Dirac e Weyl [98], realizar discriminação enantiomérica [99, 100], e para desenvolver dispositivos baseados em grafeno em frequências na faixa do terahertz [101].

2.7 Oscilações de densidade

Até aqui abordamos apenas os fenômenos relacionados a ondas eletromagnéticas, tais como absorção, propagação e birrefringência, decorrentes da interação das ondas com o plasma. No entanto, quando submetidas aos campos perturbativos da onda eletromagnética, as partículas do plasma entram em vibração, que podem ser investigadas através das oscilações de densidade do meio. Tais oscilações da densidade de carga podem ser analisadas a partir do conjunto de equações já em suas versões linearizadas,

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \mathbf{u}_1) = 0, \quad (2.7.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \frac{q}{m} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) - \frac{1}{mn} \nabla P, \quad (2.7.2)$$

onde n é a densidade numérica de elétrons, $\mathbf{u}$ é a velocidade, q e m são a carga e massa das partículas, respectivamente. Além disso, P é a pressão, que descreve os efeitos da energia cinética térmica dos elétrons. Para plasmas frios, pode-se desprezar o termo de pressão em Eq. (2.7.2) [3], mas manteremos tal termo nesta descrição, uma vez que desempenhará um papel interessante neste contexto. Por simplicidade, consideraremos um plasma não magnetizado, fazendo $\mathbf{B}_0 = 0$, na Eq. (2.7.2), que reduz-se a

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_1 - \frac{1}{mn} \nabla P. \quad (2.7.3)$$

Derivando no tempo a Eq. (2.7.1) e substituindo $\partial \mathbf{u}/\partial t$ da equação acima, obtemos que perturbação de densidade é governada pela seguinte equação diferencial:

$$\partial_t^2 n_1 + \frac{qn_0}{m} \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_0 \nabla^2 n_1 = 0, \quad (2.7.4)$$

onde o termo de pressão em (2.7.2) passou a ser escrito como [vide Apêndice A]

$$\frac{1}{n} \nabla P = \frac{1}{n_0} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_0 \nabla n_1. \quad (2.7.5)$$

Usando a lei de Gauss, $(\nabla \cdot \mathbf{E}) = qn_1/\epsilon_0$, a Eq. (2.7.4) torna-se

$$\partial_t^2 n_1 + \omega_p^2 n_1 - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_0 \nabla^2 n_1 = 0, \quad (2.7.6)$$

onde usamos a definição da frequência de plasma $\omega_p^2 = n_0 q^2 / \epsilon_0 m$. Assumindo uma solução do tipo onda plana para a perturbação de densidade n_1 , somos levados a

$$\left(-\omega^2 + \omega_p^2 + \frac{1}{m} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_0 k^2 \right) n_1 = 0, \quad (2.7.7)$$

obtendo

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{1}{m} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_0 k^2, \quad (2.7.8)$$

que é a relação de dispersão para as oscilações de densidade, conhecidas como ondas de Langmuir (plásmons). Note que, devido à presença do termo de pressão, a relação de dispersão acima indica que tais perturbações de densidade se propagam através do plasma, enquanto as partículas oscilam coletivamente na frequência ω_p . Na ausência do termo de pressão, como ocorre no caso de plasmas frios, esta se reduz às oscilações estacionárias na frequência de plasma, $\omega^2 = \omega_p^2$, que são chamadas de oscilações de Langmuir. Portanto, plasmas frios não apresentam oscilações propagantes de densidade, suportando apenas oscilações de Langmuir.

Podemos mostrar que tais oscilações são longitudinais em relação ao campo elétrico. Da Eq. (2.7.3), usando soluções de onda plana para $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{E}_1$, tem-se

$$\mathbf{u} = \frac{iq}{m\omega} \mathbf{E} - \frac{i}{mn_0\omega} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_0 \nabla n_1. \quad (2.7.9)$$

Usando agora a lei de Gauss, é possível escrever

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} n_1 \rightarrow \nabla n_1 = \frac{\epsilon_0}{q} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}). \quad (2.7.10)$$

Substituindo Eq. (2.7.10) em Eq. (2.7.9), temos

$$\mathbf{u} = \frac{iq}{m\omega} \mathbf{E} - \frac{i\epsilon_0}{mn_0q\omega} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}). \quad (2.7.11)$$

Assim, observa-se dois cenários:

- i) Para $\mathbf{E}$ perpendicular ao vetor de onda $\mathbf{k}$, tem-se $\nabla \cdot \mathbf{E} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$. Então, Eq. (2.7.11) fornece

$$\mathbf{u} = \frac{ie}{m\omega} \mathbf{E}, \quad (2.7.12)$$

o que significa que as oscilações do plasma ocorrem na mesma direção do campo elétrico. Vale mencionar que o movimento coletivo (ou deslocamento) da densidade de cargas, n_1 , é descrito pela velocidade $\mathbf{u}$.

- ii) Para $\mathbf{E}$ longitudinal a $\mathbf{k}$, escreve-se $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{k}}$. Então, $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = (i\mathbf{k})(ikE) = -(k\hat{\mathbf{k}})(kE) =$

$-k^2(E\hat{\mathbf{k}}) = -k^2\mathbf{E}$. Assim, a Eq. (2.7.11) torna-se

$$\mathbf{u} = \left[\frac{iq}{m\omega} + \frac{i\epsilon_0 k^2}{mn_0\omega q} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_0 \right] \mathbf{E}, \quad (2.7.13)$$

o que também indica que as oscilações do plasma ocorrem na mesma direção do campo elétrico. No entanto, neste cenário, as oscilações do plasma e o campo elétrico estão na mesma direção do vetor de onda $\mathbf{k}$.

Além disso, as oscilações plasmáticas derivadas de Eq. (2.7.1), até primeira ordem nas equações linearizadas, fornecem a seguinte relação para as flutuações da densidade de carga:

$$n_1 = \frac{n_0}{\omega} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1), \quad (2.7.14)$$

que, combinada com (2.7.13), garante que as perturbações de densidade ($n_1 \neq 0$) ocorrem apenas para ondas longitudinais, quando $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}_1$.

ELETRODINÂMICA DE MEIOS QUIRAIS

Sumário

3.1	A eletrodinâmica de áxions	59
3.1.1	Simetrias discretas	60
3.2	Equações de movimento da eletrodinâmica de áxions	62
3.3	A eletrodinâmica de áxions na descrição de meios quirais	63
3.4	A eletrodinâmica de MCFJ	65
3.5	A teoria de MCFJ e o Modelo Padrão Estendido	66
3.6	Setor de gauge CPT-ímpar do MPE	66
3.7	Análise das simetrias discretas: Operador CPT	67
3.8	Equações de movimento	69
3.9	Equação de onda e relações de dispersão	70
3.9.1	Relações de dispersão	71
3.10	Birrefringência na eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw	72

Meios quirais consistem de materiais opticamente ativos (circularmente birrefringentes), dotados de violação de paridade [96, 97, 102, 103], que são descritos por modelos de paridade-ímpar, tais como a eletrodinâmica bi-isotrópica [104] e bi-anisotrópica [105–110]. Em tais meios, as relações constitutivas são do tipo

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E} + \hat{\alpha} \mathbf{B}, \quad (3.0.1a)$$

$$\mathbf{H} = \hat{\beta} \mathbf{E} + (\hat{\mu})^{-1} \mathbf{B}, \quad (3.0.1b)$$

onde $\hat{\epsilon} \equiv [\epsilon_{ij}]$, $(\hat{\mu})^{-1} \equiv [\mu_{ij}^{-1}]$, $\hat{\alpha} \equiv [\alpha_{ij}]$ e $\hat{\beta} \equiv [\beta_{ij}]$ representam, em princípio, matrizes complexas 3×3 , que descrevem a permissividade elétrica, permeabilidade magnética e os tensores magneto-elétricos. Neste cenário, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ atuam como funções respostas à aplicação dos campos magnético e elétrico, contribuindo para o deslocamento elétrico e magnetização no meio, respectivamente. Tais quantidades satisfazem as seguintes condições de hermiticidade:

$$\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}^\dagger, \quad \hat{\mu}^{-1} = (\hat{\mu}^{-1})^\dagger, \quad \hat{\alpha} = -\hat{\beta}^\dagger, \quad (3.0.2)$$

uma consequência da conservação de energia em meios contínuos [106, 111]. Por exemplo, meios quirais bi-isotrópicos envolvem tensores isotrópicos diagonais, na forma $\epsilon_{ij} = \epsilon\delta_{ij}$, $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$, $\beta_{ij} = \beta\delta_{ij}$, que descrevem o mais geral meio linear, homogêneo e isotrópico com coeficientes magneto-elétricos. Neste caso, as condições de conservação da energia em (3.0.2) conduzem a $\alpha = -\beta^*$. Por serem complexos, os parâmetros quirais podem ser decompostos em termos de suas partes reais e imaginárias,

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'', \quad (3.0.3)$$

$$\beta = \beta' + i\beta''. \quad (3.0.4)$$

Para α e β puramente reais, a condição $\alpha = -\beta^*$ conduz à $\alpha' = -\beta'$, o que leva as relações constitutivas do meio a serem escritas como

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} - \beta' \mathbf{B}, \quad (3.0.5a)$$

$$\mathbf{H} = \beta' \mathbf{E} + \mu^{-1} \mathbf{B}, \quad (3.0.5b)$$

uma forma típica na descrição bi-isotrópica dos chamados isolantes topológicos [112–118].

Outra característica de sistemas quirais, associado à parâmetros quirais puramente imaginários, é a possível ocorrência de refração negativa (meios dotados com índices de refração negativos), efeito proposto inicialmente por Veselago em 1968 [119] e observado experimentalmente em 2000 [120, 121]. Posteriormente, outros experimentos confirmaram tal fenômeno usando a lei de Snell [122, 123]. Esta propriedade incomum foi alcançada em metamateriais construídos com permissividade elétrica e permeabilidade magnética negativas [124, 125]. No entanto, índices de refração negativos também surgem em outros vários cenários, como em plasmas de quarks-glúons [126, 127], materiais magnetoelétricos [128], metasuperfícies [129], metamateriais bi-anisotrópicos quirais [130, 131] e novos materiais como semi-metais de Dirac [132, 133]. Em plasmas quirais descritos por relações constitutivas bi-isotrópicas generalizadas [38, 39], o índice de refração negativo pode ocorrer em certas faixas de frequência e não está necessariamente associado à permissividade elétrica e permeabilidade magnética simultaneamente negativas, sendo atribuído ao parâmetro de quiralidade introduzido nas relações constitutivas,

$$D^i = \epsilon_{ij} E^j + i\xi_c B^i, \quad H^i = \mu^{-1} B^i + i\xi_c E^i, \quad (3.0.6)$$

onde ϵ_{ij} , μ e ξ_c são o tensor de permissividade elétrica do plasma, a permeabilidade magnética e o parâmetro de quiralidade constante. As relações acima derivam da Eq. (3.0.1), considerando os parâmetros (3.0.3) e (3.0.4) como sendo puramente imaginários, com $\alpha'' = \xi_c$. Tais meios, chamados metamateriais de plasma, têm sido investigados como novos meios dotados de propriedades interessantes, como refração negativa e não-linearidades [134, 135].

Efeitos quirais em plasmas também ganham espaço no cenário astrofísico, onde têm sido investigados em pulsares e buracos negros [29], objetos cercados por magnetosferas compostas de plasma. Nessas regiões, plasmas quirais mostram-se relevantes em conexão com processos anômalos quirais [24], onde

a chamada corrente magnética quiral

$$\mathbf{J}_B = \mu_5 \mathbf{B}, \quad (3.0.7)$$

é suposta existir, com repercussões na propagação de modos helicoidais. A densidade de corrente acima, proporcional ao campo magnético, decorre do efeito magnético quiral (CME), cujo papel na geração de fortes campos magnéticos em estrelas de nêutrons pode justificar suas magnitudes elevadas [28]. Sua relevância em sistemas astrofísicos tem sido um tópico atual, ver Ref. [136].

Correntes quirais anômalas, tal como em (3.0.7), podem ser descritas por eletrodinâmicas estendidas, como as eletrodinâmicas de áxion e de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw, modelos que fornecem uma conexão direta entre as correntes extras que surgem na lei de Ampère modificada e correntes anômalas que ocorrem em meios quirais. Neste capítulo, são apresentados os aspectos básicos destes dois modelos, derivando as equações de Maxwell modificadas e suas equações de onda, além de verificar suas simetrias e conexões com a descrição de efeitos quirais.

3.1 A eletrodinâmica de áxions

Entre os possíveis candidatos para matéria escura fria, está o áxion [52, 57], uma partícula pseudoescalar que surge como uma solução para o problema do CP forte na *Quantum chromodynamics* (QCD) [53]. O acoplamento do áxion com o campo eletromagnético é descrito pelo termo $\mathcal{L}_{\text{axion}} = a(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$, onde a representa o campo do áxion [67, 137]. De maneira mais abrangente, não restrito ao âmbito da QCD, tem sido argumentado que partículas do tipo áxion (ALPs, na sigla em inglês), que apresentam acoplamentos semelhantes, são candidatas principais a compor a matéria escura fria no Universo [138–140]. Isto decorre do fato das ALPs apresentarem valores mais abrangentes para a relação entre a massa de tais partículas e a constante de acoplamento, não sendo limitados àqueles propostos na solução do problema CP forte.

A eletrodinâmica de áxions em unidades naturais ($c = \hbar = 1$) é descrita pela Lagrangiana a seguir:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{g_{a\gamma}}{4}aF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu a)(\partial^\mu a) - V(a), \quad (3.1.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor eletromagnético, $\tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}/2$ é o tensor eletromagnético dual e a é o campo pseudoescalar do áxion. Além disso, $g_{a\gamma}$ é a contante de acoplamento da interação com dimensão de 1/energia. Na Lagrangiana acima, o termo de interação acopla o campo axiônico ao invariante relativístico $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$, que é ímpar sob operação conjunta dos operadores de conjugação de carga e paridade. Para compreender melhor isso, vamos analisar a Lagrangiana (3.1.1) com maiores detalhes a seguir.

A Lagrangiana (3.1.1) pode ser reescrita explicitamente em termos do campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Para isso, considere apenas os termos que envolvam os campos eletromagnéticos, abrindo a soma ímplicita dos índices gregos em termos das componentes espaciais e temporal,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(2F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij}) - \frac{1}{4}\left[g_{a\gamma}aF_{0i}\tilde{F}^{0i} + g_{a\gamma}aF_{i0}\tilde{F}^{i0} + g_{a\gamma}aF_{ij}\tilde{F}^{ij}\right], \quad (3.1.2)$$

onde foi utilizada a antissimetria do tensor eletromagnético: $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Sabemos que as componentes do tensor eletromagnético podem ser expressas em termos dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ ¹:

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\partial_0 A^i - \partial_i A_0 = E^i, \quad (3.1.3)$$

$$F_{ij} = F^{ij} = -\epsilon_{ijk} B^k. \quad (3.1.4)$$

Da mesma forma para o tensor eletromagnético dual:

$$\tilde{F}^{0i} = \frac{1}{2} \epsilon^{0ijk} F_{jk} = -\frac{1}{2} \epsilon^{0ijk} \epsilon_{jkl} B^l = -B^i, \quad (3.1.5)$$

$$\tilde{F}^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ij0k} F_{0k} = \epsilon_{ijk} E^k, \quad (3.1.6)$$

onde foi utilizada a relação

$$\epsilon_{ilm} \epsilon_{lmk} = \epsilon_{lmi} \epsilon_{lmk} = (\delta_{mm} \delta_{ik} - \delta_{mk} \delta_{im}) = (3\delta_{ik} - \delta_{ik}) = 2\delta_{ik}. \quad (3.1.7)$$

Além disso, foram usadas as propriedades do tensor de Levi-Civita 4-dimensional: $\epsilon_{0123} = -\epsilon_{1023} = \epsilon_{1203} = -\epsilon_{1230} = +1$. Com isso, reescrevemos (3.1.2) na forma

$$4\mathcal{L} = -(-2E^i E^i + 2\delta_{pq} B^p B^q) + \frac{g_{a\gamma} a}{4} [2E^i B^i + 2B^k E^k], \quad (3.1.8)$$

que pode ser lida na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + g_{a\gamma} a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}). \quad (3.1.9)$$

Esta é a Lagrangiana que representa a eletrodinâmica de áxions em termos dos campos eletromagnéticos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

3.1.1 Simetrias discretas

Operações que não são reprodutíveis por uma sucessão de transformações infinitesimais são chamadas de operações discretas. Tais transformações não podem ser descritas por elementos dos grupos de Lie, associados às transformações contínuas. Aqui trabalharemos três operações de grande importância na Física: Conjugação de carga, Paridade e Inversão temporal.

A operação de paridade ($\mathcal{P}$), em termos das coordenadas do espaço-tempo, é dada por $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$, podendo ser compreendida como uma inversão espacial, capaz de tornar um sistema de eixos dextrógiro (onde vale a regra de mão direita) em um sistema levógiro (onde vale a regra de mão esquerda). A invariância de um sistema físico sob reversão espacial, significa que as leis físicas são igualmente expressas em sistema de coordenadas dextrógiro e levógiro.

Inversão temporal ($\mathcal{T}$) é a transformação que leva t em $-t$, não atuando sobre as coordenadas espaciais ($\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$). Quando sistema físico temporalmente invertido apresenta-se como uma opção realizável, dizemos que $\mathcal{T}$ é uma operação de simetria.

¹Aqui adotamos a métrica $g \equiv (+, -, -, -)$.

Tabela 3.1: Efeito dos operadores C , P , T e CPT sobre quantidades habituais do eletromagnetismo.

	∂_μ	q	$\mathbf{j}$	J^μ	A^0	$\mathbf{A}$	A^μ	$F^{\mu\nu}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{B}$
C	∂_μ	$-q$	$-\mathbf{j}$	$-J^\mu$	$-A^0$	$-\mathbf{A}$	$-A^\mu$	$-F^{\mu\nu}$	$-\mathbf{E}$	$-\mathbf{B}$
T	$-\partial^\mu$	$+q$	$-\mathbf{j}$	$+J_\mu$	$+A^0$	$-\mathbf{A}$	A_μ	$-F_{\mu\nu}$	$+\mathbf{E}$	$-\mathbf{B}$
P	∂^μ	$+q$	$-\mathbf{j}$	$+J_\mu$	$+A^0$	$-\mathbf{A}$	A_μ	$F_{\mu\nu}$	$-\mathbf{E}$	$+\mathbf{B}$
CPT	$-\partial_\mu$	$-q$	$-\mathbf{j}$	$-J^\mu$	$-A^0$	$-\mathbf{A}$	$-A^\mu$	$F^{\mu\nu}$	$+\mathbf{E}$	$+\mathbf{B}$

Diferentemente das demais operações, a conjugação de carga ($\mathcal{C}$) não atua sobre coordenadas do espaço-tempo, mas atua sobre a carga das partículas, fazendo $q \rightarrow -q$, $\rho \rightarrow -\rho$, alterando propriedades intrínsecas da partícula descrita através de números quânticos. Esta transformação é de grande relevância no cenário quântico-relativístico, onde é utilizada para transformar um estado quântico de uma partícula em um estado quântico de anti-partícula, como tratado na teoria de Dirac. Uma exposição detalhada sobre tais operações pode ser encontrada nas referências [141–144].

Podemos analisar a Lagrangiana de (3.1.9) sob as operações de paridade, inversão temporal e conjugação de carga separadamente. Para isso, é necessário considerar o efeito de tais operações sobre quantidades habituais da eletrodinâmica, que está sumarizado na Tabela 3.1 (vide Apêndice B).

Sob Paridade, o campo de áxion também sofre a ação do operador paridade e comporta-se como um pseudoescalar, ou seja, é ímpar sob ação de P :

$$a \xrightarrow{P} -a, \quad (3.1.10)$$

de modo que, de acordo com a Tabela 3.1, a Lagrangiana (3.1.9) transforma-se da seguinte forma sob paridade:

$$\mathcal{L} \xrightarrow{P} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}_{+(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)} + g_{a\gamma} \underbrace{a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}_{(-a)(-\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}. \quad (3.1.11)$$

Logo, percebe-se que o termo $a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$ tem paridade par, não trocando de sinal após a operação. **Sob a operação de conjugação de carga**, vale:

$$a \xrightarrow{C} +a, \quad (3.1.12)$$

de forma que a Lagrangiana de áxions fica

$$\mathcal{L} \xrightarrow{C} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}_{+(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)} + g_{a\gamma} \underbrace{a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}_{(+a)(+\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}, \quad (3.1.13)$$

revelando-se C -par, pois não inverte sinal algum em nenhum dos termos.

A operação CP conjunta resulta, portanto, na seguinte transformação para o termo de interação:

$$a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \xrightarrow{CP} +a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}). \quad (3.1.14)$$

Desta forma, vemos que os 2 termos da Lagrangiana (3.1.9) são CP -pares.

Sob reversão temporal, temos:

$$a \xrightarrow{\mathcal{T}} -a, \quad (3.1.15)$$

de maneira que a Lagrangiana (3.1.9), de acordo com a Tabela 3.1, transforma-se como

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}_{+(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)} + g_{a\gamma} \underbrace{a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}_{(-a)(-\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}, \quad (3.1.16)$$

mostrando que o termo de interação é T-par. Com isso, é fácil concluir que a atuação conjunta das operações C, P e T, resulta

$$a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \xrightarrow{\mathcal{CPT}} +a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}), \quad (3.1.17)$$

revelando que a Lagrangiana da teoria não inverte o sinal, sendo invariante sob ação do operador CPT.

Um outro tipo de acoplamento entre o áxion e o campo eletromagnético pode ser construído com o invariante CP-par $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, para o qual o termo de interação será

$$\mathcal{L} \supset a F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = a (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2). \quad (3.1.18)$$

Neste caso, o campo a descreve ALPs representadas por um campo escalar real (invariante sob ação de $\mathcal{P}$), o que mantém o termo acima invariante sob a operação CP:

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\mathcal{CP}} \mathcal{L} \supset \underbrace{a (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}_{+a(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}. \quad (3.1.19)$$

Neste capítulo, daremos ênfase à eletrodinâmica de áxions pseudoescalares, descrita pela Lagrangiana (3.1.1), que é frequentemente utilizada na descrição de efeitos eletromagnéticos na matéria quiral, como veremos mais adiante.

3.2 Equações de movimento da eletrodinâmica de áxions

As equações de Maxwell podem ser derivadas a partir da Lagrangiana (3.1.1), usando a equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha}, \quad (3.2.1)$$

que fornece a seguinte equação de movimento para a teoria

$$\partial_\rho F^{\rho\alpha} + g_{a\gamma} (\partial_\rho a) \tilde{F}^{\rho\alpha} = J^\alpha. \quad (3.2.2)$$

Os detalhes da obtenção da equação acima estão detalhados no Apêndice C. A partir da equação de movimento, obtém-se as equações de Maxwell da eletrodinâmica de áxions, que são

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho + g_{a\gamma} \mathbf{B} \cdot \nabla a, \quad (3.2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J} + g_{a\gamma} (\partial_t a) \mathbf{B} + g_{a\gamma} \nabla a \times \mathbf{E}, \quad (3.2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (3.2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.2.6)$$

A equação dinâmica para o campo do áxion pode ser também obtida a partir da Lagrangiana (3.1.1). Neste caso, deve-se lançar mão da equação de Euler-Lagrange para o campo escalar, que é

$$\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho a)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}. \quad (3.2.7)$$

Considerando $V(a) = m_a^2 a^2/2$, a Lagrangiana (3.1.1), juntamente com a Eq. (3.2.7), fornecem a seguinte equação para o campo escalar

$$\partial_\rho \partial^\rho a + m_a^2 a = -\frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (3.2.8)$$

ou também

$$(\square + m_a^2) a = g_{a\gamma\gamma} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}). \quad (3.2.9)$$

A equação de onda da teoria pode ser obtida a partir da Eq. (3.2.2), que pode ser reescrita como

$$\partial_\rho F^{\rho\alpha} + g_{a\gamma} (\partial_\rho a) \tilde{F}^{\rho\alpha} = J^\alpha, \quad (3.2.10)$$

ou

$$\square A^\alpha + g_{a\gamma} (\partial_\rho a) \tilde{F}^{\rho\alpha} = J^\alpha, \quad (3.2.11)$$

onde usamos o gauge de Lorentz $\partial_\rho A^\rho = 0$. Esta última é equação de onda para o quadri-potencial A^α , que condensa as equações de onda para suas 4 componentes. Podemos expressar as equações de onda para as componentes $\alpha = 0$ e $\alpha = i$ da Eq. (3.2.11), que correspondem às equações para os potenciais escalar e vetor, respectivamente. Teremos, para a componente $\alpha = 0$,

$$\square A^0 + g_{a\gamma} (\partial_i a) \tilde{F}^{i0} = J^0 \rightarrow \square A^0 - g_{a\gamma} (\nabla a) \cdot \mathbf{B} = J^0, \quad (3.2.12)$$

onde usamos as relações (3.1.5) e (3.1.6). Da mesma forma, para $\alpha = i$, obtém-se

$$\square A^i + g_{a\gamma} (\partial_0 a) \tilde{F}^{0i} + g_{a\gamma} (\partial_j a) \tilde{F}^{ji} = J^i \rightarrow \square \mathbf{A} - g_{a\gamma} (\partial_t a) \mathbf{B} + g_{a\gamma} (\nabla a) \times \mathbf{E} = \mathbf{J}. \quad (3.2.13)$$

3.3 A eletrodinâmica de áxions na descrição de meios quirais

Meios quirais suportam fenômenos que envolvem correntes e densidade de carga não convencionais, definidas em propriedades particulares de sistema quânticos. Neste sentido, fenômenos de transporte

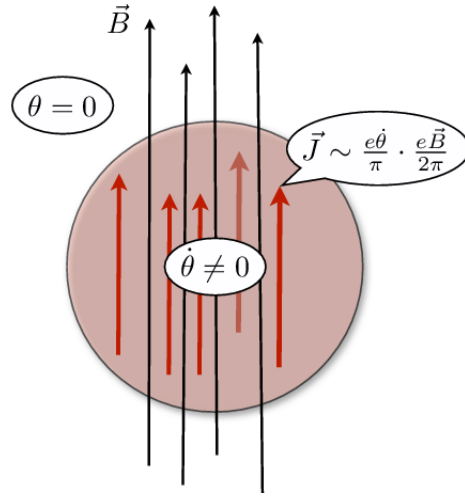


Figura 3.1: Ilustração simplificada para efeito magnético quiral (CME). Aqui $\theta = \Delta\mu$, a diferença de potencial químico.

baseados ou induzidos por anomalias quânticas constituem uma janela de novidades e oportunidades, que vêm atraindo atenção na Física. Neste contexto, podemos mencionar os semi-metais de Weyl e Dirac [145, 146] e o efeito quiral magnético (*chiral magnetic effect* - CME) [24], um fenômeno quântico macroscópico mensurável, no qual uma corrente elétrica é produzida na presença de um campo magnético, devido a assimetria entre o número de densidade de férmions de quiralidade esquerda e direita (*left-handed* e *right-handed*), o que é representado pelo desequilíbrio entre o potencial químico *left* e *right*, vide Figura (3.1). Tal corrente é dada por:

$$\mathbf{J}_{CME} = \frac{e^2}{4\pi^2} \Delta\mu \mathbf{B}. \quad (3.3.1)$$

onde e é a carga elétrica, $\Delta\mu = \mu_R - \mu_L$ é a diferença de potencial químico entre os férmions de quiralidade esquerda e direita, e $\mathbf{B}$ é o campo magnético. Outro efeito anômalo é produzido pela separação entre os pontos de fluxo de energia no espaço dos momentos ($\Delta\mathbf{p}$) para os férmions de quiralidade esquerda e direita, chamado de *anomalous Hall effect* (AHE) (efeito Hall anômalo) [147], que gera densidade de corrente dada pela relação:

$$\mathbf{J}_{Hall} = \frac{e^2}{4\pi^2} \Delta\mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad (3.3.2)$$

sendo $\mathbf{E}$ é o campo elétrico aplicado. Tal separação também gera uma densidade de carga extra quando há campo magnético, que é expressa por:

$$J_{Anom}^0 = \frac{e^2}{4\pi^2} \Delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.3.3)$$

Estes são efeitos anômalos induzidos em matéria quiral que não estão compreendidos dentro da teoria de Maxwell, sugerindo o uso de uma eletrodinâmica modificada.

A eletrodinâmica axiônica cumpre papel na descrição efetiva dos efeitos comentados acima, uma vez que os termos adicionais presentes nas equações de Maxwell não homogêneas, dadas em (3.2.3) e (3.2.4),

podem ser associados ao CME e AHE. Neste contexto, o campo escalar é redefinido como

$$\tilde{\theta} \equiv g_{a\gamma} a = b_\mu x^\mu = b_0 t - \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}, \quad (3.3.4)$$

o que leva as Eqs. (3.2.3) e (3.2.4) a serem escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho + \mathbf{b} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.3.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J} + b_0 \mathbf{B} + \mathbf{b} \times \mathbf{E}, \quad (3.3.6)$$

onde b_μ é um vetor constante cujas componentes desempenham o papel das condutividades anômalas, com $b_0 = e^2 \Delta\mu / (4\pi^2)$ e $\mathbf{b} = e^2 \Delta\mathbf{p} / (4\pi^2)$ nas Eqs. (3.3.5) - (3.3.6).

É importante notar que a parametrização (3.3.4) tem implicações na eletrodinâmica de áxions, permitindo esta ser representada por uma Lagrangiana como a de MCFJ. Para visualizar isso, vejamos o termo de interação em (3.1.1), que será reescrito como

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4} \tilde{\theta} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{2}{8} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{\theta} F_{\mu\nu} (\partial_\alpha A_\beta), \quad (3.3.7)$$

onde usamos a definição do tensor eletromagnético dual $\tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} / 2$. Após algumas manipulações e desprezando termos de derivadas totais, mostra-se que a equação acima pode ser lida como um termo do tipo Chern-Simons:

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4} \tilde{\theta} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} b_\alpha A_\beta F_{\mu\nu}, \quad (3.3.8)$$

onde usamos $\partial_\alpha \tilde{\theta} = b_\alpha$, em conformidade com a parametrização (3.3.4). Este é justamente o termo de CFJ, revelando que *a Lagrangiana de áxions conecta-se com a teoria de MCFJ quando a primeira derivada do campo do áxion é um quadri-vetor constante*. Como veremos nas seções seguintes, a eletrodinâmica de MCFJ também é utilizada na descrição de meios quirais e será também considerada dentro da proposta da presente tese.

3.4 A eletrodinâmica de MCFJ

Em 1990, Carroll, Field e Jackiw (CFJ) [71] propuseram uma modificação para eletrodinâmica de Maxwell através da adição de um termo do tipo Chern-Simons (CS) à Lagrangiana de Maxwell (eletrodinâmica de Maxwell) em 4 dimensões (1 + 3): $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{CS}$. Nesta proposta, era preservada a simetria de calibre, mas a simetria de Lorentz era violada. Importante aqui distinguir o termo tipo Chern-Simons, quadridimensional, do termo original de CS [72–74], tipicamente definido em (1+2) dimensões, $\epsilon_{\mu\nu\alpha} A^\mu \partial^\nu A^\alpha$, conhecido por gerar um termo de massa (topológica) para fóton planar. O termo CFJ, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} V^\mu A^\nu \partial^\alpha A^\beta$, é dito ser do tipo Chern-Simons por ser constituído de uma estrutura similar ao termo CS, envolvendo o símbolo de Levi-Civita 4-dimensional $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$, o 4-potencial A^μ e um campo de fundo fixo, V^μ . Este 4-vetor funciona como um campo de fundo que não se transforma como 4-vetor usual, sendo responsável pela quebra da simetria de Lorentz. Esta foi a primeira investigação da eletrodinâmica

clássica de Maxwell sob efeito da quebra da simetria de Lorentz.

Veremos neste capítulo que a modificação mencionada acima altera as equações de Maxwell (nas leis de Gauss e Ampère), gerando novas relações de dispersão, que descreve a propagação das ondas eletromagnéticas neste vácuo alterado pelo campo de fundo. Novas propriedades são então percebidas, como a birrefringência do vácuo.

3.5 A teoria de MCFJ e o Modelo Padrão Estendido

O modelo de Carroll-Field-Jackiw representa a parte CPT-ímpar do setor de fótons do chamado Modelo Padrão Estendido [79, 80], uma grande extensão do Modelo Padrão construída por Colladay e Kostelecky nos anos 90, que acopla tensores fixos (termos de violação da simetria de Lorentz) a todos os campos físicos do Modelo Padrão. Tais tensores emergem como valores esperados no vácuo após uma quebra espontânea da simetria de Lorentz ocorrer numa teoria primordial definida em escalas de altíssimas energias, próximo da energia de Planck [75–78].

Além do setor CPT-ímpar, existe o setor CPT-par, representado originalmente por um tensor de rank-4, com as simetrias do tensor de Riemann. A lagrangiana deste setor, em unidades naturais, escreve-se na forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}F^{\kappa\lambda}F^{\mu\nu}, \quad (3.5.1)$$

onde $F^{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético e $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ é o tensor de *rank*-4 responsável pela quebra de simetria de Lorentz. Os detalhes desta eletrodinâmica foram apresentados por Kostelecky e Mewes [148].

3.6 Setor de gauge CPT-ímpar do MPE

Apresentamos abaixo a Lagrangiana da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(K_{AF})^\mu A^\nu F^{\alpha\beta}, \quad (3.6.1)$$

onde $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o símbolo de Levi-Civita 4-dimensional e $(K_{AF})^\mu = ((K_{AF})_0, (K_{AF})^i)$ é o campo de fundo responsável pela quebra da simetria de Lorentz [71]. A Lagrangiana (3.6.1) é também chamada de CPT-ímpar, pois, como veremos posteriormente, este modelo é ímpar sob a ação conjunta das operações C, P e T.

É possível expressar a Lagrangiana (3.6.1) explicitamente em termos dos campos elétrico e magnético (**E** e **B**). Para isso, abrimos a soma implícita sobre os índices gregos em termos das componentes espaciais e temporal,

$$4\mathcal{L} = -(2F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij}) - \left[\epsilon_{0ilm}(K_{AF})^0 A^i F^{lm} + \epsilon_{i0lm}(K_{AF})^i A^0 F^{lm} + 2\epsilon_{il0m}(K_{AF})^i A^l F^{0m} \right], \quad (3.6.2)$$

onde usamos a antissimetria do tensor eletromagnético: $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Sabemos que as componentes do tensor eletromagnético podem ser expressas em termos dos campos **E** e **B**, como visto nas Eqs. (3.1.3) e

(3.1.4). Com isso, reescrevemos a Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2} \left[(K_{AF})^0 A^k B^k - A^0 (K_{AF})^k B^k + \epsilon_{ilm} (K_{AF})^i A^l E^m \right], \quad (3.6.3)$$

que também pode ser lida na forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2} \left[(K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - A^0 (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}) \right]. \quad (3.6.4)$$

Esta é a Lagrangiana que representa a eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw. A seguir estudaremos o comportamento desta eletrodinâmica sob as operações discretas C, P e T.

3.7 Análise das simetrias discretas: Operador CPT

Podemos analisar a Lagrangiana de MCFJ sob as operações de paridade, inversão temporal e conjugação de carga separadamente. **Sob Paridade**, usando a Tabela 3.1, a Lagrangiana (3.6.4) transforma-se da seguinte forma:

$$\mathcal{L} \xrightarrow{P} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}_{+(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)} + \frac{1}{2} \left[\underbrace{(K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}_{-(K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})} - \underbrace{A^0 (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})}_{A^0 (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})} + \underbrace{\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})}_{\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})} \right]. \quad (3.7.1)$$

Logo, percebe-se que apenas o termo $(K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ tem paridade ímpar, trocando de sinal após a operação. Concluimos então que $(K_{AF})^0$ é coeficiente paridade-ímpar, enquanto $\mathbf{K}_{AF}$ é paridade-par.

Sob reversão temporal, a Lagrangiana transforma-se como

$$\mathcal{L} \xrightarrow{T} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}_{+(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)} + \frac{1}{2} \left[\underbrace{(K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}_{(K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})} - \underbrace{A^0 (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})}_{-A^0 (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})} + \underbrace{\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})}_{-\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})} \right]. \quad (3.7.2)$$

Agora, vemos que apenas o termo $(K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ não troca de sinal, sendo T-par, enquanto os demais são T-ímpares. Dizemos, portanto, que o coeficiente $(K_{AF})^0$ é T-par e $\mathbf{K}_{AF}$ é T-ímpar. **Sob a operação de conjugação de carga**, a Lagrangiana de MCFJ fica

$$\mathcal{L} \xrightarrow{C} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}_{+(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)} + \frac{1}{2} \left[\underbrace{(K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}_{(K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})} - \underbrace{A^0 (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})}_{A^0 (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})} + \underbrace{\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})}_{\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})} \right], \quad (3.7.3)$$

revelando-se C-par, pois não inverte sinal algum em nenhum dos termos.

Tabela 3.2: Classificação dos coeficientes de Carroll-Field-Jackiw sob simetrias discretas.

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{PT}$	$\mathcal{CPT}$
$(K_{AF})^0$	−	+	+	−	−
$\mathbf{K}_{AF}$	+	−	+	−	−

A operação PT conjunta resulta, em cada um dos termos de CFJ, nas seguintes transformações:

$$(K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \xrightarrow{PT} - (K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (3.7.4)$$

$$A^0 (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B}) \xrightarrow{PT} -A^0 (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B}), \quad (3.7.5)$$

$$\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}) \xrightarrow{PT} -\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}). \quad (3.7.6)$$

Desta forma, vemos que os 3 termos da Lagrangiana (3.6.4) são PT -ímpares, além de C -pares. Podemos prever o efeito da operação CPT , que consiste na aplicação conjunta dos operadores $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$. Como todos os termos da Lagrangiana são C -pares e PT -ímpares, serão CPT -ímpares, por consequência, ou seja:

$$(K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \xrightarrow{CPT} - (K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (3.7.7)$$

$$A^0 (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B}) \xrightarrow{CPT} -A^0 (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B}), \quad (3.7.8)$$

$$\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}) \xrightarrow{CPT} -\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}). \quad (3.7.9)$$

Tal resultado pode também ser obtido se examinarmos o comportamento das grandezas eletromagnéticas sob ação direta do operador CPT , como também está apresentado na Tabela 3.1. Assim, a Lagrangiana (3.6.4) sob operação $\mathcal{CPT}$ se transforma como

$$\mathcal{L} \xrightarrow{CPT} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}_{+(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)} + \frac{1}{2} \left[\underbrace{(K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}_{-(K_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})} - \underbrace{A^0 (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})}_{-A^0 (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B})} + \underbrace{\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})}_{-\mathbf{K}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})} \right], \quad (3.7.10)$$

onde supomos que o campo de fundo $((K_{AF})_0, (K_{AF})^i)$ não é afetado pelo operador $\mathcal{CPT}$. Vemos que os termos advindos da teoria de Carroll-Field-Jackiw invertem de sinal, sob operação CPT , sendo assim classificados como CPT -ímpares, denotando a violação da simetria CPT . Aqui observamos que o termo inserido por CFJ implica não apenas na quebra da simetria de Lorentz, mas também na violação da simetria CPT (ambas preservadas no contexto da eletrodinâmica de Maxwell usual).

Finalizamos apresentando a Tabela 3.2, que resume a classificação dos coeficientes $(K_{AF})^0$ e K_{AF} sob ação das operações discretas discutidas neste capítulo.

3.8 Equações de movimento

As equações de movimento da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw são fornecidas pela equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = 0. \quad (3.8.1)$$

Reescrevendo a Eq.(3.6.1) com termo de fonte,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu A^\nu F^{\alpha\beta} - J_\alpha A^\alpha, \quad (3.8.2)$$

calculamos o primeiro termo da Eq.(3.8.1):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} = -J^\lambda + \frac{1}{4} \epsilon^\lambda_{\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta}. \quad (3.8.3)$$

O segundo termo de (3.8.1) será:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = -F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{2} \epsilon^{\sigma\lambda}_{\mu\nu} (K_{AF})^\mu A^\nu. \quad (3.8.4)$$

Substituindo (3.8.3) e (3.8.4) na Eq.(3.8.1), teremos a equação de movimento:

$$\partial_\sigma F^\sigma_\lambda + \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu \partial^\alpha A^\beta = J_\lambda. \quad (3.8.5)$$

As demais equações de movimento são obtidas a partir da identidade de Bianchi,

$$\partial_\nu F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\nu} + \partial_\beta F_{\nu\alpha} = 0, \quad (3.8.6)$$

que fornece a lei de Gauss para o campo magnético, $\partial_i B_i = 0$, assim como a lei de Faraday,

$$\partial_t B_a + \epsilon_{abc} \partial_b E_c = 0. \quad (3.8.7)$$

Assim, a partir das Eqs. (3.8.5) e (3.8.6), podemos escrever as equações para eletrodinâmica de MCFJ (Vide Apêndice D):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B} = \rho, \quad (3.8.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} - (K_{AF})_0 \mathbf{B} + \mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E} = \mathbf{j}, \quad (3.8.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.8.10)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.8.11)$$

Neste cenário, observa-se que, na ausência de fontes ($\rho = 0$ e $\mathbf{j} = 0$), os campos elétrico e magnético atuam como fontes: Na Eq. (3.8.8), o termo $\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B}$ produz campo elétrico, desempenhando um papel análogo a densidade de carga. Da mesma forma, os termos contendo $(K_{AF})_0$ e $\mathbf{K}_{AF}$ desempenham um papel similar à densidade de corrente na Eq. (3.8.9).

As densidades de correntes e carga de CFJ podem também se conectar com o CME e AHE, efeitos quirais que geram correntes anômalas, como mencionado na Seção 3.3. Tais anomalias violam as simetrias de paridade e inversão temporal, assim como o termo de CFJ, tal como percebido por Qiu, Cao e Huang [81], ao traçar a correspondência entre tais efeitos e os termos da teoria de CFJ. De fato, os autores associaram tais efeitos ao campo de fundo $(K_{AF})^\mu = ((K_{AF})_0, \mathbf{K}_{AF})$, considerando $(K_{AF})_0 = e^2 \Delta\mu / (4\pi^2)$ e $\mathbf{K}_{AF} = e^2 \Delta\mathbf{p} / (4\pi^2)$ nas Eqs. (3.8.8) - (3.8.11). Assim, abriram uma janela de oportunidades para usar a eletrodinâmica de MCFJ na descrição de fenômenos de transporte da física da matéria condensada.

3.9 Equação de onda e relações de dispersão

Podemos manipular as equações de MCFJ e obter as equações de onda para os campos. Tomando o rotacional da Eq. (3.8.9),

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t (\nabla \times \mathbf{E}) - (K_{AF})_0 (\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{j}, \quad (3.9.1)$$

que junto a Eq. (3.8.11), fornece

$$-\nabla^2 \mathbf{B} + \partial_t^2 \mathbf{B} - (K_{AF})_0 (\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{j}, \quad (3.9.2)$$

$$\square \mathbf{B} + (\mathbf{K}_{AF})_0 (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) - \nabla \times \mathbf{j}. \quad (3.9.3)$$

Tomando agora o rotacional da Eq. (3.8.11), temos

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.9.4)$$

O primeiro termo, $\partial_t (\nabla \times \mathbf{B})$, pode ser reescrito usando-se a Eq. (3.8.9),

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{B}) = \partial_t^2 \mathbf{E} + (K_{AF})_0 \partial_t \mathbf{B} - \partial_t (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) + \partial_t \mathbf{j}, \quad (3.9.5)$$

o que nos leva a

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} + \partial_t^2 \mathbf{E} + (K_{AF})_0 \partial_t \mathbf{B} - \partial_t (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) + \partial_t \mathbf{j} = 0, \quad (3.9.6)$$

$$\square \mathbf{E} + \partial_t (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) = -\partial_t (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) + (K_{AF})_0 \partial_t \mathbf{B} + \nabla \rho + \partial_t \mathbf{j}. \quad (3.9.7)$$

Também é possível escrever a equação de onda para o 4-vetor potencial A^λ , partindo da equação da Eq. (3.8.5) e usando a definição do tensor eletromagnético:

$$\partial^\sigma (\partial_\sigma A_\lambda - \partial_\lambda A_\sigma) + \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta} = J_\lambda, \quad (3.9.8)$$

$$\square A_\lambda + \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta} = J_\lambda, \quad (3.9.9)$$

onde usamos a condição de calibre de Lorentz, $\partial^\sigma A_\sigma = 0$.

Escolhendo $\lambda = 0$, encontramos a equação para o potencial escalar:

$$\square A_0 + \frac{1}{2} \epsilon_{0ijk} (K_{AF})^i F^{jk} = \rho \rightarrow \square A_0 + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (K_{AF})^i \epsilon_{jkp} B_p = \rho, \quad (3.9.10)$$

$$\square A_0 + (K_{AF})^i B_i = \rho \rightarrow \square A_0 - \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B} = \rho, \quad (3.9.11)$$

Tomando $\lambda = i$ na Eq. (3.9.9), lidamos com a equação de onda para as componentes do potencial vetor:

$$\square A_i + \frac{1}{2} \epsilon_{i0jk} (K_{AF})^0 F^{jk} + \frac{1}{2} 2 \epsilon_{ij0k} (K_{AF})^j F^{0k} = J_i \rightarrow \square A^i - (K_{AF})^0 B^i + (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E})^i = J^i, \quad (3.9.12)$$

que fornece:

$$\square \mathbf{A} - (K_{AF})^0 \mathbf{B} + (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E}) = \mathbf{J}, \quad (3.9.13)$$

a equação de onda para o potencial $\mathbf{A}$.

A equação de onda (3.9.9) é um dos pontos de partida para obtermos a relação de dispersão da teoria. Podemos reescrevê-la como

$$\square A_\lambda + \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu \partial^\alpha A^\beta = J_\lambda, \quad (3.9.14)$$

ou simplesmente

$$M_{\lambda\beta} A^\beta = 0, \quad (3.9.15)$$

onde, fazendo $J_\lambda = 0$, definimos

$$M_{\lambda\beta} = \square g_{\lambda\beta} + \epsilon_{\lambda\beta\mu\alpha} (K_{AF})^\mu \partial^\alpha, \quad (3.9.16)$$

cujo determinante fornece a relação de dispersão da teoria.

3.9.1 Relações de dispersão

Nesta seção realizaremos a análise da relação de dispersão geral da teoria de Carroll-Field-Jackiw, que é dada por (vide Apêndice E)

$$p^4 + (K_{AF})^2 p^2 - (K_{AF} \cdot p)^2 = 0, \quad (3.9.17)$$

onde $p^\mu = (p_0, \mathbf{p})$ é o 4-vetor de onda. Resolvendo a Eq. (3.9.17) para p^2 , obtém-se:

$$p^2 = \frac{-K_{AF}^2 \pm \sqrt{K_{AF}^4 + 4(K_{AF} \cdot p)^2}}{2},$$

que pode ser reduzida, desprezando o termo de ordem 4 no *background*, à expressão:

$$p^2 = \frac{-K_{AF}^2}{2} \pm (K_{AF} \cdot p). \quad (3.9.18)$$

Lembrando que $p^2 = (p_0^2 - \mathbf{p}^2)$ e $K_{AF} \cdot p = (K_{AF})_0 p_0 - (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{p})$, a relação acima conduz à seguinte solução:

$$p_0 \simeq \pm \frac{(K_{AF})_0}{2} \pm |\mathbf{p}| \sqrt{1 \mp \frac{\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^2}}. \quad (3.9.19)$$

Supondo que a onda se propaga formando um ângulo θ com o campo de fundo (K_{AF}) , temos: $\mathbf{p} \cdot \mathbf{K}_{AF} = |\mathbf{p}| |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta$. A relação (3.9.19) assume a forma:

$$p_0 \simeq \pm |\mathbf{p}| + \frac{1}{2} (\pm (K_{AF})_0 \mp |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta), \quad (3.9.20)$$

que pode ser lida como

$$p_0 \simeq \pm |\mathbf{p}| \pm \frac{1}{2} ((K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta). \quad (3.9.21)$$

A equação acima apresenta dois modos propagantes, codificados na dualidade de sinais $\pm$, que por convenção, designa uma onda propagante para a direita (+) e outra para a esquerda (-).

Esta é a relação de dispersão da eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw, que pode ser escrita nas formas equivalentes

$$\omega \simeq \left[|\mathbf{p}| \pm \frac{1}{2} ((K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta) \right] \rightarrow |\mathbf{p}| \simeq \omega \mp \frac{1}{2} ((K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta), \quad (3.9.22)$$

onde adotamos $p^\mu = (\omega, \mathbf{p})$, uma outra notação para o 4-momento (em unidades naturais).

3.10 Birrefringência na eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw

O fenômeno de birrefringência é formalmente descrito como dupla propagação da luz um meio anisotrópico, onde a luz é decomposta em duas componentes (modos) que se propagam com polarização e velocidade diferentes [40]. Como consequência da diferença de velocidade, ocorre o efeito de rotação do plano de polarização. São conhecidos vários fatores distintos que geram birrefringência, sendo uma delas o campo magnético, via efeito Faraday, já comentado no Capítulo 2. Tal fenômeno também pode se manifestar em materiais naturalmente birrefringentes (dielétricos anisotrópicos), o que é chamado de birrefringência intrínseca. Uma possível birrefringência intrínseca ao vácuo surge em teorias de Gravitacão Quântica, sendo também comuns em teorias de violação de simetria de Lorentz [149]. Veremos a seguir que a teoria de Carroll-Field-Jackiw é uma teoria birrefringente, onde o acoplamento do campo A^μ com o *background* violador determina a rotação do plano de polarização. Além disso, dados da rotação de polarização da luz advinda de galáxias muito distantes serão utilizados para obtermos limites para a

magnitude dos parâmetros de violação. Para verificarmos a birrefringência de uma teoria, é preciso analisar os modos de propagação, que podem ser associados às suas respectivas velocidades de fase. Como já mencionado, a birrefringência se manifesta quando os modos viajam com velocidades de fase distintas. Logo, precisamos constatar tal diferença de fase. Partiremos das velocidades relacionadas a cada modo:

$$u_{ph+} = \frac{\omega}{|\mathbf{p}_+|}, \quad u_{ph-} = \frac{\omega}{|\mathbf{p}_-|}. \quad (3.10.1)$$

O tempo de trânsito de cada modo ao longo de uma distância L pode ser escrito como

$$t_+ = \frac{L}{u_{ph+}} = \frac{|\mathbf{p}_+|}{\omega} L, \quad t_- = \frac{L}{u_{ph-}} = \frac{|\mathbf{p}_-|}{\omega} L, \quad (3.10.2)$$

que nos leva à diferença de tempo de trânsito,

$$\Delta t = (t_+ - t_-) = \frac{L}{\omega} (|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-|). \quad (3.10.3)$$

A diferença de caminho óptico é escrita como $\Delta x = c\Delta t$. Assim,

$$\Delta x = \frac{cL}{\omega} (|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-|). \quad (3.10.4)$$

Se não houver diferença de fase, decorre $\Delta x = 0$. Se a diferença de fase for igual a um comprimento de onda, ou seja, $\Delta x = \lambda$, a diferença de fase será $\delta = 2\pi$. Assim, podemos inferir a seguinte expressão para a diferença de fase:

$$\delta = \frac{2\pi Lc}{\lambda\omega} (|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-|) \rightarrow \delta = L (|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-|), \quad (3.10.5)$$

bem como a diferença de fase por unidade de comprimento,

$$\frac{\delta}{L} = (|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-|), \quad (3.10.6)$$

onde usamos a frequência $\nu = \omega/2\pi$ e $c = 1$.

Vemos que a diferença de fase está diretamente ligada à diferença entre os momentos ou vetores de onda. Se tais momentos fossem iguais, $|\mathbf{p}_+| = |\mathbf{p}_-|$, não haveria defasagem entre eles, o que caracterizaria uma teoria não birrefringente. Porém, este não é o caso da eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw, pois os modos dados pela Eq. (3.9.22) reproduzidos a seguir,

$$|\mathbf{p}_+| \simeq \omega + \frac{1}{2} ((K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta), \quad |\mathbf{p}_-| \simeq \omega - \frac{1}{2} ((K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta), \quad (3.10.7)$$

apresentam defasagem dada por:

$$|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-| = (K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta,$$

que substituída na Eq. (3.10.6), fornece a diferença de fase por unidade de comprimento para a teoria de CFJ:

$$\frac{\delta}{L} = ((K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta), \quad (3.10.8)$$

Sabendo que o ângulo de rotação do plano de polarização é dado pela metade da diferença de fase, $\alpha = \delta/2$, vide Eq. (2.6.7):

$$\alpha = \frac{\delta}{2} \rightarrow \alpha = \frac{L}{2} (|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-|) \rightarrow \alpha = \frac{L}{2} ((K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta). \quad (3.10.9)$$

A rotação do plano de polarização é, em outras palavras, a rotação do campo elétrico da onda, composta pela superposição dos dois modos da teoria, após percorrer uma distância L . Verificamos, portanto, a birrefringência na teoria de CFJ.

Mesmo assumido que o *background* K_{AF} possui diminuta magnitude, uma rotação do plano de polarização seria mensurável para grandes distâncias L , a exemplo do que ocorre com a luz que chega na Terra advinda de galáxias distâtes. E, de fato, Carroll, Field e Jackiw utilizaram dados sobre luz advinda de galáxias muito distantes ($L = 10^{10}$ anos-luz $\rightarrow L = 9.46 \times 10^{25} m$) e concluíram que a variação média de fase é menor que 6° ($\delta \leq 0.104$ rad) [71].

Este dado observacional foi então usado para impor severa restrição sobre a magnitude do tensor de fundo:

$$\frac{L}{2} |(K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta| < 0.104 \quad (3.10.10)$$

$$|(K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta| < \frac{2 \times 0.104}{9.46 \times 10^{25} m} = 2.2 \times 10^{-27} m^{-1}, \quad (3.10.11)$$

Sabendo que, em unidades naturais vale a conversão,

$$1 m^{-1} = 1.977 \times 10^{-7} eV, \quad (3.10.12)$$

obtemos

$$|(K_{AF})_0 - |\mathbf{K}_{AF}| \cos \theta| < 4.4 \times 10^{-33} eV. \quad (3.10.13)$$

Esta é uma condição restritiva para a magnitude do parâmetro de violação, que chamamos comumente de *upper bound* (limite superior) para o *background*. O efeito de birrefringência e a análise dos modos de propagação em plasmas também serão realizados no capítulo seguinte, onde será verificada a influência do termo violador sobre as relações de dispersão em plasmas magnetizados.

PLASMAS FRIOS NO CONTEXTO DE MCFJ COM FATOR QUIRAL TIPO-TEMPO

Neste capítulo, iremos examinar a propagação de ondas em plasmas frios magnetizados regidos pelo eletrodinâmica de MCFJ, considerando a componente temporal do vetor de violação - vetor de violação tipo-tempo (setor *timelike*), que desempenha o papel de condutividade magnética quiral, como visto no capítulo anterior. É investigada a propagação ao longo da direção do campo magnético (configuração de Faraday), para a qual os índices de refração e as relações de dispersão são obtidos, bem como os modos eletromagnéticos associados. No limite de baixa frequência, estudaremos o surgimento de hélicons RCP e LCP devido à presença do fator quiral V_0 . Efeitos ópticos, como birrefringência e dicroísmo, são também examinados, onde o fator quiral tem implicações significativas em faixas de frequência específicas. Os resultados deste capítulo estão apresentados conforme a abordagem original realizada na Ref. [82].

Sumário

4.1	Eletrodinâmica de MCFJ em meios contínuos	75
4.2	Propagação de ondas em plasmas quirais	77
4.2.1	Modo longitudinal	78
4.2.2	Modo transversal	78
4.2.3	Sobre o índice n_R	79
4.2.4	Sobre o índice n_L	81
4.2.5	Sobre o índice n_E	81
4.2.6	Sobre o índice n_M	82
4.2.7	Modos de baixa frequência	84
4.2.8	Comportamento das relações de dispersão	84
4.3	Birrefringencia em plasmas quirais	85
4.3.1	Poder de rotação	85
4.3.2	Coefficiente de dicroísmo	89

4.1 Eletrodinâmica de MCFJ em meios contínuos

Com intuito de estudar a propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas dentro do contexto de uma eletrodinâmica estendida, devemos primeiro obter a equação de onda da teoria para meios contínuos.

Isto pode ser realizado através de uma adaptação do modelo apresentado no capítulo 3, que consiste em escrever o termo cinético na forma

$$\mathcal{L}_{kinetic} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (4.1.1)$$

onde $G^{\mu\nu}$ é o tensor *field-strength* em meios materiais [150], definido por

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (4.1.2)$$

onde $\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$ é chamado de tensor constitutivo, por definir a estrutura das relações constitutivas do meio. As principais propriedades do tensor $\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$ estão brevemente comentadas no Apêndice F.

Adotando a configuração

$$\chi^{0imn} = 0, \quad \chi^{0i0j} = \varepsilon^{ij}, \quad \frac{1}{2}\chi^{ijmn}\epsilon_{ijl}\epsilon_{mnk} = \mu_{lk}^{-1}, \quad (4.1.3)$$

é possível reproduzir as relações constitutivas usuais para um meio material. Por exemplo, para o setor elétrico:

$$G^{0i} = \chi^{0i0j}F_{0j} \rightarrow G^{0i} = -\varepsilon^{ij}E^j \rightarrow G^{0i} = -D^i, \quad (4.1.4)$$

obtemos a componente (i) do vetor deslocamento elétrico $\mathbf{D}$. Da mesma forma para o setor magnético, que fornece:

$$G^{ji} = -\epsilon_{jik}H^k, \quad (4.1.5)$$

onde consideramos também as relações para as componentes do tensor eletromagnético, $F_{0i} = E^i$ e $F_{ij} = -\epsilon_{ijk}B^k$. A Lagrangiana de MCFJ em meios materiais, no SI, é dada na seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(K_{AF})_{\mu}A_{\nu}F_{\alpha\beta} - A_{\mu}J^{\mu}, \quad (4.1.6)$$

onde adotamos $(K_{AF})^{\mu} = ((K_{AF})^0, \mathbf{K}_{AF})$ para representar o campo de fundo da teoria de CFJ. A Lagrangiana (4.1.6) nos leva à seguinte equação de movimento, expressa na forma tensorial:

$$\partial_{\rho}G^{\rho\kappa} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\beta\mu\nu}(K_{AF})_{\beta}F_{\mu\nu} = J^{\kappa}, \quad (4.1.7)$$

da qual, juntamente com a identidade de Bianchi, obtemos as equações de MCFJ num meio contínuo:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = J^0 - \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B}, \quad (4.1.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} + (K_{AF})_0 \mathbf{B} + \mathbf{b} \times \mathbf{E}, \quad (4.1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.1.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (4.1.11)$$

Observe que estas equações são distintas das equações de MCFJ escritas no vácuo [71], sendo agora expressas em termos dos campos auxiliares $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$. Faremos uso destas equações para estudar a propagação

de ondas eletromagnéticas em plasmas, realizando um processo similar ao do capítulo 2.

Tratando as equações de MCFJ no espaço de Fourier (vide Apêndice G), obtemos a seguinte equação de onda para o campo elétrico:

$$k^i (k^j E^j) - k^2 E^i = -\omega^2 \mu_0 \bar{\varepsilon}_{ij}(\omega) E^j, \quad (4.1.12)$$

onde definimos o tensor de permissividade,

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ij}(\omega) + i \frac{k_{AF}^0}{\omega^2} \epsilon_{ikj} k^k + i \epsilon_{ikj} \frac{k_{AF}^k}{\omega}. \quad (4.1.13)$$

Usando a definição para o índice de refração $n = ck/\omega$, a equação de onda modificada pode ser expressa na forma

$$M_{ij} E^j = 0, \quad (4.1.14)$$

com M_{ij} dado por

$$M_{ij} = n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \frac{\varepsilon_{ij}(\omega)}{\varepsilon_0} - \frac{i}{\omega} (V_0 \epsilon_{ikj} n^k + \epsilon_{ikj} V^k), \quad (4.1.15)$$

onde

$$V_0 = k_{AF}^0 / c\varepsilon_0, \quad V^k = k_{AF}^k / \varepsilon_0, \quad (4.1.16)$$

são redefinições para as componentes do *background*, agora representado por $V^\mu = (V_0, V^i)$. Como visto no Capítulo 2, a matriz da permissividade,

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & -\frac{i\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ \frac{i\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix}, \quad (4.1.17)$$

contém as informações relevantes para a descrição de plasmas frios magnetizados.

Nosso estudo prosseguirá através da relação (4.1.14), onde temos a presença das componentes temporal e espacial de $(K_{AF})^\mu$. Como já dito, trataremos neste capítulo o caso de vetor de violação tipo-tempo, onde é levado em consideração apenas a contribuição da componente temporal do campo de fundo, ou seja, $V^\mu = (V_0, 0)$ (componente espacial nula). Dedicaremos o capítulo seguinte exclusivamente ao caso de vetor de violação tipo-espaco, no qual levaremos em conta apenas a contribuição da componente espacial, ou seja, $V^\mu = (0, \mathbf{V})$.

4.2 Propagação de ondas em plasmas quirais

Nesta seção, derivamos os modos eletromagnéticos coletivos do plasma frio quiral regido pela permissividade (4.1.13) para a configuração de Faraday, ou seja, $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$. Considerando o caso de vetor de

violação tipo-tempo, implementamos $\mathbf{K}_{\text{AF}} = 0$ na Eq. (4.1.14), que torna-se

$$\left[n^2 \delta_{ij} - n^i n^j - \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0} - i \frac{V_0}{\omega} \epsilon_{ikj} n^k \right] E^j = 0. \quad (4.2.1)$$

Tomando a expressão da permissividade elétrica do plasma magnetizado, dada em Eq. (4.1.17), obtemos um sistema linear homogêneo,

$$\begin{bmatrix} n^2 - n_x^2 - S & iD - n_x n_y + i(V_0/\omega) n_z & -n_x n_z - i(V_0/\omega) n_y \\ -iD - n_x n_y - i(V_0/\omega) n_z & n^2 - n_y^2 - S & -n_y n_z + i(V_0/\omega) n_x \\ -n_x n_z + i(V_0/\omega) n_y & -n_y n_z - i(V_0/\omega) n_x & n^2 - n_z^2 - P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta E_x \\ \delta E_y \\ \delta E_z \end{bmatrix} = 0. \quad (4.2.2)$$

Consideremos, por simplicidade, o caso em que o índice de refração é paralelo ao campo magnético, $\mathbf{n} = n\hat{z}$, de modo que (4.2.2) reduz-se a

$$\begin{bmatrix} n^2 - S & iD + i(V_0/\omega) n & 0 \\ -iD - i(V_0/\omega) n & n^2 - S & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta E_x \\ \delta E_y \\ \delta E_z \end{bmatrix} = 0, \quad (4.2.3)$$

para o qual $\det[M_{ij}] = 0$ fornece as relações de dispersão

$$P \left(\omega^2 (n^2 - S)^2 - (\omega D + n V_0)^2 \right) = 0. \quad (4.2.4)$$

4.2.1 Modo longitudinal

Ondas longitudinais, com $\mathbf{n} \parallel \delta \mathbf{E}$ ou $\delta \mathbf{E} = (0, 0, \delta E_z)$, podem surgir quando $P = 0$, com vibração não propagante na frequência de plasma, $\omega = \omega_p$, o mesmo resultado obtido dentro desta configuração para o caso usual, abordado no Capítulo 2. Portanto, a presença do fator quiral V_0 não acarreta em modificação para o modo longitudinal.

4.2.2 Modo transversal

Para ondas transversais, tem-se $\mathbf{n} \perp \delta \mathbf{E}$ ou $\delta \mathbf{E} = (\delta E_x, \delta E_y, 0)$, e a relação de dispersão (4.2.4) fornece

$$(n^2 - S)^2 - (D + n(V_0/\omega))^2 = 0, \quad (4.2.5)$$

que pode também ser escrita como uma equação de quarta ordem em n ,

$$n^4 - (2S + (V_0/\omega)^2) n^2 - 2D(V_0/\omega) n + (S^2 - D^2) = 0. \quad (4.2.6)$$

Considerando as definições para os parâmetros S e D , dadas em (2.4.26), a equação (4.2.6) fornece os seguintes quatro índices de refração:

$$n_{R,M} = -\frac{V_0}{2\omega} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{2\omega}\right)^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}}, \quad (4.2.7)$$

$$n_{L,E} = \frac{V_0}{2\omega} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{2\omega}\right)^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}}. \quad (4.2.8)$$

Observa-se que os índices n_R, n_L, n_E, n_M podem ser reais ou complexos (apresentando partes real e imaginária) em algumas faixas de frequência. Como bem sabemos, a parte real está associada à propagação, enquanto a parte imaginária está relacionada à absorção. Nota-se também que esses índices podem ter partes reais positivas ou negativas. Os índices n_L e n_M são sempre positivos e negativos, respectivamente. Por outro lado, os índices n_R e n_E podem ser positivos ou negativos, dependendo da faixa de frequência examinada. Vale mencionar novamente que os modos associados aos índices negativos provocam refração negativa (em uma faixa de frequência adequada), efeito tipicamente relacionado à metamateriais.

Assim como realizado na Subseção 2.4.3, os modos propagantes associados aos índices de refração em (4.2.7) e (4.2.8) são obtidos inserindo cada um na Eq. (4.2.3) e calculando o autovetor correspondente (relacionado ao autovalor nulo). Os campos elétricos emergentes correspondem a ondas RCP e LCP, estando associados aos índices $n_{R,M}$ e $n_{L,E}$, respectivamente:

$$n_R, n_M \mapsto \mathbf{E}_{RCP} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}. \quad (4.2.9)$$

$$n_L, n_E \mapsto \mathbf{E}_{LCP} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad (4.2.10)$$

Apesar da presença do fator quiral V_0 nos índices n_R, n_E , dados pelas Eqs. (4.2.7) e (4.2.8), obtemos as mesmas raízes do caso usual, $\omega_{\pm}$, dadas em (2.4.38). De fato, ω_- está relacionado ao índice de refração n_R , enquanto ω_+ está associado ao índice de refração n_E . Por outro lado, os índices de refração n_L e n_M não possuem raiz real.

A seguir, examinamos o comportamento de cada um dos quatro índices de refração obtidos, destacando suas zonas de absorção e propagação.

4.2.3 Sobre o índice n_R

Iniciamos discutindo algumas propriedades do índice de refração n_R . O comportamento de n_R em termos do parâmetro adimensional ω/ω_c está ilustrado na Fig. 4.1, que mostra as partes real e imaginária do índice de refração n_R . Destacamos:

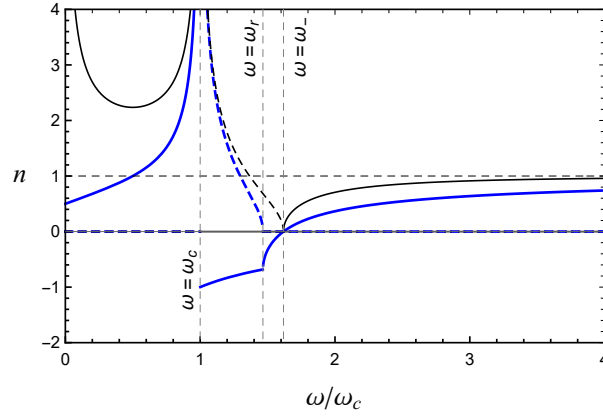


Figura 4.1: Índice de refração n_R em função da frequência ω . A linha azul tracejada (preta) corresponde à parte imaginária de n_R (n_-), enquanto a linha azul sólida (preta) representa a parte real de n_R (n_+). Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 2\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

- (i) O índice n_R assume um valor finito quando $\omega \rightarrow 0$, dado por

$$n_R(0) = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c} \right), \quad (4.2.11)$$

diferentemente do índice usual n_- , que tende a infinito próximo à origem.

- (ii) Para $0 < \omega < \omega_c$, n_R é positivo, pois a raiz quadrada em (4.2.7) é real, positiva e maior que o termo negativo que a precede. Essa positividade também ocorre para o índice usual n_- . Veja a linha preta nessa faixa de frequência na Fig. 4.1.
- (iii) Para $\omega \rightarrow \omega_c$, $n_R \rightarrow \infty$, e ocorre uma ressonância na frequência de ciclotron.
- (iv) Para $\omega_c < \omega < \omega_r$, aparece uma zona de índice de refração negativo com absorção, onde $\text{Re}[n_R] < 0$ e $\text{Im}[n_R] \neq 0$, como mostrado na Fig. 4.1. A frequência ω_r é a raiz do radicando na Eq. (4.2.7),

$$R_-(\omega) = 1 + \frac{V_0^2}{4\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}, \quad (4.2.12)$$

que fornece uma equação cúbica em ω .

- (v) Para $\omega_r < \omega < \omega_-$, encontra-se uma zona de índice de refração negativo sem absorção, ou seja, $\text{Re}[n_R] < 0$ e $\text{Im}[n_R] = 0$.
- (vi) Para $\omega > \omega_-$, a quantidade n_R é sempre positiva, correspondendo a uma zona de propagação, com $n_R \rightarrow 1$ no limite de altas frequências.

A faixa de frequência em que $\text{Im}[n_R] \neq 0$, ou seja, $\omega_c < \omega < \omega_r$, corresponde à zona de absorção para a onda RCP do metamaterial (índice de refração negativo). As faixas de frequência em que $\text{Im}[n_R] = 0$ definem a zona de propagação para a onda RCP.

4.2.4 Sobre o índice n_L

O índice n_L , dado na Eq. (4.2.8), não possui raiz real, apresentando as seguintes características:

- (i) Para $\omega \rightarrow 0$, $n_L \rightarrow +\infty$. Assim, a presença do termo V_0 torna o índice de refração real e positivamente divergente na origem, diferindo do comportamento usual do índice n_+ , veja Eq. (2.4.35), que é complexo e divergente, $\text{Im}[n_+] \rightarrow \infty$, na origem (vide Fig. 2.3a).
- (ii) Para $\omega > 0$, é necessário analisar o radicando na Eq. (4.2.8),

$$R_+(\omega) = 1 + \frac{V_0^2}{4\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}, \quad (4.2.13)$$

pois ele pode ser positivo ou negativo, o que determina a ausência ou presença de uma zona de absorção, respectivamente. Note que para $\omega > \omega_+$ o termo $1 - \omega_p^2/\omega(\omega + \omega_c)$ é maior que zero (ω_+ é a raiz desse termo), de modo que R_+ é positivo. Portanto, a possibilidade de R_+ ser negativo ocorre apenas no intervalo $0 < \omega < \omega_+$, para o qual o termo $1 - \omega_p^2/\omega(\omega + \omega_c)$ é menor que zero. Assim, a positividade para R_+ é estabelecida pela condição,

$$\frac{V_0^2}{4\omega^2} > \left| 1 - \frac{4\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \right|_{\omega < \omega_+}, \quad (4.2.14)$$

para a qual R_+ é sempre positivo e o índice de refração n_L é real para qualquer $\omega > 0$. Isso corresponde a um modo de propagação para todo o domínio de frequência. O comportamento de n_L em termos do parâmetro adimensional ω/ω_c , considerando a condição (4.2.14), ou seja, $R_+ > 0$, é mostrado na Fig. 4.2.

- (iii) Por outro lado, para

$$\frac{V_0^2}{4\omega^2} < \left| 1 - \frac{4\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \right|_{\omega < \omega_+}, \quad (4.2.15)$$

tem-se $R_+ < 0$ e n_L torna-se complexo, com $\text{Im}[n_L] \neq 0$, determinando a abertura de uma zona de absorção localizada no intervalo $\omega_i < \omega < \omega_f$, como mostrado na Fig. 4.3. As frequências ω_i e ω_f são raízes positivas e reais de R_+ , uma equação cúbica na frequência.

4.2.5 Sobre o índice n_E

A quantidade n_E é um índice de refração que só existe como uma grandeza positiva devido à presença do termo quiral de violação de Lorentz. No caso em que $V_0 = 0$, a segunda relação na Eq. (4.2.8) fornece $\text{Re}[n_E] < 0$ (índice de refração negativo). Para $V_0 \neq 0$, o índice n_E apresenta uma pequena faixa de positividade, $\text{Re}[n_E] > 0$, que fornece propagação para a onda LCP associada. Apresentamos abaixo alguns aspectos de n_E :

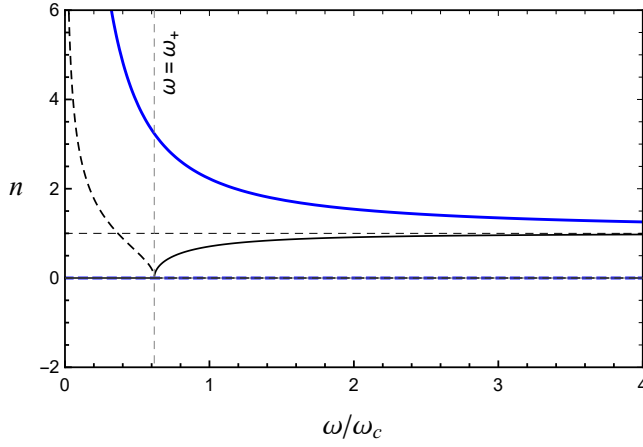


Figura 4.2: Linhas azuis: índice de refração n_L para a condição (4.2.14), $R_+ > 0$. Linhas pretas: índice de refração n_+ , dado em Eq. (2.4.35). As linhas tracejadas (sólidas) correspondem às partes imaginárias (reais) de n_L e n_+ . Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 2\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

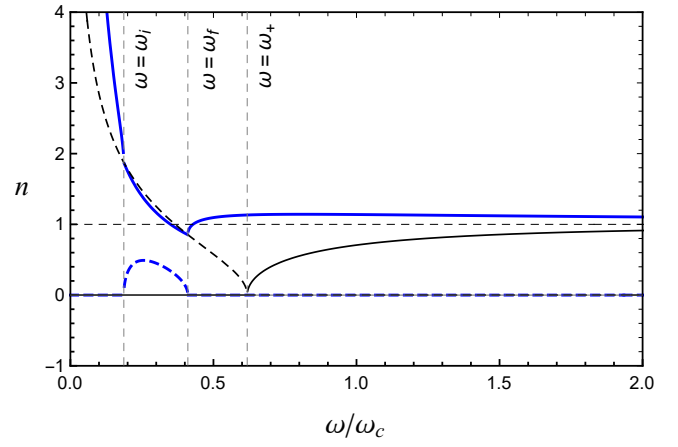


Figura 4.3: Linhas azuis: índice de refração n_L para a condição (4.2.15), $R_+ < 0$. Linhas pretas: índice de refração n_+ , dado em Eq. (2.4.35). As linhas tracejadas (sólidas) correspondem às partes imaginárias (reais) de n_L e n_+ . Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 0.7\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

- (i) Para $\omega \rightarrow 0$, o índice n_E tende a um valor finito na origem,

$$n_E(0) = \frac{1}{V_0} \left[\frac{\omega_p^2}{\omega_c} \right], \quad (4.2.16)$$

que é inversamente proporcional à magnitude do fator quiral, V_0 . Esse comportamento distinto para o regime de baixas frequências também implica em um helicon LCP, inexistente no caso usual.

- (ii) Como o radicando de n_E é o mesmo de n_L , veja Eq. (4.2.8), aplica-se aqui o mesmo procedimento usado para n_L . Para valores de V_0 que satisfazem a condição (4.2.14), $R_+ > 0$, n_E é sempre real, $\text{Im}[n_E] = 0$, sendo positivo no intervalo $0 < \omega < \omega_+$ e negativo para $\omega > \omega_+$, já que $\sqrt{R_+} > V_0/2\omega$ nessa faixa. As partes real e imaginária de n_E são representadas na Fig. 4.4.
- (iii) Considerando a condição (4.2.15), n_E torna-se complexo e exibe uma zona de absorção, $\text{Im}[n_E] \neq 0$, no intervalo $\omega_i < \omega < \omega_f$, com $\omega_i, \omega_f < \omega_+$, como mostrado na Fig. 4.5. Essa figura mostra as partes real e imaginária de n_E sob a condição (4.2.15).

4.2.6 Sobre o índice n_M

O índice adicional n_M , dado na Eq. (6.1.4), é sempre negativo (refração negativa) e não possui raiz real. O comportamento de n_M em termos do parâmetro adimensional ω/ω_c é mostrado na Fig. 4.6. Observamos as seguintes características:

- (i) Para $0 < \omega < \omega_c$, n_M é real e negativo, pois a raiz quadrada em (4.2.7) é real. Este é o mesmo comportamento do índice $-n_-$. Veja a linha preta na Fig. (4.6).

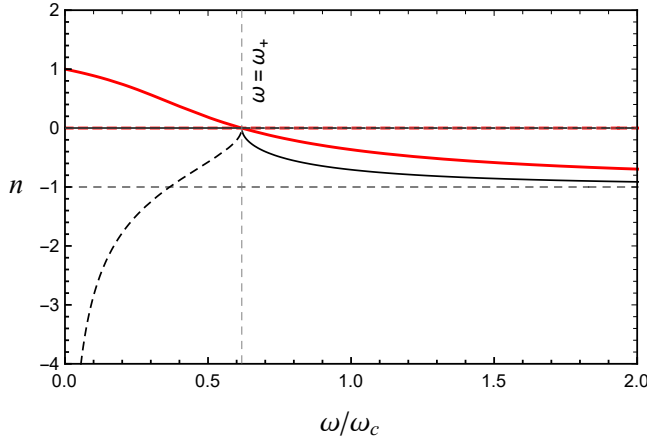


Figura 4.4: Linha vermelha: gráfico do índice n_E para a condição (4.2.14), $R_+ > 0$. Linha preta: gráfico do índice $-n_+$, dado em Eq. (2.4.35). Linhas tracejadas (sólidas) representam as partes imaginárias (reais) de n_E e $-n_+$. Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$ e $V_0 = 2\omega_p$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

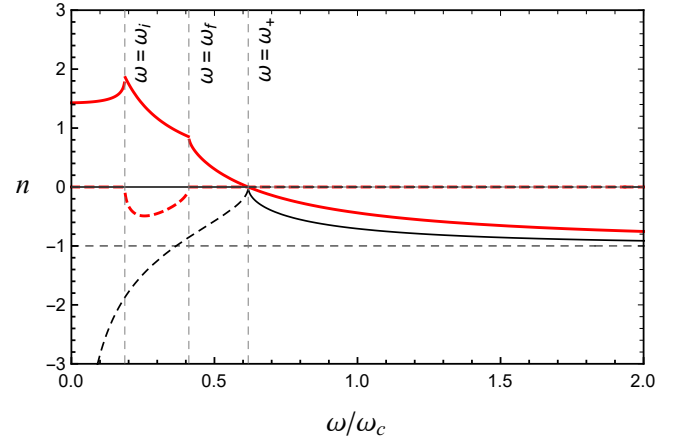


Figura 4.5: Linha vermelha: gráfico do índice n_E para a condição (4.2.15), $R_+ < 0$. Linha preta: gráfico do índice $-n_+$, dado em Eq. (2.4.35). Linhas tracejadas (sólidas) representam as partes imaginárias (reais) de n_E e $-n_+$. Aqui, definimos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 0.7\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

- (ii) Para $\omega \rightarrow \omega_c$, $n_M \rightarrow -\infty$, e ocorre uma ressonância na frequência de ciclotron.
- (iii) Para $\omega_c < \omega < \omega_r$, aparece uma zona de absorção para o metamaterial, $\text{Re}[n_M] < 0$ e $\text{Im}[n_M] \neq 0$, enquanto o índice $-n_-$ é puramente imaginário, com $\text{Re}[n_M] = 0$ e $\text{Im}[n_M] \neq 0$, como mostrado na Fig. 4.6. A frequência ω_r é a raiz de R_- .
- (iv) Para $\omega > \omega_r$, a quantidade n_M é sempre negativa, correspondendo a uma zona de propagação negativa, com $n_M \rightarrow -1$ no limite de alta frequência.

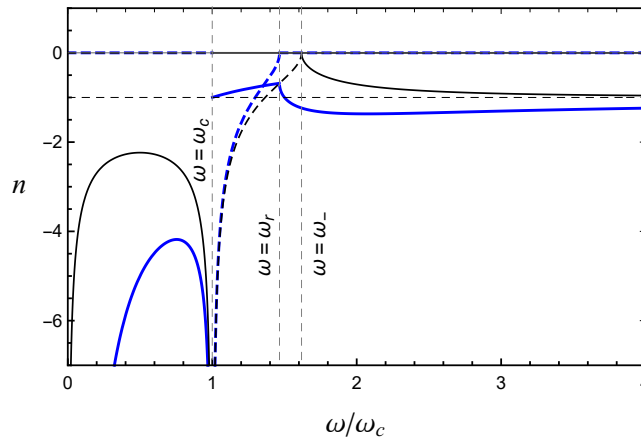


Figura 4.6: Linha azul: gráfico do índice n_M . Linha preta: gráfico da parte real de $-n_-$, dado em Eq. (2.4.35). Linhas tracejadas (sólidas) representam as partes imaginárias (reais) de n_M e $-n_-$. Aqui, usamos: $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 2\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

4.2.7 Modos de baixa frequência

Nesta seção, investigaremos o regime para baixa frequência para os índices obtidos nas seções anteriores. Neste regime, vale:

$$\omega \ll \omega_p, \quad \omega_c \ll \omega_p, \quad \omega \ll \omega_c, \quad (4.2.17)$$

que quando implementados nos índices Eq. (4.2.7) e Eq. (4.2.8), resultam nos índices

$$\bar{n}_{R,E} = \frac{\omega_p^2}{\omega_c V_0}, \quad (4.2.18)$$

$$\bar{n}_{L,M} = -\frac{\omega_p^2}{\omega_c V_0} \pm \frac{V_0}{\omega}, \quad (4.2.19)$$

onde usamos a notação "barra" para indicar as grandezas relacionadas ao hélicon.

Como visto na Seção 2.5, no contexto usual de plasmas magnetizados ocorrem hélicons RCP, conhecidos como *whistlers*. Neste contexto quiral, observamos a existência de hélicons RCP e LCP, que propagam-se neste regime de baixa frequência devido à presença da componente temporal, V_0 . Os modos helicon dados por $\bar{n}_{R,E}$ têm índices constantes, não dispersivos, que dependem do inverso de V_0 . Por outro lado, hélicons dispersivos de refração negativa estão associados a $\bar{n}_M$, e também a $\bar{n}_L$ para $\omega < \omega_c V_0^2 / \omega_p^2$. Note que o termo V_0 / ω aparece como um canal de distinção entre os hélicons associados a $\bar{n}_{R,E}$ e $\bar{n}_{L,M}$.

O modo hélicon usual do plasma frio é recuperado se considerarmos, além das relações (4.2.17), a condição $V_0 \ll \omega$. Com isso, a expansão de $n_{R,E}$ em Eq. (4.2.7) e $n_{L,M}$ em Eq. (4.2.8) fornecem

$$\bar{n}_{R,M} = \pm \omega_p \sqrt{\frac{1}{\omega \omega_c}}, \quad (4.2.20)$$

que é o mesmo resultado do caso usual [vide Eq. (2.5.5)], e $\bar{n}_{L,E}$ sendo puramente imaginário (não propagante).

4.2.8 Comportamento das relações de dispersão

Usualmente, as relações de dispersão associadas aos índices de refração são visualizadas em gráficos $\omega \times k$. A seguir, apresentamos gráficos adimensionais, $(\omega / \omega_c) \times (k / \omega_c)$, para cada um dos índices obtidos neste capítulo.

As relações de dispersão associadas a n_R e n_M são ilustradas na Fig. 4.7 para $\omega_c = \omega_p$. A propagação ocorre para $0 < \omega < \omega_c$ e $\omega > \omega_-$, enquanto a absorção acontece em $\omega_c < \omega < \omega_r$. O intervalo $\omega_r < \omega < \omega_-$ corresponde à zona de propagação com refração negativa ($k < 0$) para n_R . O índice de refração n_M é negativo para $k < 0$ e $\omega > 0$.

Na Figura 4.8 são ilustradas as relações de dispersão relacionadas a n_L e n_E . A onda associada a n_L se propaga para todas as frequências. Para n_E , a zona de propagação não convencional ocorre em $0 < \omega < \omega_+$. Para $\omega > \omega_+$, ocorre uma zona de propagação com refração negativa. Para os índices

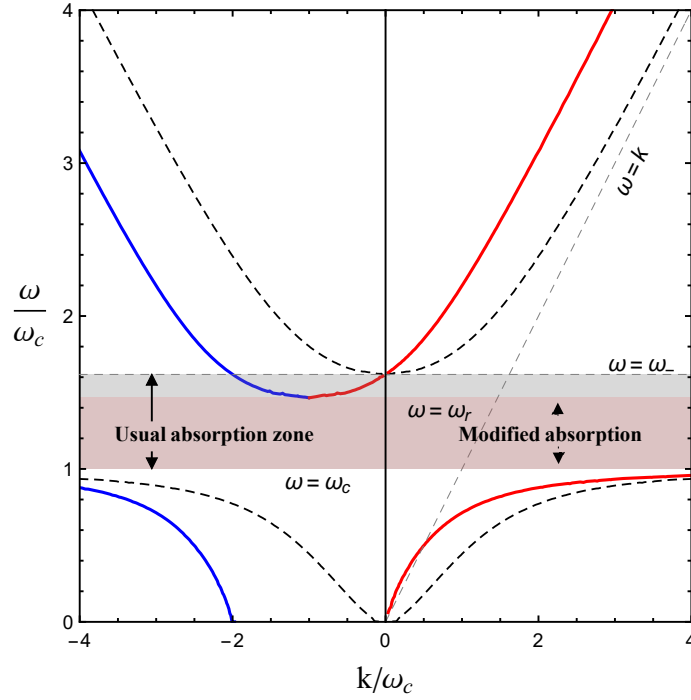


Figura 4.7: Gráfico das relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_R (linha vermelha sólida) e n_M (linha azul sólida). A linha preta tracejada corresponde aos índices do caso usual ($\pm n_-$). A área destacada em vermelho (cinza) indica a zona de absorção para $n_{R,M}$ ($\pm n_-$). Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$ e $V_0 = 2\omega_p$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

usuais, $\pm n_+$, a zona de absorção é $0 < \omega < \omega_+$.

Por fim, a Fig. 4.9 mostra as relações de dispersão para n_L e n_E no caso em que ocorre uma zona de absorção modificada para $\omega_i < \omega < \omega_f$, enquanto a propagação livre ocorre para $0 < \omega < \omega_i$ e $\omega > \omega_f$. As frequências ω_i , ω_f e ω_r definem os limites para zonas de propagação incomuns. Como já discutido, essas frequências são obtidas a partir dos radicandos (4.2.12) e (4.2.13).

4.3 Birrefringencia em plasmas quirais

Nesta seção investigaremos o efeito de birrefringência para o sistema quiral em questão, no qual, de acordo com a análise anterior dos índices de refração, os modos RCP e LCP se propagam com velocidades de fase diferentes para cada valor de frequência gerando birrefringência circular na banda de propagação, expressa em termos do poder de rotação (2.6.14). Neste caso, as velocidades de fase associadas são $v_R = c/(n_R)$, $v_L = c/(n_L)$, $v_E = c/(n_E)$, $v_M = c/(n_M)$, definidas com os índices n_R , n_L , n_E , n_M dados nas Eqs. (4.2.7) e (4.2.8).

4.3.1 Poder de rotação

Como já comentado, meios quirais possuem atividade óptica, o que também pode ser investigado através do coeficiente PR, como realizado para metamateriais quirais [151–153], semimetais quirais [154, 155], e na determinação da direção de rotação de pulsares [156]. De posse de quatro índices de

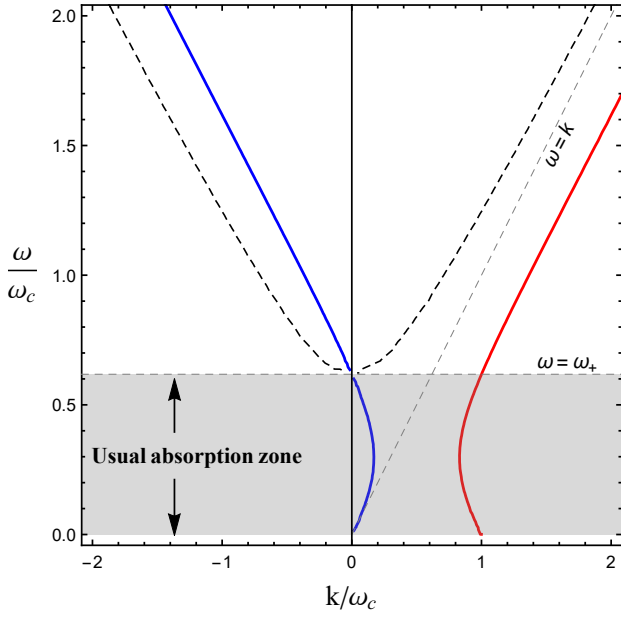


Figura 4.8: Gráfico das relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_L (linha vermelha sólida) e n_E (linha azul sólida). A linha tracejada corresponde aos índices $\pm n_+$ do caso usual. A área destacada em cinza indica a zona de absorção para $\pm n_+$, onde também ocorre propagação. Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$ e $V_0 = \omega_p$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

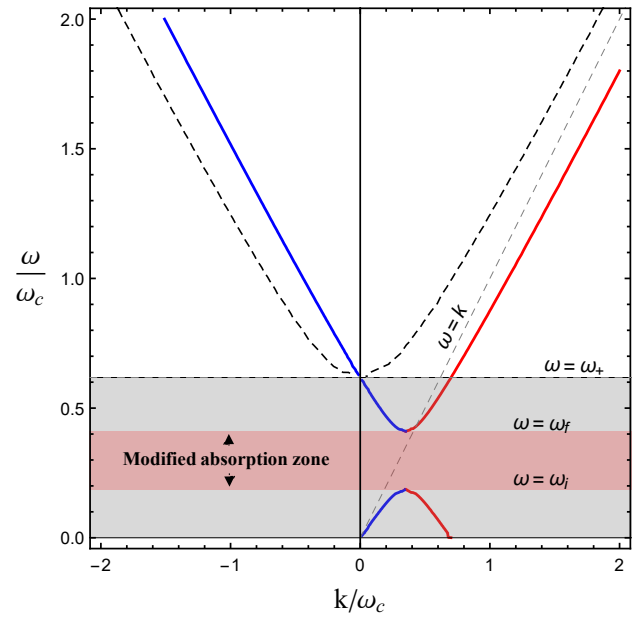


Figura 4.9: Gráfico das relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_L (linha vermelha sólida) e n_E (linha azul sólida). A linha tracejada corresponde ao caso usual com índices $\pm n_+$. As áreas destacadas em vermelho (cinza) indicam a zona de absorção para $n_{L,E}$ ($\pm n_+$). Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$ e $V_0 = 0.7\omega_c$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

refração, precisamos considerar os índices de refração n_L , n_E , associados à onda LCP, e os índices n_R , n_M , associados à onda RCP. Isso permite, em princípio, determinar quatro RPs distintos nas zonas de propagação, alguns dos quais iremos examinar nesta seção, como realizado na abordagem original (vide Ref. [82].)

Iniciamos escrevendo o poder de rotação definido em termos dos índices de refração n_L e n_R ,

$$\delta_{LR} = -\frac{\omega}{2} (\text{Re}[n_L] - \text{Re}[n_R]), \quad (4.3.1)$$

ou explicitamente,

$$\delta_{LR} = -\frac{\omega}{2} \text{Re} \left[V_0/\omega + \sqrt{R_+} - \sqrt{R_-} \right], \quad (4.3.2)$$

onde R_+ e R_- são dados nas Eqs. (4.2.12) e (4.2.13), respectivamente. Calculando a raiz do PR acima, encontra-se uma frequência positiva, dada por

$$\hat{\omega} = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_p^2/2 - \frac{\omega_p^2 \sqrt{4\omega_c^2 + V_0^2}}{2V_0}}, \quad (4.3.3)$$

onde o PR (4.3.2) sofre uma inversão de sinal. Na Fig. 4.10, ilustramos o comportamento do PR para a condição (4.2.14). Para o intervalo $0 < \omega < \hat{\omega}$, o δ_{LR} é negativo, e para $\hat{\omega} < \omega < \omega_c$, é positivo. Em $\omega = \hat{\omega}$, o poder de rotação sofre uma inversão (troca de sinal). Para $\omega > \omega_c$, o PR é sempre negativo. No

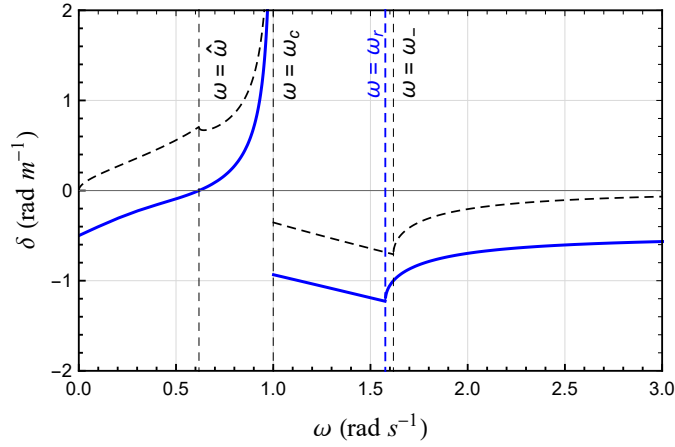


Figura 4.10: A linha azul sólida representa o poder de rotação (4.3.2) definido pelos índices de refração n_L e n_R , para a condição (4.2.14). A linha preta tracejada corresponde ao poder de rotação usual (2.6.16). Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = \omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

entanto, é necessário estar atento ao intervalo $\omega_c < \omega < \omega_r$, onde o índice de refração n_R tem uma parte imaginária e a onda RCP é absorvida. Em $\omega = \omega_r$, a parte real de n_R sofre uma mudança abrupta (vide Fig. 4.1), que também aparece no perfil do PR da Fig. 4.10.

Destaca-se aqui a inversão do RP, que ocorre em $\omega = \hat{\omega}$, algo não usual na teoria de plasmas frios. No entanto, inversão de PR foi reportada em sistemas de grafeno [94], metais e semimetais de Weyl com baixa densidade de elétrons e condutividade quiral [154, 155], plasmas em rotação [157], e dielétricos bi-isotrópicos suportando corrente magnética quiral [158].

Podemos afirmar com segurança que ambos os modos associados a n_L e n_R se propagam para $\omega > \omega_-$, faixa na qual a magnitude do PR diminui monotonicamente com ω , aproximando-se de seu valor assintótico, $-V_0/2$ (ver Fig. 4.10). Assumindo o limite onde $\omega \gg (\omega_p, \omega_c)$, podemos escrever

$$n_{L,R} \approx 1 \pm \frac{V_0}{2\omega} + \frac{V_0^2}{8\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega \pm \omega_c)}, \quad (4.3.4)$$

de modo que o PR é

$$\delta_{LR} \approx -\frac{V_0}{2} - \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2\omega^2}. \quad (4.3.5)$$

Note que tomando o limite $V_0 \rightarrow 0$, o PR usual do efeito Faraday (2.6.19) é recuperado para o regime de alta frequência. Também é interessante destacar que o efeito Faraday desaparece para um campo magnético nulo, $\omega_c = 0$. No entanto, a birrefringência ainda permanece, devido à presença do termo quiral, que produz o seguinte RP:

$$\delta \approx -V_0/2. \quad (4.3.6)$$

Para a condição (4.2.15), o PR (4.3.2) também exibe uma inversão de sinal e um perfil muito semelhante ao da Fig. 4.10, de modo que não será mostrado aqui.

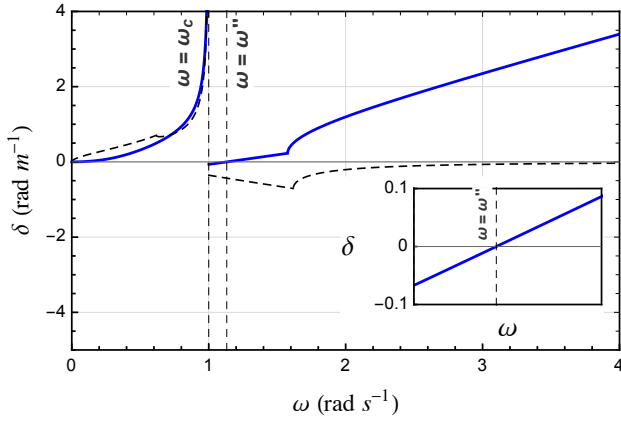


Figura 4.11: Linhas azuis sólidas: gráfico do poder de rotação (4.3.8) associado aos índices de refração n_E e n_R para a condição (4.2.14). A linha tracejada representa o poder de rotação usual (2.6.16). Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = \omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. O gráfico em destaque mostra o comportamento de δ em torno de $\omega = \omega''$.

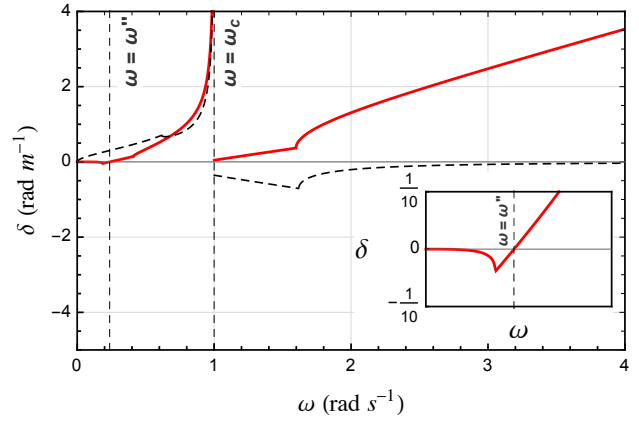


Figura 4.12: Linhas vermelhas sólidas: poder de rotação (4.3.8) associado aos índices de refração n_E e n_R para a condição (4.2.15). A linha tracejada representa o poder de rotação usual (2.6.16). Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 0.7\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. O gráfico em destaque mostra o comportamento de δ em torno de $\omega = \omega''$.

Considerando agora os índices de refração n_E e n_R , o poder de rotação é

$$\delta_{ER} = -\frac{\omega}{2} (\text{Re}[n_E] - \text{Re}[n_R]), \quad (4.3.7)$$

ou,

$$\delta_{ER} = -\frac{\omega}{2} \text{Re} \left[V_0/\omega - \sqrt{R_+} - \sqrt{R_-} \right]. \quad (4.3.8)$$

Lembrando que a onda LCP associada a n_E tem uma propagação livre convencional para $\omega < \omega_+$ e propagação com índice de refração negativo ($n_E < 0$) para $\omega > \omega_+$ (com $\omega_+ < \omega_c$), a magnitude do PR é amplificada nesta última zona. Este comportamento é mostrado na Fig. 4.11, que mostra o PR (4.3.8) para n_E dado pela condição (4.2.14), $R_+ > 0$. O PR é positivo para $\omega < \omega_c$ e negativo para $\omega_c < \omega < \omega''$, tornando-se positivo novamente para $\omega > \omega''$, onde ω'' é a frequência de inversão.

Para n_E dado pela condição (4.2.15), o PR é mostrado na Fig. 4.12, revelando uma pequena inversão em $\omega'' < \omega_c$. Note que o aumento do PR com ω , mostrado nas Figs. 4.11 e 4.12, é devido ao comportamento negativo do índice n_E para $\omega > \omega_+$, ou seja, amplificação associada à refração negativa.

No limite assintótico, onde $\omega \gg (\omega_p, \omega_c)$, o PR (4.3.8) se comporta como

$$\delta_{ER} \approx \omega - \frac{V_0}{2}, \quad (4.3.9)$$

apresentando um comportamento linear predominante em ω , como aparece nas Figs. 4.11 e 4.12. Também vale mencionar que o limite $V_0 \rightarrow 0$, implicando $\delta \approx \omega$, não representa um resultado válido para plasmas magnetizados usuais, onde o PR (4.3.8) não é definido.

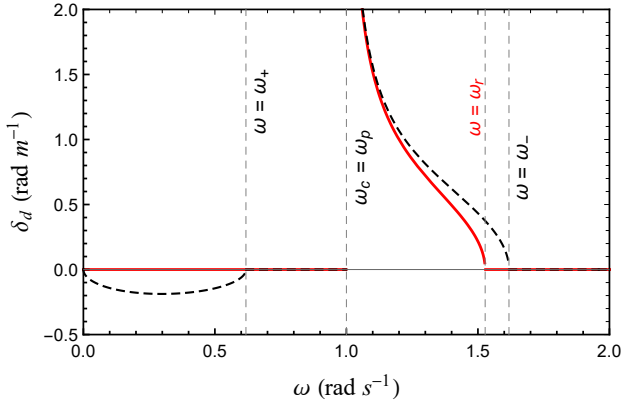


Figura 4.13: Gráfico do coeficiente de dicroísmo (4.3.11) (linhas vermelhas sólidas) associado aos índices de refração n_L e n_R , sob a condição (4.2.14). A linha preta tracejada representa o coeficiente de dicroísmo usual (2.6.21). Aqui $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = (3/2)\omega_c$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

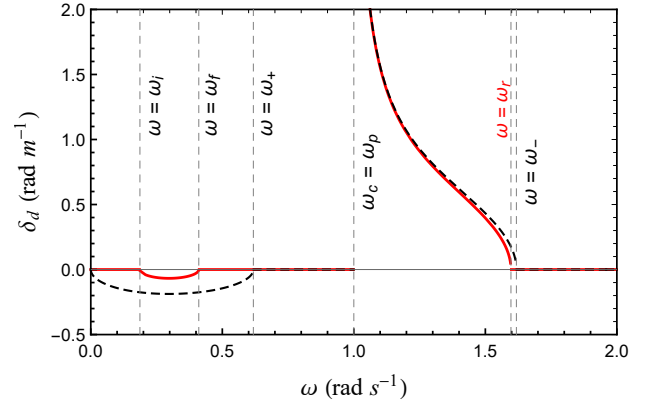


Figura 4.14: Gráfico do coeficiente de dicroísmo (4.3.12) (linhas vermelhas sólidas) associado aos índices de refração n_L e n_R , sob a condição (4.2.15). A linha tracejada representa o coeficiente de dicroísmo usual (2.6.21). Aqui, definimos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 0.7\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

4.3.2 Coeficiente de dicroísmo

Como já sabemos, a absorção depende da magnitude das partes imaginárias dos índices de refração. Quando um modo é mais absorvido que o outro, ocorre dicroísmo. Considerando os índices de refração n_L e n_R , o coeficiente de dicroísmo circular é

$$\delta_{dLR} = -\frac{\omega}{2} (\text{Im}[n_L] - \text{Im}[n_R]). \quad (4.3.10)$$

Sob a condição (4.2.14), apenas n_R tem parte imaginária (localizada no intervalo $\omega_c < \omega < \omega_-$), enquanto n_L é real para $\omega > 0$. Neste caso, o coeficiente de dicroísmo é dado por

$$\delta_{dLR} = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 < \omega < \omega_c, \\ \sqrt{R_-}, & \text{para } \omega_c < \omega < \omega_r, \\ 0, & \text{para } \omega > \omega_r, \end{cases} \quad (4.3.11)$$

sendo não nulo apenas no intervalo $\omega_c < \omega < \omega_-$, como mostrado na Fig 4.13.

Considerando a condição (4.2.15), tanto n_R quanto n_L têm partes imaginárias não nulas nos intervalos $\omega_c < \omega < \omega_r$ e $\omega_i < \omega < \omega_f$, respectivamente. O coeficiente de dicroísmo é nulo para $0 < \omega < \omega_i$, $\omega_f < \omega < \omega_c$, e $\omega > \omega_r$, sendo não nulo apenas para dois intervalos,

$$\delta_{dLR} = \begin{cases} -\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{R_+}, & \text{para } \omega_i < \omega < \omega_f, \\ +\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{R_-}, & \text{para } \omega_c < \omega < \omega_r, \end{cases} \quad (4.3.12)$$

cujos comportamento geral é exibido na Fig. 4.14.

Tabela 4.1: Propriedades de propagação de plasmas frios em distintos contextos.

Propriedade	Plasma frio na eletrodinâmica usual	Plasma frio na teoria MCFJ com $J_B = k_{AF}^0 \mathbf{B}$
Modos de propagação	RCP e LCP	RCP para $n_{R,M}$, LCP para $n_{L,E}$; (Eqs. (4.2.7) e (4.2.8))
Birrefringência	PR (Eq. (2.6.16))	PR δ_{LR} e δ_{ER}
Inversão de PR	Não	Sim
Absorção	Sim (dicroísmo)	Sim (dicroísmo)
Hélicons	RCP	RCP e LCP, habilitados pela corrente magnética (Eqs. (4.2.18) e (4.2.19))

Para os índices de refração n_E e n_R , o coeficiente de dicroísmo circular é

$$\delta_{dER} = -\frac{\omega}{2} (\text{Im}[n_E] - \text{Im}[n_R]). \quad (4.3.13)$$

Se considerarmos n_E sob a condição (4.2.14), obtemos o mesmo comportamento da Fig. 4.13, pois n_E é sempre real, não contribuindo para o dicroísmo. Por outro lado, em relação à condição (4.2.15), tanto n_R quanto n_E têm partes imaginárias não nulas nos intervalos $\omega_c < \omega < \omega_r$ e $\omega_i < \omega < \omega_f$, respectivamente. Neste caso, temos

$$\delta_{dER} = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 < \omega < \omega_i, \\ +\frac{\omega}{2}\sqrt{R_+}, & \text{para } \omega_i < \omega < \omega_f, \\ 0, & \text{para } \omega_f < \omega < \omega_c, \\ +\frac{\omega}{2}\sqrt{R_-}, & \text{para } \omega_c < \omega < \omega_r, \\ 0, & \text{para } \omega > \omega_r. \end{cases} \quad (4.3.14)$$

O comportamento geral do coeficiente de dicroísmo (4.3.14) está ilustrado na Fig. 4.15.

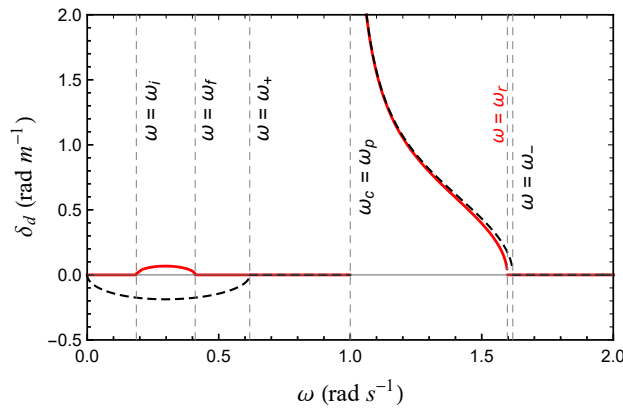


Figura 4.15: Gráfico dos coeficientes de dicroísmo (4.3.14) associados aos índices de refração n_E e n_R [para a condição (4.2.15)]. A linha tracejada representa o coeficiente de dicroísmo usual (2.6.21). Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = 0.7\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

A Tabela 4.1 compara os principais resultados obtidos neste capítulo com o caso de plasma frio

magnetizado usual: modos de propagação, rotatory power, dicroísmo e modos de baixa frequência. Nela a ocorrência de inversão de PR também é comparada.

PLASMAS FRIOS NO CONTEXTO DE MCFJ COM VETOR QUIRAL TIPO-ESPAÇO

Neste capítulo, estudamos a propagação e absorção em plasmas frios no contexto da eletrodinâmica de MCFJ, considerando um vetor de violação tipo-espaço (setor *spacelike*), que atua como condutividade Hall anômala. Partindo da equação de onda previamente obtida a partir das equações de MCFJ em meios materiais, determinamos os novos índices de refração e modos de propagação. Analisamos a propagação ao longo do eixo magnético, examinando os casos de vetor quiral paralelo e ortogonal ao campo magnético. Para os modos circulares, examinamos efeitos de birrefringência e dicroísmo, como também os modos hélicons, associado a modos de polarização circulares. Os resultados discutidos no presente capítulo estão apresentados conforme a abordagem original realizada na Ref. [83].

Sumário

5.1	Propagação de onda ao longo do eixo do campo magnético	92
5.1.1	Vetor quiral paralelo ao campo magnético	93
5.1.1.1	Sobre o índice n_R	95
5.1.1.2	Sobre o índice n_L	95
5.1.1.3	Modos de baixa frequência	97
5.1.1.4	Comportamento das relações de dispersão	98
5.1.1.5	Poder de rotação	99
5.1.1.6	Coeficiente de dicroísmo	100
5.1.2	Vetor quiral ortogonal ao campo magnético	102
5.1.2.1	Sobre o índice n_A	103
5.1.2.2	Sobre o índice n_B	104
5.1.2.3	Efeitos ópticos	104

5.1 Propagação de onda ao longo do eixo do campo magnético

No Capítulo 4 derivamos a equação de onda para meio material na teoria de MCFJ, dada em (4.1.14), que para o caso de vetor de violação tipo-espaço, ou seja, $V^\mu = (0, V^k)$, torna-se

$$\left[n^2 \delta_{ij} - n^i n^j - \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0} - i \frac{V^k}{\omega} \epsilon_{ikj} \right] E^j = 0, \quad (5.1.1)$$

onde $\varepsilon_{ij}(\omega)$ é o tensor de permissividade elétrica do plasma, escrito a seguir:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}, \quad (5.1.2)$$

com $S = 1 - \omega_p^2 / (\omega^2 - \omega_c^2)$, $D = \omega_c \omega_p^2 / \omega (\omega^2 - \omega_c^2)$, e $P = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$. Implementando o tensor (5.1.2) na equação de onda (5.1.1), obtemos o sistema

$$\begin{bmatrix} n^2 - n_x^2 - S & -n_x n_y + iD + i(V_z/\omega) & -n_x n_z - i(V_y/\omega) \\ -n_x n_y - iD - i(V_z/\omega) & n^2 - n_y^2 - S & -n_y n_z + i(V_x/\omega) \\ -n_x n_z + i(V_y/\omega) & -n_y n_z - i(V_x/\omega) & n^2 - n_z^2 - P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta E_x \\ \delta E_y \\ \delta E_z \end{bmatrix} = 0. \quad (5.1.3)$$

Prosseguiremos nossa análise para propagação da onda ao longo da direção do campo magnético, disposto no eixo z . Para isso, toma-se $\mathbf{n} = n\hat{z}$ na Eq. (5.1.3), que torna-se

$$\begin{bmatrix} n^2 - S & +iD + i(|\mathbf{V}|/\omega) \cos \beta & -i(|\mathbf{V}|/\omega) \sin \phi \sin \beta \\ -iD - i(|\mathbf{V}|/\omega) \cos \beta & n^2 - S & +i(|\mathbf{V}|/\omega) \sin \beta \cos \phi \\ i(|\mathbf{V}|/\omega) \sin \phi \sin \beta & -i(|\mathbf{V}|/\omega) \sin \beta \cos \phi & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta E_x \\ \delta E_y \\ \delta E_z \end{bmatrix} = 0, \quad (5.1.4)$$

onde utilizamos, sem perda de generalidade, a parametrização esférica

$$\mathbf{V} = |\mathbf{V}| (\sin \beta \cos \phi, \sin \beta \sin \phi, \cos \beta), \quad (5.1.5)$$

com o ângulo β definido entre o campo magnético externo $\mathbf{B}_0$ e o vetor de fundo $\mathbf{V}$.

Exigindo $\det[M_{ij}] = 0$ em Eq. (5.1.4), obtém-se

$$2P \left[D^2 - (n^2 - S)^2 \right] + \frac{|\mathbf{V}|^2}{\omega^2} (P + S - n^2) + \Gamma_\beta = 0, \quad (5.1.6)$$

onde

$$\Gamma_\beta = \frac{|\mathbf{V}|^2}{\omega^2} \cos(2\beta) (n^2 + P - S) + 4DP \frac{|\mathbf{V}|}{\omega} \cos(\beta). \quad (5.1.7)$$

Observa-se que a relação de dispersão (5.1.6) depende apenas do ângulo β . Assim, podemos organizar a análise da relação de dispersão (5.1.6) considerando dois cenários principais: (i) um vetor quiral paralelo ao campo magnético e (ii) um vetor quiral ortogonal ao campo magnético.

5.1.1 Vetor quiral paralelo ao campo magnético

Para o caso em que o vetor quiral é paralelo ao campo magnético, $\mathbf{V} \parallel \mathbf{B}_0$, toma-se $\beta \rightarrow 0$ em Eq. (5.1.6), que reduz-se a

$$P \left((n^2 - S)^2 - (D + |\mathbf{V}|/\omega)^2 \right) = 0. \quad (5.1.8)$$

A partir da Eq. (5.1.4), vemos que ondas longitudinais, com $\mathbf{n} \parallel \delta \mathbf{E}$ ou $\delta \mathbf{E} = (0, 0, \delta E_z)$, podem

ocorrer quando $P = 0$, com vibração não propagante na frequência do plasma, $\omega = \omega_p$.

Para ondas transversais, $\mathbf{n} \perp \delta\mathbf{E}$ ou $\delta\mathbf{E} = (\delta E_x, \delta E_y, 0)$, a relação de dispersão (5.1.8) se simplifica para

$$(n^2 - S)^2 - (D + |\mathbf{V}|/\omega)^2 = 0 \quad (5.1.9)$$

que, com as relações (2.4.26), fornece os seguintes índices de refração:

$$(n_R)^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} - \frac{|\mathbf{V}|}{\omega}, \quad (5.1.10)$$

$$(n_L)^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} + \frac{|\mathbf{V}|}{\omega}. \quad (5.1.11)$$

Pode-se notar que índices acima podem ser reais ou complexos em alguns intervalos de frequência, enriquecendo seu comportamento em comparação com o habitual plasma frio. Como será mostrado a seguir, tais zonas de propagação e absorção são modificadas pela presença do vetor quiral $\mathbf{V}$.

Além disso, os campos elétricos resultantes (os modos de propagação), associados aos índices n_R e n_L , são derivados da Eq. (5.1.4), resultando em ondas LCP e RCP:

$$n_L \rightarrow \mathbf{E}_{LCP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.1.12)$$

$$n_R \rightarrow \mathbf{E}_{RCP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.1.13)$$

Pontuamos também que ocorrem duas frequências de corte (raízes) para o índice de refração n_R em (5.1.10), sendo estas

$$\omega_R^\pm = \frac{1}{2} \left((\omega_c + |\mathbf{V}|) \pm \sqrt{(\omega_c - |\mathbf{V}|)^2 + 4\omega_p^2} \right). \quad (5.1.14)$$

Enquanto a frequência de corte ω_R^+ é sempre positiva, ω_R^- é positiva somente sob a condição

$$|\mathbf{V}| > \omega_p^2/\omega_c, \quad (5.1.15)$$

para a qual o índice n_R apresenta duas raízes (positivas). Por sua vez, o índice de refração n_L (5.1.11) possui uma única frequência de corte,

$$\omega_L = -\frac{1}{2}\omega_c - \frac{1}{2}|\mathbf{V}| + \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_c - |\mathbf{V}|)^2 + 4\omega_p^2}, \quad (5.1.16)$$

que é positiva apenas sob a condição,

$$|\mathbf{V}| < \omega_p^2/\omega_c. \quad (5.1.17)$$

Para examinar o comportamento dos índices de refração (5.1.10) e (5.1.11), consideramos dois cenários distintos, seguindo as condições (5.1.15) e (5.1.17):

1. Para $|\mathbf{V}| > \omega_p^2/\omega_c$, o índice n_L não apresenta raiz positiva (sem corte), enquanto o índice n_R possui duas raízes positivas.
2. Para $|\mathbf{V}| < \omega_p^2/\omega_c$, ambos os índices n_L e n_R apresentam uma frequência corte positivo.

5.1.1.1 Sobre o índice n_R

O comportamento geral do índice n_R está representado na Fig. 5.1 em termos do parâmetro adimensional ω/ω_c , sob a condição (5.1.15), conforme detalhado abaixo.

- (i) Para $\omega \rightarrow 0$, $n_R \rightarrow +i\infty$, que é complexo e divergente neste limite, diferenciando-se do comportamento do índice de plasma magnetizado habitual n_- , que fornece $n \rightarrow \infty$ próximo da origem.
- (ii) Para $0 < \omega < \omega_R^-$, uma zona de absorção aparece, onde $\text{Im}[n_R] \neq 0$. Essa característica não se manifesta no índice de plasma frio usual n_- , que é real e positivo nessa faixa. Veja a linha preta nesta zona de frequência na Fig. 5.1.
- (iii) Para $\omega_R^- < \omega < \omega_c$, n_R é real, com $\text{Re}[n_R] > 0$, revelando uma zona de propagação.
- (iv) Para $\omega \rightarrow \omega_c$, $n_R \rightarrow \infty$, ocorre uma ressonância na frequência de ciclotron.
- (v) Para $\omega_c < \omega < \omega_R^+$, há uma zona de absorção, onde n_R é imaginário, $\text{Im}[n_R] \neq 0$. Tal zona de absorção é maior do que a zona usual mostrada pela linha preta tracejada na Fig. 5.1, uma vez que $\omega_R^+ > \omega_-$.
- (vi) Para $\omega > \omega_R^+$, o índice n_R é real e positivo, resultando em uma zona de propagação sem atenuação, e recuperando $n_R \rightarrow 1$ no limite de alta frequência.

Por outro lado, sob a condição (5.1.17), $\omega_R^- < 0$, portanto há apenas uma frequência de corte e uma única zona de absorção, definida para $\omega_c < \omega < \omega_R^+$. A primeira zona de absorção é substituída por uma região de propagação, agora definida para $0 < \omega < \omega_c$, semelhante ao caso habitual. Para $\omega > \omega_c$, o comportamento é semelhante àquele apontado nos itens (v) e (vi) acima. Este cenário para n_R está ilustrado na Fig. 5.2.

5.1.1.2 Sobre o índice n_L

O índice n_L , dado em Eq. (5.1.11), não possui raiz positiva sob a condição (5.1.15) (sem frequência de corte) e uma frequência de corte sob a condição (5.1.17). Suas características são descritas abaixo.

- (i) Para $\omega \rightarrow 0$, sob a condição (5.1.15), a presença de $|\mathbf{V}|$ torna o índice de refração real e positivamente divergente na origem, $n_L \rightarrow +\infty$, diferenciando-se do índice usual n_+ (2.4.35), que é complexo e divergente, $\text{Im}[n_+] \rightarrow \infty$, na origem. Esse comportamento é semelhante ao observado no índice n_L para o caso *timelike*, ilustrado na Fig. 4.2.
- (ii) Para $\omega > 0$, o índice n_L é sempre real, $\text{Im}[n_L] = 0$. Assim, a propagação da onda ocorre para qualquer frequência. As partes real e imaginária de n_L estão representadas na Fig. 5.3.

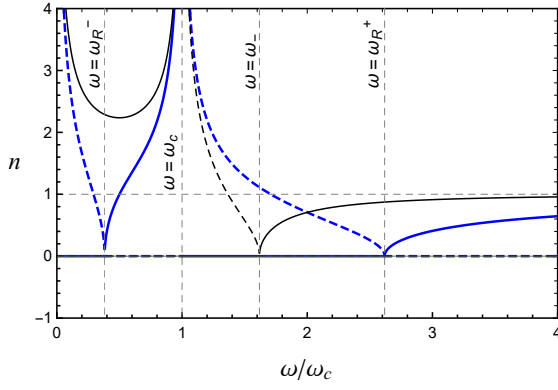


Figura 5.1: Índice de refração n_R , sob a condição (5.1.15). A linha tracejada azul (preta) corresponde à parte imaginária de n_R (n_-), enquanto a linha sólida azul (preta) representa a parte real de n_R (n_-). Note que o fator quiral abre uma nova janela de perda próxima da origem e amplia a segunda zona de absorção. Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 2\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. As linhas (tracejadas e sólidas) azuis que representam n_R são mais grossas do que a linha preta para n_- .

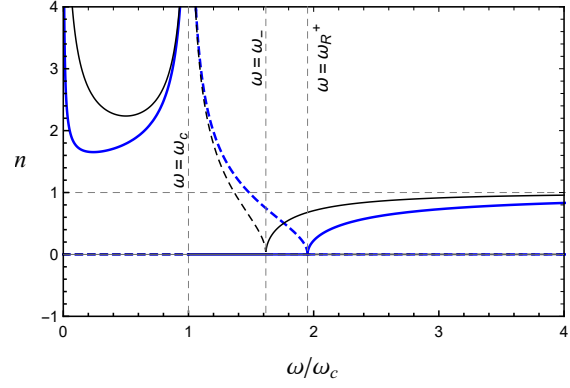


Figura 5.2: Índice de refração n_R , sob a condição (5.1.17). A linha tracejada azul (preta) corresponde à parte imaginária de n_R (n_-), enquanto a linha sólida azul (preta) representa a parte real de n_R (n_-). O fator quiral aumenta a zona de absorção próxima à ressonância. Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 0.5\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. As linhas (tracejadas e sólidas) azuis que representam n_R são mais grossas do que a linha preta para n_- .

- (iii) Sob a condição (5.1.17), n_L apresenta uma frequência de corte, ω_L , dada pela Eq. (5.1.16). Portanto, aparece uma zona de absorção para $0 < \omega < \omega_L$, onde $\text{Im}[n_L] \neq 0$, como ilustrado na Fig. 5.4.

Os resultados desta subseção podem ser comparados com o caso de propagação de ondas ao longo do campo magnético na presença de vetor de violação tipo-tempo, examinado no Capítulo 4, cujo cenário foi mais rico devido à obtenção de quatro índices distintos e do surgimento de refração negativa, que tipicamente ocorre em meios bi-isotrópicos [38, 39]. No presente caso, no entanto, existem apenas dois índices positivos (sem refração negativa).¹ Em relação às propriedades de propagação e absorção, o caso atual do vetor quiral é mais envolvido, pois duas zonas de absorção são abertas sob a condição (5.1.15), enquanto na situação análoga do Capítulo 4 apenas uma zona de absorção foi relatada.

¹Note que índices negativos também podem existir no caso em que se toma as raízes negativas das Eqs. (5.1.10) e (5.1.11), isto é, $-n_L$ e $-n_R$, que correspondem à imagem espelhada exata dos índices positivos (em relação ao eixo da frequência).

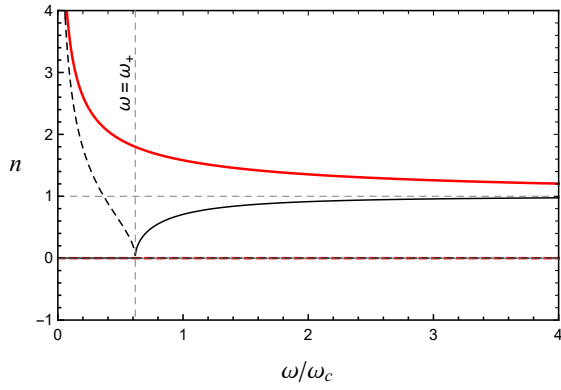


Figura 5.3: Índice de refração n_L (linhas vermelhas) para a condição (5.1.15) e índice n_+ (linhas pretas) da Eq. (2.4.35). As linhas tracejadas (sólidas) correspondem às partes imaginária (real) de n_L e n_+ . O fator quiral suprime a janela de absorção. Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 2\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. A linha (tracejada e sólida) vermelha representando n_L é mais grossa do que a linha preta para n_+ .

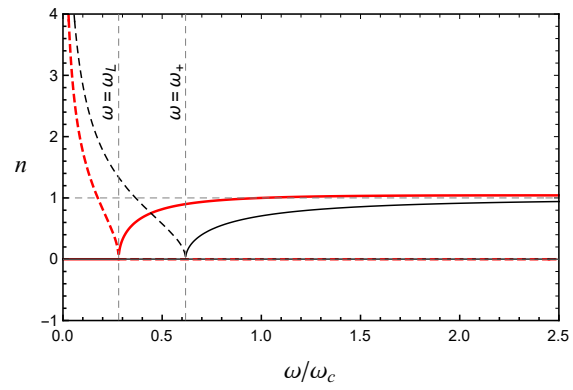


Figura 5.4: Índice de refração n_L (linhas vermelhas) para a condição (5.1.17) e índice de refração n_+ (linhas pretas) da Eq. (2.4.35). As linhas tracejadas (sólidas) correspondem às partes imaginária (real) de n_L e n_+ . O fator quiral estreita a zona de absorção e aumenta o regime de propagação livre de atenuação. Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 0.5\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. A linha (tracejada e sólida) vermelha representando n_L é mais grossa do que a linha preta para n_+ .

5.1.1.3 Modos de baixa frequência

Considerando os modos eletromagnéticos circulares associados aos índices (5.1.10) e (5.1.11), os índices hélicons correspondentes são

$$\bar{n}_R = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c} - \frac{|\mathbf{V}|}{\omega}}, \quad (5.1.18a)$$

$$\bar{n}_L = \sqrt{\frac{|\mathbf{V}|}{\omega} - \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c}}, \quad (5.1.18b)$$

onde usamos a notação "barra" para indicar as quantidades hélicons, obtidos no regime de baixa frequência, $\omega \ll \omega_p$, $\omega_c \ll \omega_p$, $\omega \ll \omega_c$. Observe que, devido à presença do vetor quiral $|\mathbf{V}|$, obtém-se expressões para hélicons tanto RCP quanto LCP, indicando a propagação de ambos os modos nesse regime. No entanto, note também que $\bar{n}_R^2 = -\bar{n}_L^2$, o que nos leva à conclusão de que um desses índices é imaginário quando o outro é real. De fato, $\bar{n}_R$ torna-se imaginário para $|\mathbf{V}| > \omega_p^2/\omega_c$, enquanto $\bar{n}_L$ é imaginário para $|\mathbf{V}| < \omega_p^2/\omega_c$. Isso significa que os hélicons RCP e LCP não se propagam simultaneamente. Portanto, apenas um dos modos em Eq. (5.1.18) pode se propagar para cada valor de $|\mathbf{V}|$ adotado. Neste contexto, note que o modo hélicon de plasma frio usual é recuperado no limite $|\mathbf{V}| \rightarrow 0$, para o qual o índice hélicon $\bar{n}_R$ fornece o resultado habitual da Eq. (2.5.5), enquanto $\bar{n}_L$ torna-se puramente imaginário, indicando a ausência de propagação.

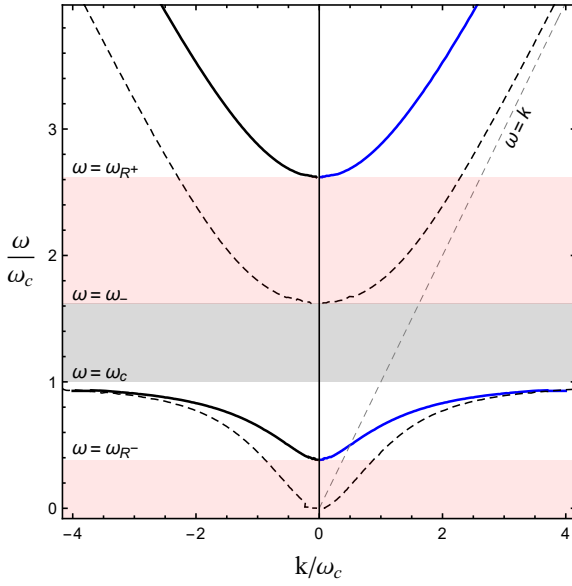


Figura 5.5: Relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_R (linha azul sólida) e $-n_R$ (linha preta sólida), sob a condição (5.1.15). A linha preta tracejada representa os índices do caso padrão, $\pm n_-$. A área destacada em vermelho indica a ampliação da zona de absorção para n_R em comparação com a zona de absorção cinza dos índices usuais ($\pm n_-$). Aqui usamos $\omega_c = \omega_p$ e $|\mathbf{V}| = 2\omega_p$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

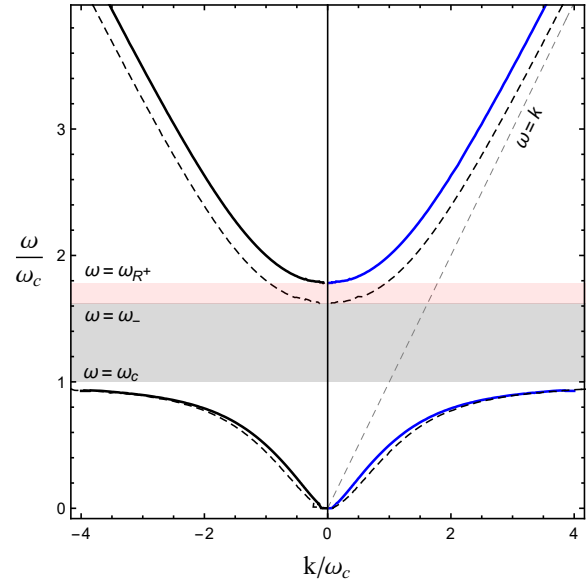


Figura 5.6: Gráfico das relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_R (linha azul sólida) e $-n_R$ (linha preta sólida), sob a condição (5.1.17). A linha preta tracejada corresponde aos índices do caso usual ($\pm n_-$). A área destacada em vermelho indica a ampliação da zona de absorção para n_R em comparação com a de $\pm n_-$. Aqui usamos $\omega_c = \omega_p$ e $|\mathbf{V}| = 0.5\omega_p$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

5.1.1.4 Comportamento das relações de dispersão

Nesta subseção, as relações de dispersão associadas aos modos circulares, conectados aos índices n_R e n_L , são apresentadas em gráficos adimensionais de $(\omega/\omega_c) \times (k/\omega_c)$. A relação de dispersão associada a $\pm n_R$, sob a condição (5.1.15), é ilustrada na Fig. 5.5. Neste caso, a propagação ocorre para $\omega_R^- < \omega < \omega_c$ e $\omega > \omega_R^+$, enquanto duas janelas de absorção aparecem: $\omega_c < \omega < \omega_R^+$ e $0 < \omega < \omega_R^-$. Por outro lado, o comportamento para a condição (5.1.17) é mostrado na Fig. 5.6, onde a propagação ocorre para $0 < \omega < \omega_c$ e $\omega > \omega_R^+$ e a absorção acontece para $\omega_c < \omega < \omega_R^+$. As Figuras 5.5 e 5.6 ilustram zonas de absorção aumentadas.

A Fig. 5.7 ilustra as relações de dispersão associadas a $\pm n_L$ para a condição (5.1.15), onde a propagação ocorre para $\omega > 0$, sendo compatível com a ausência de zona de absorção; veja a Fig. 5.3. A relação de dispersão para a condição (5.1.17) é representada na Fig. 5.8, onde existe uma zona de absorção incomum em $0 < \omega < \omega_L$, enquanto a propagação aparece para $\omega > \omega_L$. Nestes dois últimos casos, a zona de absorção é reduzida em comparação com a zona dos índices usuais, $\pm n_+$, $0 < \omega < \omega_+$.

Um ponto interessante é que os índices de refração $n_{R,L}$, representados por linhas azuis nas Figs. 5.5–5.8, não se tornam negativos sob a influência do vetor quiral $\mathbf{V}$, permitindo que os gráficos de $\omega \times k$ permaneçam centralizados em $k = 0$. Isso não ocorre para o caso de vetor de violação tipo-tempo, ilustrado nas Figs. 4.7–4.9, onde o parâmetro quiral escalar V_0 induz zonas de refração negativa (índices de refração negativos), descentralizando as curvas de $\omega \times k$.

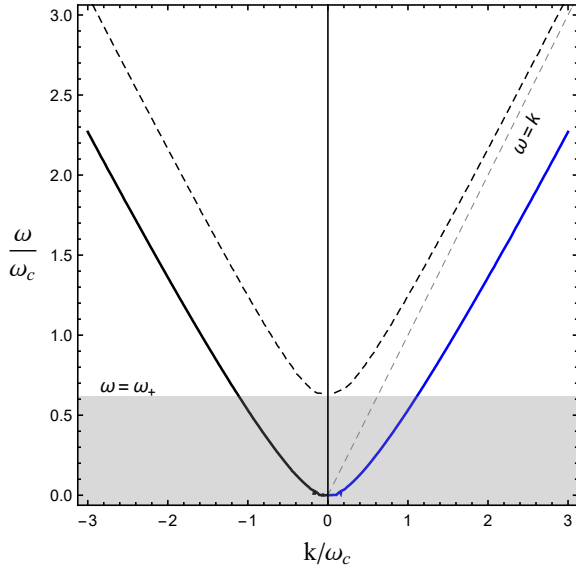


Figura 5.7: Relações de dispersão associadas aos índices de refração n_L (linha azul sólida) e $-n_L$ (linha preta sólida), sob a condição (5.1.15). A linha preta tracejada corresponde aos índices do caso usual ($\pm n_+$). A área destacada em cinza indica a zona de absorção para os índices $\pm n_+$, onde se nota a ausência de absorção para n_L . Aqui usamos $\omega_c = \omega_p$ e $|\mathbf{V}| = 2\omega_p$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

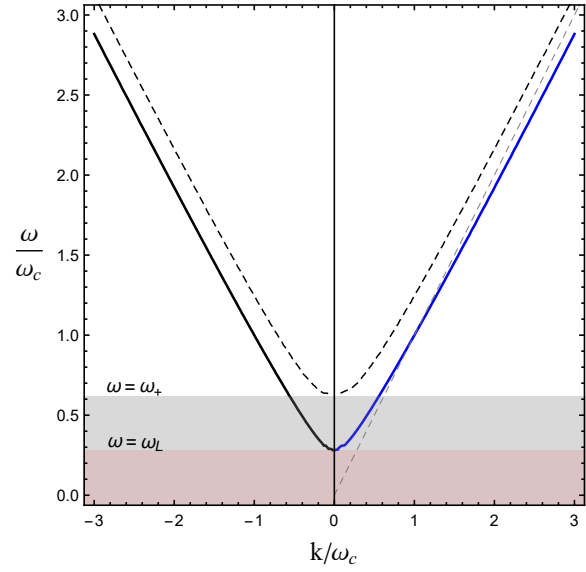


Figura 5.8: Relações de dispersão associadas aos índices de refração n_L (linha azul sólida) e $-n_L$ (linha preta sólida), sob a condição (5.1.17). A linha preta tracejada corresponde aos índices do caso usual ($\pm n_+$). A área destacada em vermelho indica a zona de absorção para n_L , estreitada em comparação com a zona de absorção associada a $\pm n_+$. Aqui usamos $\omega_c = \omega_p$ e $|\mathbf{V}| = 0.5\omega_p$, com $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

5.1.1.5 Poder de rotação

Como visto, foram obtidos apenas dois índices de refração para plasmas magnetizados sob a influência do vetor quiral $\mathbf{V}$. Com isso, o PR é definido como

$$\delta = -\frac{\omega}{2} (\text{Re}[n_L] - \text{Re}[n_R]), \quad (5.1.19)$$

onde n_L e n_R são os índices de refração para diferentes polarizações circulares, dados pelas Eqs. (5.1.10) e (5.1.11). Neste caso, o PR resulta

$$\delta = -\frac{\omega}{2} \text{Re} \left[\sqrt{R_+} - \sqrt{R_-} \right], \quad (5.1.20)$$

onde $R_{\pm}$ é dado por

$$R_{\pm} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)} \pm \frac{|\mathbf{V}|}{\omega}. \quad (5.1.21)$$

O comportamento do PR (5.1.20) é mostrado na Fig. 5.9, onde apresenta-se como negativo para o intervalo $0 < \omega < \hat{\omega}$ e positivo para $\hat{\omega} < \omega < \omega_c$. Para $\omega > \omega_c$, o PR é sempre negativo, exibindo um comportamento brusco em $\omega = \omega_R$, o ponto em que a parte real de n_R assume valores não nulos

novamente (veja a Fig. 5.1). A frequência $\hat{\omega}$,

$$\hat{\omega} = \sqrt{\omega_c (\omega_c - \omega_p^2/|\mathbf{V}|)}, \quad (5.1.22)$$

obtida a partir das Eqs. (5.1.20) e (5.1.21), indica onde o PR muda de sinal, como também mostrado na Fig. 5.9. Note que $\hat{\omega}$ é real apenas sob a condição (5.1.15). Portanto, a reversão do PR ocorre apenas neste caso, como confirmado na Fig. 5.9. De fato, sob a condição (5.1.17), o PR correspondente é retratado na Fig. 5.10, não apresentando reversão de sinal, um comportamento análogo ao PR padrão em plasmas. Estes são resultados de destaque da abordagem original realizada na Ref. [83].

No capítulo anterior também apontamos o surgimento da inversão de PR para plasmas sob a influência do fator quiral V_0 (veja a Seção 4.3.1). Portanto, tal reversão pode ser considerada uma assinatura de plasmas frios quirais regidos pela eletrodinâmica de MCFJ, um contexto diferente de plasma em rotação.

Além disso, é importante prestar atenção aos intervalos $0 < \omega < \omega_R^-$ e $\omega_c < \omega < \omega_R^+$, onde o índice de refração n_R é imaginário e o PR recebe contribuição apenas do índice n_L , exibindo um magnitude crescente de forma aproximadamente linear, oposta ao perfil de n_L , que decresce nesses intervalos sob a condição (5.1.15).

Para $\omega > \omega_R^+$, os modos associados a n_L e n_R se propagam e contribuem para o RP, cuja magnitude diminui monotonamente com ω , tendendo ao valor assintótico, $-|\mathbf{V}|/2$, como mostrado na Fig. 5.9. De fato, no limite de altas frequências, $\omega \gg \omega_p, \omega_c$, os índices de refração n_L e n_R fornecem (em primeira ordem)

$$n_{L,R} \simeq 1 \pm \frac{|\mathbf{V}|}{2\omega}, \quad (5.1.23)$$

portanto o valor assintótico do PR é

$$\delta \simeq -\frac{|\mathbf{V}|}{2}, \quad (5.1.24)$$

um resultado que se mantém mesmo na ausência do campo magnético. Este limite assintótico difere do comportamento de um plasma frio usual, cujo PR decai como $1/\omega^2$ para altas frequências, tendendo a zero para $\omega \gg \omega_p, \omega_c$. Veja a linha tracejada na Fig. 5.9.

5.1.1.6 Coeficiente de dicroísmo

O coeficiente de dicroísmo associado aos índices de refração n_L e n_R é expresso como

$$\delta_d = -\frac{\omega}{2} (\text{Im}[n_L] - \text{Im}[n_R]). \quad (5.1.25)$$

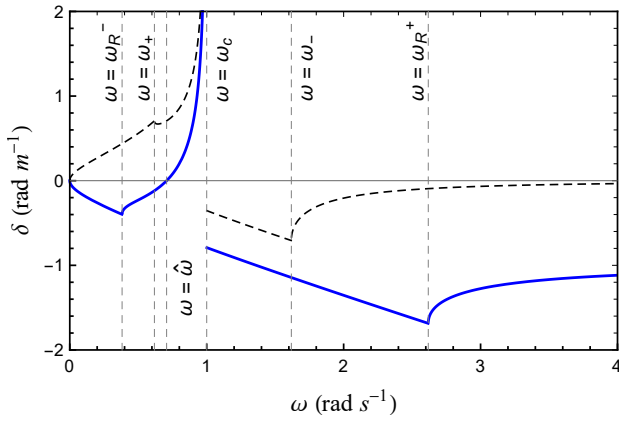


Figura 5.9: A linha azul sólida representa o PR (5.1.20) definido pelos índices de refração n_L e n_R para a condição (5.1.15). A linha preta tracejada corresponde ao PR usual para um plasma frio convencional. O fator quiral determina a reversão do sinal do PR em $\omega < \hat{\omega}$ e um valor assintótico constante, $-|\mathbf{V}|/2$, para altas frequências. Aqui usamos $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 2\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

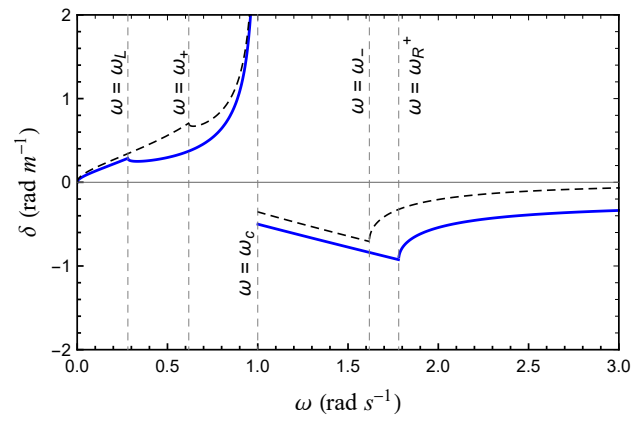


Figura 5.10: Linhas azuis sólidas: PR (5.1.20) associada aos índices de refração n_L e n_R para a condição (5.1.17). A linha tracejada representa o PR usual para um plasma frio convencional. Pequenas desvios do PR são originados do fator quiral. A principal diferença em comparação com o caso usual é o valor assintótico não nulo, $-|\mathbf{V}|/2$, para altas frequências. Aqui usamos $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 0.5\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

Para a condição (5.1.15), n_R possui partes imaginárias não nulas nos intervalos $0 < \omega < \omega_R^-$ e $\omega_c < \omega < \omega_R^+$, enquanto n_L é sempre real (para $\omega > 0$). Nesse caso, o coeficiente de dicroísmo é escrito como

$$\delta_d = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{R_-}, & \text{para } 0 < \omega < \omega_R^-, \\ 0, & \text{para } \omega_R^- < \omega < \omega_c, \\ \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{R_-}, & \text{para } \omega_c < \omega < \omega_R^+, \\ 0, & \text{para } \omega > \omega_R^+, \end{cases} \quad (5.1.26)$$

com R_- da Eq. (5.1.21). Tal coeficiente é retratado na Fig. 5.11.

Considerando a condição (5.1.17), tanto n_R quanto n_L possuem partes imaginárias não nulas nos intervalos $\omega_c < \omega < \omega_R^+$ e $0 < \omega < \omega_L$, respectivamente, nos quais o coeficiente de dicroísmo é não nulo,

$$\delta_d = \begin{cases} -\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{R_+}, & \text{para } 0 < \omega < \omega_L, \\ +\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{R_-}, & \text{para } \omega_c < \omega < \omega_R^+. \end{cases} \quad (5.1.27)$$

O comportamento geral de (5.1.27) é exibido na Fig. 5.12.

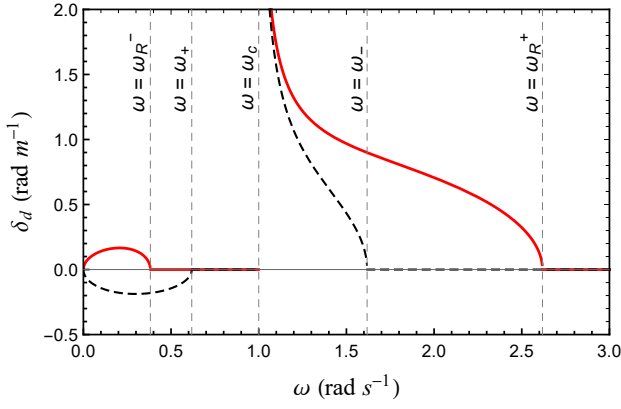


Figura 5.11: Coeficiente de diroísmo da Eq. (5.1.26) (linhas vermelhas sólidas) associado a n_L e n_R , sob a condição (5.1.15). A linha preta tracejada representa o coeficiente de diroísmo de um plasma frio usual. Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 2\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

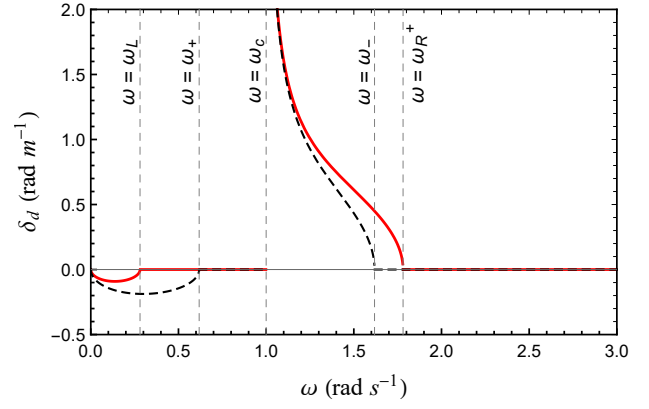


Figura 5.12: Coeficiente de diroísmo da Eq. (5.1.27) (linhas vermelhas sólidas) associado a n_L e n_R , sob a condição (5.1.17). A linha tracejada representa o coeficiente de diroísmo para um plasma frio convencional. Aqui, definimos $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 0.5\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

5.1.2 Vetor quiral ortogonal ao campo magnético

No cenário onde o vetor de fundo é ortogonal ao campo magnético, vale $\beta \rightarrow \pi/2$, e a relação de dispersão (5.1.6) torna-se

$$P \left[D^2 - (n^2 - S)^2 \right] + (|\mathbf{V}|^2 / \omega^2) (S - n^2) = 0. \quad (5.1.28)$$

A solução da equação acima resulta em dois índices de refração:

$$(n_A)^2 = S - \frac{|\mathbf{V}|^2}{2P\omega^2} + \frac{1}{P} \sqrt{P^2 D^2 + \frac{|\mathbf{V}|^4}{4\omega^4}}, \quad (5.1.29)$$

$$(n_B)^2 = S - \frac{|\mathbf{V}|^2}{2P\omega^2} - \frac{1}{P} \sqrt{P^2 D^2 + \frac{|\mathbf{V}|^4}{4\omega^4}}, \quad (5.1.30)$$

com os parâmetros S , D e P dados em (2.4.26). A partir da equação matricial (5.1.4), polarizações elípticas mistas são relacionadas aos modos de propagação, sendo expressas na forma

$$n_{A,B} \rightarrow \mathbf{E}_{A,B} = C \begin{bmatrix} -\zeta \\ 1 \\ -i|\mathbf{V}| (n_{A,B}^2 - S) / (\omega \bar{\kappa} P) \end{bmatrix}, \quad (5.1.31a)$$

onde

$$C = \frac{|\bar{\kappa}|}{\sqrt{(n^2 - S)^2 [(|\mathbf{V}| / \omega P)^2 + \sin^2 \phi] + D^2 \cos^2 \phi + |\bar{\kappa}|^2}}, \quad (5.1.31b)$$

$$\zeta = \frac{\left((n^2 - S)^2 - D^2 \right) \cos \phi \sin \phi + iD (n^2 - S)}{|\bar{\kappa}|^2}, \quad (5.1.31c)$$

$$\bar{\kappa} = (n^2 - S) \cos \phi - iD \sin \phi. \quad (5.1.31d)$$

Analizando a Eq. (5.1.31a), observa-se uma componente longitudinal (em relação à direção de propagação) imaginária. Por sua vez, o setor transversal é, em geral, elipticamente polarizado, uma vez que ζ é uma quantidade complexa. Nota-se também que, partindo da Eq. (5.1.31a) e fazendo $|\mathbf{V}| \rightarrow 0$, recuperam-se os modos usuais de polarização circular direita (RCP) e esquerda (LCP), o que é uma correspondência esperada.

Os índices de refração dados em (5.1.29) e (5.1.30) possuem raízes reais positivas dadas por

$$\omega_{A1,B} = \frac{1}{6} \sqrt{8\omega_c^2 \mp 2\sqrt[3]{\frac{\mp 2}{U}} f_1 + (\mp 2)^{2/3} \sqrt[3]{U} + 2|\mathbf{V}|^2}, \quad (5.1.32)$$

$$\omega_{A2} = \frac{1}{6} \sqrt{8\omega_c^2 + \frac{(2)^{4/3}(-1)^{2/3} f_1}{\sqrt[3]{U}} - f_4}, \quad (5.1.33)$$

onde

$$U = 11\omega_c^6 + f_2 + 3\sqrt{3}\sqrt{-c^4(5\omega_c^8 + f_3)}, \quad (5.1.34a)$$

$$f_1 = 4\omega_c^4 + 2\omega_c^2 |\mathbf{V}|^2 + |\mathbf{V}|^4, \quad (5.1.34b)$$

$$f_2 = -12\omega_c^4 |\mathbf{V}|^2 + 6\omega_c^2 |\mathbf{V}|^4 + 2|\mathbf{V}|^6, \quad (5.1.34c)$$

$$f_3 = 24\omega_c^6 |\mathbf{V}|^2 + 4\omega_c^4 |\mathbf{V}|^4 + 12\omega_c^2 |\mathbf{V}|^6 + 4|\mathbf{V}|^8, \quad (5.1.34d)$$

$$f_4 = \sqrt[3]{-1} (2)^{2/3} \sqrt[3]{U} + 2|\mathbf{V}|^2, \quad (5.1.34e)$$

sendo $\omega_{A1,2}$ associada ao índice n_A e ω_B associada ao índice n_B .

5.1.2.1 Sobre o índice n_A

O índice de refração n_A , dado na Eq. (5.1.29), possui duas raízes positivas, ω_{A1} e ω_{A2} , como ilustrado na Fig. 5.13, onde observamos o seguinte:

- (i) Para $\omega \rightarrow 0$, o índice é imaginário e tende a infinito, $n_A \rightarrow +i\infty$, que é o mesmo comportamento do índice usual de plasma magnetizado n_+ próximo à origem.
- (ii) Para $0 < \omega < \omega_{A1}$, tem-se $\text{Re}[n_A] = 0$, $\text{Im}[n_A] \neq 0$, definindo uma zona de absorção.
- (iii) Para $\omega_{A1} < \omega < \omega_c$, n_A é real, $\text{Re}[n_A] > 0$ e $\text{Im}[n_A] = 0$, abrindo uma zona de propagação intermediária que não aparece no caso usual (compare as linhas pretas e vermelhas na Fig. 5.13).
- (iv) Para $\omega \rightarrow \omega_c$, há uma ressonância, $n_A \rightarrow \infty$, na frequência ciclotron, um comportamento que não é observado no caso convencional. Para $\omega_c < \omega < \omega_{A2}$, n_A é imaginário, ou seja, $\text{Im}[n_A] \neq 0$, $\text{Re}[n_A] = 0$, e assim outra zona de absorção é permitida.
- (v) Para $\omega > \omega_{A2}$, há uma zona de propagação na qual o índice n_A é sempre positivo e real, com $n_A \rightarrow 1$ no limite de altas frequências. Veja a Fig. 5.13.

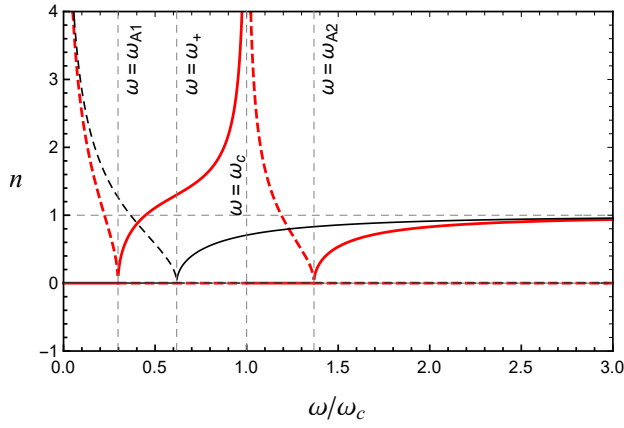


Figura 5.13: Índice de refração n_A (linhas vermelhas) e n_+ (linhas pretas), dado na Eq. (2.4.35). As linhas tracejadas (sólidas) correspondem às partes imaginárias (reais) de n_A e n_+ . Há uma zona de propagação intermediária no intervalo $\omega_{A1} < \omega < \omega_c$ e um novo intervalo de absorção definido para $\omega_c < \omega < \omega_{A2}$. Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 2\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. As curvas vermelhas (sólidas e tracejadas) são mais espessas que as linhas pretas (sólidas e tracejadas).

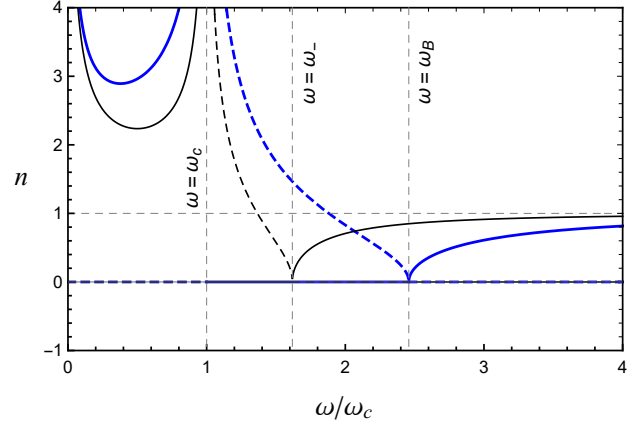


Figura 5.14: Índice de refração n_B (linhas azuis) e n_- (linhas pretas) de Eq. (2.4.35). As linhas tracejadas (sólidas) correspondem às partes imaginárias (reais) de n_B e n_- . A zona de absorção intermediária, $\omega_c < \omega < \omega_B$, tem agora um comprimento amplificado. Aqui, $\omega_c = \omega_p$, $|\mathbf{V}| = 2\omega_p$, e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$. As curvas azuis (sólidas e tracejadas) são mais espessas que as linhas pretas (sólidas e tracejadas).

5.1.2.2 Sobre o índice n_B

O índice n_B na Eq. (5.1.30) possui apenas uma frequência de corte, representada por ω_B . Suas partes real e imaginária estão ilustradas na Fig. 5.14.

- (i) No limite $\omega \rightarrow 0$, o índice n_B é real e tende a infinito, $n_B \rightarrow +\infty$. Para $0 < \omega < \omega_c$, o índice n_B é real, com $\text{Im}[n_B] = 0$, um comportamento próximo ao do convencional de plasmas magnetizados.
- (ii) Para $\omega \rightarrow \omega_c$, $n_B \rightarrow \infty$, e há uma ressonância na frequência ciclotrônica. Este comportamento também ocorre no caso usual. Para $\omega_c < \omega < \omega_B$, o índice é imaginário, $\text{Re}[n_B] = 0$, $\text{Im}[n_B] \neq 0$, descrevendo uma zona de absorção, que é maior que a usual, pois $\omega_B > \omega_-$. Veja a Fig. 5.14.
- (iii) Para $\omega > \omega_B$, tem-se uma zona de propagação, onde n_B é sempre real e positivo, com $n_B \rightarrow 1$ no limite de alta frequência.

Vale mencionar que os resultados desta seção não podem ser comparados com os do Capítulo 4, pois a condição definidora desta seção – um vetor quiral ortogonal ao campo magnético – não é possível no cenário de um fator quiral escalar.

5.1.2.3 Efeitos ópticos

Considerando a configuração do vetor de fundo ortogonal ao campo magnético, os índices de refração (5.1.29) e (5.1.30) não estão associados a modos de polarização circular [veja Eq. (5.1.31a)]. Neste

Tabela 5.1: Propriedades de propagação de plasmas frios em distintos contextos. O símbolo “–” significa que a entrada não se aplica ao modelo de plasma mencionado.

Propriedade	Plasma frio na eletrodinâmica usual	Plasma frio na teoria MCFJ com $\mathbf{J}_B = k_{AF}^0 \mathbf{B}$	Plasma frio na teoria MCFJ com corrente Hall anômala (AHE)	
Modos de propagação	RCP e LCP	RCP para $n_{R,M}$, LCP para $n_{L,E}$	$\mathbf{V} \parallel \mathbf{B}$ LCP e RCP	$\mathbf{V} \perp \mathbf{B}$ Elíptico
Birrefringência	PR	PR δ_{LR} e δ_{ER}	RP (6.1.15)	Deslocamento de fase (5.1.36)
Inversão de PR	Não	Sim	Sim, sob a condição (5.1.17)	–
Absorção	Sim (dicroísmo)	Sim (dicroísmo)	Sim (dicroísmo) (Eq. (5.1.26))	Coefficientes (5.1.40) e (5.1.41)
Hélicons	RCP	RCP e LCP; (Eqs. (4.2.18) e (4.2.19))	RCP (não ver Eq. (5.1.18)) ou LCP simultâneos;	–

panorama, a birrefringência é melhor caracterizada em termos do deslocamento de fase (*phase shift*) por unidade de comprimento, dado por

$$\frac{\Delta}{d} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\text{Re}[n_A] - \text{Re}[n_B]), \quad (5.1.35)$$

ou explicitamente

$$\frac{\Delta}{d} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\sqrt{S - \frac{|\mathbf{V}|^2}{2P\omega^2}} + \Xi_{AB} - \sqrt{S - \frac{|\mathbf{V}|^2}{2P\omega^2}} - \Xi_{AB} \right), \quad (5.1.36)$$

onde

$$\Xi_{AB}(\omega, |\mathbf{V}|) = \sqrt{D^2 + \frac{|\mathbf{V}|^4}{4P^2\omega^4}}. \quad (5.1.37)$$

No limite de alta frequência $\omega \gg (\omega_c, \omega_p)$, o deslocamento de fase torna-se

$$\frac{\Delta}{d} \simeq -\frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\frac{2\omega_c\omega_p^2}{(2\omega^2 - |\mathbf{V}|^2)\omega}}. \quad (5.1.38)$$

Também é possível definir uma quantidade análoga associada ao efeito de absorção para modos de propagação não circulares. Neste caso, defini-se a diferença de absorção entre os dois modos por unidade de comprimento, escrita como

$$\frac{\Delta_{Im}}{d} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\text{Im}[n_A] - \text{Im}[n_B]). \quad (5.1.39)$$

Para $\omega_c < \omega < \omega_{A2}$, os índices n_A e n_B são puramente imaginários; veja as linhas tracejadas correspon-

dentes nas Fig. 5.13 e 5.14. Neste intervalo, o fator de absorção (5.1.39) é

$$\frac{\Delta_{Im}}{d} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[\sqrt{\frac{|\mathbf{V}|^2}{2P\omega^2} - \Xi_{AB} - S} - \sqrt{\frac{|\mathbf{V}|^2}{2P\omega^2} + \Xi_{AB} - S} \right]. \quad (5.1.40)$$

Para $\omega < \omega_{A1}$, apenas o modo associado a n_A é absorvido. Neste caso, podemos escrever o coeficiente de absorção $\gamma = 2\omega \text{Im}[n]$, que é dado explicitamente por

$$\gamma = 2\omega \sqrt{\frac{|\mathbf{V}|^2}{2P\omega^2} - \Xi_{AB} - S}. \quad (5.1.41)$$

A Tabela 5.1 compara os resultados deste capítulo para as configurações de vetor quiral paralelo e ortogonal ao campo magnético, com aqueles obtidos nos capítulos anteriores, para plasma frio quiral sob influência do fator escalar V_0 e o caso de plasma magnetizado usual.

PLASMA NÃO MAGNETIZADO NO CONTEXTO DA ELETRODINÂMICA DE MAXWELL-CARROLL-FIELD-JACKIW

Sumário

6.1	Propagação de ondas em plasmas quirais não magnetizados	108
6.1.1	Sobre o índice n_R	109
6.1.2	Sobre o índice n_M	110
6.1.3	Sobre o índice n_L	110
6.1.4	Sobre o índice n_E	111
6.1.5	Modos de baixa frequência	112
6.1.6	Comportamento das relações de dispersão	113
6.1.7	Poder de rotação	114
6.1.8	Coefficiente de dicroísmo	116

Nos capítulos anteriores, foi investigada a propagação de ondas eletromagnéticas e propriedades ópticas de plasmas quirais magnetizados. Embora, de fato, a maioria das investigações na literatura ocorra na presença de um campo magnético externo, plasmas não magnetizados também são explorados em alguma extensão, incluindo tópicos como propagação de feixes de vórtice [159–162], sistemas de plasma empoeirado [163–168], propagação não linear de ondas [169–173] e feixes de autofocalização [174, 175]. No contexto astrofísico, a eletrodinâmica de plasma não magnetizado foi investigada em um cenário de Universo em expansão [176]. Recentemente, plasmas não magnetizados foram considerados em torno de buracos negros rotativos para estudar as propriedades de suas sombras [177–181].

Plasmas frios convencionais não exibem atividade óptica na ausência de um campo magnético externo sob condições mais simples. No entanto, modos quirais incomuns para ondas de ionização (*chiral streamers*) em um plasma não magnetizado, em condições de pressão subatmosférica, foram relatados em 2015 [182]. Tais *chiral streamers* e suas diferentes orientações, RCP e LCP, foram recentemente explicadas por meio da teoria de ondas eletromagnéticas estacionárias superficiais [183]. Plumas de plasma quiral (jatos de gás ionizado) também foram estudadas na ausência de um campo magnético externo [184, 185].

Neste capítulo, estudamos a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma quiral não magnetizado, regido pela eletrodinâmica de MCFJ dotada do fator quiral puramente temporal (setor *timelike*). Aqui, as relações de dispersão e os índices de refração são determinados. Efeitos ópticos, como birrefringência e dicroísmo, são discutidos e usados para comparar diferentes cenários de plasma frio quiral

com o comportamento convencional magnetizado. O fator quiral aparece trazendo novas propriedades para o panorama não magnetizado, como atividade óptica, refração negativa e reversão do sinal do RP. Os resultados deste capítulo estão expostos conforme a abordagem original realizada na Ref. [84].

6.1 Propagação de ondas em plasmas quirais não magnetizados

Para iniciar o estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas quirais não magnetizados, pode-se assumir $\mathbf{B}_0 = 0$ na relação (4.2.4), obtida para o caso magnetizado. Neste caso, tem-se $D = 0$ (vide Eq. (2.4.26)), o que leva a

$$P \left[\omega^2 (n^2 - P)^2 - n^2 V_0^2 \right] = 0, \quad (6.1.1)$$

a equação de dispersão do sistema. A configuração de onda longitudinal, com $\delta \mathbf{E} = (0, 0, \delta E_z)$, permanece inalterada, como obtida no caso magnetizado: um modo não propagante na frequência de plasma, $\omega = \omega_p$, associado a $P = 0$.

Para ondas transversais, $\mathbf{n} \perp \delta \mathbf{E}$ ou $\delta \mathbf{E} = (\delta E_x, \delta E_y, 0)$, a relação de dispersão (6.1.1) fornece

$$(n^2 - P)^2 - n^2 (V_0/\omega)^2 = 0, \quad (6.1.2)$$

também escrita como,

$$n^2 \pm \frac{V_0}{\omega} n - P = 0, \quad (6.1.3)$$

que fornece, usando a definição de P em (2.4.26), os seguintes índices de refração:

$$n_{R,M} = -\frac{V_0}{2\omega} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{2\omega}\right)^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \quad (6.1.4)$$

$$n_{L,E} = \frac{V_0}{2\omega} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{2\omega}\right)^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \quad (6.1.5)$$

Os índices de refração acima estão associadas a modos de polarização circulares. Obtém-se um modo LCP, associado aos índices n_L e n_E , e um modo RCP conectado aos índices n_R e n_M .

É fácil notar que os índices n_R , n_E , dados pelas Eqs. (6.1.4) e (6.1.5), compartilham a mesma frequência de corte padrão, ω_p , enquanto os índices de refração n_L e n_M não possuem raiz real. É importante observar que o radicando,

$$R(\omega) = 1 + \left(\frac{V_0}{2\omega}\right)^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (6.1.6)$$

nas Eqs. (6.1.4) e (6.1.5), possui uma única raiz positiva, dada por

$$\omega_{rad} = \sqrt{\omega_p^2 - V_0^2/4}. \quad (6.1.7)$$

Quando tal raiz é real ou imaginária, define-se dois cenários principais, apresentados a seguir.

- Cenário 1: para

$$V_0^2/4 < \omega_p^2, \quad (6.1.8)$$

a raiz ω_{rad} é real, e o fator $R(\omega)$ pode ser negativo para $\omega < \omega_{rad}$ ou positivo para $\omega > \omega_{rad}$. Neste caso, os índices (6.1.4) e (6.1.5) são complexos para $\omega < \omega_{rad}$ e reais para $\omega > \omega_{rad}$.

- Cenário 2: para

$$V_0^2/4 > \omega_p^2, \quad (6.1.9)$$

a raiz ω_{rad} é imaginária, e o fator $R(\omega)$ é sempre positivo, implicando índices reais para qualquer frequência.

A seguir, o comportamento dos índices de refração (6.1.4) e (6.1.5) é examinado e ilustrado, considerando as condições (6.1.8) e (6.1.9). Na ausência do fator quiral, $V_0 = 0$, os índices (6.1.4) e (6.1.5) se reduzem às expressões convencionais não magnetizadas,

$$\tilde{n}_{\pm} = \pm \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \quad (6.1.10)$$

que serão usadas como comparação padrão para indicar os efeitos do fator quiral.

6.1.1 Sobre o índice n_R

O comportamento do índice n_R , que possui uma raiz em $\omega = \omega_p$, é ilustrado nas Figs. 6.1 e 6.2 em termos do parâmetro adimensional ω/ω_c , que mostram as partes real e imaginária do índice de refração n_R sob as condições (6.1.8) e (6.1.9), respectivamente.

Para a condição (6.1.8), destacamos:

- (i) Para $\omega \rightarrow 0$, a parte real de n_R tende ao infinito (negativamente), $\text{Re}[n_R] \rightarrow -\infty$, enquanto sua parte imaginária tende ao infinito (positivamente), $\text{Im}[n_R] \rightarrow \infty$. Este comportamento difere do caso usual, onde $\text{Re}[\tilde{n}_+] = 0$ e $\text{Im}[\tilde{n}_+] \rightarrow \infty$ quando $\omega \rightarrow 0$. Veja as linhas pretas na Fig. 6.1.
- (ii) Para $0 < \omega < \omega_{rad}$, ocorre uma zona de índice de refração negativo com absorção, onde $\text{Re}[n_R] < 0$ e $\text{Im}[n_R] \neq 0$, como mostrado na Fig. 6.1. No caso usual, esta região de refração negativa não existe.
- (iii) Para $\omega_{rad} < \omega < \omega_p$, uma zona de propagação sem atenuação com refração negativa é aberta, ou seja, $\text{Re}[n_R] < 0$ e $\text{Im}[n_R] = 0$.
- (iv) Para $\omega > \omega_p$, n_R é sempre real e positivo, $\text{Re}[n_R] > 0$ e $\text{Im}[n_R] = 0$, correspondendo a uma zona de propagação, com $n_R \rightarrow 1$ no limite de alta frequência.

Por outro lado, sob a condição (6.1.9), apenas zonas de propagação são reportadas. A primeira ocorre para a faixa $0 < \omega < \omega_p$ e é marcada por refração negativa ($\text{Re}[n_R] < 0$ e $\text{Im}[n_R] = 0$). A segunda é definida para $\omega > \omega_p$, onde $\text{Re}[n_R]$ aumenta monotonicamente no limite de alta frequência, como ilustrado na Fig. 6.2.

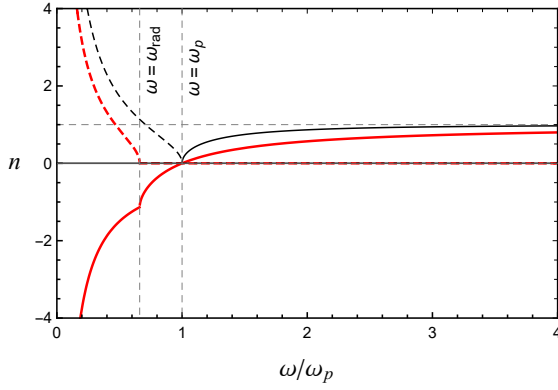


Figura 6.1: Índice de refração n_R sob a condição (6.1.8). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_R ($\tilde{n}_+$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_R ($\tilde{n}_+$), onde o índice $\tilde{n}_+$ é dado em (6.1.10). O parâmetro quiral escalar induz uma nova janela de propagação com refração negativa próxima à frequência de plasma. Aqui, $V_0 = (3/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

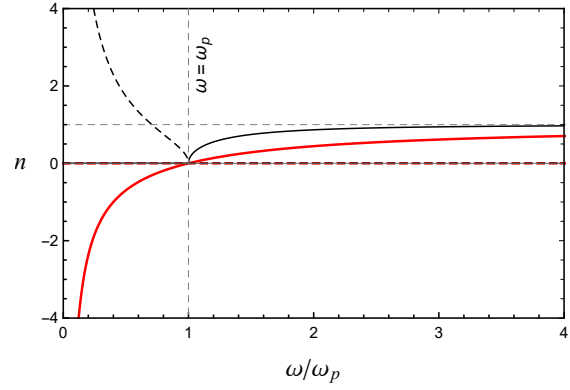


Figura 6.2: Índice de refração n_R sob a condição (6.1.9). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_R ($\tilde{n}_+$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_R ($\tilde{n}_+$). O parâmetro quiral escalar induz uma janela de propagação com refração negativa para $0 < \omega < \omega_p$. Aqui, $V_0 = (5/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

6.1.2 Sobre o índice n_M

O índice n_M , dado na Eq. (6.1.4) e plotado na Fig. 6.3, é sempre negativo, não possuindo raiz real, como também ocorre no plasma quiral magnetizado (ver Ref. [82]). Sob a condição (6.1.8), temos

- (i) Para $\omega \rightarrow 0$, as partes real e imaginária de n_M divergem (negativamente), $\text{Re}[n_M], \text{Im}[n_M] \rightarrow -\infty$. Para $0 < \omega < \omega_{rad}$, o índice n_M apresenta uma zona de refração negativa com absorção, ou seja, $\text{Re}[n_M] < 0$ e $\text{Im}[n_M] \neq 0$, como mostrado na Fig. 6.3. Este comportamento contrasta com o do índice convencional não magnetizado, $\tilde{n}_-$, cuja parte real é nula (não propaga). Veja a linha tracejada preta na Fig. 6.3.
- (ii) Para $\omega > \omega_{rad}$, ocorre uma zona de propagação com refração negativa, $\text{Re}[n_M] < 0$ e $\text{Im}[n_M] = 0$, expandindo a zona de propagação completa que, no caso usual, é definida para $\omega > \omega_p$.
- (iii) Para $\omega \rightarrow \infty$, $n_M \rightarrow -1$, o mesmo comportamento do caso usual no limite de alta frequência.

Considerando a condição (6.1.9), o índice n_M é sempre real e negativo para $\omega > 0$, com magnitude monotonamente decrescente, como mostrado na Fig. 6.4, que representa uma zona de propagação com refração negativa para todas as frequências.

6.1.3 Sobre o índice n_L

O índice n_L é sempre positivo e não possui raiz real. É a imagem espelhada do índice n_M em relação ao eixo das abscissas. Sob a condição (6.1.8), seu comportamento geral é representado na Fig. 6.5 e detalhado a seguir.

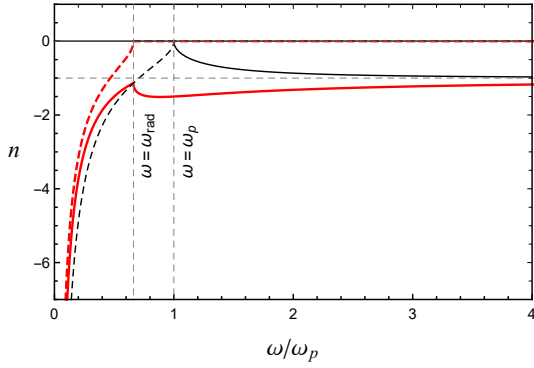


Figura 6.3: Índice de refração n_M sob a condição (6.1.8). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_M ($\tilde{n}_-$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_M ($\tilde{n}_-$). Aqui, $V_0 = (3/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

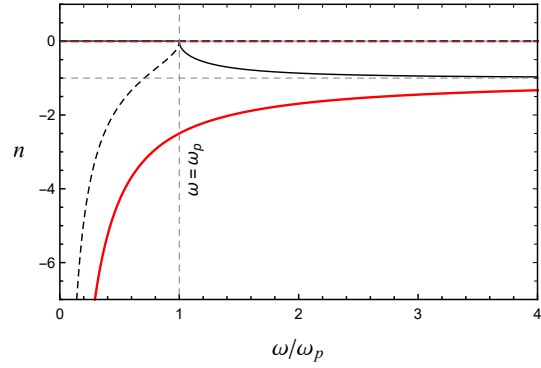


Figura 6.4: Índice de refração n_M sob a condição (6.1.9). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_M ($\tilde{n}_-$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_M ($\tilde{n}_-$). Aqui, $V_0 = (5/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

- (i) Para $\omega \rightarrow 0$, $\text{Re}[n_L], \text{Im}[n_L] \rightarrow +\infty$. Para $0 < \omega < \omega_{rad}$, o índice é complexo, $\text{Re}[n_L] > 0$ e $\text{Im}[n_L] \neq 0$, como destacado na Fig. 6.5. Este comportamento de propagação parcial difere do caso padrão não magnetizado, onde há apenas absorção nesta faixa.
- (ii) Para $\omega > \omega_{rad}$, aparece uma zona de propagação completa, com $\text{Re}[n_L] > 0$ e $\text{Im}[n_L] = 0$, ampliada em comparação com o caso usual, que começa para $\omega > \omega_p$.
- (iii) Para $\omega \rightarrow \infty$, $n_L \rightarrow 1$, comportamento semelhante ao caso usual neste limite.

Sob a condição (6.1.9) o índice de refração n_L é mostrado na Fig. 6.6, sendo sempre positivo para $\omega > 0$, com $\text{Re}[n_L] > 0$ e $\text{Im}[n_L] = 0$. É a imagem espelhada do índice n_M em relação ao eixo de frequência, veja Fig. 6.4, correspondendo a um modo propagante para todas as frequências.

6.1.4 Sobre o índice n_E

O índice n_E , dado na Eq. (6.1.5), tem raiz em $\omega = \omega_p$. Sob a condição (6.1.9), apresenta as seguintes características:

- (i) Para $\omega \rightarrow 0$, tem-se $\text{Re}[n_E] \rightarrow \infty$ e $\text{Im}[n_E] \rightarrow -\infty$, o que difere do caso usual, $\text{Re}[\tilde{n}_-] = 0$ quando $\omega \rightarrow 0$. Para $0 < \omega < \omega_{rad}$, o índice n_E é complexo, como destacado na Fig. 6.7.
- (ii) Para $\omega_{rad} < \omega < \omega_p$, o índice é real, positivo e decrescente com ω , representando uma zona de propagação que não existe no caso padrão. Veja Fig. 6.7
- (iii) Para $\omega > \omega_p$, o índice n_E se torna negativo, definindo uma zona de propagação com refração negativa, onde sua magnitude aumenta progressivamente para o valor assintótico, $n_E \rightarrow -1$, de maneira muito semelhante ao caso usual.

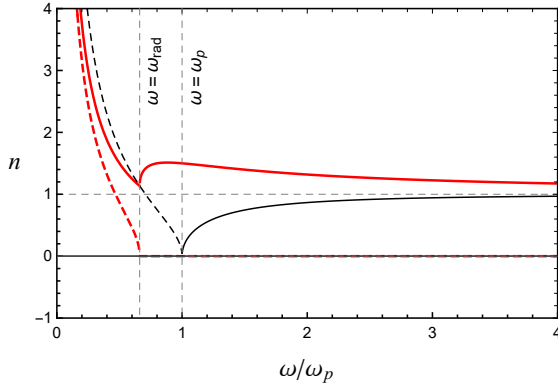


Figura 6.5: Índice de refração n_L sob a condição (6.1.8). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_L ($\tilde{n}_+$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_L ($\tilde{n}_+$). Aqui, $V_0 = (3/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

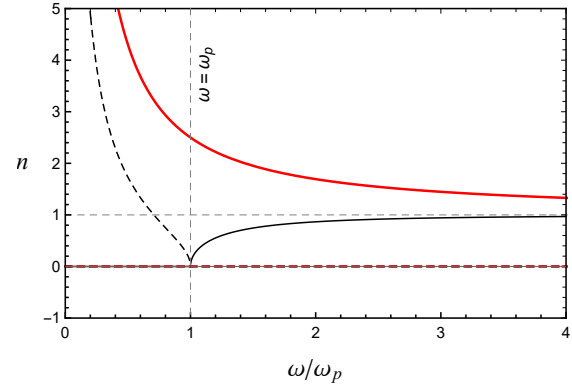


Figura 6.6: Índice de refração n_L sob a condição (6.1.9). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_L ($\tilde{n}_+$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_L ($\tilde{n}_+$). Aqui, $V_0 = (5/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

Por outro lado, para a condição (6.1.9), não há absorção, pois n_E é real para qualquer frequência, veja Fig. 6.8. Neste caso, $\text{Re}[n_E] > 0$ para $\omega < \omega_p$, correspondendo a uma zona de propagação que aparece no lugar da zona de absorção completa usual. Além disso, para $\omega > \omega_p$, $\text{Re}[n_E] < 0$ e há uma zona de propagação com refração negativa, apresentando comportamento semelhante ao caso usual.

6.1.5 Modos de baixa frequência

Como visto anteriormente, modos hélicons de baixa frequência ocorrem para modos propagantes de polarização circular, usualmente associados ao modo RCP (Vide Seção 2.5). Neste contexto quiral, embora na ausência de campo magnético, modos circularmente polarizados estão associados aos índices de refração (6.1.4) e (6.1.5), o que nos permite investigar a propagação de hélicons no presente caso. Em um plasma não magnetizado, o limite de baixa frequência é definido por apenas uma condição,

$$\omega \ll \omega_p, \quad (6.1.11)$$

que implementada nos índices de refração (6.1.4) e (6.1.5), fornece

$$\bar{n}_{R,M} = -\frac{V_0}{2\omega} \pm \frac{1}{2\omega} \sqrt{V_0^2 - 4\omega_p^2}, \quad (6.1.12)$$

$$\bar{n}_{L,E} = \frac{V_0}{2\omega} \pm \frac{1}{2\omega} \sqrt{V_0^2 - 4\omega_p^2}, \quad (6.1.13)$$

onde usamos novamente a notação "barra" para indicar as quantidades hélicon. Os índices (6.1.12) e (6.1.13) indicam a existência de ambos os hélicons RCP e LCP, que se propagam no regime de baixa energia devido à presença do fator quiral, V_0 . Estes modos são dispersivos, com magnitude que depende do inverso da frequência. Vale pontuar que,

- Sob a condição (6.1.8), $V_0^2/4 < \omega_p^2$, os índices (6.1.12) e (6.1.13) tornam-se complexos implicando

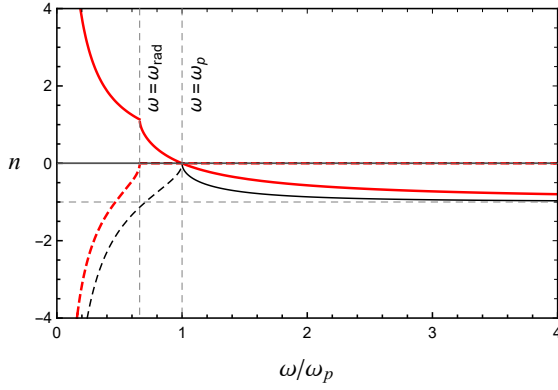


Figura 6.7: Índice de refração n_E sob a condição (6.1.8). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_E ($\tilde{n}_-$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_E ($\tilde{n}_-$). Aqui, $V_0 = (3/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

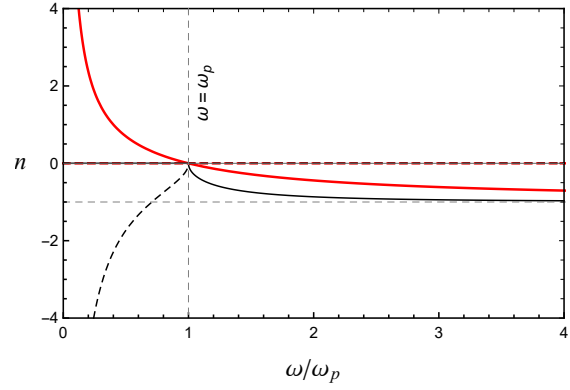


Figura 6.8: Índice de refração n_E sob a condição (6.1.9). A linha tracejada vermelha (preta) corresponde à parte imaginária de n_E ($\tilde{n}_-$), enquanto a linha sólida vermelha (preta) representa a parte real de n_E ($\tilde{n}_-$). Aqui, $V_0 = (5/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

comportamento com perdas.

- Sob a condição (6.1.9), $V_0^2/4 > \omega_p^2$, os índices $\bar{n}_{R,M}$ e $\bar{n}_{L,E}$ são reais, sendo associados a modos hélicon propagantes dispersivos. Além disso, ocorre refração negativa, associada a $\bar{n}_R$, $\bar{n}_M$ e $\bar{n}_E$.

No contexto de plasma magnetizado na eletrodinâmica MCFJ, abordado na Seção 4.2.7, os índices hélicon $\bar{n}_{R,E}$ exibem um comportamento constante e não dispersivo, diferentemente dos índices (6.1.12) e (6.1.13). Outro ponto importante é que os índices (6.1.12) e (6.1.13) representam modos propagantes de baixa frequência (RCP e LCP) com diferentes índices de refração. Este cenário difere da teoria dos plasmas quirais magnetizados, onde diferentes modos de baixa frequência associados ao mesmo índice $\bar{n}_{R,E}$ ocorrem, como visto na Seção 4.2.7.

6.1.6 Comportamento das relações de dispersão

Partindo dos índices n_R e n_M , sob a condição (6.1.8), as relações de dispersão são ilustradas na Fig. 6.9. Neste caso, a propagação ocorre para $\omega > \omega_{rad}$, enquanto a absorção ocorre para $\omega < \omega_{rad}$. Como $\omega_{rad} < \omega_p$, observa-se uma zona de absorção reduzida para n_R e n_M (a zona rosa clara) em relação à dos índices usuais ($\tilde{n}_\pm$). Para $\omega_{rad} < \omega < \omega_p$, a região incomum de refração negativa ($k < 0$) de n_R torna-se evidente. Sob a condição (6.1.9), os índices n_R e n_M são inteiramente reais, e os modos associados se propagam para quaisquer frequências, como mostrado na Fig. 6.10. Como claramente mostrado, o índice n_R (linha azul) torna-se negativo para $0 < \omega < \omega_p$.

A refração negativa também surge no caso de plasma quiral magnetizado, devido à presença do fator quiral V_0 , como visto no Capítulo 4, enquanto não é observada na presença do vetor quiral $\mathbf{V}$, estudado no Capítulo 5. Assim, a dispersão negativa é uma característica do setor tipo-tempo da eletrodinâmica MCFJ.

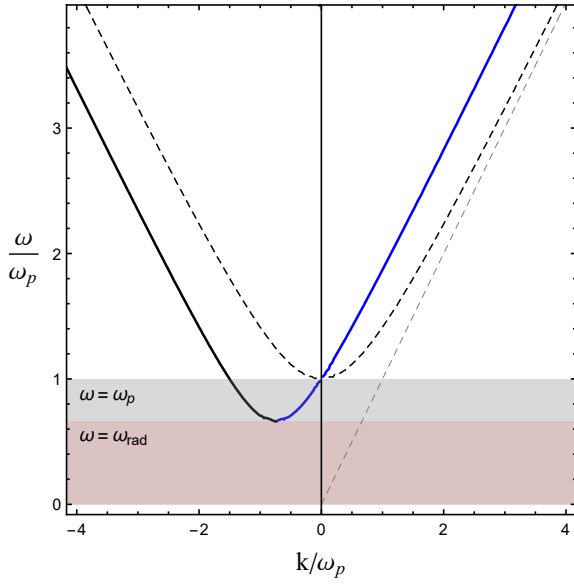


Figura 6.9: Relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_R (linha sólida azul) e n_M (linha sólida preta), sob a condição (6.1.8). A linha tracejada preta representa os índices do caso padrão, $\tilde{n}_{\pm}$. A área destacada em $n_{R,M}$ vermelho (cinza mais vermelho) indica a zona de absorção para $n_{R,M}$ ($\tilde{n}_{\pm}$). Aqui, usamos $V_0 = (3/2)\omega_p$, com $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

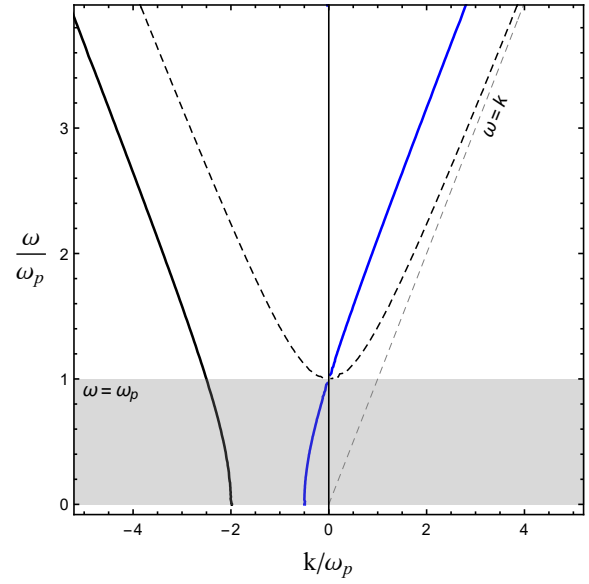


Figura 6.10: Relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_R (linha sólida azul) e n_M (linha sólida preta), sob a condição (6.1.9). A linha tracejada preta representa os índices do caso padrão, $\tilde{n}_{\pm}$. A área destacada em cinza indica a zona de absorção para $\tilde{n}_{\pm}$. O gráfico também revela a ausência de região com perdas para $n_{R,M}$. Aqui, usamos $V_0 = (5/2)\omega_p$, com $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

As relações de dispersão associadas a n_L e n_E , sob a condição (6.1.8), são mostradas na Fig. 6.11. Zonas de absorção e propagação ocorrem para $\omega < \omega_{rad}$ e $\omega > \omega_{rad}$, respectivamente. O cenário da zona de absorção reduzida é semelhante ao da Fig. 6.9, mas com o índice n_E exibindo refração negativa no lugar de n_R . Por outro lado, sob a condição (6.1.9), não há absorção, e a propagação ocorre para $\omega > 0$, como ilustrado na Fig. 6.12, que encontra similaridade com o gráfico da Fig. 6.10.

6.1.7 Poder de rotação

Os índices (6.1.4) e (6.1.5) estão associados a ondas RCP e LCP, respectivamente, que propagam com velocidades de fase distintas, $v_R = 1/n_R$, $v_L = 1/n_L$, $v_E = 1/n_E$ e $v_M = 1/n_M$, o que implica em birrefringência para plasma quiral não magnetizado. O RP, considerando os índices de refração n_L e n_R , é escrito como

$$\delta_{LR} = -\frac{\omega}{2} (\text{Re}[n_L] - \text{Re}[n_R]), \quad (6.1.14)$$

fornecendo simplesmente um PR constante (não dispersivo), a saber

$$\delta_{LR} = -\frac{\omega}{2} \text{Re}[V_0/\omega] = -\frac{V_0}{2}, \quad (6.1.15)$$

induzido pela presença do parâmetro quiral V_0 .

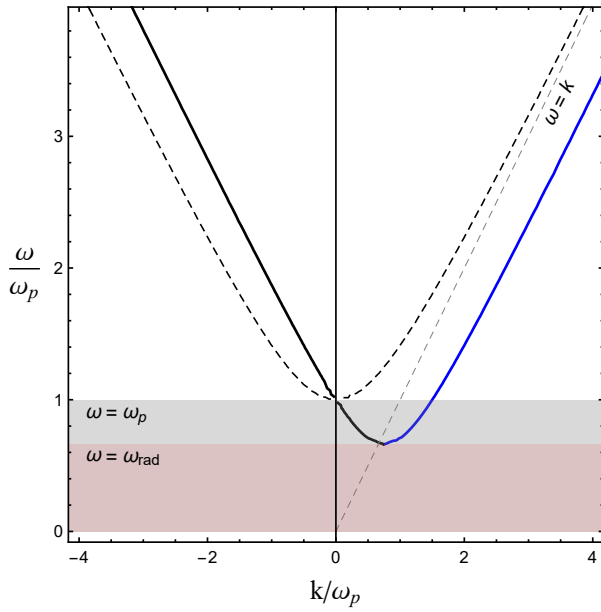


Figura 6.11: Relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_L (linha sólida azul) e n_E (linha sólida preta) sob a condição (6.1.8). A linha tracejada preta representa os índices do caso padrão, $\tilde{n}_{\pm}$. A área destacada em vermelho (cinza e vermelho) indica a zona de absorção para $n_{R,M}$ ($\tilde{n}_{\pm}$). Aqui, usamos $V_0 = (3/2)\omega_p$, com $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

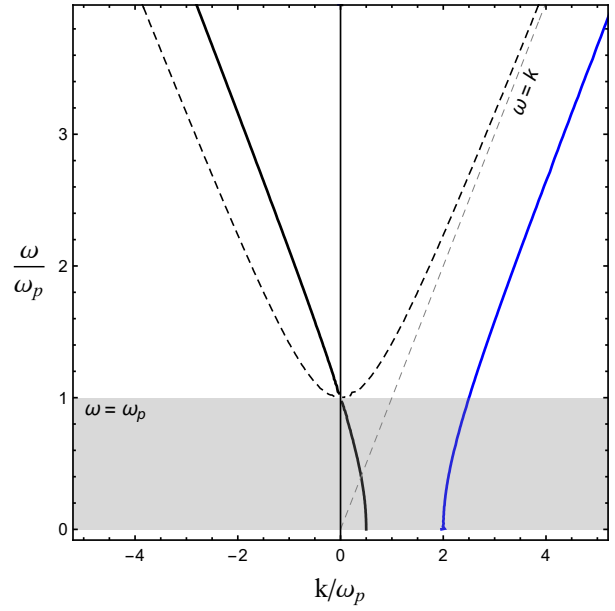


Figura 6.12: Relações de dispersão relacionadas aos índices de refração n_L (linha sólida azul) e n_E (linha sólida preta) sob a condição (6.1.9). A linha tracejada preta representa os índices do caso padrão, $\tilde{n}_{\pm}$. A área destacada em cinza representa a zona de absorção para $\tilde{n}_{\pm}$. O gráfico também revela a ausência de uma região com perdas para $n_{L,E}$. Aqui, usamos $V_0 = (5/2)\omega_p$, com $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

Considerando agora os índices de refração n_E e n_R , o PR é escrito como

$$\delta_{ER} = -\frac{\omega}{2} (\text{Re}[n_E] - \text{Re}[n_R]), \quad (6.1.16)$$

$$\delta_{ER} = -\frac{\omega}{2} \text{Re} \left[V_0/\omega - 2\sqrt{R(\omega)} \right], \quad (6.1.17)$$

que é mostrado na Fig. 6.13. Sob a condição (6.1.8), tem-se $R(\omega) < 0$ para $\omega < \omega_{rad}$, de modo que o termo $\sqrt{R(\omega)}$ é puramente imaginário neste regime. O PR (6.1.17) então coincide com (6.1.15) para $\omega < \omega_{rad}$. Para $\omega > \omega_{rad}$ o termo $\sqrt{R(\omega)}$ torna-se real e começa a contribuir (positivamente) para o RP, como visto na Fig. 6.13. Também vale mencionar que o PR (6.1.17) sofre uma inversão de sinal na frequência de plasma ω_p . Além disso, observe que tal PR crescente é uma consequência da zona de refração negativa de n_E .

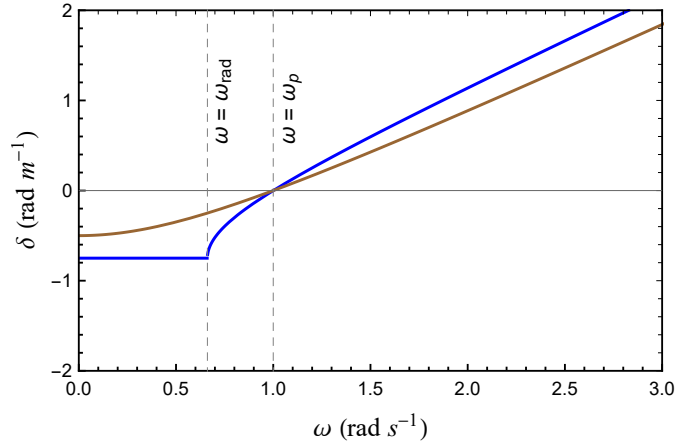


Figura 6.13: Poder de rotação (6.1.17) definido para os índices de refração n_E e n_R . Ele é representado pela linha sólida azul para a condição (6.1.8) e $V_0 = (3/2)\omega_p$, e pela linha marrom para a condição (6.1.9) e $V_0 = (5/2)\omega_p$. Aqui, usamos $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

O comportamento do PR (6.1.17) sob a condição (6.1.9) é ilustrado pela linha marrom na Fig. 6.13. Neste caso, tem-se $R(\omega) > 0$ para qualquer frequência, então a raiz quadrada $\sqrt{R(\omega)}$ contribui para o PR para $\omega > 0$, produzindo o perfil suavemente crescente da Fig. 6.13. O comportamento de inversão de sinal em ω_p não é alterado, ocorrendo em $\omega = \omega_p$.

Uma inversão do poder de rotação não é usual na teoria de plasmas, nem mesmo para o caso magnetizado. Portanto, observa-se que o fator quiral não apenas induz birrefringência, como também a inversão de PR em plasma não magnetizado.

O PR também pode ser avaliado para os índices de refração n_L e n_M , fornecendo

$$\delta_{LM} = -\frac{\omega}{2} \text{Re} \left[V_0/\omega + 2\sqrt{R(\omega)} \right]. \quad (6.1.18)$$

que está plotado na Fig. 6.14, para as condições (6.1.8) e (6.1.9). Como observado, o PR é sempre negativo, sem inversão de sinal.

6.1.8 Coeficiente de dicroísmo

Como já visto, sob a condição (6.1.8) os índices de refração n_L e n_R são complexos para $\omega < \omega_{rad}$ e ocorre absorção. O coeficiente de dicroísmo, no entanto,

$$\delta_{dLR} = -\frac{\omega}{2} (\text{Im}[n_L] - \text{Im}[n_R]) = -\frac{1}{2} \text{Im}[V_0] = 0, \quad (6.1.19)$$

é nulo neste regime, $\delta_{dLR} = 0$, já que o parâmetro quiral V_0 é considerado real. Fisicamente, isso significa que ambas as ondas RCP e LCP são absorvidas no mesmo grau na janela $\omega < \omega_{rad}$, onde os índices associados são complexos. Este comportamento difere do cenário do plasma quiral magnetizado, onde o coeficiente δ_{dLR} é não nulo para diferentes faixas de frequência; veja Seção 4.3.2.

Para os índices n_E e n_R , sob a condição (6.1.8), o coeficiente de dicroísmo circular é

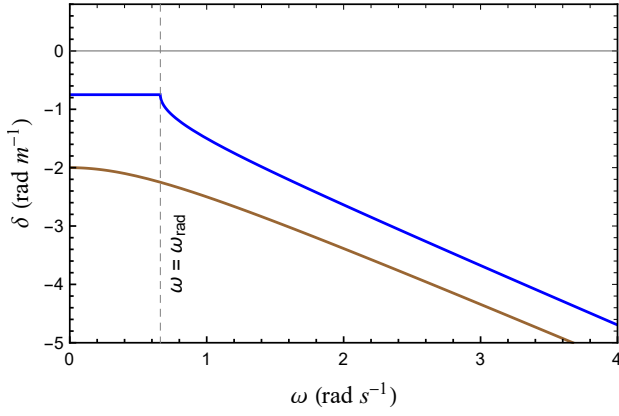


Figura 6.14: Poder de rotação (6.1.18) definido para os índices de refração n_L e n_M . Ele é representado pela linha sólida azul para a condição (6.1.8) e $V_0 = (3/2)\omega_p$, e pela linha marrom para a condição (6.1.9) e $V_0 = (5/2)\omega_p$. Aqui, usamos $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

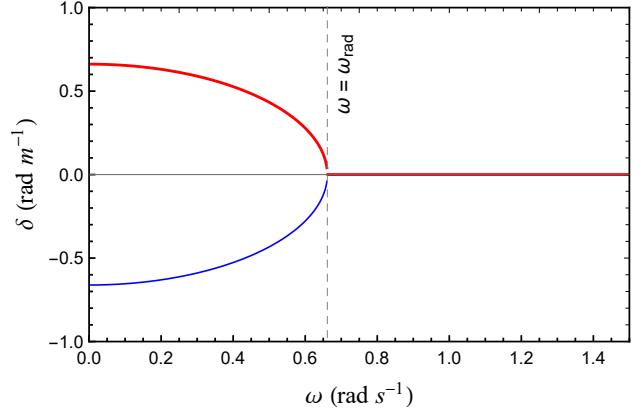


Figura 6.15: Linha vermelha: coeficiente de dicroísmo (6.1.20), definido pelos índices de refração n_E e n_R sob a condição (6.1.8). Linha azul: coeficiente de dicroísmo (6.1.21), definido pelos índices de refração n_L e n_M sob a condição (6.1.8). Aqui, usamos $V_0 = (3/2)\omega_p$, e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

$$\delta_{dER} = \begin{cases} \omega \sqrt{R(\omega)}, & \text{para } 0 < \omega < \omega_{rad}, \\ 0, & \text{para } \omega > \omega_{rad}. \end{cases} \quad (6.1.20)$$

Tal coeficiente é não nulo apenas para $\omega < \omega_{rad}$, sendo ilustrado na Fig. 6.15. Ele também é diferente daquele de um plasma quiral magnetizado, que pode ser não nulo para um ou mais intervalos, como discutido na Seção 4.3.2.

Finalmente, escrevemos o coeficiente de dicroísmo circular para os índices de refração n_L e n_M , sob a condição (6.1.8),

$$\delta_{dLM} = \begin{cases} -\omega \sqrt{R(\omega)}, & \text{para } 0 < \omega < \omega_{rad}, \\ 0, & \text{para } \omega > \omega_{rad}, \end{cases} \quad (6.1.21)$$

que apresenta dicroísmo não nulo e negativo apenas para $\omega < \omega_{rad}$, como mostrado pela linha azul na Fig. 6.15, que corresponde ao comportamento espelhado (sinal oposto) do coeficiente (6.1.20).

Na Tabela 6.1 estão comparados os principais resultados obtidos neste capítulo com o contexto usual de plasma frio, magnetizado e não magnetizado, e com o caso quiral magnetizado na presença do fator quiral V_0 , abordado no Capítulo 4.

Tabela 6.1: Propriedades de propagação de quatro cenários distintos de plasmas frios. O símbolo “...”significa que a entrada não se aplica à característica e ao modelo de plasma mencionados.

Propriedade	Plasma não magnetizado (eletrodinâmica usual)	Plasma magnetizado (eletrodinâmica usual)	Plasma quiral MCFJ não magnetizado com $\mathbf{J}_B = k_{AF}^0 \mathbf{B}$	Plasma quiral MCFJ magnetizado com $\mathbf{J}_B = k_{AF}^0 \mathbf{B}$
Modos de propagação	Modo linear	RCP para n_- , LCP para n_+	RCP para $n_{R,M}$, LCP para $n_{L,E}$	RCP para $n_{R,M}$, LCP para $n_{L,E}$
Birrefringência	...	PR	PR (6.1.15) e (6.1.17)	PR δ_{LR} e δ_{ER}
Inversão de PR	...	Não	Sim	Sim
Absorção	Sim (convencional)	Sim (dicroísmo)	Sim, δ_{dER} (6.1.20)	Sim (dicroísmo)
Hélicons	...	RCP	RCP e LCP (fator quiral)	RCP e LCP

PLASMA FRIO BI-ISOTRÓPICO

Sumário

7.1 Propagação de ondas em plasma quiral do tipo bi-isotrópico	119
7.1.1 Modos de baixa frequência	122
7.1.2 Poder de rotação	123
7.1.3 Coeficiente de dicroísmo	124

Nos capítulos anteriores investigamos plasmas frios quirais, considerando a presença da corrente magnética quiral e da corrente Hall anômala, regidas pela eletrodinâmica de MCFJ. No entanto, como comentado no Capítulo 3, efeitos quirais podem ser também investigados a partir das relações constitutivas bi-isotrópicas e bi-anisotrópicas. No contexto da física de plasmas, relações bi-isotrópicas foram utilizadas na investigação dos modos de propagação e relações de dispersões quirais, voltados à análise da refração negativa [38, 39]. Neste capítulo, revisitamos esse sistema quiral para uma investigação mais detalhada de suas propriedades, como o comportamento dos índices de refração, estudo dos modos de baixa frequência e efeitos de birrefringência, realizando os mesmos procedimentos desenvolvido ao longo desta tese. Os desenvolvimentos e resultados deste capítulo estão apresentados conforme a abordagem original realizada na Ref. [84].

7.1 Propagação de ondas em plasma quiral do tipo bi-isotrópico

Examinamos um plasma quiral descrito pelas relações constitutivas do tipo bi-isotrópicas,

$$D^i = \epsilon_{ij}(\omega) E^j + i\xi_c B^i, \quad (7.1.1a)$$

$$H^i = i\xi_c E^i + \mu_0^{-1} B^i, \quad (7.1.1b)$$

que substituídas nas equações de Maxwell, fornecem a equação de onda modificada

$$\left[n^2 \delta_{ik} - n^i n^k - 2i\tilde{\xi}_c \epsilon_{ijk} n^j - \epsilon_{ik}(\omega) / \epsilon_0 \right] E^k = 0, \quad (7.1.2)$$

onde $\tilde{\xi}_c = \xi_c / (c\epsilon_0)$ é o parâmetro quiral redefinido, e $\epsilon_{ik}(\omega)$ é o tensor de permissividade do plasma, dado em Eq. (2.4.21).

É oportuno comentar sobre a possibilidade de comparar o cenário quiral bi-isotrópico com o caso de vetor de violação tipo-tempo de CFJ, abordado no Capítulo 4. Para isso, basta observar a similaridade

das Eqs. (7.1.2) e (4.2.1), das quais, por comparação, pode-se estabelecer uma conexão entre $\tilde{\xi}_c$ e o vetor tipo-tempo V^0 :

$$2\tilde{\xi}_c\omega = V^0. \quad (7.1.3)$$

Uma correspondência similar foi apontada na Ref. [186]. Desta forma, pode-se interpretar que o fator tipo-tempo do CFJ pode efetivamente descrever uma resposta eletromagnética quiral dispersiva de sistemas bi-isotrópicos.

A Eq. 7.1.2 pode ser lida em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} n^2 - n_x^2 - S & -n_x n_y + 2i\tilde{\xi}_c n_z + iD & -n_x n_z - 2i\tilde{\xi}_c n_y \\ -n_x n_y - 2i\tilde{\xi}_c n_z - iD & n^2 - n_y^2 - S & -n_y n_z + 2i\tilde{\xi}_c n_x \\ -n_x n_z + 2i\tilde{\xi}_c n_y & -n_y n_z - 2i\tilde{\xi}_c n_x & n^2 - n_z^2 - P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0, \quad (7.1.4)$$

que para $\mathbf{n} = n\hat{z}$, lê-se

$$\begin{bmatrix} n^2 - S & 2i\tilde{\xi}_c n + iD & 0 \\ -2i\tilde{\xi}_c n - iD & n^2 - S & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0, \quad (7.1.5)$$

cujas soluções não triviais surgem da condição de determinante nulo para a matriz de coeficientes. Assim, obtém-se

$$P \left[(n^2 - S)^2 - (2\tilde{\xi}_c n + D)^2 \right] = 0. \quad (7.1.6)$$

Como sabemos, A relação de dispersão acima descreve as propriedades dispersivas do sistema e determina seus modos de propagação. Para a configuração de onda longitudinal, $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$, o modo não propagante padrão decorre de $P = 0$ e ocorre na frequência de plasma, $\omega = \omega_p$. Modo longitudinais não alterados foram também constatados nos sistemas quirais estudados anteriormente.

Para ondas transversais, com $\mathbf{n} \perp \mathbf{E}$ e $\mathbf{E} = (\delta E_x, \delta E_y, 0)$, a Eq. (7.1.6) fornece

$$n^2 \pm (2\tilde{\xi}_c n + D) - S = 0, \quad (7.1.7)$$

com D e S definidos na Eq. (2.4.26). Tal equação permite obter os seguintes índices de refração

$$n_{R\pm} = -\tilde{\xi}_c \pm \sqrt{1 + \tilde{\xi}_c^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}}, \quad (7.1.8)$$

$$n_{L\pm} = \tilde{\xi}_c \pm \sqrt{1 + \tilde{\xi}_c^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}}, \quad (7.1.9)$$

associados a modos de propagação RCP e LCP, respectivamente.

As raízes dos índices de refração são frequências de corte padrão, a saber

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4\omega_p^2 + \omega_c^2} \mp \omega_c \right), \quad (7.1.10)$$

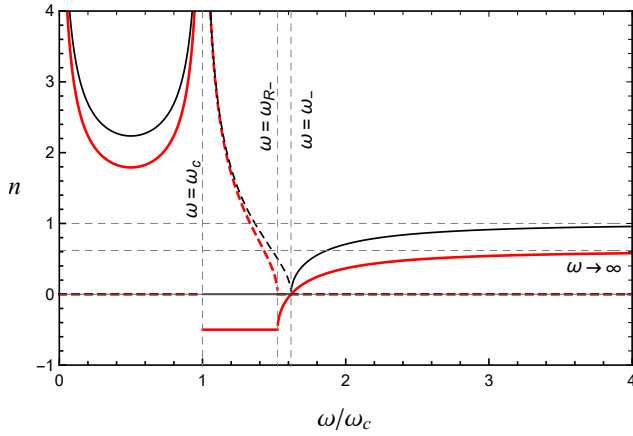


Figura 7.1: Índice de refração n_{R+} para $\omega_p = \omega_c$. A linha vermelha sólida (tracejada) corresponde à parte real (imaginária) de n_{R+} . O mesmo padrão vale para o índice n_{-} de Eq. (2.4.35), mostrado aqui para comparação. Aqui, $\tilde{\xi}_c = 0.8$ e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

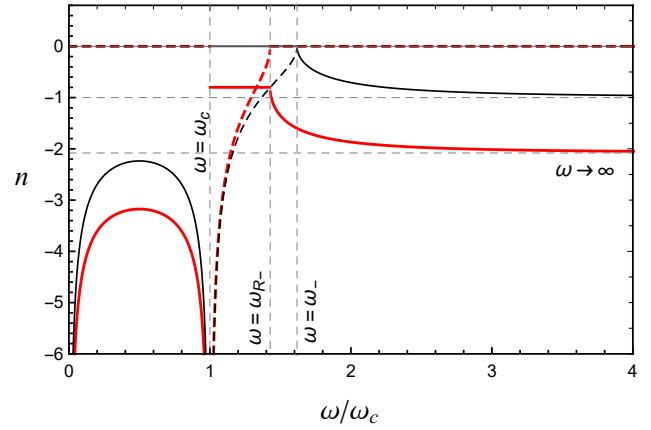


Figura 7.2: Índice de refração n_{R-} para $\omega_p = \omega_c$. A linha vermelha tracejada (preta) corresponde à parte imaginária de n_{R-} ($-n_{-}$), enquanto a linha vermelha sólida (preta) representa a parte real de n_{R-} ($-n_{-}$). O índice n_{-} é dado em Eq. (2.4.35). Aqui, $\tilde{\xi}_c = 0.8$ e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

que ocorrem nos índices n_{R+} e n_{L-} , respectivamente. Por outro lado, os índices n_{R-} e n_{L+} não têm raízes reais, sendo completamente negativo e positivo para todos os valores de frequência, respectivamente. É importante notar que os índices (7.1.8) e (7.1.9) tornam-se complexos no intervalo em que os radicandos,

$$R_{\pm}(\omega) = 1 + \tilde{\xi}_c^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}, \quad (7.1.11)$$

são negativos. Essas regiões são limitadas por uma das raízes,

$$\omega_{R\pm} = \mp \omega_c/2 + \sqrt{\omega_p^2/(1 + \tilde{\xi}_c^2) + \omega_c^2/4}, \quad (7.1.12)$$

como mostrado nos gráficos das Figs. 7.1, 7.2, 7.3, 7.4. Note que $\omega_{R\pm}$ está relacionado a $n_{R\pm}$ e $n_{L\pm}$, respectivamente.

Agora, examinamos os principais impactos do parâmetro quiral $\tilde{\xi}_c$ nos índices de refração supondo que sua magnitude seja comparável com os observáveis ópticos do sistema (para amplificar sua ação). Essas características são apontadas abaixo:

- O índice de refração n_{R+} , ilustrado na Fig. 7.1, apresenta uma zona de propagação livre (sem absorção) para $0 < \omega < \omega_c$, similarmente ao caso usual (linha preta sólida). Para $\omega_c < \omega < \omega_{R-}$, o índice é complexo, $\text{Im}[n_{R+}] \neq 0$, e ocorre uma zona de absorção (onde a parte real do índice é negativa). Como $\omega_{R-} < \omega_-$, tem-se uma zona de absorção encurtada comparada ao caso usual, veja Fig. 7.1. Além disso, uma zona de refração negativa de propagação livre (inexistente no caso padrão) emerge para $\omega_{R-} < \omega < \omega_-$.
- O índice de refração negativo n_{R-} é representado na Fig. 7.2, mostrando uma zona de propagação para $0 < \omega < \omega_c$ e uma zona de absorção encurtada para o intervalo $\omega_c < \omega < \omega_{R-}$, com a

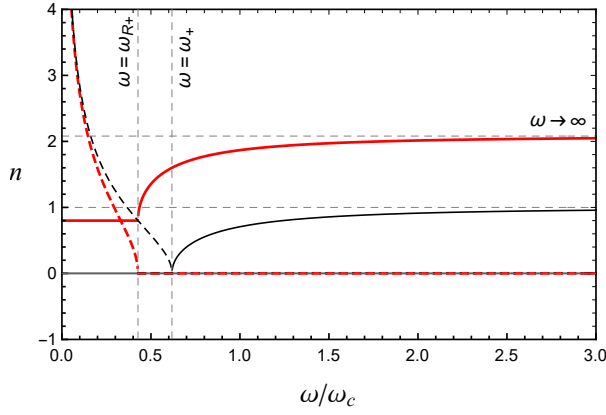


Figura 7.3: Índice de refração n_{L+} para $\omega_p = \omega_c$. A linha vermelha tracejada (preta) corresponde à parte imaginária de n_{L+} ($\tilde{n}_+$), enquanto a linha vermelha sólida (preta) representa a parte real de n_{L+} ($\tilde{n}_+$), onde o índice $\tilde{n}_+$ é dado em Eq. (2.4.35). Aqui, $\tilde{\xi}_c = 0.8$ e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

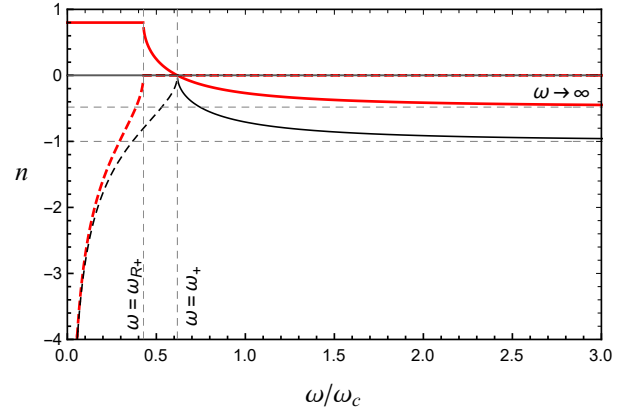


Figura 7.4: Índice de refração n_{L-} para $\omega_p = \omega_c$. A linha vermelha tracejada (preta) corresponde à parte imaginária de n_{L-} ($-\tilde{n}_+$), enquanto a linha vermelha sólida (preta) representa a parte real de n_{L-} ($-\tilde{n}_+$). O índice $\tilde{n}_+$ é dado em Eq. (2.4.35). Aqui, $\tilde{\xi}_c = 0.8$ e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

parte real de n_{R-} sendo negativa. A zona de propagação puramente do tipo metamaterial vale para $\omega_{R-} < \omega < \omega_-$.

- Para o índice de refração n_{L+} , exibido na Fig. 7.3, ocorre uma zona de absorção parcial para $0 < \omega < \omega_{R+}$, enquanto para $\omega > \omega_{R+}$ ocorre propagação livre de atenuação.
- Para o índice de refração n_{L-} , ilustrado na Fig. 7.4, ocorre absorção parcial para $0 < \omega < \omega_{R+}$, seguida por uma zona de propagação para o intervalo $\omega_{R+} < \omega < \omega_+$, onde $\text{Re}[n_{L-}] > 0$. Para $\omega > \omega_+$, o índice é puramente real e negativo, representando uma zona de propagação com refração negativa.

No limite de alta frequência, os índices do plasma bi-isotrópico (7.1.8) e (7.1.9) tendem aos valores assintóticos $n_{R\pm} \rightarrow -\tilde{\xi}_c \pm \sqrt{1 + \tilde{\xi}_c^2}$ e $n_{L\pm} \rightarrow \tilde{\xi}_c \pm \sqrt{1 + \tilde{\xi}_c^2}$, diferindo dos valores do vácuo, $n_{\pm} \rightarrow 1$, que valem no cenário de plasma convencional.

7.1.1 Modos de baixa frequência

Para o plasma magnetizado quiral bi-isotrópico descrito pelos índices (7.1.8) e (7.1.9), o regime de baixa frequência,

$$\omega \ll \omega_p, \quad \omega_c \ll \omega_p, \quad \omega \ll \omega_c, \quad (7.1.13)$$

fornece

$$\bar{n}_{R\pm} = \pm\omega_p \sqrt{\frac{1}{\omega\omega_c} - \tilde{\xi}_c}, \quad (7.1.14)$$

$$\bar{n}_{L\pm} = \pm i\omega_p \sqrt{\frac{1}{\omega\omega_c} + \tilde{\xi}_c}. \quad (7.1.15)$$

Tais índices contêm uma contribuição quiral linear e não dispersiva. Os índices $\bar{n}_{R\pm}$ são reais, enquanto $\bar{n}_{L\pm}$ são complexos, de acordo com o comportamento observado na faixa de baixa frequência para os índices de refração nas Figs. 7.1–7.4. Assim, o modo RCP se propaga, enquanto o modo LCP é absorvido no regime de baixa energia. Além disso, o índice $\bar{n}_{R+}$ pode exibir zona de refração negativa quando $\omega > \hat{\omega}$, com $\hat{\omega} = \omega_p^2/(\tilde{\xi}_c^2\omega_c)$. Portanto, a refração convencional ($\bar{n}_{R+} > 0$) para o hélicon RCP é garantida apenas para $\omega < \hat{\omega}$.

7.1.2 Poder de rotação

Sendo o plasma quiral bi-isotrópico descrito pelos índices $n_{L\pm}$ e $n_{R\pm}$, associados às ondas LCP e RCP, pode-se selecionar ondas que se propagam na mesma direção $+\hat{z}$, com $n > 0$, para determinar o poder de rotação. Assim, para esta análise, não consideraremos n_{R-} , que é sempre negativo. Inicialmente, consideramos os índices n_{L+} e n_{R+} , para os quais o PR (2.6.14) torna-se

$$\delta_{LR}^{++} = -\frac{\omega}{2} \left(2\tilde{\xi}_c + \text{Re} \left[\sqrt{R_+(\omega)} \right] - \text{Re} \left[\sqrt{R_-(\omega)} \right] \right), \quad (7.1.16)$$

onde $R_{\pm}(\omega)$ são os radicandos dados em (7.1.11). O comportamento do PR acima é ilustrado nas Figs. 7.5 e 7.6, para $0 < \omega < \omega_c$ e $\omega > \omega_-$, respectivamente¹, considerando três valores para o parâmetro quiral: $\tilde{\xi}_c = 0$ (linha preta tracejada), $\tilde{\xi}_c = 0.8$ (linha azul tracejada com pontos), e $\tilde{\xi}_c = 1.0$ (linha vermelha sólida). Para $0 < \omega < \omega_c$, notamos que o parâmetro quiral induz uma dupla reversão de sinal, como ocorre no caso da linha vermelha (veja Fig. 7.5), com inversões ocorrendo em ω' e ω'' . Para $\omega_c < \omega < \omega_-$, o PR (7.1.16) é sempre negativo e decresce com a frequência para $\omega > \omega_-$ [veja Fig. 7.6]. No regime de alta frequência, $\omega \gg (\omega_c, \omega_p)$, o PR comporta-se como

$$\delta_{LR}^{++} \approx -\tilde{\xi}_c\omega - \frac{\omega_c\omega_p^2}{2\sqrt{1 + \tilde{\xi}_c^2\omega^2}}. \quad (7.1.17)$$

exibindo um decaimento linear incomum com a frequência devido à contribuição quiral no primeiro termo.

Considerando os índices de refração n_{L-} e n_{R+} , que são ambos positivos na faixa de frequência

¹Para o intervalo intermediário, $\omega_c < \omega < \omega_-$, o PR (7.1.16) não é definido, pois as ondas RCP e LCP estão associadas a velocidades de fase opostas (determinadas pelos sinais dos índices de refração), com $n_{R+} < 0$ e $n_{L+} > 0$ (veja Figs. 7.1 e 7.3).

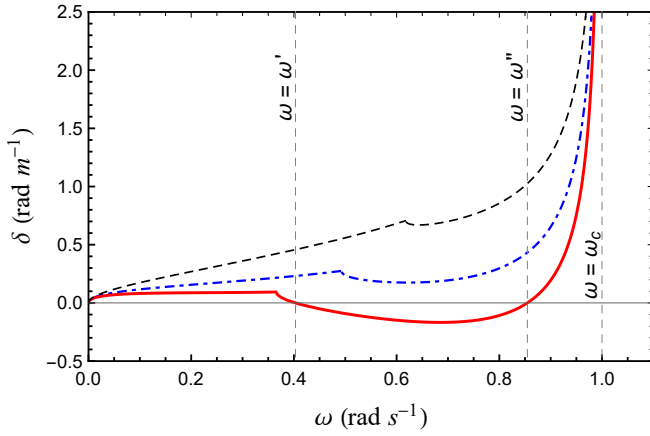


Figura 7.5: Poder de rotação (7.1.16) para o intervalo $0 < \omega < \omega_c$. É ilustrado na linha azul tracejada com pontos ($\tilde{\xi}_c = 0.6$) e linha vermelha sólida ($\tilde{\xi}_c = 1.0$). O PR do plasma padrão ($\tilde{\xi}_c = 0$) é representado pela linha preta tracejada. Aqui, usamos $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

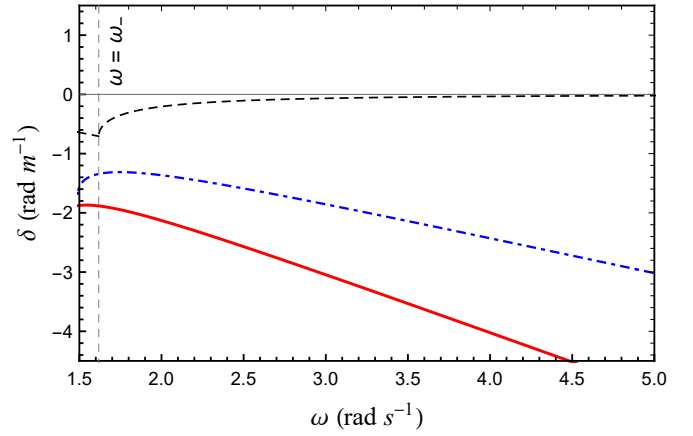


Figura 7.6: Poder de rotação (7.1.16) para a faixa $\omega > \omega_-$. É representado pela linha azul tracejada com pontos ($\tilde{\xi}_c = 0.6$) e linha vermelha sólida ($\tilde{\xi}_c = 1.0$). O PR do plasma padrão ($\tilde{\xi}_c = 0$) é ilustrado por uma linha preta tracejada. Aqui, usamos $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

$0 < \omega < \omega_+$, o PR é dado por

$$\delta_{LR}^{-+} = -\frac{\omega}{2} \left(2\tilde{\xi}_c - \text{Re} \left[\sqrt{R_+(\omega)} \right] - \text{Re} \left[\sqrt{R_-(\omega)} \right] \right), \quad (7.1.18)$$

cujo comportamento é representado na Fig. 7.7 para $\tilde{\xi}_c = 0$ (linha preta tracejada), $\tilde{\xi}_c = 0.8$ (linha azul tracejada com pontos), e $\tilde{\xi}_c = 2.5$ (linha vermelha sólida). Observe que aumentar a magnitude do parâmetro quiral também pode induzir uma dupla inversão em ω' e ω'' , como ilustrado na linha vermelha da Fig. 7.7. Portanto, a reversão do PR aparece no plasma frio bi-isotrópico para os dois coeficientes definidos nesta seção, dados em (7.1.16) e (7.1.18), conforme destacado na abordagem original realizada na Ref. [85]. Tal reversão foi também observada em plasmas frios quirais magnetizados regidos pela eletrodinâmica MCFJ, com apenas uma frequência de inversão [82, 83].

7.1.3 Coeficiente de dicroísmo

Como discutido na Seção 7.1, os índices de refração $n_{L\pm}$ e $n_{R\pm}$ tornam-se complexos para $\omega < \omega_{R+}$ e $\omega_c < \omega < \omega_{R-}$, respectivamente, onde ocorre absorção. Pode-se então avaliar o coeficiente de dicroísmo, dado em (2.6.20), considerando os índices n_{L+} e n_{R+} , que fornecem

$$\delta_{dLR}^{++} = \begin{cases} -\frac{\omega}{2} \sqrt{R_+(\omega)}, & \text{para } 0 < \omega < \omega_{R+}, \\ 0, & \text{para } \omega_{R+} < \omega < \omega_c, \\ +\frac{\omega}{2} \sqrt{R_-(\omega)}, & \text{para } \omega_c < \omega < \omega_{R-}, \\ 0, & \text{para } \omega > \omega_{R-}. \end{cases} \quad (7.1.19)$$

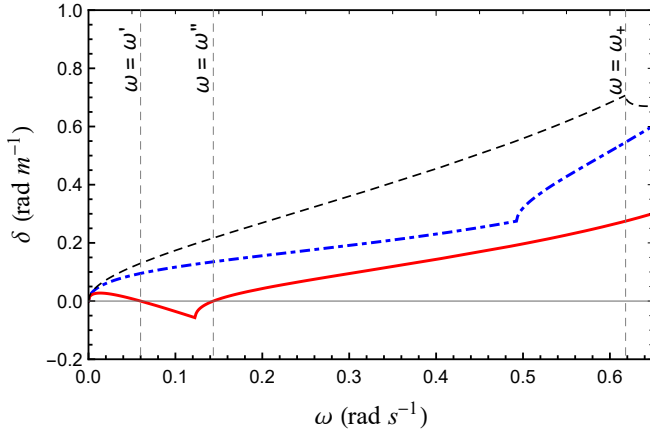


Figura 7.7: Poder de rotação (7.1.18) para o intervalo $0 < \omega < \omega_+$. É representado pela linha azul tracejada com pontos ($\tilde{\xi}_c = 0.6$) e linha vermelha sólida ($\tilde{\xi}_c = 2.5$), enquanto o PR do plasma padrão ($\tilde{\xi}_c = 0$) é ilustrado pela linha tracejada preta. Aqui, usamos $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

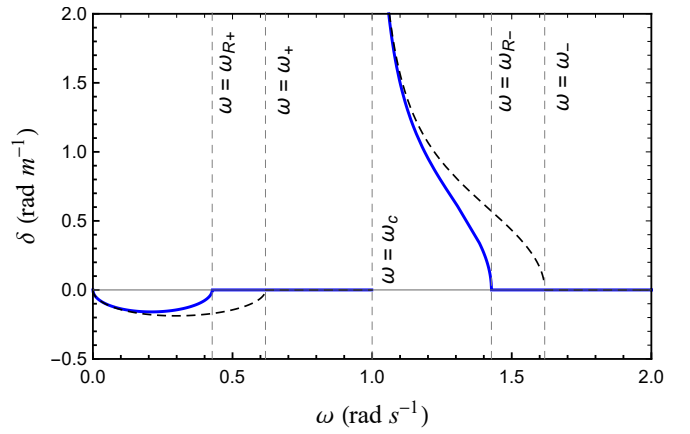


Figura 7.8: Coeficiente de dicroísmo 7.1.19. A linha tracejada preta representa o coeficiente de dicroísmo de um plasma frio usual. Aqui, usamos $\tilde{\xi}_c = 0.8$ e $\omega_p = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

cujo comportamento é exibido na Fig. 7.8. As regiões onde o coeficiente de dicroísmo é não nulo são encurtadas em comparação com o plasma magnetizado usual, de acordo com as bandas de absorção dos índices de refração associados, como visto na Fig. 7.1 e Fig. 7.3. Um comportamento similar foi obtido para um plasma quiral regido pela teoria de MCFJ, onde duas regiões para coeficiente de dicroísmo circular não nulo apareceram sob condições específicas, como discutido nas Seções 4.3.2 e 5.1.1.6.

Para os índices n_{L-} e n_{R+} , o coeficiente de dicroísmo é

$$\delta_{dLR}^{-+} = \begin{cases} +\frac{\omega}{2}\sqrt{R_+(\omega)}, & \text{para } 0 < \omega < \omega_{R+}, \\ 0, & \text{para } \omega_{R+} < \omega < \omega_c, \\ +\frac{\omega}{2}\sqrt{R_-(\omega)}, & \text{para } \omega_c < \omega < \omega_{R-}, \\ 0, & \text{para } \omega > \omega_{R-}, \end{cases} \quad (7.1.20)$$

é não nulo nos mesmos intervalos do primeiro caso e tem a mesma magnitude de δ_{dLR}^{++} , exceto para $0 < \omega < \omega_{R+}$, onde δ_{dLR}^{-+} assume valores opostos, isto é, $\delta_{dLR}^{-+} = -|\delta_{dLR}^{++}|$.

RESTRIÇÕES SOBRE OS PARÂMETROS QUIRAIS USANDO PULSARES

Sumário

8.1	Tempo de atraso e ângulo de Faraday	127
8.2	Tempo de atraso e medida de dispersão na eletrodinâmica MCFJ	131
8.2.1	Restrições dos parâmetros quirais a partir do <i>dispersion measure</i>	133
8.2.1.1	O caso tipo-tempo	133
8.2.1.2	O caso tipo-espaço	134
8.3	Ângulo de Faraday na eletrodinâmica de MCFJ	134
8.3.1	Restrições dos parâmetros quirais a partir da medida de rotação	135
8.4	Comparação com restrições de outros modelos	136
8.5	Medida de dispersão e medida de rotação em meio interestelar quiral bi-isotrópico	137
8.5.1	Restrições usando o conjunto de dados do LOFAR	138
8.6	Restrições sobre os parâmetros quirais usando Fast-Radio-Bursts	139
8.6.1	Medida de dispersão na eletrodinâmica MCFJ	141
8.6.2	Rotação de Faraday na eletrodinâmica MCFJ	142
8.6.3	Restrições utilizando FRBs	143
8.6.4	Restrições de DM utilizando FRBs	143
8.6.5	Restrições de RM utilizando FRBs repetidoras	145
8.6.6	Restrições de RM utilizando FRBs não repetidoras	146

No cenário astrofísico, plasmas desempenham um papel importante na propagação de ondas de rádio advindas de pulsares e outros objetos, que viajam através do meio interestelar (ISM) com velocidade de grupo v_g , até que alcancem detectores na aqui Terra [231]. Durante um trajeto ao longo de uma distância d , as ondas sofrem efeitos dispersivos devidos à interação com as partículas do meio cósmico (plasma), fato que torna seu tempo chegada maior quando comparado ao tempo de ondas que viajam no vácuo.

O ISM é composto por uma variedade de partículas oriundas de gases dos ventos solares e explosões de supernovas, dotado de baixa densidade de elétrons (em torno de $n_e \approx 0.03 \text{ cm}^{-3}$), originados a partir ionização desses gases. Evidentemente, a densidade de elétrons livres varia drasticamente a depender da região considerada. Por exemplo, estima-se que a densidade de uma camada de elétrons na nebulosa do caranguejo seja $n_e \approx 10^6 \text{ cm}^{-3}$, ou seja, uma região de alta concentração de elétrons [187].

Além da dispersão ocasionada pela presença dos elétrons, a luz que propaga no meio interestelar também sofre birrefringência, uma assinatura da presença de um campo magnético galáctico. Neste cenário, as linhas de campo paralelas à linha de visada provocam o surgimento de efeito Faraday. Tal efeito permite estimar a magnitude e forma das linhas do campo galáctico, a partir do ângulo de rotação associado à polarização dos sinais observados.

Pulsares podem também fornecer uma rota para investigar teorias de violação Lorentz (VL). De fato, o *pulsar timing* foi usado para restringir coeficientes do setor de férmions do Modelo Padrão Estendido [188] e de sua extensão gravitacional [189]. Esses exemplos anteriores diferem da presente investigação no sentido de que agora restringimos o setor do fóton CPT-ímpar (termo CFJ) usando dados de radiação emitida por pulsares. Além disso, a influência do áxion nas observações de conjuntos de pulsares, através de uma técnica chamada *pulsar timing array* (PTAs), foi investigada para um modelo de áxion pesado [190], partículas similares aos áxions pós-inflacionários [191] e detecção de ondas gravitacionais estocásticas de fundo (SGWB) [192]. Usando DMs (medidas de dispersão), restrições sobre matéria escura carregada foram derivadas usando um conjunto de dados de pulsares [193]. De maneira similar às PTAs, restrições sobre o acoplamento áxion-fóton também foram examinadas em redes de polarização de pulsares (PPAs) voltadas para medições da propagação de ondas de rádio em um fundo de áxions oscilantes no tempo [194].

Neste capítulo, investigam-se o tempo de atraso e ângulo de rotação de Faraday para sinais de rádio que propagam no ISM, tomando este como um plasma quiral, regido pela eletrodinâmica de MCFJ [82, 83] ou por relações constitutivas bi-isotrópicas [85], conforme proposto no desenvolvimento original realizado na Ref. [86]. Para isso, são considerados os resultados obtidos nos capítulos anteriores, sob a condição de baixa densidade do meio. Além disso, dados associados a cinco pulsares são utilizadas para impor restrições sobre as componentes do vetor de CFJ, as quais são comparadas com restrições realizadas previamente por outros autores, através das ressonâncias de Schumann (no nível de 10^{-20} GeV) [195], por análises laboratoriais envolvendo cavidades ressonantes (no nível de 10^{-23} GeV) [196], por dados de desvio do vento solar (como 10^{-24} GeV) [197], e por seus efeitos nas anisotropias da radiação cósmica de fundo (rigoroso limite de 10^{-44} GeV) [198]. Por fim, os mesmos dados são utilizados para impor restrições sobre o parâmetro quiral bi-isotrópico, conforme abordagem original realizada na Ref. [85].

8.1 Tempo de atraso e ângulo de Faraday

Para plasma frio usual magnetizado, abordado no Capítulo 2, as ondas transversais circularmente polarizadas à direita e à esquerda estão relacionadas aos índices de refração

$$n_{R,L}^2 = 1 - \omega_p^2 / (\omega (\omega \pm \omega_c)), \quad (8.1.1)$$

com $\omega_p = \sqrt{n_e e^2 / (m \epsilon_0)}$ e $\omega_c = e B_0 / m$ sendo as frequências de plasma e ciclotrônica. Neste caso, foi considerado $q = -e$, m , n_e , sendo estes a carga, massa e densidade de elétrons (dada em cm^{-3}), respectivamente. Tal escolha decorre do fato de que a dispersão no ISM ocorre majoritariamente devido

aos elétrons, o que nos permite negligenciar a contribuição de íons e outras partículas.

O tempo de chegada de um sinal eletromagnético viajando por uma distância d através do ISM é definido como

$$t = \int_0^d (v_g)^{-1} ds, \quad (8.1.2)$$

onde s é o elemento da linha de visada e v_g a velocidade de grupo [199]. A baixa densidade de elétrons no ISM é consistente com uma propagação sem absorção (sem perdas), uma vez que permite velocidades de grupo reais para frequências grandes em comparação à frequência de plasma, $\omega \gg \omega_p$. Sob esta condição, a Eq. (8.1.1) fornece a expressão para o inverso da velocidade grupo,

$$v_g^{-1} \approx \frac{1}{c} + \frac{\omega_p^2}{2c\omega^2} \pm \frac{\omega_c \omega_p^2}{c\omega^3}. \quad (8.1.3)$$

Assim, o tempo de chegada (8.1.2) torna-se

$$t \approx \frac{d}{c} + \frac{e^2}{2c\epsilon_0 m \omega^2} \text{DM}, \quad \text{DM} = \int_0^d n_e ds, \quad (8.1.4)$$

onde o *dispersion measure* (DM) é definido em termos da densidade de elétrons, n_e , assumida, em princípio, não constante ao longo do caminho de integração. Note que é suprimida a presença do terceiro termo em ω^{-3} de (8.1.3) no tempo de chegada (8.1.4). Isto se justifica porque, para campos magnéticos interestelares da ordem de poucos μG , este termo é menor do que o segundo por um fator $\omega_c/\omega \sim 10^{-7}$, o que nos permite negligenciá-lo.

Tomando a diferença entre o tempo de trânsito de dois sinais (viajando à velocidade da luz c e v_g), o tempo de atraso (*time delay*), obtido de (8.1.4), é

$$\tau = \frac{e^2}{2c\epsilon_0 m \omega^2} \text{DM}, \quad (8.1.5)$$

que exhibe o conhecido comportamento ω^{-2} para sinais eletromagnéticos¹. O atraso eletromagnético (8.1.5) fornece informações relevantes para estimar a distribuição eletrônica Galáctica permeando o ISM [199, 200], enquanto o DM é um parâmetro chave para estudar efeitos dispersivos do ISM ao longo da linha de visada [201, 202]. O DM também é útil para examinar a densidade de elétrons em regiões específicas do espaço, onde ocorrem variações significativas nas medições de DM devido a fatores distintos, como vento solar [203] e turbulência de plasma no ISM [204].

Para examinar a influência do campo magnético galáctico na propagação do sinal de rádio é necessário analisar a rotação de Faraday. Os números de onda associados aos índices (8.1.1), sob a condição $\omega \gg \omega_p$, são escritos na forma

$$k_{R,L} \approx \frac{\omega}{c} - \frac{\omega_p^2}{2c\omega} \pm \frac{\omega_c \omega_p^2}{2c\omega^2}. \quad (8.1.6)$$

A diferença de fase diferencial ao longo da linha de visada é definida como através da diferença entre os

¹Para densidades muito maiores que a densidade típica do ISM, termos extras podem ser incluídos na expressão do atraso temporal, como discutido em Ref. [187].

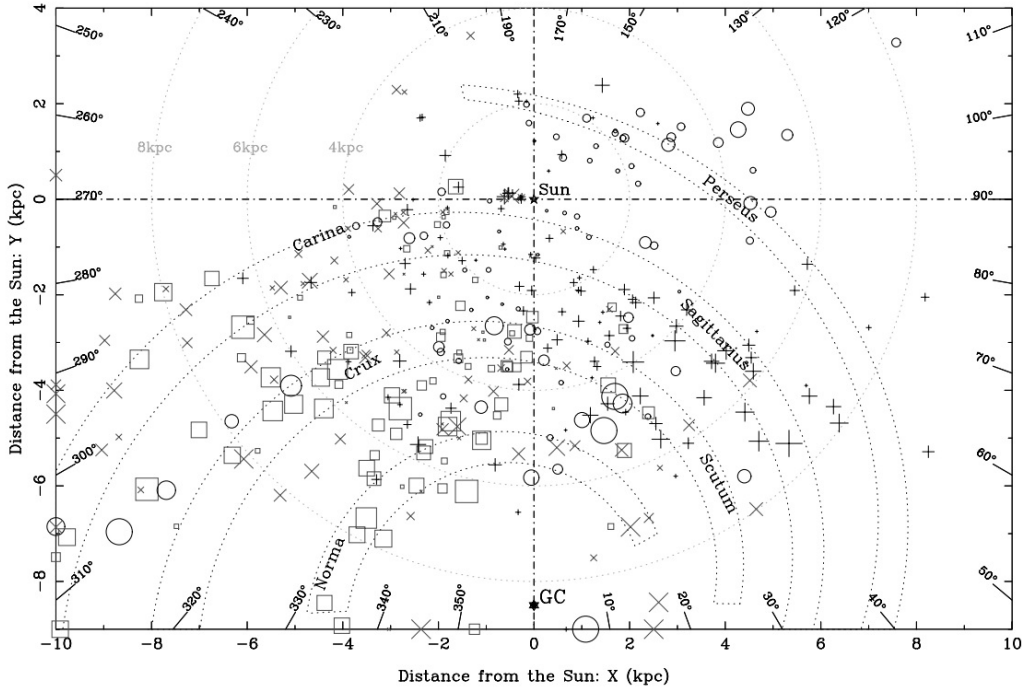


Figura 8.1: Distribuição de RM de 388 pulsares projetados no plano Galáctico. Aqui, GC marca o centro galáctico. Os tamanhos dos símbolos são proporcionais à raiz quadrada das magnitudes do RM. Os sinais + e × representam RMs positivos, enquanto círculos e quadrados representam RMs negativos. Pulsares com distâncias estimadas grandes demais para serem mostradas são plotados na borda da figura. [Figura retirada da Ref. [49].]

números de onda RCP e LCL, sendo escrita como

$$\Delta\Psi = \int_0^d (k_R - k_L) ds = \frac{e^3 \lambda^2}{4\pi^2 c^3 m^2 \epsilon_0} \int_0^d n_e B_{\parallel} ds. \quad (8.1.7)$$

A partir da expressão acima, define-se o ângulo de rotação de polarização $\Delta\phi$,

$$\Delta\phi \equiv \Delta\Psi/2 = \lambda^2 \text{RM}, \quad (8.1.8)$$

dado em termos do *rotation measure* (RM), onde

$$\text{RM} = \frac{e^3}{8\pi^2 c^3 m^2 \epsilon_0} \int_0^d n_e B_{\parallel} ds = 0.81 \int_0^d n_e B_{\parallel} ds. \quad (8.1.9)$$

Acima, $B_{\parallel}$ é o campo magnético paralelo à linha de visada (geralmente dado em μG), enquanto a distância d é tomada em pc. É possível obter a intensidade de $B_{\parallel}$ através da razão RM/DM, uma vez que este é pode ser expresso como

$$\langle B_{\parallel} \rangle = \frac{\int_0^d n_e B_{\parallel} ds}{\int_0^d n_e ds} = 1.232 \frac{\text{RM}}{\text{DM}} \mu\text{G}. \quad (8.1.10)$$

Note que o sinal do RM determina o sentido do campo $B_{\parallel}$, o que torna o RM peça fundamental no

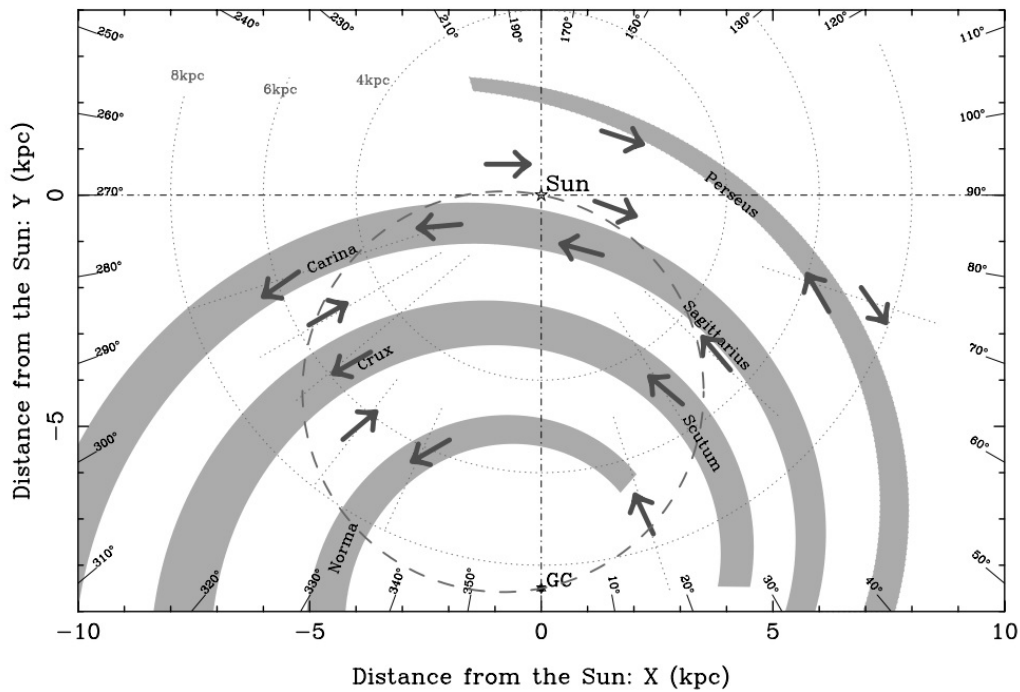


Figura 8.2: Padrão global das direções do campo magnético inferido a partir de ajustes RM–DM aos dados de pulsares, assumindo um padrão espiral global para o campo em grande escala. [Figura retirada da Ref. [49].]

estudo de campos magnéticos na astrofísica. A partir da relação (8.1.10), dados de RM e DM são extensivamente usados para estimar a magnitude e direção das linhas do campo magnético galáctico, o que leva à proposta de um campo magnético de larga escala permeando nossa galáxia. Em tais investigações, sinais de RMs estimados para diversas pulsares permitiram determinar um padrão para linhas de campo em diferentes regiões do plano galáctico. A Fig. 8.1 mostra a distribuição de RM relacionados a 388 pulsares, onde os sinais + e × representam RMs positivos, enquanto círculos e quadrados representam RMs negativos. Como discutido na Ref. [49], a composição destes dados sugerem não apenas uma estrutura em larga escala, mas também um padrão de linhas de campo que acompanham os braços das espirais da Via Láctea, como ilustrado na Fig. 8.2. Estudos dessa natureza, examinando a polarização da luz vinda de pulsares [50, 51], têm sido realizados a partir de observações de vários telescópios ao redor do mundo, que fornecem conjuntos de dados para vários parâmetros, incluindo medidas de DM e RM. Alguns dos radiotelescópios em operação são o Five-hundred-meter Aperture Spherical Telescope (FAST) [205], Parkes Radio Telescope [206], MeerKAT (Thousand Pulsar Array / MeerTime) [207], e o Low-Frequency ARray (LOFAR) [209], que atuam em diferentes faixas de frequência e com níveis distintos de precisão.

O Low-Frequency ARray (LOFAR) é um radiotelescópio que consiste de um arranjo interferométrico de estações de antenas de dipolo localizadas no norte da Holanda e através da Europa [208]. Suas observações fornecem dados sobre DMs, densidades de fluxo e perfis de intensidade total calibrados para um subconjunto de pulsares obtidos pelas antenas de alta frequência do LOFAR (na faixa de 110–188MHz) [209]. Por sua vez, medidas de RM também foram aprimoradas pelos resultados do LOFAR

para pulsares de baixa frequência [210].

8.2 Tempo de atraso e medida de dispersão na eletrodinâmica MCFJ

Plasmas quirais descritos pela eletrodinâmica MCFJ, apresentam quatro índices de refração sob a influência de vetor de violação tipo-tempo, como visto no Capítulo 4, onde a refração negativa também foi discutida.

Neste contexto, consideraremos apenas índices de refração positivos, reescritos abaixo

$$n_R = -\frac{K_{AF}^0}{2\omega} + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} + \left(\frac{K_{AF}^0}{2\omega}\right)^2}, \quad (8.2.1)$$

$$n_L = \frac{K_{AF}^0}{2\omega} + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} + \left(\frac{K_{AF}^0}{2\omega}\right)^2}, \quad (8.2.2)$$

associados aos modos RCP e LCP², respectivamente. É importante mencionar que, a partir daqui, apresentaremos nosso desenvolvimento adotando unidades naturais, com $c = \epsilon_0 = 1$, tipicamente usadas em trabalhos que abordam a quebra da simetria de Lorentz.

Os modos relacionados aos índices (8.2.1) e (8.2.2) podem se propagar com as seguintes velocidades de grupo:

$$v_g = \frac{2\omega(\omega \pm \omega_c)^2}{2\omega(\omega \pm \omega_c)^2 \mp \omega_c \omega_p^2} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)} + \left(\frac{K_{AF}^0}{2\omega}\right)^2}, \quad (8.2.3)$$

com o $(\pm)$ relacionado às ondas RCP (LCP), respectivamente. No regime de alta frequência, $\omega \gg \omega_p$, encontra-se

$$(v_g)^{-1} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} + \frac{(K_{AF}^0)^2}{8\omega^2}, \quad (8.2.4)$$

com um termo quiral na potência ω^{-2} contribuindo para o tempo de chegada, que torna-se

$$t \approx \frac{d}{c} + \frac{e^2}{2m\omega^2} \text{DM} + \frac{(K_{AF}^0)^2}{8\omega^2} d. \quad (8.2.5)$$

Neste caso, o tempo de atraso (entre uma onda viajando no vácuo e a outra no plasma quiral) é

$$\tau = \frac{e^2}{2m\omega^2} \left(\text{DM} + \text{DM}_{CFJ}^{(\bullet)} \right), \quad (8.2.6)$$

onde definimos um *dispersion measure* quiral efetivo,

$$\text{DM}_{CFJ}^{(\bullet)} = \frac{m(K_{AF}^0)^2}{4e^2} d. \quad (8.2.7)$$

A dependência da frequência é preservada em (8.2.6), comportando-se como ω^{-2} , assim como no delay

²Aqui, consideramos $q = -e$, a carga do elétron presente na frequência ciclotrônica ω_c nos índices de refração obtidos no Capítulo 3.

usual em (8.1.5).

O DM efetivo (8.2.7) pode ser interpretado como uma correção devido ao parâmetro quiral K_{AF}^0 na medida de dispersão usual DM, aqui atribuída a elétrons ordinários. Nesse sentido, desvios observacionais de DM podem ser utilizados para estimar limites na magnitude do fator quiral K_{AF}^0 .

Considerando agora o cenário de propagação eletromagnética em plasma frio sob a influencia do vetor quiral de CFJ, abordado no Capítulo 5, o *time delay* é investigado sob a ótica dos casos em que o vetor quiral é paralelo ($\mathbf{K}_{AF} \parallel \mathbf{B}_0$) e ortogonal ($\mathbf{K}_{AF} \perp \mathbf{B}_0$) ao campo magnético. Para o vetor quiral paralelo ao campo magnético, os modos RCP e LCP estão associados aos seguintes índices de refração (veja Seção 5.1.1)³:

$$n_{L(R)}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c)} \pm \frac{|\mathbf{K}_{AF}|}{\omega}, \quad (8.2.8)$$

cuja velocidade de grupo relacionada (no regime de alta frequência),

$$(v_g)^{-1} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} + \frac{|\mathbf{K}_{AF}|^2}{8\omega^2}. \quad (8.2.9)$$

tem a mesma forma da velocidade de grupo (8.2.4), com $|\mathbf{K}_{AF}|$ substituindo K_{AF}^0 . Assim, similarmente, o tempo de atraso é

$$\tau = \frac{e^2}{2m\omega^2} \left(\text{DM} + \text{DM}_{CFJ}^{(\bullet\bullet)} \right), \quad (8.2.10)$$

com $\text{DM}_{CFJ}^{(\bullet\bullet)}$ definido como

$$\text{DM}_{CFJ}^{(\bullet\bullet)} = \frac{m|\mathbf{K}_{AF}|^2}{4e^2} d. \quad (8.2.11)$$

Quanto ao caso em que o vetor quiral é ortogonal ao campo magnético, $\mathbf{K}_{AF} \perp \mathbf{B}_0$, investigado na Seção 5.1.2, existem dois índices de refração associados a polarizações elípticas, dos quais apenas um,

$$(n_B)^2 = S - \frac{|\mathbf{K}_{AF}|^2}{2P\omega^2} + \frac{1}{P} \sqrt{P^2 D^2 + \frac{|\mathbf{K}_{AF}|^4}{4\omega^4}}, \quad (8.2.12)$$

produz contribuições de ordem relevante para a velocidade de grupo,

$$(v_g)^{-1} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} + \frac{|\mathbf{K}_{AF}|^2}{2\omega^2}. \quad (8.2.13)$$

Nesta configuração, o delay torna-se

$$\tau = \frac{e^2}{2m\omega^2} \left(\text{DM} + 4\text{DM}_{CFJ}^{(\bullet\bullet)} \right). \quad (8.2.14)$$

O DM_{CFJ} efetivo acima difere por um fator 4 daquele dado na Eq. (8.2.11), obtido na configuração $\mathbf{K}_{AF} \parallel \mathbf{B}_0$, enquanto o comportamento $|\mathbf{K}_{AF}|^2$ é mantido.

³Como no caso tipo-tempo, consideramos $q = -e$ para a carga do elétron.

8.2.1 Restrições dos parâmetros quirais a partir do *dispersion measure*

As Eqs. (8.2.6), (8.2.10) e (8.2.14) representam o tempo de atraso modificado para um ISM permeado por um plasma MCFJ, que recebe correções em termos da medida de dispersão quiral DM_{CFJ} . A natureza dessa contribuição aditiva nos permite restringir a magnitude dos fatores quirais usando dados observacionais de pulsares. De fato, propondo que o DM observado é igual à soma do DM usual e da correção CFJ, $DM_{\text{obs}} = DM + DM_{CFJ}$, a contribuição quiral pode ser limitada pelas incertezas observacionais.

O conjunto de dados do LOFAR fornece valores observacionais de DMs para vários pulsares [209], dos quais, para nossas estimativas, selecionamos cinco, a saber, B1919+21, B1944+17, B1929+10, B2016+28 e B2020+28. O catálogo também fornece uma incerteza, denotada aqui por ϵ_{DM} , que, em nossa análise, é atribuída exclusivamente ao parâmetro do fator quiral. Assim, para cada medição, impomos

$$DM_{CFJ} \lesssim \epsilon_{DM}, \quad (8.2.15)$$

o que permite restringir a magnitude dos parâmetros quirais (K_{AF}^0 , $\mathbf{K}_{AF}$) assumindo que a correção é limitada pela incerteza nas medições de DM. Como se sabe, esta não é a abordagem mais rigorosa, mas pode ser justificada pelo tamanho diminuto dos termos de violação de Lorentz. Com isso, serão estabelecidas as primeiras restrições sobre os parâmetros quirais de CFJ usando dados do tempo de chegada (DM) de pulsares.

Para a distância dos pulsares à Terra, d , que aparece em (8.2.6) e (8.2.10), consideramos as *distâncias corrigidas* listadas na Ref. [219], dadas em (k pc).

8.2.1.1 O caso tipo-tempo

Usando valores padrão para as constantes, a Eq. (8.2.7) fornece, pela condição (8.2.15), a seguinte restrição:

$$K_{AF}^0 \lesssim (2.35 \times 10^{-12} \text{eV}) \sqrt{\frac{k \text{ pc}}{d}} \sqrt{\frac{\epsilon_{DM}}{\text{pc cm}^{-3}}}. \quad (8.2.16)$$

Iniciamos com o pulsar B1919+21, o LOFAR fornece $DM_{\text{obs}} = 12.44399(63) \text{ pc cm}^{-3}$, com $\text{pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{m}$, e um erro $\epsilon_{DM} = 0.00063 \text{ pc cm}^{-3}$. Além disso, tomando $d \approx 0.3 \text{ k pc}$, a restrição (8.2.16) implica

$$K_{AF}^0 \lesssim 1.1 \times 10^{-22} \text{ GeV}. \quad (8.2.17)$$

Considerando agora o pulsar B1944+17, o catálogo fornece $DM_{\text{obs}} = 16.1356(73) \text{ pc cm}^{-3}$, com $\epsilon_{DM} = 0.0073 \text{ pc cm}^{-3}$, e $d \approx 0.3 \text{ k pc}$, fornecendo

$$K_{AF}^0 \lesssim 3.7 \times 10^{-22} \text{ GeV}. \quad (8.2.18)$$

Analogamente, os dados para os outros três pulsares, B1929+10, B2016+28 e B2020+28, resultam em um fator quiral limitado à ordem de 10^{-23} GeV , uma ordem de grandeza menor que os dois primeiros. Todos os dados e restrições são apresentados na Tabela 8.1.

Tabela 8.1: Restrições sobre os parâmetros quirais usando dados de DM.

Pulsares	DM _{obs} (pc cm ⁻³)	d (k pc)	K_{AF}^0 e $\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}$ (GeV)	$\mathbf{K}_{AF}^{\perp}$ (GeV)
B1919+21	12.44399(63)	0.3	1.1×10^{-22}	5.3×10^{-23}
B1944+17	16.1356(73)	0.3	3.7×10^{-22}	1.8×10^{-22}
B1929+10	3.18321(16)	0.31	5.3×10^{-23}	2.6×10^{-23}
B2016+28	14.1839(13)	0.98	8.5×10^{-23}	4.2×10^{-23}
B2020+28	24.63109(18)	2.1	2.2×10^{-23}	1.9×10^{-23}

8.2.1.2 O caso tipo-espaço

Para a configuração $\mathbf{K}_{AF} \parallel \mathbf{k}$, as restrições estimadas sobre o fator quiral escalar K_{AF}^0 também são válidas para o vetor quiral $\mathbf{K}_{AF}$, uma vez que o DM quiral tem a mesma forma para ambos os casos, veja as Eqs. (8.2.7) e (8.2.11), respectivamente. Os resultados são mostrados na Tabela 8.1.

Quanto ao caso $\mathbf{K}_{AF} \perp \mathbf{k}$, o delay temporal correspondente é dado na expressão (8.2.14), que resulta em $4\text{DM}_{CFJ}^{(\bullet\bullet)} \lesssim \epsilon_{\text{DM}}$, o que gera

$$|\mathbf{K}_{AF}| \lesssim (1.174 \times 10^{-12} \text{ eV}) \sqrt{\frac{k \text{ pc}}{d}} \sqrt{\frac{\epsilon_{DM}}{\text{pc cm}^{-3}}}, \quad (8.2.19)$$

implicando limitações na magnitude de $\mathbf{K}_{AF}$ na ordem de 10^{-23} GeV, para os pulsares B1919+21, B1929+10, B2016+28 e B2020+28, e $|\mathbf{K}_{AF}| \lesssim 10^{-22}$ GeV para o pulsar B1944+17. Veja a Tabela 8.1.

8.3 Ângulo de Faraday na eletrodinâmica de MCFJ

Para tratar de birrefringência, vamos nos concentrar nos índices de refração associados às polarizações circulares, que ocorrem apenas para os casos de vetor de violação tipo-tempo e tipo-espaço (com $\mathbf{K}_{AF} \parallel \mathbf{B}$). Este constitui um cenário apropriado para explorar a rotação de Faraday para ondas se propagando em ISM permeado por plasma quiral MCFJ.

Para o caso tipo-tempo, tomando os índices de refração dados em Eq. (8.2.2) em segunda ordem em $1/\omega$, os vetores de onda associados são

$$k_{R,L} \approx \omega \mp \frac{K_{AF}^0}{2} - \frac{\omega_p^2}{2\omega} + \frac{(K_{AF}^0)^2}{8\omega} \pm \frac{\omega_c \omega_p^2}{2\omega^2}. \quad (8.3.1)$$

Usando esses vetores de onda em Eq. (8.1.7)), a rotação de Faraday assume a forma

$$\Delta\phi = \lambda^2 \left(\text{RM} - \text{RM}_{CFJ}^{(\bullet)} \right), \quad (8.3.2)$$

onde definimos o termo RM adicional dependente de λ

$$\text{RM}_{CFJ}^{(\bullet)} = \frac{K_{AF}^0}{2\lambda^2} d, \quad (8.3.3)$$

decorrente da presença do fator quiral K_{AF}^0 .

Quanto ao fator quiral vetorial, cujos índices de refração são dados em (8.2.8), os vetores de onda para a configuração $\mathbf{K}_{AF} \parallel \mathbf{B}$ podem ser escritos como

$$k_{R,L} \approx \omega \mp \frac{|\mathbf{K}_{AF}|}{2} - \frac{\omega_p^2}{2\omega} - \frac{|\mathbf{K}_{AF}|^2}{8\omega} \pm \frac{\omega_c \omega_p^2}{2\omega^2} \mp \frac{\omega_p^2 |\mathbf{K}_{AF}|}{4\omega^2}, \quad (8.3.4)$$

que, na Eq. (8.1.7), produz

$$\Delta\phi = \lambda^2 \left(\text{RM} - \text{RM}_{CFJ}^{(\bullet\bullet)} \right), \quad (8.3.5)$$

onde o vetor quiral define a contribuição adicional dada por

$$\text{RM}_{CFJ}^{(\bullet\bullet)} = \frac{|\mathbf{K}_{AF}|}{2\lambda^2} d + \frac{e^2 |\mathbf{K}_{AF}|}{4\kappa} \text{DM}, \quad (8.3.6)$$

com $\kappa = 4\pi^2 m$. O primeiro termo no lado direito de Eq. (8.3.6) é semelhante à expressão (8.3.3) com $|\mathbf{K}_{AF}|$ no lugar de K_{AF}^0 , enquanto o segundo envolve o DM associado.

8.3.1 Restrições dos parâmetros quirais a partir da medida de rotação

Realizando o mesmo procedimento da última seção para dados de DMs, consideramos as incertezas de medição fornecidas nos dados LOFAR para RMs [210], aqui denotadas por ϵ_{RM} , como a magnitude superior para a contribuição quiral em (8.3.3) e (8.3.6), ou seja, $\text{RM}_{CFJ} \lesssim \epsilon_{\text{RM}}$. As respectivas restrições na magnitude dos fatores quirais escalar e vetorial são

$$K_{AF}^0 \lesssim (5.19 \times 10^{-26} \text{eV}) \left(\frac{\text{k pc}}{d} \right) \left(\frac{\epsilon_{\text{RM}}}{\text{rad m}^{-2}} \right), \quad (8.3.7)$$

e

$$|\mathbf{K}_{AF}| \lesssim \frac{(5.19 \times 10^{-26} \text{eV}) (\epsilon_{\text{RM}} / \text{rad m}^{-2})}{(d / \text{k pc}) + 1.9 \times 10^{-12} (\text{DM} / \text{pc cm}^{-3})}. \quad (8.3.8)$$

Nesta última, o comprimento de onda foi associado à *frequência central* de 148,9 MHz ($\lambda \approx 2.01338$ m), na qual as observações dos pulsares foram registradas na Ref. [210]. Para cada um dos cinco pulsares da Tabela 8.1, a saber, B1919+21, B1944+17, B1929+10, B2016+28 e B2020+28, obtemos restrições iguais sobre os parâmetros quirais K_{AF}^0 e $\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}$, ambas da ordem de $10^{-36} - 10^{-37}$ GeV, conforme apresentado na Tabela 8.2.

Tabela 8.2: Restrições sobre os parâmetros quirais usando dados de RM.

Pulsares	RM_{obs} (rad m ⁻²)	d (k pc)	K_{AF}^0 e $K_{AF}^{\parallel}$ (GeV)
B1919+21	-15.04 ± 0.02	0.3	3.4×10^{-36}
B1944+17	-43.64 ± 0.02	0.3	3.4×10^{-36}
B1929+10	-5.27 ± 0.01	0.31	1.6×10^{-36}
B2016+28	-33.14 ± 0.01	0.98	5.3×10^{-37}
B2020+28	-72.56 ± 0.02	2.1	5.0×10^{-37}

8.4 Comparação com restrições de outros modelos

Os resultados apresentados na Tabela 8.1 constituem as primeiras restrições sobre parâmetros quirais siderais usando medida de dispersão de pulsares (localizados em nossa galáxia a distâncias de alguns parsecs). Tais restrições podem ser comparadas com aquelas obtidas em trabalhos listados na tabela de dados das Refs. [198, 220], que reúne os principais *bounds* obtidos para parâmetros que violam a simetria de Lorentz dentro do contexto geral do Modelo Padrão Estendido. A partir dela, nota-se que, embora as restrições sobre K_{AF}^0 e $|K_{AF}|$, usando dados de DM, não sejam tão restritivas quanto aquelas provenientes da polarização da CMB [198, 220] e da birrefringência astrofísica [71], elas são competitivas em comparação com os limites envolvendo ressonâncias de Schumann [195], cavidades ressonantes [196] e dados do vento solar [197]. Por outro lado, os dados de RM (para os mesmos pulsares) forneceram limites mais rigorosos, melhorados em 14 ordens de magnitude em relação aos obtidos com DM (veja a Tabela. 8.2). A Tabela 8.3 compara nossas restrições a partir de dados de DM e RM com os cenários mencionados acima. As restrições de RM melhoram em 12 ordens de magnitude os limites decorrentes da investigação do vento solar, o mais restritivo além da polarização da CMB e da birrefringência astrofísica, representando limites competitivos.

É também interessante comentar a validade das restrições obtidas nesse capítulo em uma eventual descrição de axion como matéria escura, já que no Capítulo 3 foi visto que a eletrodinâmica de áxions se conecta com a teoria de CFJ quando as primeiras derivadas do campo axiônico são consideradas constantes. No cenário de matéria escura fria, apenas a dependência temporal do campo axion é considerada, com $\theta = \theta_0 e^{im_a t}$ (o axion oscila em uma escala de tempo de $1/\text{massa}$), com $\theta_0 = g_{a\gamma\gamma} \sqrt{\rho_a}/m_a$, onde ρ_a e m_a são a densidade local de matéria escura áxion e a massa, respectivamente. Além disso, $g_{a\gamma\gamma}$ é a constante de acoplamento áxion-fóton [221–223], que pode ser estimada com nossas restrições sobre o parâmetro quiral K_{AF}^0 . Neste sentido, para a variação temporal, assumimos valer a conexão $\partial_t \theta = K_{AF}^0$. Essa suposição é realizada quando as escalas de tempo são muito menores que o período da oscilação do áxion, onde $m_a t \ll 1$, resultando em $\theta \approx \theta_0 m_a t$ [224]. Ao fazer isso, temos $\partial_t \theta \approx \theta_0 m_a$, e a constante de acoplamento pode ser escrita como $g_{a\gamma\gamma} = K_{AF}^0 / \sqrt{\rho_a}$.

Por outro lado, para a variação espacial do áxion frio ser negligenciada ($\nabla \theta = 0$) sobre a escala de distância do sistema (L), deve-se exigir que o comprimento de Compton associado ao áxion seja maior que (L), ou seja, $\lambda_a > L$. Neste caso, o campo áxion não depende das coordenadas espaciais. No entanto, é importante notar que os pulsares usados na Tabela 8.1 e na Tabela 8.2 estão localizados a distâncias de

Tabela 8.3: Comparação de limites entre configurações distintas.

—	K_{AF}^0 (GeV)	K_{AF} (GeV)	Ref.
Polarização da CMB	10^{-45}	-	[198]
Birrefringência Astrof.	10^{-42}	10^{-42}	[71]
RM de Pulsar	10^{-36}	10^{-36}	Tabela 8.2
Vento solar	-	10^{-24}	[197]
DM de Pulsar	10^{-22}	10^{-23}	Tabela 8.1
Cavidades ressonantes	-	10^{-23}	[196]
Ressonâncias de Schumann	10^{-21}	10^{-21}	[195]

kpc e, para desprezarmos a derivada espacial, estima-se que

$$\lambda_a = 1/m_a > d \quad \rightarrow \quad m_a < 1/(10^3 \times 3.086 \times 10^6 \text{m}) = 3,24 \times 10^{-20} \text{m}^{-1}, \quad (8.4.1)$$

que usando a conversão de metro para eV, $m = 5.06842 \times 10^6 (\text{eV})^{-1}$, fornece

$$m_a < 6,3 \times 10^{-27} \text{GeV}. \quad (8.4.2)$$

A estimativa acima implica que a massa do áxion, para a escala de distância de nossa abordagem, deve ser mais leve que 10^{-27} eV, que é muito menor que a faixa de massa de áxion favorecida para matéria escura, para a qual a massa deve ser maior que $\sim 10^{-22}$ eV [225]. Portanto, conclui-se que não é possível supor que as restrições da Tabela 8.1 e da Tabela 8.2 sejam válidas para a matéria escura axiônica fria.

8.5 Medida de dispersão e medida de rotação em meio interestelar quiral bi-isotrópico

O procedimento desenvolvido na restrição dos parâmetros quirais de CFJ podem ser também adotados para limitar a magnitude do parâmetro $\tilde{\xi}$, que surge no plasma quiral bi-isotrópico abordado no Capítulo 7, supostamente a permear o espaço sideral (por hipótese). Tais resultados originais estão apresentados na Ref. [85]. Neste cenário, considerando os índices de refração n_{R+} e n_{L+} , dados em (7.1.8) e (7.1.9), as velocidades de grupo associadas são (em unidades naturais)⁴

$$(v_g)_{L,R}^{-1} \approx 1 \pm \tilde{\xi}_c + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}, \quad (8.5.1)$$

onde consideramos $\omega \gg \omega_p$, mantendo apenas a contribuição linear em $\tilde{\xi}_c$. Neste caso, o tempo de atraso (8.1.5) torna-se

$$\tau = \frac{e^2}{2m\omega^2} (\text{DM} \pm \text{DM}_{\text{quiral}}), \quad (8.5.2)$$

⁴Aqui, consideramos $q = -e$, a carga do elétron presente na frequência ciclotron ω_c .

sendo os sinais ($\pm$) associados às ondas LCP e RCP, respectivamente. Além disso,

$$\text{DM}_{\text{quiral}} = 2m\omega^2 \tilde{\xi}_c d / e^2, \quad (8.5.3)$$

que confere uma contribuição quiral dispersiva para o DM usual, proporcional ao quadrado da frequência.

Por sua vez, o ângulo de rotação de Faraday é obtido a partir dos vetores de onda associados aos índices de refração n_{R+} e n_{L+} , que são

$$k_{R,L} \approx \mp \omega \tilde{\xi}_c + \omega - \frac{\omega_p^2}{2\omega} \pm \frac{\omega_c \omega_p^2}{2\omega^2}, \quad (8.5.4)$$

obtidos sob a condição $\omega \gg \omega_p$, onde foram descartados novamente termos não lineares em $\tilde{\xi}_c$. Com isso, a Eq. (8.1.7), fornece

$$\Delta\phi = \lambda^2 (\text{RM} - \text{RM}_{\text{quiral}}), \quad (8.5.5)$$

com a contribuição quiral dependente do comprimento de onda,

$$\text{RM}_{\text{quiral}} = 2\pi \tilde{\xi}_c d / \lambda^3. \quad (8.5.6)$$

8.5.1 Restrições usando o conjunto de dados do LOFAR

Considerando os valores observacionais de DM e RM para pulsares disponíveis no conjunto de dados do censo LOFAR [209, 210], usaremos novamente as cinco adotadas anteriormente: B1919+21, B1944+17, B1929+10, B2016+28 e B2020+28, atribuindo as incertezas ϵ associadas a cada medida ao limite superior dos DM e RM quirais em (8.5.2) e (8.5.5). Iniciando pelos dados de DM, a magnitude da correção quiral (8.5.3) é restringida com $\text{DM}_{\text{quiral}} \lesssim \epsilon_{\text{DM}}$, de modo a limitarmos a magnitude do parâmetro quiral bi-isotrópico como

$$\tilde{\xi}_c \lesssim (1.82 \times 10^{-12}) \left(\frac{\epsilon_{\text{DM}}}{\text{pc cm}^{-3}} \right) \left(\frac{\text{k pc}}{d} \right), \quad (8.5.7)$$

onde adotamos a frequência angular associada à *frequência central*, a saber, $\omega = 2\pi \times 148.9$ MHz.

Considerando agora a rotação de Faraday, o mesmo procedimento, considerando ϵ_{RM} como a magnitude superior para a contribuição quiral em (8.5.5), ou seja, $\text{RM}_{\text{quiral}} \lesssim \epsilon_{\text{RM}}$, obtemos que as restrições de RM no parâmetro quiral são determinadas por

$$\tilde{\xi}_c \lesssim (4.2 \times 10^{-20}) \left(\frac{\epsilon_{\text{RM}}}{\text{rad m}^{-2}} \right) \left(\frac{\text{k pc}}{d} \right), \quad (8.5.8)$$

onde tomamos $\lambda \approx 2.01338$ m (associado à frequência central, $\nu = 148.9$ MHz). Quanto à distância do pulsar da Terra, d , que aparece em (8.5.7) e (8.5.8), consideramos as listadas na Ref. [219].

Levando em consideração a relação (8.5.7) e os dados do LOFAR para DMs [209], as restrições superiores obtidas para a magnitude de $\tilde{\xi}_c$ (adimensional em unidades naturais) são da ordem de 10^{-16} e 10^{-14} , conforme apresentado na quarta coluna da Tabela 8.4. Por outro lado, para os dados de RM [210] a

Tabela 8.4: Restrições sobre o parâmetro quiral usando dados de DM e RM de pulsares.

Pulsares	d (k pc)	DM_{obs} (pc cm $^{-3}$)	$\tilde{\xi}_c$	RM_{obs} (rad m $^{-2}$)	$\tilde{\xi}_c$
B1919+21	0.3	12.44399(63)	3.8×10^{-15}	-15.04 ± 0.02	2.8×10^{-21}
B1944+17	0.3	16.1356(73)	4.4×10^{-14}	-43.64 ± 0.02	2.8×10^{-21}
B1929+10	0.31	3.18321(16)	9.3×10^{-16}	-5.27 ± 0.01	1.3×10^{-21}
B2016+28	0.98	14.1839(13)	2.4×10^{-15}	-33.14 ± 0.01	4.3×10^{-22}
B2020+28	2.1	24.63109(18)	1.5×10^{-16}	-72.56 ± 0.02	4.0×10^{-22}

relação (8.5.8) fornece restrições tão rigorosas quanto 10^{-22} e 10^{-21} , conforme mostrado na última coluna da Tabela 8.4. Tais restrições representam as primeiras estimativas para a magnitude do parâmetro quiral bi-isotrópico, suposto permear o ISM, usando dados astrofísicos colhidos de sinais de rádio provenientes de pulsares.

8.6 Restrições sobre os parâmetros quirais usando Fast-Radio-Bursts

Fast-radio-bursts (FRBs) são eventos transientes de curta duração, caracterizados pela emissão de pulsos em radiofrequência com duração da ordem de milissegundos ou menos [227]. As primeiras detecções, realizadas há quase 20 anos [228], foram consideradas eventos singulares, mas, posteriormente, telescópios ao redor da Terra observaram muitos outros. A descoberta da primeira FRB repetidora [229], denominada FRB 121102, confirmou que pelo menos alguns desses sinais poderiam ter se originado da mesma fonte. Outras fontes repetidoras também foram relatadas no decorrer dos anos [230].

Como vimos nas seções anteriores, ondas de rádio advindas de fontes galáticas como pulsares sofrem efeitos dispersivos ao longo de suas trajetórias pelo meio interestelar, caracterizados pelo tempo de atraso e DM, dados na Eq. (8.1.4). Entretanto, para sinais de rádio extragalácticos, como é o caso das FRBs, correções de redshift sobre tais expressões devem ser consideradas devido às suas distâncias cosmológicas. Neste capítulo, reestabelecemos as restrições sobre os parâmetros quirais implementando correções de *redshift* para analisar dados de DM e RM de FRBs, de acordo com a abordagem original realizada na Ref. [87].

Para um plasma no *redshift* z , o tempo de atraso (8.1.4) é dado por

$$\tau_z = \frac{e^2}{2m_e \omega_z^2} DM_z, \quad (8.6.1)$$

onde $DM_z = \int_0^d n_{e,z} ds$ é o DM no referencial de repouso, que contabiliza a densidade de coluna de elétrons livres nas proximidades da fonte. No referencial do observador, a correção da frequência angular é dada por $\omega = \omega_z/(1+z)$, enquanto o tempo de atraso torna-se $\tau = \tau_z(1+z)$ [232], o que resulta em

$$\tau = \frac{e^2}{2m\omega^2} DM_{\text{obs}}, \quad DM_{\text{obs}} = \int_0^d \frac{n_{e,z}}{1+z} ds. \quad (8.6.2)$$

Aqui, o subscrito “obs” denota o DM observacional, já corrigida pelo *redshift*. Essa quantidade é fre-

quentemente decomposta como

$$\text{DM}_{\text{obs}} = \text{DM}_{\text{MW}} + \text{DM}_{\text{IGM}} + \frac{\text{DM}_{\text{host}}}{1+z}, \quad (8.6.3)$$

levando em consideração, respectivamente, as contribuições para o DM provenientes dos elétrons localizados na Via Láctea, no meio intergaláctico (IGM) e na galáxia hospedeira. Mais precisamente, a primeira corresponde à contribuição local, definida por

$$\text{DM}_{\text{MW}} = \int n_e^{\text{MW}}, ds, \quad (8.6.4)$$

onde n_e^{MW} é a densidade galáctica de elétrons livres, em $z \simeq 0$, estimada pelos modelos NE2001 e YMW16, apresentados nas Refs. [233, 234]. O termo associado ao IGM representa a contribuição cosmológica,

$$\text{DM}_{\text{IGM}}(z) = \int_0^{d(z)} \frac{n_e(z')}{1+z'} ds(z'), \quad (8.6.5)$$

onde a quantidade $ds(z')$ corresponde ao elemento de linha cosmológico próprio ao longo da linha de visada, dado por

$$ds(z') = \frac{cdz'}{(1+z')H_0\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}}, \quad (8.6.6)$$

para um universo espacialmente plano. Na Eq. (8.6.5), $n_e(z)$ é a densidade numérica de elétrons livres no IGM, que contém a dependência apropriada com o *redshift*. O terceiro termo da Eq. (8.6.3) descreve a contribuição da galáxia hospedeira, decorrente da densidade de elétrons no ambiente da fonte, enquanto o fator $(1+z)^{-1}$ leva em consideração a correção cosmológica de *redshift* da quantidade observada. As contribuições da Eq. (8.6.3) foram estimadas independentemente em estudos anteriores utilizando sinais de FRBs [235–240].

O ângulo de Faraday no referencial da fonte é dado por

$$\Delta\phi = \frac{1}{2} \int (k_{R,z} - k_{L,z}) ds, \quad (8.6.7)$$

o qual, considerando-se a correção de *redshift* para o comprimento de onda, $\lambda = \lambda_z(1+z)$, conduz ao ângulo de rotação no referencial do observador [241],

$$\Delta\phi = \lambda^2 \text{RM}_{\text{obs}}, \quad (8.6.8)$$

onde

$$\text{RM}_{\text{obs}} = \frac{e^3}{8\pi^2 m_e^2} \int \frac{n_e(z') B_{\parallel}(z')}{(1+z')^2} ds(z'). \quad (8.6.9)$$

Na última expressão, $ds(z')$ é o elemento dado na Eq. (8.6.6). Quando a rotação de Faraday se origina

predominantemente no ambiente local da fonte, o ângulo de rotação pode ser escrito como [227, 242]

$$\Delta\phi = \lambda^2 \text{RM}_{\text{obs}}, \quad \text{RM}_{\text{obs}} = \frac{\text{RM}_z}{(1+z)^2}, \quad (8.6.10)$$

em que RM_z representa o RM no referencial de repouso da fonte, definida pela integração das quantidades ao longo de um percurso próximo à fonte. A Eq. (8.6.10) estabelece uma relação entre o RM observada e o RM no referencial de repouso da galáxia hospedeira, RM_z , sendo frequentemente escrita como $\text{RM}_{\text{source}} = \text{RM}_{\text{obs}}(1+z)^2$ para estimar os campos magnéticos nas proximidades da fonte. Por exemplo, essa relação foi empregada para investigar o ambiente magnetoiónico da FRB 121102 [243] e para restringir o campo magnético intergaláctico [244]. Além disso, medidas combinadas de DM e RM permitem estimar os campos magnéticos ao longo da linha de visada nas galáxias hospedeiras das FRBs [245].

8.6.1 Medida de dispersão na eletrodinâmica MCFJ

Começamos reescrevendo o tempo de atraso considerando as correções de *redshift* para ondas de rádio que se propagam em um plasma quiral regido pela eletrodinâmica MCFJ. Levando em conta os índices de refração modificados pelo fator tipo-tempo, dados em (8.2.2) [82], obtém-se a seguinte velocidade de grupo inversa para plasma em *redshift* z :

$$(v_g)^{-1} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_z^2} + \frac{(K_{AF}^0)^2}{8\omega_z^2}, \quad (8.6.11)$$

associada às ondas RCP e LCP. Utilizando as correções de *redshift* para a frequência angular e para o tempo de atraso, $\omega = \omega_z/(1+z)$ e $\tau = \tau_z(1+z)$, o delay no referencial do observador torna-se

$$\tau = \frac{e^2}{2m_e\omega^2} \left[\text{DM}_{\text{obs}} + \text{DM}_{\text{CFJ}}^{(0)} \right], \quad (8.6.12)$$

onde a contribuição de CFJ é definida como

$$\text{DM}_{\text{CFJ}}^{(0)} = \frac{m_e (K_{AF}^0)^2}{4e^2 (1+z)} d_C, \quad (8.6.13)$$

em que d_C denota a chamada *distância comóvel*, utilizada para objetos a distâncias cosmológicas (por exemplo, fontes extragalácticas).

Para a componente tipo-espaco, os modos de propagação podem ser considerados em duas configurações, nas quais o vetor quiral é paralelo ($\mathbf{K}_{AF} \parallel \mathbf{B}_0$) e ortogonal ($\mathbf{K}_{AF} \perp \mathbf{B}_0$) ao campo magnético, conforme investigado na Ref. [82]. Para esses dois casos, as velocidades de grupo inversas (no *redshift*

z), associadas aos índices RCP e LCP, dados em (8.2.8) e (8.2.12), são

$$(v_g)^{-1} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_z^2} + \frac{|\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}|^2}{8\omega_z^2}, \quad (8.6.14)$$

$$(v_g)^{-1} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_z^2} + \frac{|\mathbf{K}_{AF}^{\perp}|^2}{2\omega_z^2}, \quad (8.6.15)$$

respectivamente, resultando nos atrasos temporais (no referencial do observador)

$$\tau = \frac{e^2}{2m_e\omega^2} \left[\text{DM}_{\text{obs}} + \text{DM}_{\text{CFJ}}^{(\parallel)} \right], \quad (8.6.16)$$

$$\tau = \frac{e^2}{2m_e\omega^2} \left[\text{DM}_{\text{obs}} + \text{DM}_{\text{CFJ}}^{(\perp)} \right]. \quad (8.6.17)$$

Aqui definimos

$$\text{DM}_{\text{CFJ}}^{(\parallel)} = \frac{m_e |\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}|^2}{4e^2 (1+z)} d_C, \quad (8.6.18)$$

$$\text{DM}_{\text{CFJ}}^{(\perp)} = \frac{m_e |\mathbf{K}_{AF}^{\perp}|^2}{e^2 (1+z)} d_C. \quad (8.6.19)$$

Observe que o tempo de atraso (8.6.16) e a contribuição de CFJ (8.6.18) apresentam a mesma forma do caso tipo-tempo em (8.6.12) e (8.6.13). Comparando com os resultados anteriores da Ref. [86], a correção cosmológica para as contribuições adicionais DM_{CFJ} nas expressões (8.6.12), (8.6.16) e (8.6.17) substitui a distância usual d pela distância comóvel (vide Eqs. (8.2.7)) e (8.2.11)), de modo que $d \rightarrow d_C/(1+z)$, resultando em uma contribuição quiral dependente do *redshift*.

8.6.2 Rotação de Faraday na eletrodinâmica MCFJ

Explorando agora o efeito Faraday, consideramos os vetores de onda RCP e LCP associados aos índices obtidos para um plasma regido pela eletrodinâmica de MCFJ com componentes tipo-tempo e tipo-espaço (para o caso $\mathbf{K}_{AF} \parallel \mathbf{B}$). Sob a condição de baixa densidade e no *redshift* z , escreve-se

$$k_{R,L}^{(0)} \approx \Omega(z) \mp \frac{K_{AF}^0}{2} + \frac{(K_{AF}^0)^2}{8\omega_z}, \quad (8.6.20)$$

$$k_{R,L}^{(\parallel)} \approx \Omega(z) \mp \frac{|\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}|}{2} - \frac{|\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}|^2}{8\omega_z} \mp \frac{\omega_p^2 |\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}|}{4\omega_z^2}, \quad (8.6.21)$$

onde $\Omega(z) = \omega_z - \omega_p^2/(2\omega_z) \pm \omega_c\omega_p^2/(2\omega_z^2)$. No referencial do observador, utilizando $\lambda = \lambda_z(1+z)$, tais vetores de onda fornecem expressões modificadas para a rotação de Faraday,

$$\Delta\phi^{(0)} = \lambda^2 \left(\text{RM}_{\text{obs}} - \text{RM}_{\text{CFJ}}^{(0)} \right), \quad (8.6.22)$$

$$\Delta\phi^{(\parallel)} = \lambda^2 \left(\text{RM}_{\text{obs}} - \text{RM}_{\text{CFJ}}^{(\parallel)} \right), \quad (8.6.23)$$

onde RM_{obs} é o RM observacional dada em (8.6.8), e as contribuições de CFJ dependentes de λ são,

$$\text{RM}_{\text{CFJ}}^{(0)} = \frac{K_{AF}^0}{2\lambda^2} d_C, \quad (8.6.24)$$

$$\text{RM}_{\text{CFJ}}^{(\parallel)} = \frac{|\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}|}{2\lambda^2} d_C + \frac{e^2 |\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}|}{4\kappa(1+z)} \text{DM}_{\text{obs}}, \quad (8.6.25)$$

com $\kappa = 4\pi^2 m_e$. Comparando com os resultados da Ref. [86], observamos que $\text{RM}_{\text{CFJ}}^{(\parallel)}$ apresenta uma correção explícita de *redshift*, enquanto $\text{RM}_{\text{CFJ}}^{(0)}$ é modificada apenas pela distância comóvel d_C .

8.6.3 Restrições utilizando FRBs

Nesta seção, estabelecemos restrições sobre os parâmetros de CFJ utilizando dados observacionais de medida de dispersão e de rotação de FRBs. Para isso, realizaremos a mesma abordagem adotada ao longo deste capítulo, tratando as contribuições adicionais DM_{CFJ} e RM_{CFJ} , dadas nas Eqs. (8.6.12), (8.6.16), (8.6.17), (8.6.22) e (8.6.23), como pequenas correções limitadas pelas incertezas observacionais de DM_{obs} e RM_{obs} , denotadas por ϵ_{DM} e ϵ_{RM} , respectivamente. Isto consiste em exigir que as contribuições para a DM e a RM permaneçam menores que a incerteza da medida, ou seja,

$$\text{DM}_{\text{CFJ}} \lesssim \epsilon_{\text{DM}}, \quad \text{RM}_{\text{CFJ}} \lesssim \epsilon_{\text{RM}}. \quad (8.6.26)$$

Para restringir os parâmetros quirais utilizando FRBs, é necessário reunir dados observados de DM e RM das FRBs, juntamente com seus *redshifts* e distâncias. Portanto, selecionamos, a partir das Refs. [240, 246–252], fontes que contêm todas essas informações, incluindo FRBs repetidoras e não repetidoras, e que também abrangem uma ampla faixa de valores de *redshift*, DM e RM. Nenhum critério adicional foi empregado nesse sentido.

Consequentemente, as condições (8.6.26) são aplicadas aos dados provenientes de três FRBs repetidoras, a saber, FRB 121102, FRB 20180916B e FRB 20190303A, e de quatro FRBs não repetidoras, FRB 20190102, FRB 20190608, FRB 191108 e FRB 20220610A. Determina-se a distância comóvel d_C utilizando os parâmetros cosmológicos dos dados do Planck [253] no pacote Python `astropy.cosmology` [254, 255], baseado no modelo cosmológico ΛCDM . Os dados necessários para obter as restrições (a partir desses objetos) estão resumidos nas Tabs. 8.5 e 8.6.

8.6.4 Restrições de DM utilizando FRBs

Partindo das expressões (8.6.12) e (8.6.16), as contribuições quirais tipo-tempo e tipo-espaco na configuração $\mathbf{K}_{AF} \parallel \mathbf{B}_0$ para o tempo de atraso, dadas nas Eqs. (8.6.13) e (8.6.18), são limitadas por

$$|K_{AF}^0|, |K_{AF}^{\parallel}| \lesssim 2e \sqrt{\frac{(1+z) \epsilon_{\text{DM}}}{m_e d_C}}, \quad (8.6.27)$$

Tabela 8.5: Parâmetros astrofísicos das FRBs não repetidoras selecionadas.

FRBs	DM _{obs} (pc cm ⁻³)	RM _{obs} (rad m ⁻²)	z	d_C (Mpc)	Referências
FRB 20190102	364.545 ± 0.004	42.8 ± 0.2	0.2912	1199.3	[246, 247]
FRB 20190608	340.05 ± 0.06	42.3 ± 0.1	0.1177	506.9	[246, 247]
FRB 20191108	588.1 ± 0.1	474 ± 3	0.52	2013.2	[252]
FRB 20220610A	1458.15 ± 0.55	215 ± 2	1.016	3435.2	[240]
FRB 20110220	944.38 ± 0.05	–	0.81	2800	[256]
FRB 20110627	723.0 ± 0.3	–	0.61	2200	[256]
FRB 20110703	1103.6 ± 0.7	–	0.96	3200	[256]
FRB 20120127	553.3 ± 0.3	–	0.45	1700	[256]

Tabela 8.6: Parâmetros astrofísicos das FRBs repetidoras selecionadas.

FRBs ⁵	DM _{obs} (pc cm ⁻³)	RM _{obs} (rad m ⁻²)	z	d_C (Mpc)	Referências
FRB 121102 (b10)	561.6	72248(21)	0.193	814.4	[248]
FRB 121102 (b13)	561.7	71525(3)	0.193	814.4	
FRB 121102 (b18)	563.2	69408(92)	0.193	814.4	
FRB 121102 (b19)	563.1	66949(11)	0.193	814.4	
FRB 20180916B (b1)	348.82	−121.12 ± 1.74	0.0337	148.1	[250]
FRB 20180916B (b4)	348.82	−115.22 ± 0.68	0.0337	148.1	
FRB 20180916B (b5)	348.82	−111.34 ± 3.5	0.0337	148.1	
FRB 20180916B (b8)	348.82	−116.48 ± 3.7	0.0337	148.1	
FRB 20190303A (b14)	221.33	−362.65(73)	0.064	279.2	[249, 251]
FRB 20190303A (b15)	221.78	−408.76(33)	0.064	279.2	
FRB 20190303A (b16)	221.72	−421.33(37)	0.064	279.2	

a partir da qual podemos derivar restrições sobre os fatores quirais K_{AF}^0 e $K_{AF}^{\parallel}$ utilizando os valores convencionais para a carga e a massa do elétron. Aqui, consideramos os dados de duas FRBs não repetidoras, FRB 20190102 e FRB 20190608, fornecidos pelo Australian Square Kilometre Array Pathfinder (ASKAP) [246], cujas DMs observacionais associadas são $DM = (364.545 \pm 0.004) \text{ pc cm}^{-3}$ e $DM = (340.05 \pm 0.06) \text{ pc cm}^{-3}$, respectivamente. Além disso, as respectivas distâncias comóveis podem ser determinadas a partir dos *redshifts* disponíveis na Ref. [247], fornecendo $z = 0.2912$ ($d_C \approx 1199.3$ Mpc) e $z = 0.1177$ ($d_C \approx 506.9$ Mpc), respectivamente. Agora, inserindo as incertezas de DM para a FRB 20190102 e a FRB 20190608, $\epsilon_{DM} = 0.004 \text{ pc cm}^{-3}$ e $\epsilon_{DM} = 0.06 \text{ pc cm}^{-3}$, na condição (8.6.27), obtém-se

$$|K_{AF}^0|, |K_{AF}^{\parallel}| \lesssim 1.5 \times 10^{-25} \text{ GeV}, \quad (8.6.28)$$

$$|K_{AF}^0|, |K_{AF}^{\parallel}| \lesssim 8.5 \times 10^{-25} \text{ GeV}, \quad (8.6.29)$$

respectivamente, para as duas FRBs.

Tabela 8.7: Restrições sobre os parâmetros de violação de Lorentz CPT-ímpar utilizando a DM de FRBs.

FRBs	K_{AF}^0 e $\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}$ (GeV)	$\mathbf{K}_{AF}^{\perp}$ (GeV)
FRB 20190102	1.5×10^{-25}	7.6×10^{-26}
FRB 20190608	8.5×10^{-25}	4.2×10^{-25}
FRB 20110220	4.2×10^{-25}	2.1×10^{-25}
FRB 20110627	1.1×10^{-24}	5.5×10^{-25}
FRB 20110703	1.5×10^{-24}	6.6×10^{-25}
FRB 20120127	1.3×10^{-24}	6.9×10^{-25}

Para o caso $\mathbf{K}_{AF} \perp \mathbf{B}_0$, o delay modificado (8.6.17) implica $\text{DM}_{CFJ}^{\perp} \lesssim \epsilon_{\text{DM}}$, resultando em

$$|\mathbf{K}_{AF}^{\perp}| \lesssim e \sqrt{\frac{(1+z) \epsilon_{\text{DM}}}{m_e d_C}}. \quad (8.6.30)$$

Nesse caso, os dados da FRB 20190102 e da FRB 20190608 implicam as restrições

$$|\mathbf{K}_{AF}^{\perp}| \lesssim 7.6 \times 10^{-26} \text{ GeV}, \quad (8.6.31)$$

$$|\mathbf{K}_{AF}^{\perp}| \lesssim 4.2 \times 10^{-25} \text{ GeV}. \quad (8.6.32)$$

Consideramos ainda dados de outras quatro FRBs, 20110220, 20110627, 20110703 e 20120127 (disponíveis na Ref. [256]), para derivar restrições sobre os parâmetros tipo-tempo e tipo-espaço da ordem de $10^{-25} - 10^{-24}$ GeV. A Tabela 8.7 resume esses resultados, representando uma melhoria de duas ordens de grandeza em comparação com os limites obtidos anteriormente a partir da DM de pulsares na Ref. [86], que estabeleceu magnitudes da ordem de 10^{-23} GeV (veja a Tabela 8.3).

8.6.5 Restrições de RM utilizando FRBs repetidoras

Seguindo o mesmo procedimento utilizado para as restrições usando DM, as quantidades de RM dadas nas Eqs. (8.6.24) e (8.6.25), fornecem

$$K_{AF}^0 \lesssim \frac{2\lambda^2}{d_C} \epsilon_{\text{RM}}, \quad (8.6.33)$$

$$|\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}| \lesssim \frac{8\lambda^2 \kappa (1+z)}{4\kappa (1+z) d_C + 2\lambda^2 e^2 \text{DM}} \epsilon_{\text{RM}}. \quad (8.6.34)$$

Prosseguimos então com a análise da FRB repetidora 121102, utilizando dados de DM e RM da Ref. [248]. Seleccionamos alguns pulsos observados pelos telescópios Arecibo e Effelsberg, com frequências centrais em torno de 4.5 GHz e 6 GHz, ($\lambda \approx 0.0666205$ m) e ($\lambda \approx 0.0499654$ m), respectivamente. Além disso, o *redshift* associado, $z = 0.193$, fornece uma distância comóvel $d_C \approx 814.4$ Mpc. Levando em conta a distância acima e os dados associados aos pulsos 10, 13, 18 e 19 (ver Tabela I da Ref. [248]), as condições (8.6.33) e (8.6.34) estabelecem restrições da ordem de 10^{-43} e 10^{-42} GeV para os parâmetros tipo tempo e tipo espaço, conforme apresentado nas quatro primeiras linhas da Tab. 8.8.

Tabela 8.8: Restrições sobre os parâmetros de violação de Lorentz CPT-ímpar a partir de observações de FRBs repetidoras.

FRBs	K_{AF}^0 e $\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}$ (GeV)	Pulsos selecionados
FRB 121102	8.2×10^{-43}	Pulsos 10, 13, 18 e 19 da Ref. [248].
FRB 121102	2.1×10^{-43}	
FRB 121102	6.4×10^{-42}	
FRB 121102	7.6×10^{-43}	
FRB 20180916B	3.2×10^{-41}	Pulsos 1, 4, 5 e 8 da Ref. [250].
FRB 20180916B	1.9×10^{-41}	
FRB 20180916B	6.4×10^{-41}	
FRB 20180916B	6.8×10^{-41}	
FRB 20190303A	6.1×10^{-42}	Pulsos 14, 15, 16 da Ref. [251].
FRB 20190303A	2.7×10^{-42}	
FRB 20190303A	3.1×10^{-42}	

Também consideramos a FRB repetidora 20180916B, localizada na borda de uma galáxia espiral em um *redshift* de 0.0337 ($d_C \approx 148.1$ Mpc), com dados fornecidos na Ref. [250], dos quais selecionamos quatro pulsos observados em torno de 650 MHz ($\lambda \approx 0.461219$ m). Para a terceira fonte repetidora, FRB 20190303A, localizada no *redshift* $z = 0.064$ (com $d_C \approx 279.2$ Mpc), utilizamos dados de três pulsos observados em torno de 700 MHz ($\lambda \approx 0.428275$ m) [251]. Esses dois conjuntos de dados, por meio das restrições (8.6.33) e (8.6.34), fornecem limites da ordem de 10^{-41} GeV e 10^{-42} GeV sobre os parâmetros de quirais, respectivamente, como pode ser visto nos dois últimos conjuntos de linhas da Tab. 8.8. Isso representa uma melhoria por um fator de 10^7 em comparação com os limites de RM obtidos a partir de sinais de pulsares [86] (veja a Tabela 8.3).

8.6.6 Restrições de RM utilizando FRBs não repetidoras

Reunimos dados de três fontes:

- i) As FRBs não repetidoras 20190102 e 20190608, observadas pelo telescópio Australian Square Kilometre Array Pathfinder (ASKAP) na frequência de referência de 1.3 GHz [247], cujos dados de DM e RM são apresentados na Tab. 8.9. Os *redshifts* associados [246], dados por $z = 0.2912$ e $z = 0.1177$, implicam distâncias comóveis $d_C \approx 1199.3$ Mpc e $d_C \approx 506.9$ Mpc, respectivamente.
- ii) A FRB 191108, detectada pelo Apertif Radio Transient System (ARTS) no Westerbork Synthesis Radio Telescope (WSRT) [252], com DM e RM apresentados na Tab. 8.9, com frequência central de 1370 MHz. Utilizamos o *redshift* máximo fornecido, $z = 0.52$ ($d_C \approx 2013.2$ Mpc).
- iii) A FRB 20220610A está localizada em uma galáxia hospedeira no *redshift* 1.016, apresentando a maior distância comóvel considerada neste trabalho — $d_C \approx 3435.2$ Mpc. O DM e o RM associadas foram obtidas pelo ASKAP em uma frequência central de 1271.5 MHz [240].

Tabela 8.9: Restrições sobre os parâmetros de violação de Lorentz CPT-ímpar a partir de observações de FRBs não repetidoras.

FRBs	K_{AF}^0 e $\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}$ (GeV)	Ref.
FRB 20190102	1.1×10^{-43}	[246, 247]
FRB 20190608	1.3×10^{-43}	[246, 247]
FRB 20191108	6.0×10^{-43}	[252]
FRB 20220610A	5.0×10^{-43}	[240]

Tabela 8.10: Comparação entre os limites obtidos em diferentes configurações.

—	K_{AF}^0 (GeV)	$\mathbf{K}_{AF}$ (GeV)	Ref.
Polarização da CMB	10^{-45}	10^{-45}	[198]
RM de FRBs	10^{-43}	10^{-43}	Tabela 8.9
Birrefringência astrofísica	10^{-42}	10^{-42}	[71]
““ RM de pulsares	10^{-36}	10^{-36}	[86]
DM de FRBs	10^{-25}	10^{-25}	Tabela 8.7 ““
Campo geomagnético	—	10^{-25}	[257]
Vento solar	—	10^{-24}	[197]
DM de pulsares	10^{-22}	10^{-23}	[86]
Cavidades ressonantes	—	10^{-23}	[196]
Ressonâncias de Schumann	10^{-21}	10^{-21}	[195]

Para essas quatro FRBs não repetidoras, as Eqs. (8.6.33) e (8.6.34) fornecem restrições tão rigorosas quanto 10^{-43} GeV, veja a segunda coluna da Tab. 8.9. Isso também representa uma melhoria de 7 ordens de grandeza em relação aos melhores limites obtidos com RM de pulsares [86].

É importante observar que os limites permanecem aproximadamente na mesma ordem de grandeza para diversas FRBs repetidoras e não repetidoras. Isso indica a robustez das restrições obtidas diante de diferentes *redshifts*, distâncias de propagação, incertezas de RM e ambientes magnetoiônicos.

Outro ponto digno de nota diz respeito à largura de banda em frequência das medidas de RM. Embora tenhamos utilizado um único comprimento de onda central para cada pulso, sabe-se que as medidas de RM são obtidas a partir de observações realizadas em uma banda finita de frequências. Essas bandas geralmente apresentam larguras correspondentes a 10% ou 20% da frequência central. Os cálculos dos limites utilizando as frequências nas extremidades das bandas de observação revelaram que a maioria dos limites permanece na mesma ordem de grandeza, com variações de apenas uma ordem de grandeza em alguns casos isolados. Tal verificação confirma que a escolha do valor da frequência central constitui um procedimento confiável.

A Tabela 8.10 compara os resultados obtidos nesta seção com aqueles estabelecidos em outros contextos, sendo basicamente uma reformulação da Tabela 8.3. Observamos que as restrições obtidas utilizando a RM de FRBs são mais restritivas do que aquelas derivadas a partir do vento solar, das RMs de pulsares, do campo geomagnético, de cavidades ressonantes e das ressonâncias de Schumann. Embora os resultados mais restritivos sejam provenientes da polarização da CMB, os limites obtidos a partir das RMs de FRBs são competitivos com os melhores limites astrofísicos de birrefringência relatados na literatura, reforçando ainda mais o interesse em plasmas quirais no ISM.

PLASMAS EM ROTAÇÃO NO CONTEXTO DE MCFJ COM FATOR QUIRAL TIPO-TEMPO

Plasmas em rotação constituem diversos físicos na natureza, especialmente em ambientes astrofísicos, como nas magnetosferas de pulsares, magnetares e buracos negros. Nestes cenários, o movimento do meio girante ao redor de tais objetos alteram a propagação da luz emitida de forma significativa, ocasionando, por exemplo, birrefringência, e alterando a polarização da radiação observada por meio de rotação de Faraday [156]. Em laboratório, plasmas magnetizados girantes aparecem em dispositivos de confinamento, sendo relevantes para o controle de instabilidades, na separação de espécies de partículas e no diagnóstico de parâmetros do plasma. Neste contexto a rotação pode também produzir birrefringência circular, frequências de corte ajustáveis e forte arrasto do plano de polarização, o que torna esses meios relevantes para o desenvolvimento de isoladores e rotadores não recíprocos nas faixas de micro-ondas, GHz e THz [157].

Magnetosferas de pulsares e magnetares são também ambientes favoráveis para ocorrência do efeito magnético quiral (CME) devido as suas condições extremas, sobre tudo, em magnetares cujos campos magnéticos podem atingir magnitudes elevadas, na ordem de $10^{14} - 10^{15}$ G [24, 29, 32]. Neste contexto, a possível produção de assimetria entre férmions de diferentes quiralidades no plasma relativístico de elétrons e pósitrons, induziria uma corrente elétrica paralela ao campo magnético por meio do CME, podendo desencadear instabilidades quirais, o surgimento de campos magnéticos helicoidais e o crescimento de modos eletromagnéticos através de instabilidades. Em magnetares, tais processos podem alcançar intensidades suficientes para gerar radiação circularmente polarizada em uma ampla faixa espectral, do rádio ao infravermelho, o que pode influenciar nas emissões de pulsares e de FRBs [29].

Neste capítulo investigamos a propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas quirais em rotação, considerando os efeitos conjuntos da corrente magnética quiral do CME e da rotação mecânica sobre os índices de refração do meio, considerando a influência do termo tipo-tempo da eletrodinâmica de MCFJ. Para isso, lançaremos mão de resultados já apresentados na literatura, em especial nas Refs. [156, 258], das quais extraímos as relações constitutivas e as susceptibilidades elétricas para plasmas girantes. A partir disso, os índices de refração são determinados e o coeficiente RP é investigado, onde verificamos a ocorrência reversão de sinal e o surgimento de novos pontos de ressonância. Os resultados aqui apresentados fazem parte de um estudo em andamento [259], ainda não publicado.

9.1 Plasma frio magnetizado em rotação

Como vimos no Capítulo 2, a teoria usual de plasmas frios magnetizado é descrita essencialmente pela permissividade elétrica dada na Eq. (2.4.21), definida na presença de um campo magnético externo $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$. Usando $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \bar{\chi}_{ij})$, pode-se também expressar o tensor de susceptibilidade como

$$\bar{\chi}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\chi}_\perp & -i\bar{\chi}_\times & 0 \\ i\bar{\chi}_\times & \bar{\chi}_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\chi}_\parallel \end{bmatrix}, \quad (9.1.1)$$

onde

$$\bar{\chi}_\perp = \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2 - \omega^2}, \quad \bar{\chi}_\times = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \frac{\omega_{c\alpha} \omega_{p\alpha}^2}{\omega (\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2)}, \quad \bar{\chi}_\parallel = - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}, \quad (9.1.2)$$

sendo $\omega_{p\alpha}^2 = n_\alpha e^2 / m_\alpha$ e $\omega_{c\alpha} = q_\alpha B_0 / m_\alpha$, as frequências de plasma e ciclotron, respectivamente, definidas para partículas de espécie α .

Para plasma em rotação com velocidade angular $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{z}$, as relações constitutivas podem ser escritas na forma [156, 258]

$$\mathbf{B}_i = \mu_0 \mathbf{H}_i - \frac{1}{c^2} \left[\varepsilon_{ijk} \mathbf{v}_j \bar{\chi}_{kl}(\omega') \right] \mathbf{E}_l, \quad (9.1.3)$$

$$\mathbf{D}_i = \epsilon_0 \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_j + \frac{1}{c^2} \bar{\chi}_{ij}(\omega') \left[\varepsilon_{jkl} \mathbf{v}_k \mathbf{H}_l \right], \quad (9.1.4)$$

onde a velocidade instantânea $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ representa a contribuição em primeira ordem (em v/c) do efeito de rotação do meio. Considerando propagação ao longo da direção z , tais relações conduzem à seguinte equação de onda para o campo magnético:

$$\begin{pmatrix} 1 + \chi_\perp - n^2 & -i\chi_\times \\ i\chi_\times & 1 + \chi_\perp - n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = 0, \quad (9.1.5)$$

onde foram definidos

$$\chi_\perp = \bar{\chi}_\perp - \frac{\Omega}{\omega} \bar{\chi}_\times, \quad (9.1.6)$$

$$\chi_\times = \bar{\chi}_\times - \frac{\Omega}{\omega} (\bar{\chi}_\parallel + \bar{\chi}_\perp). \quad (9.1.7)$$

O determinante nulo da Eq. (9.1.4) fornece os índices de refração

$$n_r^2(\omega) = 1 + \bar{\chi}_\perp(\omega') + \bar{\chi}_\times(\omega') - \frac{\Omega}{\omega} [\bar{\chi}_\times(\omega') + \bar{\chi}_\parallel(\omega') + \bar{\chi}_\perp(\omega')], \quad (9.1.8)$$

$$n_l^2(\omega) = 1 + \bar{\chi}_\perp(\omega') - \bar{\chi}_\times(\omega') - \frac{\Omega}{\omega} [\bar{\chi}_\times(\omega') - \bar{\chi}_\parallel(\omega') - \bar{\chi}_\perp(\omega')]. \quad (9.1.9)$$

associados à ondas circularmente polarizados à direita (RCP) e circularmente polarizados à esquerda (LCP), respectivamente. Além disso, nos índices acima foram definidos $\omega' = \omega - \Omega$ para onda RCP e

$\omega' = \omega + \Omega$ para onda LCP, o que representa um deslocamento de frequência que pode ser interpretado como o análogo rotacional do efeito Doppler convencional. Nesta situação, o deslocamento Doppler rotacional decorre da rotação mecânica do meio e é proporcional ao momento angular transportado pela onda eletromagnética, enquanto o deslocamento Doppler usual se origina do movimento translacional da fonte ou do observador, sendo proporcional ao momento linear da onda. De fato, ambos os modos circularmente polarizados possuem de helicidades opostas e experimentam deslocamentos de frequência de sinais contrários.

9.2 Propagação de ondas eletromagnéticas em plasma quiral em rotação

Consideraremos agora que o plasma em rotação seja dotado de correntes quirais anômalas, tal como a corrente magnética quiral, parametrizada pelo termo tipo-tempo da teoria de CFJ. Como visto no Capítulo 4, o tensor de permissividade deste sistema quiral é dado por

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ij}(\omega) + i \frac{V_0}{\omega} \epsilon_{ikj} n^k, \quad (9.2.1)$$

que para uma onda propagando na direção z , é escrito na forma

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \begin{bmatrix} S & -iD - i\frac{V_0}{\omega}n & 0 \\ iD + i\frac{V_0}{\omega}n & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}. \quad (9.2.2)$$

Usando $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(\delta_{ij} + \bar{\chi}_{ij})$, a susceptibilidade elétrica do sistema é então

$$\bar{\chi}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\chi}_{\perp} & -i\bar{\chi}_{\times} - i\frac{V_0}{\omega}n & 0 \\ i\bar{\chi}_{\times} + i\frac{V_0}{\omega}n & \bar{\chi}_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\chi}_{\parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\chi}_{\perp} & -i\bar{\chi}_{\text{chiral}} & 0 \\ i\bar{\chi}_{\text{chiral}} & \bar{\chi}_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\chi}_{\parallel} \end{bmatrix}, \quad (9.2.3)$$

onde definimos a componente quiral

$$\bar{\chi}_{\text{chiral}} = \bar{\chi}_{\times} + \frac{V_0}{\omega}n. \quad (9.2.4)$$

A similaridade entre as Eqs. (9.1.1) e (9.2.3) nos permite propor que o sistema quiral em rotação seja descrito pelo mesmo sistema dado pela Eq. (9.1.4), implementando a substituição $\bar{\chi}_{\times} \rightarrow \bar{\chi}_{\text{chiral}}$. Neste caso, as definições (9.1.6) e (9.1.7) são reescritas escritas como

$$\chi_{\perp} = \bar{\chi}_{\perp} - \frac{\Omega}{\omega} \bar{\chi}_{\text{chiral}}, \quad (9.2.5)$$

$$\chi_{\times} = \bar{\chi}_{\text{chiral}} - \frac{\Omega}{\omega} (\bar{\chi}_{\parallel} + \bar{\chi}_{\perp}). \quad (9.2.6)$$

Inserindo as relações acima no sistema (9.1.5), obtemos

$$n_r^2(\omega) = 1 + \bar{\chi}_\perp(\omega') + \bar{\chi}_{\text{chiral}}(\omega') - \frac{\Omega}{\omega} [\bar{\chi}_{\text{chiral}}(\omega') + \bar{\chi}_\parallel(\omega') + \bar{\chi}_\perp(\omega')], \quad (9.2.7)$$

$$n_l^2(\omega) = 1 + \bar{\chi}_\perp(\omega') - \bar{\chi}_{\text{chiral}}(\omega') - \frac{\Omega}{\omega} [\bar{\chi}_{\text{chiral}}(\omega') - \bar{\chi}_\parallel(\omega') - \bar{\chi}_\perp(\omega')]. \quad (9.2.8)$$

Explicitamente, usando $\bar{\chi}_{\text{chiral}} = \bar{\chi}_\times + \frac{V_0}{\omega'} n$, escreve-se

$$n_r^2 = 1 + \bar{\chi}_\perp(\omega') + \left(\bar{\chi}_\times(\omega') + \frac{V_0}{\omega'} n_r \right) - \frac{\Omega}{\omega} \left[\left(\bar{\chi}_\times(\omega') + \frac{V_0}{\omega'} n_r \right) + \bar{\chi}_\parallel(\omega') + \bar{\chi}_\perp(\omega') \right], \quad (9.2.9)$$

$$n_l^2 = 1 + \bar{\chi}_\perp(\omega') - \left(\bar{\chi}_\times(\omega') + \frac{V_0}{\omega'} n_l \right) - \frac{\Omega}{\omega} \left[\left(\bar{\chi}_\times(\omega') + \frac{V_0}{\omega'} n_l \right) - \bar{\chi}_\parallel(\omega') - \bar{\chi}_\perp(\omega') \right]. \quad (9.2.10)$$

Veja que o fator quiral V_0 carrega também um termo linear nas índices de refração, sendo ainda necessário resolver ambas as expressões, que de fato geram os seguintes quatro índices de refração:

$$n_{r\pm} = (V_0/2\omega') (1 - \Omega/\omega) \pm \sqrt{\Sigma_+(\omega', \Omega, V_0)}, \quad (9.2.11)$$

$$n_{l\pm} = -(V_0/2\omega') (1 + \Omega/\omega) \pm \sqrt{\Sigma_-(\omega', \Omega, V_0)}, \quad (9.2.12)$$

associados às ondas RCP e LCP, respectivamente, onde

$$\Sigma_\pm(\omega', \Omega, V_0) = \left(\frac{V_0\Omega}{2\omega'\omega} \mp \frac{V_0}{2\omega'} \right)^2 + \left(1 + \bar{\chi}_\perp(\omega') \pm \bar{\chi}_\times(\omega') - \frac{\Omega}{\omega} [\bar{\chi}_\times(\omega') \pm \bar{\chi}_\perp(\omega') \pm \bar{\chi}_\parallel(\omega')] \right). \quad (9.2.13)$$

Assim como no Capítulo. 4, foram obtidos quatro índices de refração modificados pelo fator quiral V_0 , que permitem investigar efeitos diversos como birrefringência e refração negativa, como bem sabemos.

9.2.1 Birrefringência em plasma quiral em rotação

É conhecido que plasmas em rotação apresentam não apenas atividade óptica, como também manifestam reversão de RP, uma assinatura também comum em plasma regidos por eletrodinâmicas quirais, como discutido ao longo de toda este trabalho. Nesta seção, analisaremos e compararemos as implicações dos fatores quirais e de rotação sobre o coeficiente RP, considerando o par de índices n_{r+} e n_{l+} , associados às ondas RCP e LCP, respectivamente.

O RP é dado por

$$\delta = \frac{\omega}{2} (\text{Re}[n_{l+}] - \text{Re}[n_{r+}]) \quad (9.2.14)$$

É importante comentar a ausência de um sinal negativo na definição acima. Isto decorre da convenção adotada na Ref. [156, 157] para as polarizações circulares, que é a inversa usada anteriormente neste trabalho.

Substituindo $\omega' = \omega \mp \Omega$ nos índices n_{r+} e n_{l+} , respectivamente, temos

$$n_{r+} = \frac{V_0}{2\omega} + \sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{2\omega}\right)^2 - \frac{\omega_p^2 (\omega^2 + \Omega (\omega_c - 3\omega + 2\Omega))}{\omega(\omega - \Omega)^2 (\omega + \omega_c - \Omega)}}, \quad (9.2.15)$$

e

$$n_{l+} = -\frac{V_0}{2\omega} + \sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{2\omega}\right)^2 - \frac{\omega_p^2 (\omega^2 + \Omega (3\omega + 2\Omega - \omega_c))}{\omega(\omega - \Omega)^2 (\omega - \omega_c + \Omega)}}. \quad (9.2.16)$$

Perceba que, fazendo $\Omega = 0$, as equações acima recaem nos índices n_L e n_R obtidos na Ref. [82]. De fato, teremos

$$n_{r+} = n_L \quad \text{e} \quad n_{l+} = n_R, \quad (9.2.17)$$

o que assinala a incompatibilidade entre as convenções adotadas para as polarizações circulares (veja os rótulos trocados).

O rotatory power (9.2.14) associado aos índices n_{r+} e n_{l+} é ilustrado nas Figs. 9.1, 9.2, 9.3 e 9.4 para alguns valores de parâmetros. A Fig. 9.1 compara o comportamento de RP para o caso quiral sem rotação ($V_0 \neq 0$ e $\Omega = 0$) com o caso de plasma usual em rotação ($V_0 = 0$ e $\Omega \neq 0$). O ponto relevante neste dois casos é que a reversão de RP ocorrem em pontos diferentes para cada um deles, como podemos notar para as curvas tracejadas preta e vermelha nas frequências ω' e ω'' .

A partir dos índices em (9.2.15) e (9.2.16), podemos analisar os casos em que $\Omega > 0$ e $\Omega < 0$. Para o caso em que $\Omega > 0$, o RP é apresentado na Fig.9.2, para o qual pontuamos:

- (i) Para $\omega = \Omega$, ocorre ressonância, com $\delta \rightarrow -\infty$ (veja a curva azul na Fig. 9.2).
- (ii) Para $\omega_c > \Omega$, ocorre ressonância para $\omega = \omega_c - \Omega$.
- (iii) Para $\omega = \omega'$, ocorre reversão de RP, no mesmo ponto onde ocorre reversão para o caso quiral sem rotação (veja a linha tracejada preta na Fig. 9.2).

Na situação em que $\Omega < 0$, caso ilustrado nas Figs. 9.3 e 9.4, podemos inferir sobre o RP:

1. Para $\omega = \omega'$, ocorre reversão de sinal no RP.
2. Para $\omega = \Omega$, ocorre $\delta \rightarrow +\infty$, sendo este um ponto de ressonância na frequência de giro.
3. Para $\omega = \omega_c + \Omega$, ocorre novamente ressonância no RP, assinalando uma dupla ressonância no plasma quiral girante.

Portanto, observa-se que ambos os casos $\Omega > 0$ e $\Omega < 0$ apresentam reversão de RP. Além disso, percebe-se que nas duas situações ocorrem duas frequências de ressonância, para as quais $\delta \rightarrow \infty$, enquanto no caso quiral sem rotação apresenta apenas uma frequência de ressonância. Nota-se também que, nas Figs. 9.3 e 9.4, que representam os casos em que $\Omega < \omega_c$ e $\Omega > \omega_c$, respectivamente, o aumento da velocidade angular Ω desloca o ponto da primeira ressonância ($\omega = \Omega$) para além da frequência ω_c (veja a Fig. 9.4).

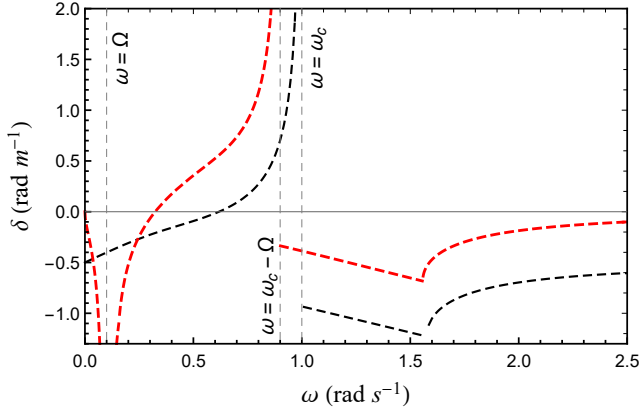


Figura 9.1: Gráfico do poder de rotação (9.2.14). A linha tracejada preta representa o poder de rotação para plasma quiral ($V_0 \neq 0$) com rotação nula ($\Omega = 0$). A linha tracejada vermelha representa o poder de rotação para plasma em rotação ($\Omega \neq 0$) com condutividade magnética nula ($V_0 = 0$). Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = \omega_p$, $\Omega = 0.1\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

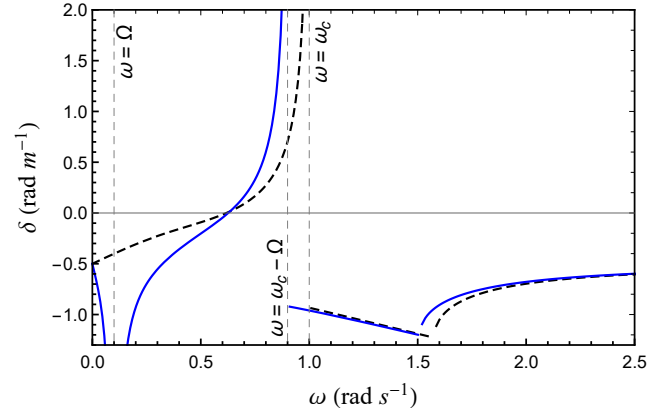


Figura 9.2: Gráfico do poder de rotação (9.2.14). A linha tracejada preta representa o poder de rotação para plasma quiral ($V_0 \neq 0$) com rotação nula ($\Omega = 0$). A linha sólida azul representa o poder de rotação para plasma quiral em rotação, com $\Omega \neq 0$ e $V_0 \neq 0$. Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = \omega_p$, $\Omega = 0.1\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

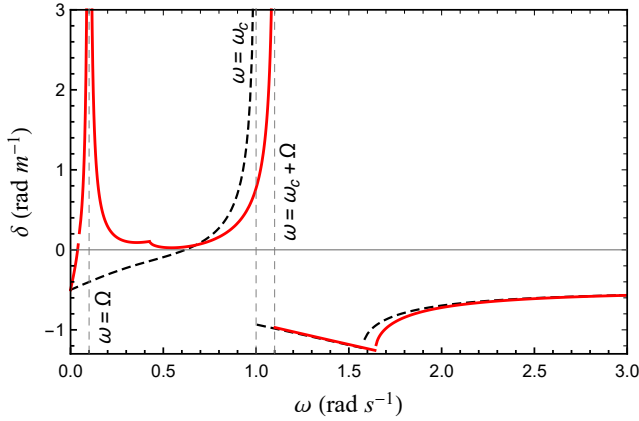


Figura 9.3: Gráfico do poder de rotação (9.2.14) para o caso $\Omega < 0$. A linha tracejada preta representa o poder de rotação para plasma quiral ($V_0 > 0$) com rotação nula ($\Omega = 0$). A linha sólida vermelha representa o poder de rotação para plasma quiral em rotação, com $\Omega < 0$ e $V_0 > 0$. Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = \omega_p$, $\Omega = 0.1\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

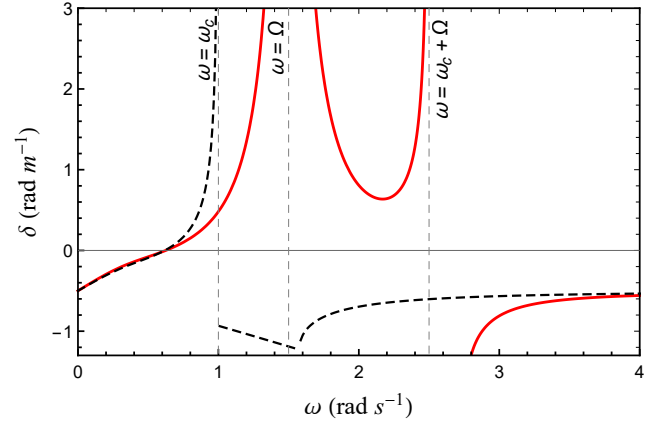


Figura 9.4: Gráfico do poder de rotação (9.2.14) para o caso $\Omega < 0$. A linha tracejada preta representa o poder de rotação para plasma quiral ($V_0 > 0$) com rotação nula ($\Omega = 0$). A linha sólida vermelha representa o poder de rotação para plasma quiral em rotação, com $\Omega < 0$ e $V_0 > 0$. Aqui, usamos $\omega_c = \omega_p$, $V_0 = \omega_p$, $\Omega = 1.5\omega_p$ e $\omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

CONVERSÃO FÓTON-ÁXION EM PLASMAS QUIRAIS

Sumário

10.1	Oscilação áxion-fóton	155
10.1.1	Oscilação axion-fóton em plasmas	159
10.1.2	Decoerência associada à massa do áxion na conversão no vácuo	162
10.2	Conversão fóton-áxion em plasma quiral com AHE e CME	165
10.2.1	Conversão fóton-áxion em plasma na presença de AHE	165
10.2.2	Oscilações entre áxion e fótons circularmente polarizados	167
10.2.2.1	Probabilidade de conversão $\gamma_{R,L} \rightarrow a$	168
10.3	Conversão fóton-áxion na presença de CME	171
10.4	Conversão ressonante $a \rightarrow \gamma$ em plasma quiral	176
10.4.1	Conversão ressonante no vácuo	177
10.4.2	Conversão ressonante em plasma quiral	177

Meios como plasmas também desempenham um papel importante na busca pela detecção da matéria escura, especialmente na procura por partículas como os fótons escuros e os áxions (e, de forma mais geral, ALPs). Esses meios modificam as propriedades de propagação dos fótons, conferindo-lhes uma massa efetiva e possibilitando condições de ressonância que aumentam significativamente a probabilidade de conversão entre fótons e essas partículas hipotéticas. Como consequência, plasmas astrofísicos e laboratoriais constituem ambientes privilegiados para investigar processos de mistura fóton-partícula e estabelecer restrições sobre os parâmetros desses candidatos à matéria escura.

A motivação para esse estudo é reforçada pelo crescente número de experimentos dedicados à busca direta e indireta de áxions e ALPs [260]. Entre os experimentos de laboratório, destacam-se os *haloscopes*, como o ADMX (*Axion Dark Matter eXperiment*), que exploram a conversão ressonante de áxions do halo galáctico em fótons de micro-ondas na presença de campos magnéticos intensos [261–264]. Mais recentemente, experimentos como HAYSTAC, CAPP, QUAX e ORGAN têm ampliado a cobertura de massas e acoplamentos testados [265–273]. Haloscópios com dielétricos e plasmas também foram propostos [61–63]. Paralelamente, os chamados *helioscopes*, como o CAST e o futuro IAXO, procuram detectar áxions produzidos no interior do Sol por meio de sua reconversão em fótons de raios X [274–277]. Além disso, experimentos do tipo *light-shining-through-a-wall*, como o ALPS II, investigam a produção e regeneração de ALPs em laboratório utilizando lasers de alta potência e campos magnéticos [278, 279].

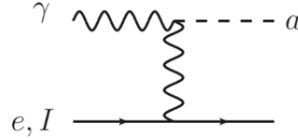


Figura 10.1: Diagrama do processo Primakoff.

No contexto astrofísico, plasmas magnetizados presentes em estrelas, pulsares, magnetares, núcleos ativos de galáxias e no meio intergaláctico também oferecem condições favoráveis para a conversão fóton-áxion [280–282, 284]. Nesses ambientes, a combinação entre campos magnéticos intensos e as propriedades dispersivas do plasma pode produzir assinaturas observacionais em espectros, polarização e curvas de luz, tornando observações astronômicas uma ferramenta de interesse [280–282]. Em particular, fenômenos de conversão ressonante em plasma têm sido amplamente investigados como um mecanismo capaz de aumentar a eficiência da mistura fóton-áxion em determinadas faixas de frequência e densidade eletrônica [280, 283–285].

Neste capítulo, abordamos o estudo da conversão fóton-áxion em plasmas quirais regidos pela eletrodinâmica de MCFJ, uma proposta original que busca compreender como a condutividade magnética (setor tipo-tempo) e a condutividade Hall anômala (setor tipo-espço) contribuem para o problema de oscilação áxion-fóton. Inicialmente, apresenta-se o formalismo usual para obtenção da probabilidade de conversão no vácuo e em plasmas. Em seguida, inserindo os termos quirais, propomos uma abordagem na qual fótons de polarizações RCP e LCP misturam-se de formas distintas com o áxion, conduzindo a à probabilidades de conversão diferentes para cada uma delas. Os resultados apresentados neste capítulo fazem parte de um estudo em andamento [286], ainda não publicado.

10.1 Oscilação áxion-fóton

Um dos mecanismos tradicionais de produção de áxions é a oscilação áxion-fóton [280, 287], no qual um fóton converte-se em um áxion sob ação de um intenso campo magnético externo, via efeito Primakoff, representado pelo diagrama de Feynman mostrado na Fig. 10.1. Tal conversão é governada pelo termo $g_{a\gamma}a(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$, que descreve o acoplamento entre um áxion e dois fótons. Como vimos no Capítulo 3, a equação de movimento para o campo axiônico é

$$(\partial_\rho \partial^\rho + m_a^2) a = -\frac{g_{a\gamma}}{4} (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}) = g_{a\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (10.1.1)$$

A introdução de um campo magnético externo permite linearizar o acoplamento entre o campo axiônico e o campo eletromagnético propagante, em um procedimento análogo ao realizado no final da Seção 2.2. Para isso, decompõe-se os campos eletromagnéticos como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_0, \quad (10.1.2)$$

onde o subíndice 1 rotula as quantidades dinâmicas associadas ao fóton, e $\mathbf{B}_0$ representa fundo magnético

clássico $\mathbf{B}_0$. Assim, o termo de interação $g_{a\gamma} a \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ passa a ser escrito como $g_{a\gamma} a \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{B}_0$, sendo desprezados termos de segunda ordem nos campos dinâmicos. Além disso, vemos que apenas a polarização do fóton cujo campo elétrico é paralelo ao campo magnético externo se mistura com o áxion, enquanto a polarização ortogonal se desacopla devido a presença do produto escalar.

Considerando $\mathbf{B} = B_0 \hat{y}$, além de $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$, teremos a seguinte equação de movimento para o áxion (omitindo o rótulo de quantidades perturbativas):

$$(\partial_\rho \partial^\rho + m_a^2) a = -\frac{g_{a\gamma}}{4} B_0 \frac{\partial A_y}{\partial t}. \quad (10.1.3)$$

Por outro lado, a equação de movimento para o campo do fóton é

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -g_{a\gamma} (\partial_\mu a) \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (10.1.4)$$

o que conduz à equação de onda

$$\square A^\alpha + g_{a\gamma} (\partial_\rho a) \tilde{F}^{\rho\alpha} = 0. \quad (10.1.5)$$

Tomando $\alpha = i$, a equação de onda para o potencial A^α torna-se

$$\square A^i + g_{a\gamma} (\partial_0 a) \tilde{F}^{0i} + (\partial_j a) \tilde{F}^{ji} = 0. \quad (10.1.6)$$

Na expressão acima apenas o termo de derivada temporal do campo de áxion é de nosso interesse, uma vez que o termo $(\partial_j a) \tilde{F}^{ji}$ será proporcional ao produto de a com o campo $\mathbf{E}$, constituindo um termo de segunda ordem a ser desprezado. Assim, podemos escrever

$$\square A_y + g_{a\gamma} (\partial_t a) B_0 = 0. \quad (10.1.7)$$

Propondo solução do tipo onda-plana para propagação ao longo da direção z , ou seja, propagação transversal ao campo magnético externo,

$$a(z, t) = a(z) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (10.1.8)$$

$$A_y(z, t) = A_y(z) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (10.1.9)$$

as Eqs.(10.1.3) e (10.1.7) são reescritas como

$$(\omega^2 + \partial_z^2 - m_a^2) a + i g_{a\gamma} \omega B_0 A_y = 0, \quad (10.1.10)$$

$$(\omega^2 + \partial_z^2) A_y - i g_{a\gamma} \omega B_0 a = 0, \quad (10.1.11)$$

podendo ser expressas na forma matricial

$$\begin{bmatrix} (\omega^2 + \partial_z^2) & -i g_{a\gamma} \omega B_0 \\ i g_{a\gamma} \omega B_0 & (\omega^2 + \partial_z^2 - m_a^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_y \\ a \end{bmatrix} = 0. \quad (10.1.12)$$

Podemos explicitar o operador diagonal presente na equação acima, escrevendo

$$\left((\omega^2 + \partial_z^2) \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -ig_{a\gamma}\omega B_0 \\ ig_{a\gamma}\omega B_0 & -m_a^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A_y \\ a \end{bmatrix} = 0. \quad (10.1.13)$$

Perceba que $(\omega^2 + \partial_z^2) = (\omega + i\partial_z)(\omega - i\partial_z)$, que quando implementado sobre os campos leva a

$$(\omega - i\partial_z) \begin{bmatrix} A_y \\ a \end{bmatrix} = (\omega + k) \begin{bmatrix} A_y \\ a \end{bmatrix} \cong 2\omega \begin{bmatrix} A_y \\ a \end{bmatrix}, \quad (10.1.14)$$

onde usamos a aproximação $(\omega + k) \cong 2\omega$. Com isso, a Eq. (10.1.13) torna-se

$$\left(2\omega (\omega + i\partial_z) \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -ig_{a\gamma}\omega B_0 \\ ig_{a\gamma}\omega B_0 & -m_a^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A_y \\ a \end{bmatrix} = 0, \quad (10.1.15)$$

ou também

$$\left(i\partial_z \mathbf{I} + \begin{bmatrix} \omega & -i\frac{1}{2}g_{a\gamma}B_0 \\ i\frac{1}{2}g_{a\gamma}B_0 & \omega - \frac{m_a^2}{2\omega} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A_y \\ a \end{bmatrix} = 0, \quad (10.1.16)$$

Essa é uma equação tipo Schrödinger, na forma $i\partial_z |\Psi(z)\rangle = K |\Psi(z)\rangle$, para a função de onda

$$|\Psi(z)\rangle = \begin{bmatrix} A_y \\ a \end{bmatrix}, \quad (10.1.17)$$

sendo

$$K = \begin{bmatrix} \omega & -i\frac{1}{2}g_{a\gamma}B_0 \\ i\frac{1}{2}g_{a\gamma}B_0 & \omega - \frac{m_a^2}{2\omega} \end{bmatrix}. \quad (10.1.18)$$

Nesse ponto, a dinâmica do sistema pode ser reinterpretada como um problema de mistura entre duas amplitudes de propagação: a amplitude fotônica A_y , associada ao modo de polarização paralelo ao campo magnético externo, e o campo axiônico a , condensadas no vetor de estado (10.1.17), cuja evolução ao longo da direção de propagação z é governada pela equação do tipo Schrödinger obtida anteriormente. Dessa forma, dado um estado inicial $|\Psi(0)\rangle$, o estado após uma distância z pode ser escrito em termos de um operador de evolução $U(z)$ como

$$|\Psi(z)\rangle = U(z) |\Psi(0)\rangle, \quad (10.1.19)$$

onde $U(z) = e^{iKz}$. Além disso, a probabilidade da oscilação axion-fóton é dada pela expressão

$$P_{\gamma \rightarrow a} = \langle \Psi(z) | a \rangle \langle a | \Psi(z) \rangle. \quad (10.1.20)$$

Sendo o estado inicial representado por $|\Psi(0)\rangle = |A_y\rangle$, ou seja, um fóton inicial cuja evolução implicará na conversão de um fóton em um áxion ($\gamma \rightarrow a$), temos $|\Psi(z)\rangle = U(z) |A_y\rangle$, de modo que a

probabilidade neste caso será

$$P_{\gamma \rightarrow a} = |\langle a | U(z) | A_y \rangle|^2. \quad (10.1.21)$$

Evidentemente, para determinar a probabilidade de conversão necessitamos expressar o operador $U(z)$ em termos de seus autoestados, ou seja, precisamos dos autovetores de K . Como mostrado no Apêndice H, o "Hamiltoniano" K possui autovalores

$$\lambda_{\pm} = \omega - \frac{m_a^2}{4\omega} \pm \frac{\sqrt{\Delta'}}{4\omega}, \quad (10.1.22)$$

associados aos respectivos autovetores

$$|\lambda_{\pm}\rangle = \frac{2\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{\sqrt{2(\Delta' \mp m_a^2 \sqrt{\Delta'})}} \left[|A_y\rangle + \frac{2i\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{(m_a^2 \pm \sqrt{\Delta'})} |a\rangle \right], \quad (10.1.23)$$

onde definimos

$$\Delta' = 4\omega^2 \Delta, \quad \Delta = \frac{m_a^4}{4\omega^2} + (g_{\alpha\gamma} B_0)^2. \quad (10.1.24)$$

Para construir o operador $U(z)$, podemos usar o fato de que este é diagonal na base de seus autoestados, ou seja,

$$\begin{aligned} U(z) &= e^{iKz} (|\lambda_{+}\rangle \langle \lambda_{+}| + |\lambda_{-}\rangle \langle \lambda_{-}|), \\ U(z) &= e^{i\lambda_{+}z} |\lambda_{+}\rangle \langle \lambda_{+}| + e^{i\lambda_{-}z} |\lambda_{-}\rangle \langle \lambda_{-}|. \end{aligned} \quad (10.1.25)$$

Como temos os autoestados $|\lambda_{\pm}\rangle$, usaremos seus respectivos bras escrever o operador de evolução em termos de $|A_y\rangle$ e $|a\rangle$. Isto fornece:

$$\begin{aligned} U(z) &= e^{i\lambda_{+}z} C_{-} \left(|A_y\rangle \langle A_y| - \frac{2i\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{(m_a^2 + \sqrt{\Delta'})} |A_y\rangle \langle a| + \frac{2i\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{(m_a^2 + \sqrt{\Delta'})} |a\rangle \langle A_y| + \frac{4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2}{(m_a^2 + \sqrt{\Delta'})^2} |a\rangle \langle a| \right) \\ &+ e^{i\lambda_{-}z} C_{+} \left(|A_y\rangle \langle A_y| - \frac{2i\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{(m_a^2 - \sqrt{\Delta'})} |A_y\rangle \langle a| + \frac{2i\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{(m_a^2 - \sqrt{\Delta'})} |a\rangle \langle A_y| + \frac{4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2}{(m_a^2 - \sqrt{\Delta'})^2} |a\rangle \langle a| \right), \end{aligned} \quad (10.1.26)$$

sendo

$$C_{\pm} = \left(\frac{g_{\alpha\gamma} \omega B_0}{\sqrt{2(\Delta' \pm m_a^2 \sqrt{\Delta'})}} \right)^2. \quad (10.1.27)$$

Sabendo que os estados $|A_y\rangle$ e $|a\rangle$ são ortogonais, a probabilidade $P_{\gamma \rightarrow a} = |\langle a| U(z) |A_y\rangle|^2$ será

$$P_{\gamma \rightarrow a} = \left| e^{i\lambda_+ z} C_- \frac{2i\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{(m_a^2 + \sqrt{\Delta'})} + e^{i\lambda_- z} C_+ \frac{2i\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{(m_a^2 - \sqrt{\Delta'})} \right|^2 \quad (10.1.28)$$

$$P_{\gamma \rightarrow a} = \frac{16\omega^6 (g_{\alpha\gamma} B_0)^6}{\Delta' (\Delta' - m_a^4)^2} |e^{i\lambda_+ z} - e^{i\lambda_- z}|^2, \quad (10.1.29)$$

que usando a definição de Δ' , torna-se

$$P_{\gamma \rightarrow a} = \frac{\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2}{\Delta'} |e^{i\lambda_+ z} - e^{i\lambda_- z}|^2. \quad (10.1.30)$$

Lembrando que (vide Apêndice H),

$$|e^{i\lambda_+ z} - e^{i\lambda_- z}|^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{(\lambda_+ - \lambda_-) z}{2} \right), \quad (10.1.31)$$

que juntamente com os autovalores obtidos em (10.1.22), $\lambda_+ - \lambda_- = \sqrt{\Delta'}/2\omega$, fornece

$$P_{\gamma \rightarrow a} = \frac{4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2}{\Delta'} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{\Delta'}}{4\omega} z \right), \quad (10.1.32)$$

com

$$\Delta' = 4\omega^2 \Delta, \quad \Delta = \frac{m_a^4}{4\omega^2} + (g_{\alpha\gamma} B_0)^2. \quad (10.1.33)$$

Esta é a probabilidade de conversão de um fóton em um áxion no vácuo, que depende diretamente da magnitude do quadrado do campo magnético externo, agente imprescindível no processo de conversão: sem campo magnético não ocorre mistura, implicando em probabilidade nula de conversão.

10.1.1 Oscilação axion-fóton em plasmas

Nesta seção, consideraremos a conversão fóton-áxion em plasmas, cuja presença é inserida através da 4-corrente na equação de movimento,

$$\square A^\alpha + g_{\alpha\gamma} (\partial_\rho a) \tilde{F}^{\rho\alpha} = J^\alpha. \quad (10.1.34)$$

Assim como na seção anterior, apenas a derivada temporal do áxion será considerada, o que nos dá

$$\square A^i + g_{\alpha\gamma} (\partial_0 a) \tilde{F}^{0i} = J^i. \quad (10.1.35)$$

A componente da densidade de corrente pode ser determinada a partir da força de Lorentz (nessa configuração não há contribuição do campo magnético):

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e (-\partial_t \mathbf{A}) \rightarrow v^i = \frac{e}{m_e} A^i. \quad (10.1.36)$$

Sendo $J^i = -en_0 v^i$, temos

$$J^i = -en_0 \frac{e}{m_e} A^i \rightarrow J^i = -\omega_p^2 A^i. \quad (10.1.37)$$

Com isso, a equação de movimento é reescrita como

$$\square A^i + g_{\alpha\gamma} (\partial_0 a) \tilde{F}^{0i} = -\omega_p^2 A^i, \quad (10.1.38)$$

ou, especificando a componente y ,

$$\square A_y - g_{\alpha\gamma} (\partial_t a) B_0 = -\omega_p^2 A_y, \quad (10.1.39)$$

Usando soluções de ondas planas para os campos, têm-se

$$(-\omega^2 - \partial_z^2 + m_a^2) a = i g_{a\gamma} \omega B_0 A_y, \quad (10.1.40)$$

$$-(\omega^2 + \partial_z^2) A_y + i g_{a\gamma} \omega B_0 a + \omega_p^2 A_y = 0. \quad (10.1.41)$$

O sistema acima conduz à equação matricial

$$\left((\omega^2 + \partial_z^2) \mathbf{I} + \begin{bmatrix} -\omega_p^2 & -i g_{a\gamma} \omega B_0 \\ i g_{a\gamma} \omega B_0 & -m_a^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A_y \\ a \end{bmatrix} = 0, \quad (10.1.42)$$

que usando $(\omega^2 + \partial_z^2) = (\omega + i\partial_z)(\omega - i\partial_z) \cong 2\omega(\omega + i\partial_z)$, resulta em

$$(i\partial_z \mathbf{I} + K) \begin{bmatrix} A_y \\ a \end{bmatrix} = 0. \quad (10.1.43)$$

onde K é uma matriz 2×2 definida como

$$K = \begin{bmatrix} \omega + \Delta_{pl} & -i\Delta_{a\gamma} \\ i\Delta_{a\gamma} & \omega + \Delta_a \end{bmatrix}. \quad (10.1.44)$$

com

$$\Delta_{pl} = -\frac{\omega_p^2}{2\omega}, \quad \Delta_{a\gamma} = \frac{1}{2} g_{a\gamma} B_0, \quad \Delta_a = -\frac{m_a^2}{2\omega}. \quad (10.1.45)$$

A matriz K atua como Hamiltoniano do sistema, com autovalores dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} (2\omega + \Delta_{pl} + \Delta_a) \pm \frac{1}{2} R, \quad (10.1.46)$$

onde

$$R = \sqrt{(2\omega + \Delta_{pl} + \Delta_a)^2 + 4\Delta_{a\gamma}^2 - 4(\omega + \Delta_{pl})(\omega + \Delta_a)}, \quad (10.1.47)$$

que pode ser simplificado à forma

$$\Delta_{osc} \equiv R = \sqrt{(\Delta_{pl} - \Delta_a)^2 + 4\Delta_{a\gamma}^2}. \quad (10.1.48)$$

Assim, os autovalores reduzem a

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(2\omega + \Delta_{pl} + \Delta_a) \pm \frac{1}{2}\Delta_{osc}. \quad (10.1.49)$$

Por comparação, podemos inferir que os resultados para a conversão fóton-áxion em plasmas podem ser mapeados no caso de conversão no vácuo através da troca

$$\frac{\sqrt{\Delta'}}{4\omega} \rightarrow \frac{\Delta_{osc}}{2}, \quad \frac{1}{2}g_{a\gamma}B_0 \rightarrow \Delta_{a\gamma} \quad \text{e} \quad m_a^2 \rightarrow \Delta_a - \Delta_{pl}. \quad (10.1.50)$$

Com isso, a probabilidade de conversão em plasmas passa a ser escrita na forma

$$P_{\gamma \rightarrow a} = \frac{4\Delta_{a\gamma}^2}{\Delta_{osc}^2} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{osc}}{2} z \right). \quad (10.1.51)$$

Este é o resultado comumente considerado quando a conversão áxion-fóton ocorre em plasma homogêneo, como de fato é realizado em experimentos de heliocópios [290]. Esta expressão é também considerada em estudos de escurecimento de supernovas [281]. É importante comentar também que para comprimentos múltiplos de $l_{osc} = 2\pi/\Delta_{osc}$, a probabilidade de conversão 10.1.51 se anula, o que estabelece l_{osc} como o comprimento de oscilação áxion-fóton.

A quantidade Δ_{osc} , presente na probabilidade de conversão (10.1.51), pode ser reescrita como a diferença entre os momentos do fóton k_{γ} , e do áxion, k_a , definida como

$$q = k_{\gamma} - k_a, \quad (10.1.52)$$

sendo

$$k_a = \sqrt{\omega^2 - m_a^2}, \quad k_{\gamma} = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}. \quad (10.1.53)$$

As relações acima nada mais são que as relações de dispersão para o áxion e fóton, repectivamente. Para pequenos m_a e ω_p , ou seja, $m_a \ll \omega$ e $\omega_p \ll \omega$, temos:

$$k_a \approx \omega - \frac{m_a^2}{2\omega}, \quad k_{\gamma} \approx \omega - \frac{\omega_p^2}{2\omega}, \quad (10.1.54)$$

o que nos leva à

$$q \approx -\frac{\omega_p^2}{2\omega} + \frac{m_a^2}{2\omega}. \quad (10.1.55)$$

A expressão acima é de fato um dos termos presentes na Eq. (10.1.48),

$$\Delta_{osc} = \sqrt{\left(-\frac{\omega_p^2}{2\omega} + \frac{m_a^2}{2\omega}\right)^2 + 4\Delta_{a\gamma}^2} \rightarrow \Delta_{osc} = \sqrt{q^2 + 4\Delta_{a\gamma}^2}. \quad (10.1.56)$$

Com isso, a probabilidade de conversão (10.1.51) é reescrita na forma

$$P_{\gamma \rightarrow a} = \frac{4\Delta_{a\gamma}^2}{q^2 + 4\Delta_{a\gamma}^2} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{q^2 + 4\Delta_{a\gamma}^2}}{2} z \right), \quad (10.1.57)$$

onde $\Delta_{a\gamma} = g_{a\gamma} B_0 / 2$.

10.1.2 Decoerência associada à massa do áxion na conversão no vácuo

Uma das frentes experimentais que visam detectar a existência do áxion é constituída pelos helioscópios, dispositivos desenvolvidos para detectar áxions produzidos no interior do Sol. Nesses experimentos, os áxions de interesse são, em geral, aqueles gerados no núcleo solar pelo efeito Primakoff, processo no qual fótons térmicos do plasma são convertidos em áxions na presença dos campos eletromagnéticos do meio. A ideia central é que o fluxo de áxions solares, ao atravessar um dispositivo submetido a um campo magnético intenso, possa se reconverter em fótons, produzindo um excesso de raios X detectável na extremidade do aparato experimental.

Neste caso, o processo de interesse é a conversão áxion-fóton, cuja probabilidade é denotada por $P_{a \rightarrow \gamma}$. Esse processo corresponde ao inverso daquele considerado anteriormente, isto é, a conversão $\gamma \rightarrow a$. No regime ideal em que a evolução é descrita por um Hamiltoniano hermitiano, como pode ser observado na Eq. (10.1.44), sem absorção ou efeitos dissipativos relevantes, as probabilidades dos dois processos são iguais,

$$P_{\gamma \rightarrow a} = P_{a \rightarrow \gamma}. \quad (10.1.58)$$

Apesar da intensidade do campo magnético empregado em helioscópios, a pequenez do acoplamento $g_{a\gamma}$ faz com que a conversão ocorra, em geral, no regime de mistura fraca, no qual $\Delta_{a\gamma} \ll 1$. Nesse limite, a probabilidade de conversão (10.1.57), tomada ao longo de uma distância L , pode ser escrita como

$$P_{\gamma \rightarrow a} = \frac{g_{a\gamma}^2 B_0^2}{q^2} \sin^2 \left(\frac{qL}{2} \right), \quad (10.1.59)$$

ou, de forma equivalente,

$$P_{\gamma \rightarrow a} = \frac{g_{a\gamma}^2 B_0^2 L^2}{4} \left[\frac{\sin(qL/2)}{qL/2} \right]^2. \quad (10.1.60)$$

No vácuo, em que $\omega_p^2 = 0$, a diferença de momento entre o estado fotônico e o estado axiônico torna-se

$$q \simeq \frac{m_a^2}{2\omega}. \quad (10.1.61)$$

Para áxions suficientemente leves ou para comprimentos de propagação tais que $qL \ll 1$ ($m_a^2 \ll$

$2\omega/L$), a conversão ocorre de forma coerente ao longo de todo o comprimento do magneto¹. Nesse caso,

$$\sin\left(\frac{qL}{2}\right) \simeq \frac{qL}{2}, \quad (10.1.62)$$

e a probabilidade reduz-se a

$$P_{\gamma \rightarrow a} \simeq \frac{g_{a\gamma}^2 B_0^2}{q^2} \left(\frac{qL}{2}\right)^2, \quad (10.1.63)$$

isto é,

$$P_{\gamma \rightarrow a} \simeq \frac{g_{a\gamma}^2 B_0^2 L^2}{4}. \quad (10.1.64)$$

Portanto, no limite coerente, a probabilidade escala com o quadrado do produto entre o campo magnético e o comprimento da região de conversão, tornando-se independente da massa do áxion.

Por outro lado, para massas maiores, a diferença de momento q cresce e o sistema pode entrar no regime $qL \gg 1$. Nesse caso, a fase relativa entre o estado axiônico e o estado fotônico varia significativamente ao longo da região de conversão, produzindo perda de coerência. A probabilidade continua sendo dada por

$$P_{\gamma \rightarrow a} = \frac{g_{a\gamma}^2 B_0^2}{q^2} \sin^2\left(\frac{qL}{2}\right). \quad (10.1.65)$$

Quando a fase oscila rapidamente, pode-se considerar o valor médio $\langle \sin^2(qL/2) \rangle = 1/2$, obtendo

$$P_{\gamma \rightarrow a} \simeq \frac{1}{2} \frac{g_{a\gamma}^2 B_0^2}{q^2}, \quad \rightarrow \quad P_{\gamma \rightarrow a} \simeq \frac{2\omega^2 g_{a\gamma}^2 B_0^2}{m_a^4}, \quad (10.1.66)$$

onde usamos $q = m_a^2/2\omega$. Assim, no regime incoerente, a probabilidade de conversão passa a depender de m_a^{-4} . Esse comportamento suprime rapidamente a conversão à medida que a massa do áxion aumenta. Tal supressão é usualmente associada à perda de coerência da conversão áxion-fóton no vácuo e representa uma limitação importante dos helioscópios operando sem meio material, pois reduz a sensibilidade experimental a áxions mais massivos.

Uma estratégia utilizada em helioscópios para recuperar a coerência da conversão consiste em preencher a região do magneto com um meio material, como um gás de baixa densidade. Nesse meio, o fóton adquire uma massa efetiva m_γ , que pode ser associada à frequência de plasma,

$$m_\gamma^2 \equiv \omega_p^2, \quad \omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}. \quad (10.1.67)$$

A ideia é ajustar a densidade eletrônica do meio de modo que a massa efetiva do fóton se aproxime da massa do áxion.

Quando a condição $\omega_p^2 = m_a^2$ é implementada na Eq. (10.1.55), obtém-se $q = 0$, restaurando-se a

¹De fato, a quantidade $qz = (k_a - k_\gamma)z$ representa a fase relativa acumulada entre os dois estados (áxion e fóton) ao longo de uma distância z do magneto. Quando $k_a = k_\gamma$, decorre $q = 0$, de modo que cada ponto z ao longo do magneto contribui exatamente com a mesma fase. Dizemos que neste cenário ocorre conversão *coerente*. O mesmo ocorre se pudermos assumir $qL \ll 1$, sendo válida a aproximação $\sin(qL/2) \simeq qL/2$, quando a fase acumulada permanece pequena ao longo de todo o percurso, isto é, quando L é menor que o comprimento de coerência $\ell_{\text{coer}} \sim q^{-1}$.

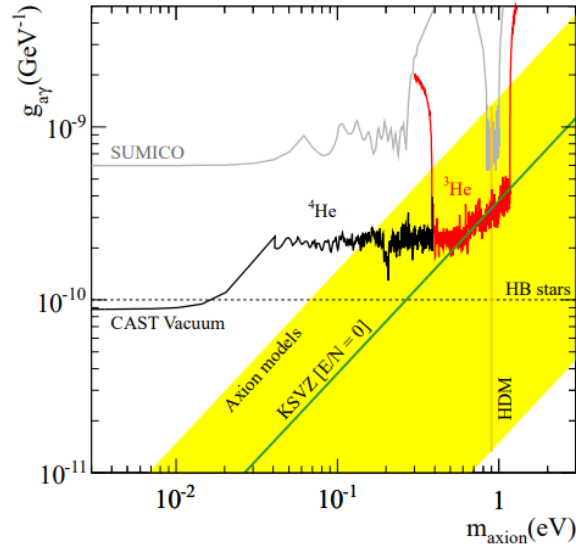


Figura 10.2: Região de exclusão no plano $g_{a\gamma} \times m_a$ obtida pelo experimento CAST com *buffer gas*. A introdução de ^3He permitiu restaurar a coerência da conversão áxion-fóton para massas na faixa sub-eV/eV, estendendo a sensibilidade do helioscópio para além do regime de operação em vácuo. Figura retirada da Ref. [290].

coerência da conversão para aquele valor de massa. Para visualizar esse ponto, retomemos a expressão geral (10.1.51), reproduzida a seguir:

$$P_{\gamma \rightarrow a} = \frac{4\Delta_{a\gamma}^2}{\Delta_{\text{osc}}^2} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{\text{osc}}}{2} L \right), \quad (10.1.68)$$

com

$$\Delta_{\text{osc}} = \sqrt{q^2 + 4\Delta_{a\gamma}^2}. \quad (10.1.69)$$

Na condição ressonante, $q = 0$, tem-se

$$\Delta_{\text{osc}} = 2\Delta_{a\gamma}, \quad (10.1.70)$$

e, portanto,

$$P_{\gamma \rightarrow a} = \sin^2 (\Delta_{a\gamma} L). \quad (10.1.71)$$

Como $\Delta_{a\gamma} = g_{a\gamma} B_0 / 2$, no regime de acoplamento fraco obtém-se

$$P_{\gamma \rightarrow a} \simeq \Delta_{a\gamma}^2 L^2 = \frac{g_{a\gamma}^2 B_0^2 L^2}{4}. \quad (10.1.72)$$

Portanto, ao ajustar a massa efetiva do fóton ($m_\gamma \simeq \omega_p$) no meio de forma que $m_\gamma = m_a$, recupera-se a condição de coerência e a probabilidade volta a assumir a forma do limite coerente. Esse procedimento permite estender a sensibilidade dos helioscópios para massas maiores do que aquelas acessíveis na operação em vácuo. Por exemplo, a operação do CAST com gás tampão, ou *buffer gas* (introdução de ^4He e ^3He), marcou um avanço importante dos helioscópios, pois permitiu restaurar a coerência da conversão áxion-fóton para massas na escala sub-eV/eV e fez com que os limites experimentais entrassem

na região dos modelos de áxions da QCD [288–290]. Estes resultados estão ilustrados no diagrama de exclusão da Fig. 10.2.

10.2 Conversão fóton-áxion em plasma quiral com AHE e CME

Nesta seção investigamos conversão fóton-áxion em um contexto quiral, onde o palco do processo é um plasma dotado de corrente magnética quiral e corrente Hall anômala. Para este propósito, consideraremos a lagrangiana da eletrodinâmica de áxion adicionada do termo de CFJ:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - g_{\alpha\gamma}aF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(K_{AF})^\mu A^\nu F^{\alpha\beta} - A_\mu J^\mu + \frac{1}{2}(\partial^\mu a)(\partial_\mu a) - \frac{1}{2}m^2 a^2.$$

Tal lagrangiana conduz à seguinte equação de onda para o campo A^α ,

$$\square A^\alpha + g_{\alpha\gamma}(\partial_\rho a)\tilde{F}^{\rho\alpha} + \epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}(k_{AF})_\beta \partial_\lambda A_\rho = J^\alpha, \quad (10.2.1)$$

que para $\alpha = i$, escreve-se

$$\square A^i + g_{\alpha\gamma}(\partial_0 a)\tilde{F}^{0i} + (k_{AF})_0(\epsilon_{ijk}\partial_j A^k) + \epsilon_{ijk}(k_{AF})^j \partial_0 A^k = J^\alpha. \quad (10.2.2)$$

Vetorialmente e na presença de campo magnético externo $\mathbf{B}_0$, a equação acima é escrita na forma

$$\square \mathbf{A} - g_{\alpha\gamma}(\partial_t a)\mathbf{B}_0 + (k_{AF})_0(\mathbf{B} + \mathbf{B}_0) - (\mathbf{k}_{AF} \times \mathbf{E}) = \mathbf{J}, \quad (10.2.3)$$

onde usamos $\mathbf{E} = -d\mathbf{A}/dt$. Note que o termo tipo-tempo na equação acima contém o termo $(k_{AF})_0 \mathbf{B}_0$, desacoplado da mistura, ou seja, não dependente de nenhum dos dois campos (a, A) . Este fato representa um elemento de dificuldade para a montagem da mistura, que será melhor tratada na seção seguinte para a conversão na presença de corrente magnética quiral.

10.2.1 Conversão fóton-áxion em plasma na presença de AHE

Nos concentraremos agora no setor tipo-espaco da Eq. (10.2.2), adotando $(k_{AF})_0 = 0$. Examinando a conversão fóton-áxion em plasma quiral dotado de condutividade Hall anômala $\mathbf{k}_{AF}$, cuja equação de movimento para o fóton é

$$\square A^i + g_{\alpha\gamma}(\partial_0 a)\tilde{F}^{0i} + \epsilon_{ijk}(k_{AF})^j \partial_0 A^k = J^\alpha. \quad (10.2.4)$$

Tomando a Eq. (10.2.4) juntamente com a equação de movimento para o áxion, podemos montar o sistema

$$\square A^i - g_{\alpha\gamma} (\partial_0 a) B^i + \epsilon_{ijk} (k_{AF})^j \partial_0 A^k + \omega_p^2 A^i = 0, \quad (10.2.5)$$

$$(\partial_\rho \partial^\rho + m_a^2) a = -g_{a\gamma} B_0^i \frac{\partial A^i}{\partial t}. \quad (10.2.6)$$

Explicitando todas as componentes, escreve-se

$$-(\omega^2 + \partial_z^2) A_x + i g_{\alpha\gamma} \omega B_{0x} a - i \omega (k_{AF})_y A_z + i \omega (k_{AF})_z A_y + \omega_p^2 A_x = 0, \quad (10.2.7)$$

$$-(\omega^2 + \partial_z^2) A_y + i g_{\alpha\gamma} \omega B_{0y} a + i \omega (k_{AF})_x A_z - i \omega (k_{AF})_z A_x + \omega_p^2 A_y = 0, \quad (10.2.8)$$

$$-(\omega^2 + \partial_z^2) A_z + i g_{\alpha\gamma} \omega B_{0z} a - i \omega (k_{AF})_x A_y + i \omega (k_{AF})_y A_x + \omega_p^2 A_z = 0, \quad (10.2.9)$$

$$(-\omega^2 - \partial_z^2 + m_a^2) a = i g_{a\gamma} \omega (B_{0x} A_x + B_{0y} A_y + B_{0z} A_z). \quad (10.2.10)$$

Observe no sistema acima que as componentes do vetor quiral misturam-se com as componentes do potencial vetor. Além disso, lembremos que apenas as componentes A^i longitudinais ao campo magnético externo contribuem para a conversão, uma exigência do acoplamento $a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$. Adotaremos então que a propagação do fóton ocorra na direção z , com componente transversais A_x e A_y acoplando-se ao campo externo $B_0 = (B_{0x}, B_{0y})$. Com isso, o sistema acima torna-se

$$(\omega^2 + \partial_z^2) A_x - i g_{\alpha\gamma} \omega B_{0x} a - i \omega |\mathbf{k}_{AF}| A_y - \omega_p^2 A_x = 0, \quad (10.2.11)$$

$$(\omega^2 + \partial_z^2) A_y - i g_{\alpha\gamma} \omega B_{0y} a + i \omega |\mathbf{k}_{AF}| A_x - \omega_p^2 A_y = 0, \quad (10.2.12)$$

$$(\omega^2 + \partial_z^2 - m_a^2) a + i g_{a\gamma} \omega (B_{0x} A_x + B_{0y} A_y) = 0, \quad (10.2.13)$$

onde adotamos $(k_{AF})_z = |\mathbf{k}_{AF}|$. Escrevendo na forma matricial e usando a aproximação $(\omega^2 + \partial_z^2) = (\omega + i\partial_z)(\omega - i\partial_z) \cong 2\omega(\omega + i\partial_z)$, obtém-se a seguinte equação do tipo Schrödinger:

$$\left(i\partial_z \mathbf{I} + \begin{bmatrix} \omega - \frac{\omega_p^2}{2\omega} & -i\frac{|\mathbf{k}_{AF}|}{2} & -i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_{0x} \\ i\frac{|\mathbf{k}_{AF}|}{2} & \omega - \frac{\omega_p^2}{2\omega} & -i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_{0y} \\ i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_{0x} & i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_{0y} & \omega - \frac{m_a^2}{2\omega} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ a \end{bmatrix} = 0. \quad (10.2.14)$$

A matriz 3×3 acima exerce papel de hamiltoniano do sistema e deve fornecer três autovalores que possibilitam a diagonalização do sistema. No entanto, a determinação de tais autovalores não é uma tarefa simples, uma vez que são gerados a partir de uma equação de grau três. Mostraremos a seguir que esta dificuldade pode ser contornada realizando parametrizações circulares para o campo $\mathbf{A}$, o que conduzirá a uma decomposição em dois sistemas 2×2 , associados às misturas entre áxions e fótons com polarizações opostas.

10.2.2 Oscilações entre áxion e fótons circularmente polarizados

As componentes A_x e A_y do potencial vetor presentes nas Eqs. (10.2.11), (10.2.12) e (10.2.13), podem ser relacionadas às seguintes redefinições

$$A_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x + iA_y), \quad A_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x - iA_y), \quad (10.2.15)$$

que representam, como bem sabemos, fótons de polarização RCP e LCP, respectivamente. Com isso, pode-se escrever

$$A_x = \frac{A_R + A_L}{\sqrt{2}}, \quad A_y = \frac{A_R - A_L}{\sqrt{2}i}. \quad (10.2.16)$$

Além disso, pode-se também introduzir uma parametrização análoga para o campo magnético externo,

$$B_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (B_{0x} \pm iB_{0y}), \quad (10.2.17)$$

de forma que

$$B_{0x} = \frac{B_+ + B_-}{\sqrt{2}}, \quad B_{0y} = \frac{B_+ - B_-}{\sqrt{2}i}. \quad (10.2.18)$$

Note que, embora o campo externo não seja de fato o campo circularmente polarizado da onda eletromagnética (fóton), a definição acima se faz necessária uma vez que as parametrizações em (10.2.15) redefinam as bases do sistema, requerendo que vetores fixos nos espaços sejam projetados na nova base.

Com isso, reescrevemos as Eqs. (10.2.11), (10.2.12) e (10.2.13) como

$$-(\omega^2 + \partial_z^2) \left(\frac{A_R + A_L}{\sqrt{2}} \right) + ig_{\alpha\gamma}\omega \left(\frac{B_+ + B_-}{\sqrt{2}} \right) a + i\omega|\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}| \left(\frac{A_R - A_L}{\sqrt{2}i} \right) + \omega_p^2 \left(\frac{A_R + A_L}{\sqrt{2}} \right) = 0, \quad (10.2.19)$$

$$-(\omega^2 + \partial_z^2) \left(\frac{A_R - A_L}{\sqrt{2}i} \right) + ig_{\alpha\gamma}\omega \left(\frac{B_+ - B_-}{\sqrt{2}i} \right) a - i\omega|\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}| \left(\frac{A_R + A_L}{\sqrt{2}} \right) + \omega_p^2 \left(\frac{A_R - A_L}{\sqrt{2}i} \right) = 0, \quad (10.2.20)$$

$$(-\omega^2 - \partial_z^2 + m_a^2) a - ig_{\alpha\gamma}\omega B_+ A_L - ig_{\alpha\gamma}\omega B_- A_R = 0. \quad (10.2.21)$$

Somando e subtraindo as duas primeiras, obtém-se o sistema

$$-(\omega^2 + \partial_z^2 - \omega|\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}| - \omega_p^2) A_R + ig_{\alpha\gamma}\omega B_+ a = 0, \quad (10.2.22)$$

$$-(\omega^2 + \partial_z^2 + \omega|\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}| - \omega_p^2) A_L + ig_{\alpha\gamma}\omega B_- a = 0, \quad (10.2.23)$$

$$(-\omega^2 - \partial_z^2 + m_a^2) a - ig_{\alpha\gamma}\omega B_+ A_L - ig_{\alpha\gamma}\omega B_- A_R = 0. \quad (10.2.24)$$

Matricialmente, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} -(\omega^2 + \partial_z^2 - \omega|\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}| - \omega_p^2) & 0 & ig_{\alpha\gamma}\omega B_+ \\ 0 & -(\omega^2 + \partial_z^2 + \omega|\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}| - \omega_p^2) & ig_{\alpha\gamma}\omega B_- \\ -ig_{\alpha\gamma}\omega B_- & -ig_{\alpha\gamma}\omega B_+ & -(\omega^2 + \partial_z^2 - m_a^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_L \\ a \end{bmatrix} = 0. \quad (10.2.25)$$

A equação anterior revela que as polarizações A_R e A_L misturam-se com o áxion de maneira independente, uma vez que o bloco superior 2×2 é diagonal. Isto permite então propormos o estudo da conversão entre fótons, RCP e LCP, em áxions, considerando separadamente dois sistemas 2×2 . Por exemplo, para a **conversão entre fóton RCP e áxion**, temos

$$\begin{bmatrix} -(\omega^2 + \partial_z^2 - \omega|\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}| - \omega_p^2) & ig_{a\gamma}\omega B_+ \\ -ig_{a\gamma}\omega B_- & -(\omega^2 + \partial_z^2 - m_a^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ a \end{bmatrix} = 0. \quad (10.2.26)$$

Já para **conversão entre fótons LCP e áxion**, teremos

$$\begin{bmatrix} -(\omega^2 + \partial_z^2 + \omega|\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}| - \omega_p^2) & ig_{a\gamma}\omega B_- \\ -ig_{a\gamma}\omega B_+ & -(\omega^2 + \partial_z^2 - m_a^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_L \\ a \end{bmatrix} = 0. \quad (10.2.27)$$

Com isso, decomparamos nosso problema em dois sistemas de dois níveis, o que nos leva a uma abordagem muito menos complexa que o sistema 3×3 obtido inicialmente na Eq. (10.2.14).

Perceba que a decomposição em polarizações circulares é perfeitamente cabível no presente contexto, uma vez que a presença do fator quiral $|\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}|$ atribui um caráter birrefringente-circular ao meio onde se dá a oscilação áxion-fóton. Deste modo, fótons de polarizações RCP e LCP, que possuem relações de dispersão distintas, podem individualmente se converter em áxions (ou vice versa), com probabilidades diferentes, sendo essa uma das assinaturas da natureza quiral do sistema.

10.2.2.1 Probabilidade de conversão $\gamma_{R,L} \rightarrow a$

Podemos congregiar as Eqs. (10.2.26) e (10.2.27) no seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} (\omega^2 + \partial_z^2 \mp \omega|\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}| - \omega_p^2) & -ig_{a\gamma}\omega B_{\pm} \\ ig_{a\gamma}\omega B_{\mp} & (\omega^2 + \partial_z^2 - m_a^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{R,L} \\ a \end{bmatrix} = 0. \quad (10.2.28)$$

Seguindo o procedimento já desenvolvido neste capítulo, o sistema acima conduz à equação

$$\left(i\partial_z \mathbf{I} + \tilde{K}_{\pm} \right) \begin{bmatrix} A_{R,L} \\ a \end{bmatrix}, \quad (10.2.29)$$

onde $\tilde{K}_{\pm}$ é "hamiltoniano" do sistema, dado por

$$\tilde{K}_{\pm} = \begin{bmatrix} \omega + \bar{\Delta}_{pl}^{(\pm)} & -i\bar{\Delta}_{a\gamma}^{(\pm)} \\ i\bar{\Delta}_{a\gamma}^{(\mp)} & \omega + \Delta_a \end{bmatrix}, \quad (10.2.30)$$

sendo

$$\bar{\Delta}_{pl}^{(\pm)} = -\frac{(\pm\omega|\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}| + \omega_p^2)}{2\omega}, \quad \bar{\Delta}_{a\gamma}^{(\pm)} = \frac{1}{2}g_{a\gamma}B_{\pm}, \quad \Delta_a = -\frac{m_a^2}{2\omega}. \quad (10.2.31)$$

Na Eq. (10.2.30), o rótulo $\pm$ denota o hamiltoniano para a conversão de fóton RCP/LCP, ou seja, $\tilde{K}_+$ para fóton RCP e $\tilde{K}_-$ para fóton LCP.

Por simplificação, assumiremos que o campo magnético externo esteja alinhado ao eixo y , reduzindo a definição (10.2.17) a simplesmente

$$B_{\pm} = \pm i \frac{1}{\sqrt{2}} B_{oy}. \quad (10.2.32)$$

Com isso, a matriz $K_{\pm}$ pode ser reescrita como

$$\tilde{K}_{\pm} = \begin{bmatrix} \omega + \bar{\Delta}_{pl}^{(\pm)} & \bar{\Delta}_{a\gamma}^{\pm} \\ \bar{\Delta}_{a\gamma}^{\pm} & \omega + \Delta_a \end{bmatrix}, \quad (10.2.33)$$

onde o i na diagonal secundária da matriz (10.2.30) foi multiplicado pela definição (10.2.32), passando a valer

$$\bar{\Delta}_{a\gamma}^{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{8}} g_{a\gamma} B_{oy}. \quad (10.2.34)$$

A forma do hamiltoniano efetivo $K_{\pm}$ é similar ao do caso usual, mostrado na Eq. (10.1.44). Diante disto, podemos inferir que os autovalores do sistema e, conseqüentemente, as probabilidades de conversão, podem ser então escritas no mesmo formato do caso usual, adotando os quantidades redefinidas em (10.2.31) e (10.2.34).

Considerando K_{+} na equação de onda (10.2.29), a probabilidade de conversão $\gamma_{\text{RCP}} \rightarrow a$ fornecida é

$$P_{\gamma_{\text{RCP}} \rightarrow a} = \frac{4\bar{\Delta}_{a\gamma}^2}{(\bar{\Delta}_{osc}^+)^2} \sin^2 \left(\frac{\bar{\Delta}_{osc}^+}{2} z \right), \quad (10.2.35)$$

sendo

$$(\bar{\Delta}_{osc}^+)^2 = (\bar{\Delta}_{pl}^+ - \Delta_a)^2 + 4\bar{\Delta}_{a\gamma}^2, \quad \bar{\Delta}_{a\gamma}^2 \equiv (\bar{\Delta}_{a\gamma}^{\pm})^2. \quad (10.2.36)$$

Por outro lado, tomando K_{-} na equação de onda (10.2.29), a probabilidade de conversão $\gamma_{\text{LCP}} \rightarrow a$ obtida é

$$P_{\gamma_{\text{LCP}} \rightarrow a} = \frac{4\bar{\Delta}_{a\gamma}^2}{(\bar{\Delta}_{osc}^-)^2} \sin^2 \left(\frac{\bar{\Delta}_{osc}^-}{2} z \right), \quad (10.2.37)$$

onde

$$(\bar{\Delta}_{osc}^-)^2 = (\bar{\Delta}_{pl}^- - \Delta_a)^2 + 4\bar{\Delta}_{a\gamma}^2. \quad (10.2.38)$$

As Eqs. (10.2.35) e (10.2.37) representam as probabilidades de fótons circularmente polarizados à direita e esquerda se converterem em áxions em plasma quiral dotado de condutividade Hall anômala, respectivamente. De fato, as Eq. (10.2.35) e (10.2.37) revelam que quando oscilações fóton-áxion ocorrem neste contexto quiral, fótons com polarizações circulares opostas convertem-se em áxions com probabilidades distintas. Tais probabilidades diferem essencialmente pelas quantidades $\bar{\Delta}_{osc}^+$ e $\bar{\Delta}_{osc}^-$, que usando (10.2.31) e (10.2.34), podem ser explicitamente escritas como

$$(\bar{\Delta}_{osc}^{\pm})^2 = \left(-\frac{(\pm\omega|\mathbf{k}_{\text{AF}}| + \omega_p^2)}{2\omega} + \frac{m_a^2}{2\omega} \right)^2 + \frac{g_{a\gamma}^2 B_{0y}^2}{2}. \quad (10.2.39)$$

A partir desta última, percebe-se que o termo quiral $+\omega|\mathbf{k}_{\text{AF}}|$, pertencente à conversão $\gamma_{\text{RCP}} \rightarrow a$, exerce

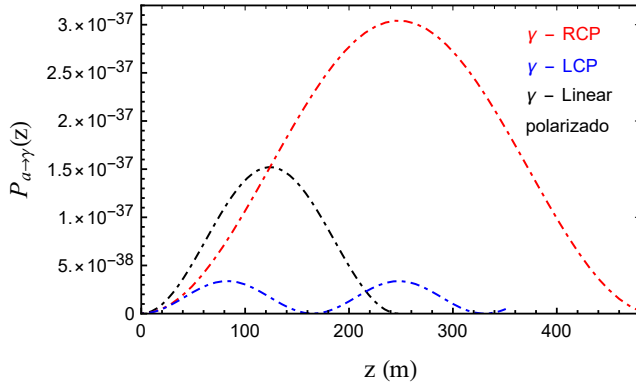


Figura 10.3: Comparação entre probabilidades de conversão no vácuo ($\omega_p = 0$) - caso AHE. Linha preta: gráfico da probabilidade de conversão (10.1.51). Linha vermelha: gráfico probabilidade de conversão $\gamma_{RCP} \rightarrow a$, dada em (10.2.35). Linha azul: gráfico probabilidade de conversão $\gamma_{LCP} \rightarrow a$, dada em (10.2.37). Aqui, usamos $B = 10^{-6}\text{G}$, $g_{a\gamma} = 10^{-10}\text{eV}$, $m_a = 10^{-6}\text{eV}$, $\omega = 100m_a$ e $|\mathbf{k}_{AF}| = 5 \times 10^{-9}\text{eV}$.

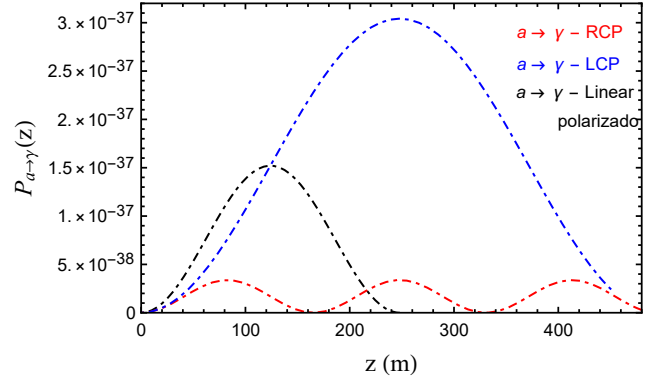


Figura 10.4: Comparação entre probabilidades de conversão no vácuo ($\omega_p = 0$) - caso CME. Linha preta: gráfico da probabilidade de conversão (10.1.51). Linha vermelha: gráfico probabilidade de conversão $\gamma_{RCP} \rightarrow a$, dada em (10.2.35). Linha azul: gráfico probabilidade de conversão $\gamma_{LCP} \rightarrow a$, dada em (10.2.37). Aqui, usamos $B = 10^{-6}\text{G}$, $g_{a\gamma} = 10^{-10}\text{eV}$, $m_a = 10^{-6}\text{eV}$, $\omega = 100m_a$ e $V_0 = 5 \times 10^{-9}\text{eV}$.

um papel análogo à frequência de plasma (massa do fóton), que pode entrar em ressonância com a massa do áxion em situações em que $\omega_p = 0$. Nesta situação, a expressão (10.2.39) reduz-se a forma

$$(\bar{\Delta}_{osc}^{\pm})^2 = \left(\mp \frac{|\mathbf{k}_{AF}|}{2} + \frac{m_a^2}{2\omega} \right)^2 + \frac{g_{a\gamma}^2 B_{0y}^2}{2}, \quad (10.2.40)$$

a partir da qual observa-se a possibilidade de ressonância na conversão $\gamma_{RCP} \rightarrow a$ (superescrito +), que ocorre quando

$$|\mathbf{k}_{AF}| = m_a^2/\omega. \quad (10.2.41)$$

Por outro lado, percebe-se que a conversão de áxions em fóton LCP não exibe a mesma possibilidade, uma vez que o termo quiral possui o mesmo sinal que termo de massa em (10.2.40).

Sabemos que a ressonância com o termo de massa do áxion conduz ao crescimento numérico da probabilidade, removendo problemas de decoerência para altos valores de massa, como discutido na Seção 10.1.2. Deste modo, constata-se que, no presente contexto quiral, a conversão $\gamma_{RCP} \rightarrow a$ ocorre com maior probabilidade em comparação à conversão $\gamma_{LCP} \rightarrow a$, como ilustrado na Fig. 10.3, que compara as probabilidades de conversão associadas a fótons RCP e LCP na ausência de plasma. Em outras palavras, diante do fato de apenas fótons RCP ostentarem ressonância com o áxion na ausência de plasma, revela-se que a conversão $\gamma_{RCP} \rightarrow a$ é favorecida (maior probabilidade), enquanto a conversão $\gamma_{LCP} \rightarrow a$ é suprimida (menor probabilidade).

10.3 Conversão fóton-áxion na presença de CME

Abordaremos agora a conversão fóton-áxion em plasma quiral dotado de corrente magnética quiral. Para isso, retornemos à equação de movimento (10.2.2), que é

$$\square A^i + g_{\alpha\gamma} (\partial_0 a) \tilde{F}^{0i} + (k_{AF})_0 (\epsilon_{ijk} \partial_j A^k) = J^\alpha, \quad (10.3.1)$$

onde já implementamos $k_{AF} = 0$. Vetorialmente, na presença de campo magnético externo $\mathbf{B}_0$ a equação acima é expressa na forma

$$\square \mathbf{A} - g_{\alpha\gamma} (\partial_t a) \mathbf{B}_0 + (k_{AF})_0 (\mathbf{B} + \mathbf{B}_0) = \mathbf{J}. \quad (10.3.2)$$

O terceiro termo na equação acima se desacopla da mistura, gerando $(k_{AF})_0 \mathbf{B}_0$, ou seja, não depende de nenhum dos dois campos da mistura (a , A). No espaço das frequências, e usando $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, escreve-se

$$-(\omega^2 + \partial_z^2) \mathbf{A} + i g_{\alpha\gamma} \omega a \mathbf{B}_0 + (k_{AF})_0 (\nabla \times \mathbf{A}) + (k_{AF})_0 \mathbf{B}_0 = \mathbf{J}. \quad (10.3.3)$$

Propondo uma transformação no espaço da frequência,

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} + \alpha, \quad (10.3.4)$$

a equação de movimento torna-se

$$-(\omega^2 + \partial_z^2) \bar{\mathbf{A}} - (\omega^2 + \partial_z^2) \alpha + i g_{\alpha\gamma} \omega a \mathbf{B}_0 + (k_{AF})_0 (\nabla \times \mathbf{A}) + (k_{AF})_0 \mathbf{B}_0 = \mathbf{J}. \quad (10.3.5)$$

O termo $(k_{AF})_0 \mathbf{B}_0$ é absorvido quando impomos

$$-(\omega^2 + \partial_z^2) \alpha = -(k_{AF})_0 \mathbf{B}_0, \quad (10.3.6)$$

que para α constante no espaço, conduz à condição

$$\alpha = \frac{(k_{AF})_0 \mathbf{B}_0}{\omega^2}. \quad (10.3.7)$$

Com isso, usando $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} + (k_{AF})_0 \mathbf{B}_0 / \omega^2$, a equação de onda (10.3.3) torna-se simplesmente

$$-(\omega^2 + \partial_z^2) \bar{\mathbf{A}} + i g_{\alpha\gamma} \omega a \mathbf{B}_0 + (k_{AF})_0 (\nabla \times \bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{J}, \quad (10.3.8)$$

apresentando-se sem nenhum termo desacoplado da mistura, com termos envolvendo o campo pseudo-escalar a e o campo $\bar{\mathbf{A}}$. Em notação indicial e definindo $A \equiv \bar{A}$, temos

$$-(\omega^2 + \partial^2) A^i + i g_{\alpha\gamma} \omega a B_0^i + (k_{AF})_0 (\epsilon_{ijk} \partial_j A^k) = J^i. \quad (10.3.9)$$

que juntamente com a equação de movimento para o áxion formam o sistema

$$\square A_x + ig_{\alpha\gamma}\omega B_{0x}a + (k_{AF})_0 (\partial_y A_z - \partial_z A_y) + \omega_p^2 A_x = 0, \quad (10.3.10)$$

$$\square A_y + ig_{\alpha\gamma}\omega B_{0y}a + (k_{AF})_0 (-\partial_x A_z + \partial_z A_x) + \omega_p^2 A_y = 0, \quad (10.3.11)$$

$$\square A_z + ig_{\alpha\gamma}\omega B_{0z}a + (k_{AF})_0 (\partial_x A_y - \partial_y A_x) + \omega_p^2 A_z = 0, \quad (10.3.12)$$

$$(-\omega^2 - \partial^2 + m_a^2) a = ig_{\alpha\gamma}\omega (B_{0x}A_x + B_{0y}A_y + B_{0z}A_z). \quad (10.3.13)$$

escrito em termos das componentes do vetor $\mathbf{A}$. Assumindo propagação transversal ao longo da direção z , com $A = (A_x, A_y, 0)$, o sistema acima reduz-se a

$$-(\omega^2 + \partial_z^2) A_x + ig_{\alpha\gamma}\omega B_{0x}a - (k_{AF})_0 \partial_z A_y + \omega_p^2 A_x = 0, \quad (10.3.14)$$

$$-(\omega^2 + \partial_z^2) A_y + ig_{\alpha\gamma}\omega B_{0y}a + (k_{AF})_0 \partial_z A_x + \omega_p^2 A_y = 0, \quad (10.3.15)$$

$$(-\omega^2 - \partial_z^2 + m_a^2) a = ig_{\alpha\gamma}\omega (B_{0x}A_x + B_{0y}A_y), \quad (10.3.16)$$

onde mantivemos acima, apenas as equações que se misturam. Neste momento, lançamos mão novamente da parametrização circular (10.2.15),

$$A_R = \frac{A_x + iA_y}{\sqrt{2}}, \quad A_L = \frac{A_x - iA_y}{\sqrt{2}}, \quad (10.3.17)$$

que permite reescrever o sistema acima como

$$-(\omega^2 + \partial_z^2 - i(k_{AF})_0 \partial_z - \omega_p^2) A_R + ig_{\alpha\gamma}\omega B_+ a = 0, \quad (10.3.18)$$

$$-(\omega^2 + \partial_z^2 + i(k_{AF})_0 \partial_z - \omega_p^2) A_L + ig_{\alpha\gamma}\omega B_- a = 0, \quad (10.3.19)$$

$$(-\omega^2 - \partial_z^2 + m_a^2) a - ig_{\alpha\gamma}\omega B_+ A_L - ig_{\alpha\gamma}\omega B_- A_R = 0. \quad (10.3.20)$$

A partir destas, vemos que campos A_R e A_L acoplam-se separadamente ao áxion, o que permite tratar a mistura áxion-fóton considerando separadamente cada polarização. Neste caso, teremos **para fótons RCP**,

$$\begin{bmatrix} -(\omega^2 + \partial_z^2 - i(k_{AF})_0 \partial_z - \omega_p^2) & ig_{\alpha\gamma}\omega B_+ \\ -ig_{\alpha\gamma}\omega B_- & -(\omega^2 + \partial_z^2 - m_a^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ a \end{bmatrix} = 0. \quad (10.3.21)$$

Já para **para fótons LCP**, temos

$$\begin{bmatrix} -(\omega^2 + \partial_z^2 + i(k_{AF})_0 \partial_z - \omega_p^2) & ig_{\alpha\gamma}\omega B_- \\ -ig_{\alpha\gamma}\omega B_+ & -(\omega^2 + \partial_z^2 - m_a^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_L \\ a \end{bmatrix} = 0. \quad (10.3.22)$$

Veja que o termo $i(k_{AF})_0 \partial_z$ não é comum nos termos da diagonal principal, impedindo de extrairmos um operador diferencial diagonal como realizado no procedimento padrão. Para solucionarmos isso,

introduzimos a seguinte transformação para o campo $A(z)$:

$$\begin{bmatrix} A \\ a \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\beta z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{a} \end{bmatrix}, \quad (10.3.23)$$

onde β é um parâmetro a ser determinado para cada polarização circular. Calculando as derivadas do campo $A(z)$, temos

$$\partial_z A(z) = e^{\beta z} \left[\beta \tilde{A}(z) + \partial_z \tilde{A}(z) \right], \quad (10.3.24)$$

$$\partial_z^2 A(z) = e^{\beta z} \left[\beta^2 \tilde{A}(z) + 2\beta \partial_z \tilde{A}(z) + \partial_z^2 \tilde{A}(z) \right], \quad (10.3.25)$$

Com isso, tomando o operador para a onda RCP na Eq. (10.3.21), $\partial_z^2 - i(k_{AF})_0 \partial_z$, temos

$$\partial_z^2 A_R - i(k_{AF})_0 \partial_z A_R = e^{\beta z} \left[\partial_z^2 \tilde{A}(z) + (2\beta - i(k_{AF})_0) \partial_z \tilde{A}(z) + (\beta^2 - i(k_{AF})_0 \beta) \tilde{A}(z) \right]. \quad (10.3.26)$$

A partir da relação acima, vemos que o termo de derivada primeira é eliminado através da imposição $(2\beta - i(k_{AF})_0) = 0$, o que leva a

$$\beta = i(k_{AF})_0 / 2. \quad (10.3.27)$$

Portanto, a transformação para fóton RCP fica

$$A_R(z) = e^{\frac{i(k_{AF})_0}{2} z} \tilde{A}_R(z). \quad (10.3.28)$$

Por outro lado, é fácil inferir que para a onda LCP, para a qual o operador é $\partial_z^2 + i(k_{AF})_0 \partial_z$, vale a condição $\beta = -i(k_{AF})_0 / 2$, determinando

$$A_L(z) = e^{-\frac{i(k_{AF})_0}{2} z} \tilde{A}_L(z). \quad (10.3.29)$$

Veja que a operação (10.3.26) gera também um termo linear no campo A, que fornece, usando os devidos fatores β para fótons RCP e LCP,

$$(\beta^2 - i(k_{AF})_0 \beta) = -(k_{AF})_0^2 / 4 + (k_{AF})_0^2 / 2 = (k_{AF})_0^2 / 4. \quad (\text{onda RCP}) \quad (10.3.30)$$

$$(\beta^2 + i(k_{AF})_0 \beta) = -(k_{AF})_0^2 / 4 + (k_{AF})_0^2 / 2 = (k_{AF})_0^2 / 4. \quad (\text{onda LCP}) \quad (10.3.31)$$

Portanto, os operadores diferenciais da dinâmica fotônica em (10.3.21) e (10.3.22), atuam sobre as redefinições (10.3.28) e (10.3.29) gerando

$$\partial_z^2 A_R - i(k_{AF})_0 \partial_z A_R = e^{\frac{i(k_{AF})_0}{2} z} \left[\partial_z^2 \tilde{A}_R(z) + \frac{(k_{AF})_0^2}{4} \tilde{A}_R(z) \right], \quad (10.3.32)$$

$$\partial_z^2 A_L + i(k_{AF})_0 \partial_z A_L = e^{-\frac{i(k_{AF})_0}{2} z} \left[\partial_z^2 \tilde{A}_L(z) + \frac{(k_{AF})_0^2}{4} \tilde{A}_L(z) \right], \quad (10.3.33)$$

eliminando os termos de derivada primeira. Usando o resultado acima, obtém-se o sistema matricial para fóton RCP na forma

$$\begin{bmatrix} \left(\omega^2 + \partial_z^2 + \frac{(k_{AF})_0^2}{4} - \omega_p^2 \right) & -ig_{\alpha\gamma}\omega B_+ e^{-\frac{i(k_{AF})_0}{2}z} \\ ig_{\alpha\gamma}\omega B_- e^{\frac{i(k_{AF})_0}{2}z} & (\omega^2 + \partial_z^2 - m_a^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_R \\ \tilde{a} \end{bmatrix} = 0, \quad (10.3.34)$$

e para fóton LCP,

$$\begin{bmatrix} \left(\omega^2 + \partial_z^2 + \frac{(k_{AF})_0^2}{4} - \omega_p^2 \right) & -ig_{\alpha\gamma}\omega B_- e^{\frac{i(k_{AF})_0}{2}z} \\ ig_{\alpha\gamma}\omega B_+ e^{-\frac{i(k_{AF})_0}{2}z} & (\omega^2 + \partial_z^2 - m_a^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_L \\ \tilde{a} \end{bmatrix} = 0, \quad (10.3.35)$$

que possuem o mesmo padrão das Eqs. (10.2.26) e (10.2.27). Tais sistemas podem ser representados na forma

$$\left(i\partial_z \mathbf{I} + \tilde{K}_{\pm} \right) \begin{bmatrix} \tilde{A}_{R,L} \\ \tilde{a} \end{bmatrix}, \quad (10.3.36)$$

onde Hamiltoniano $\tilde{K}_{\pm}$ é dado por

$$\tilde{K}_{\pm} = \begin{bmatrix} \omega + \tilde{\Delta}_{pl}^{\pm} & -i\tilde{\Delta}_{a\gamma}^{(\pm)} \\ i\tilde{\Delta}_{a\gamma}^{(\mp)} & \omega + \tilde{\Delta}_a^{\mp} \end{bmatrix}, \quad (10.3.37)$$

sendo

$$\tilde{\Delta}_{pl}^{\pm} = \frac{\left(\frac{(k_{AF})_0^2}{4} - \omega_p^2 \right)}{2\omega} \pm \frac{(k_{AF})_0}{4}, \quad \tilde{\Delta}_a^{\pm} = -\frac{m_a^2}{2\omega} \pm \frac{(k_{AF})_0}{4}. \quad (10.3.38)$$

Considerando campo magnético externo na direção y , a equação matricial (10.3.34) fornece a seguinte probabilidade de conversão:

$$P_{\gamma_{\text{RCP}} \rightarrow a} = \frac{4\tilde{\Delta}_{a\gamma}^2}{\left(\tilde{\Delta}_{osc}^R \right)^2} \sin \left(\frac{\tilde{\Delta}_{osc}^R}{2} z \right), \quad (10.3.39)$$

associada à conversão $\gamma_{\text{RCP}} \rightarrow a$, onde

$$\left(\tilde{\Delta}_{osc}^R \right)^2 = \left(\tilde{\Delta}_{pl}^+ - \tilde{\Delta}_a^- \right)^2 + 4\tilde{\Delta}_{a\gamma}^2. \quad (10.3.40)$$

Para fóton LCP, a Eq. (10.3.35) fornece

$$P_{\gamma_{\text{LCP}} \rightarrow a} = \frac{4\tilde{\Delta}_{a\gamma}^2}{\left(\tilde{\Delta}_{osc}^L \right)^2} \sin \left(\frac{\tilde{\Delta}_{osc}^L}{2} z \right), \quad (10.3.41)$$

associada à conversão $\gamma_{\text{LCP}} \rightarrow a$, com

$$\left(\tilde{\Delta}_{osc}^L \right)^2 = \left(\tilde{\Delta}_{pl}^- - \tilde{\Delta}_a^+ \right)^2 + 4\tilde{\Delta}_{a\gamma}^2. \quad (10.3.42)$$

Explicitando as quantidades $\tilde{\Delta}_{osc}^R$ e $\tilde{\Delta}_{osc}^L$, tais probabilidades são expressas como

$$P_{\gamma_{RCP} \rightarrow a} = \frac{g_{\alpha\gamma}^2 B_0^2/2}{\left[\left(\left(\frac{(k_{AF})_0^2}{4} + m_a^2 - \omega_p^2 \right) / 2\omega + \frac{(k_{AF})_0}{2} \right)^2 + g_{\alpha\gamma}^2 B_0^2/2 \right]} \sin^2 \left(\frac{\bar{\Delta}_{osc}}{2} z \right), \quad (10.3.43)$$

$$P_{\gamma_{LCP} \rightarrow a} = \frac{g_{\alpha\gamma}^2 B_0^2/2}{\left[\left(\left(\frac{(k_{AF})_0^2}{4} + m_a^2 - \omega_p^2 \right) / 2\omega - \frac{(k_{AF})_0}{2} \right)^2 + g_{\alpha\gamma}^2 B_0^2/2 \right]} \sin^2 \left(\frac{\bar{\Delta}_{osc}}{2} z \right). \quad (10.3.44)$$

Vemos em ambas expressões que o termo $(k_{AF})_0^2/4$ possui o mesmo sinal do termo de massa m_a^2 , enquanto o termo $(k_{AF})_0/2$ aparece com o mesmo sinal oposto apenas para a conversão $\gamma_{LCP} \rightarrow a$. Isso revela que o fator quiral tipo-tempo pode induzir conversão ressonante apenas na mistura entre fótons LCP e áxions, na qual a condutividade magnética pode emular o efeito da frequência de plasma. Para melhor visualizar isso, considere que a conversão ocorra na ausência de plasma, ou seja, $\omega_p = 0$. Neste caso, as probabilidades ficam

$$P_{\gamma_{RCP} \rightarrow a} = \frac{g_{\alpha\gamma}^2 B_0^2/2}{\left[\left(\left(\frac{(k_{AF})_0^2}{4} + m_a^2 \right) / 2\omega + \frac{(k_{AF})_0}{2} \right)^2 + g_{\alpha\gamma}^2 B_0^2/2 \right]} \sin^2 \left(\frac{\bar{\Delta}_{osc}}{2} z \right), \quad (10.3.45)$$

$$P_{\gamma_{LCP} \rightarrow a} = \frac{g_{\alpha\gamma}^2 B_0^2/2}{\left[\left(\left(\frac{(k_{AF})_0^2}{4} + m_a^2 \right) / 2\omega - \frac{(k_{AF})_0}{2} \right)^2 + g_{\alpha\gamma}^2 B_0^2/2 \right]} \sin^2 \left(\frac{\bar{\Delta}_{osc}}{2} z \right), \quad (10.3.46)$$

onde vemos que apenas a conversão $\gamma_{LCP} \rightarrow a$ permite anular o primeiro termo no denominador quando

$$\left(\frac{(k_{AF})_0^2}{4} + m_a^2 \right) / 2\omega - \frac{(k_{AF})_0}{2} = 0. \quad (10.3.47)$$

Portanto, a presença da condutividade quiral magnética torna possível elevar a probabilidade de conversão $\gamma_{LCP} \rightarrow a$, enquanto suprime a conversão $\gamma_{RCP} \rightarrow a$. A Fig. 10.4 compara as probabilidades de conversão para ambas as polarizações com a probabilidade usual na ausência de plasma, onde a curva em vermelho está associada à conversão $\gamma_{RCP} \rightarrow a$.

Perceba que a polarização privilegiada neste contexto é oposta à privilegiada no caso de condutividade Hall anômala, cuja a probabilidade de conversão é dada em (10.2.35). Em resumo, a condutividade magnética quiral (setor tipo-tempo de CFJ) privilegia a conversão de fótons LCPs, enquanto a condutividade Hall anômala privilegia a conversão de fótons RCPs. Tal constatação representa uma possível assinatura na conversão fóton-áxion em plasmas quirais, onde a presença de correntes anômalas pode acarretar em uma supressão no número de fótons com polarização circular específica que sofreram conversão ressonante via efeito Primakoff.

Estrelas de nêutrons, magnetosferas de pulsares e buracos negros, além de materiais como semimetais de Weyl podem ser palco de conversões entre fótons RCP/LCP em áxions, onde efeitos quirais podem emergir e influenciar as propriedades de propagação do fóton. Nestes contextos, os resultados obtidos neste

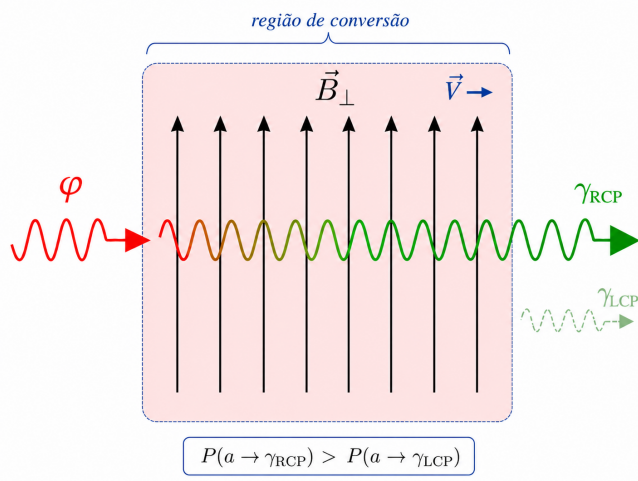


Figura 10.5: Representação esquemática da conversão áxion–fóton na presença de um campo magnético transversal $\vec{B}_\perp$ e de um vetor de fundo $\vec{V}$ orientado na direção de propagação. O áxion incidente, representado pela onda vermelha, atravessa a região de conversão, onde eventualmente pode ser convertido em fótons RCP e LCP. Neste caso, o termo de CFJ tipo-espaço favorece a polarização RCP, de modo que $P(a \rightarrow \gamma_{\text{RCP}}) > P(a \rightarrow \gamma_{\text{LCP}})$.

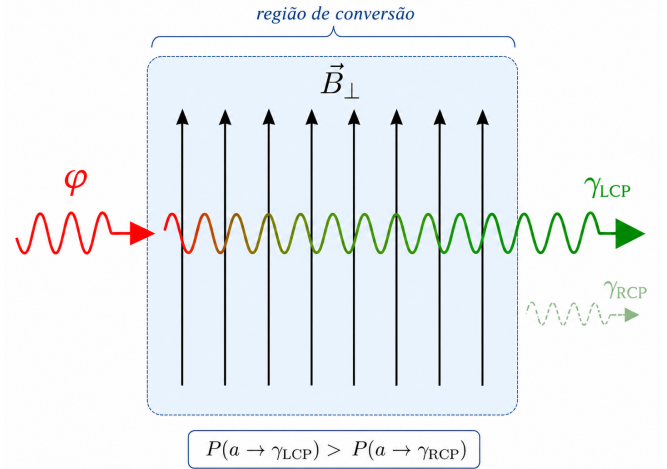


Figura 10.6: Representação esquemática da conversão áxion–fóton na presença de um campo magnético transversal $\vec{B}_\perp$ e do fator quiral $(k_{AF})_0$. O áxion incidente atravessa a região de conversão onde pode ser convertido em fótons RCP e LCP. Para este caso, a presença do termo tipo-tempo de CFJ favorece a polarização LCP, de modo que $P(a \rightarrow \gamma_{\text{LCP}}) > P(a \rightarrow \gamma_{\text{RCP}})$.

capítulo representam um ponto de partida para investigar tais efeitos.

10.4 Conversão ressonante $a \rightarrow \gamma$ em plasma quiral

As probabilidades de conversão dadas em (10.2.35), (10.2.37), (10.3.45) e ((10.3.46)), definidas para uma conversão fóton–áxion ($\gamma \rightarrow a$), são também válidas para o processo inverso ($a \rightarrow \gamma$), uma consequência da hermiticidade do sistema de dois níveis que rege cada uma das misturas. Logo, pode-se escrever

$$P_{\gamma_{\text{RCP}} \rightarrow a} = P_{a \rightarrow \gamma_{\text{RCP}}}, \quad P_{\gamma_{\text{LCP}} \rightarrow a} = P_{a \rightarrow \gamma_{\text{LCP}}} \quad (10.4.1)$$

Com isso, podemos conceber, em caráter hipotético, um experimento no qual a conversão áxion–fóton ocorra em uma região submetida a um campo magnético transversal. Essa região pode estar preenchida por um meio quiral, como um plasma dotado de correntes quirais associadas ao CME e ao AHE, ou ainda corresponder ao vácuo. Nesta última situação, os fatores $(k_{AF})_0$ e $|\mathbf{k}_{AF}|$ passam a representar puramente parâmetros de quebra da simetria de Lorentz no contexto da teoria de CFJ. Tal contexto é esquematizado nas Figs. 10.5 e 10.6.

10.4.1 Conversão ressonante no vácuo

Como vimos anteriormente, conversões ressonantes ocorrem para polarizações distintas na presença dos termos tipo-espaco e tipo-tempo de CFJ. Em um contexto em que a conversão ocorra para áxions na faixa dos raios X e no vácuo, as condições de ressonância (10.2.41) e (10.3.47), estabelecidas para o termos quirais $|\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}|$ e $(k_{AF})_0$, respectivamente, fornecem

$$(k_{AF})_0, |\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}| \simeq 2.4 \times 10^{-13} \left(\frac{m_a}{\text{eV}} \right)^2 \text{ GeV}, \quad (10.4.2)$$

onde foi desprezado o termo de segunda ordem em $(k_{AF})_0$. Para áxion dentro da faixa de massa de modelos da QCD, fornece $(k_{AF})_0, |\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}| \simeq 10^{-15} \text{ GeV}$. Isto revela que para o termo tipo-espaco de CFJ proporcionar ressonância com áxions da QCD, a sua magnitude deve ser muito maior do que faixa de restrição estabelecida por diversos modelos comentados no Capítulo 8, representando uma clara incompatibilidade. Deste modo, vemos que os parâmetros de CFJ não são capazes de impor ressonância para áxions da QCD devido à sua diminuta magnitude, não estabelecendo coerência em intervalos de massa onde a conversão no CAST sofre decoerência.

Por outro lado, é possível utilizar as restrições já estabelecidas sobre os parâmetros de CFJ para estimar quais valores da massa axiônica seriam compatíveis com a condição de conversão ressonante. Como indicado na Tabela 8.3, os cenários mais restritivos impõem limites da ordem

$$(k_{AF})_0, |\mathbf{k}_{\mathbf{AF}}| \lesssim 10^{-45} \text{ GeV}. \quad (10.4.3)$$

Invertendo a relação de ressonância obtida em (10.4.2), pode-se escrever, de forma genérica,

$$m_{a,\text{res}} < 2 \times 10^6 \left(\frac{V}{\text{GeV}} \right)^{1/2} \text{ eV}, \quad (10.4.4)$$

onde V representa o parâmetro de CFJ relevante para o caso considerado. Assim, para $V < 10^{-45} \text{ GeV}$, obtém-se

$$m_a < 6,4 \times 10^{-17} \text{ eV}. \quad (10.4.5)$$

Esse resultado mostra que, quando são adotados os limites mais restritivos sobre os parâmetros de CFJ, a conversão ressonante seria favorecida apenas para massas axiônicas extremamente pequenas. Trata-se, portanto, de um regime muito abaixo da faixa típica dos áxions da QCD, sendo mais naturalmente associado a ALPs ultraleves [140].

10.4.2 Conversão ressonante em plasma quiral

Quando a região de conversão é preenchida por meio quiral, o que é diferente de vácuo quiral, a condição de ressonância deve incluir os efeitos dispersivos do meio, em especial a frequência de plasma. Vamos considerar nesta seção apenas o caso em que o plasma suporta corrente magnética quiral, para o

qual a condição de ressonância para a conversão $\gamma_{\text{LCP}} \rightarrow a$ (vide Eq. (10.3.47)) é escrita como

$$\left(\frac{(k_{AF})_0^2}{4} + m_a^2 - \omega_p^2 \right) / 2\omega - \frac{(k_{AF})_0}{2} = 0. \quad (10.4.6)$$

Evidentemente, massas axiônicas na faixa de 10^{-17} eV são facilmente englobadas para conversão no vácuo, onde o processo é claramente coerente. Por outro lado, é importante comentar que, além do efeito de ressonância, o termo de CFJ também implica na seleção de fótons de polarização circular específica, o que pode também ser uma assinatura observacional de interesse.

Podemos estimar valores de massa para os quais a condição acima seja satisfeita, considerando valores associados a sistemas quirais mais realísticos. Para isso, adotaremos parâmetros típicos de semimetais quirais na região de resposta óptica de baixa energia. Em particular, tomaremos fótons no regime multi-terahertz/infravermelho distante, com energia $\omega = 0.1$ eV e uma frequência de plasma da ordem

$$\omega_p = 0.04 \text{ eV}. \quad (10.4.7)$$

Neste caso, assumiremos a condutividade magnética quiral no intervalo

$$(k_{AF})_0 \sim 10^{-5} - 10^{-4} \text{ eV}. \quad (10.4.8)$$

Tais magnitudes são compatíveis com uma descrição efetiva de semimetais de Weyl/Dirac em frequências de THz, extraídas a partir da Ref. [291].

A condição de ressonância (10.4.6) pode ser reescrita como

$$m_{a,\text{res}} = \left(\omega_p^2 + \omega (k_{AF})_0 + \frac{(k_{AF})_0^2}{4} \right)^{1/2}, \quad (10.4.9)$$

que para os valores comentados, fornece

$$m_{a,\text{res}} \simeq 4.0 \times 10^{-2} \text{ eV}. \quad (10.4.10)$$

Perceba que, para parâmetros realísticos de semimetais quirais, a massa ressonante permanece essencialmente controlada pela frequência de plasma do meio, ou seja,

$$m_{a,\text{res}} \simeq \omega_p. \quad (10.4.11)$$

Deste modo, vemos que a condutividade magnética quiral $(k_{AF})_0$ representa apenas um pequeno deslocamento sobre a condição de ressonância usual. Para $\omega_p \sim 10^{-2} - 10^{-1}$ eV, a conversão ressonante fornece

$$m_a \sim 10^{-2} - 10^{-1} \text{ eV}. \quad (10.4.12)$$

Esse intervalo é particularmente interessante porque seleciona ALPs na faixa sub-eV, região de ALPs leves e, eventualmente, áxions da QCD [140].

Evidentemente, o cenário considerado aqui deve ser entendido como um modelo efetivo idealizado, no qual efeitos dissipativos, absorção e dispersão espacial do meio são negligenciados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foram apresentados neste trabalho os conceitos básicos de um plasma frio, cuja descrição fluida, compatível com o modelo de Appleton para plasmas magnetizados, o qual foi desenvolvido para abordar a propagação de ondas de rádio na Ionosfera, permite investigar a propagação de ondas eletromagnéticas na presença de um campo magnético externo, considerado na equação de movimento para as partículas do meio.

No Capítulo 2, fazendo uso das equações de Maxwell para meios materiais, estudamos os modos de propagação longitudinal e transversal. Verificamos que o modo longitudinal não se propaga, correspondendo a um modo de vibração quando $\omega = \omega_p$. O modo transversal fornece os índices de refração n_+ e n_- , sendo estes circularmente polarizado à esquerda (LCP) e circularmente polarizado à direita (RCP), respectivamente. Foram listadas as principais características destes modos, como os intervalos de propagação e absorção da onda eletromagnética. Em seguida, foi investigado o limite de baixas frequências, que indicou a existência de um modo hélicon RCP, associado aos conhecidos *whistlers* da física de plasmas. Também foi discutido o fenômeno de birrefringência (rotação do plano de polarização), que ocorre graças à defasagem entre as ondas RCP e LCP, quando estas se propagam no mesmo intervalo de frequência, como no caso em que $\omega > \omega_-$. Diante disto, foi calculado o "poder de rotação" δ (diferença de fase por unidade de comprimento), obtida através da diferença entre as partes reais dos índices de refração n_+ e n_- . O análogo imaginário chamado coeficiente de dicroísmo, que surge quando as ondas RCP e LCP são absorvidas em graus diferentes pelo meio, foi também calculado.

No Capítulo 3, foram abordados alguns aspectos da eletrodinâmica de áxions e da eletrodinâmica Maxwell-Carroll-Field-Jackiw, como a obtenção das equações de movimento e o comportamento da Lagrangiana sob ação das operações de paridade, inversão temporal e conjugação de carga. Constatamos que a Lagrangiana do áxion, teoria Lorentz-invariante, é também invariante sob ação do operador CPT. Por outro lado, a eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw viola não apenas a simetria de Lorentz, mas também a simetria CPT, ambas preservadas na eletrodinâmica de Maxwell usual. Analisando as relações de dispersão modificadas desta teoria, manifesta-se o efeito de birrefringência no vácuo, a partir do qual, usando dados coletados através da luz vinda de galáxias distantes, foi possível estimar um valor muito restritivo ao parâmetro de violação, $|V_0 - |\mathbf{V}| \cos \theta| < 4.4 \times 10^{-33} eV$.

Dentro da proposta deste trabalho, consideramos a propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas no contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw. Os termos que provocam a quebra de simetria de Lorentz modificam a matriz de dispersão, que foi estudada em dois casos: vetor de violação tipo-tempo, com $(K_{AF})^\mu = ((K_{AF})_0, 0)$, e vetor de violação tipo-espaco, com $(K_{AF})^\mu = (0, \mathbf{K}_{AF})$. No caso de vetor de violação tipo-tempo, investigado no Capítulo 4, o modo longitudinal mantém-se como no caso sem violação de Lorentz. Por sua vez, o modo transversal fornece 4 índices de refração, $n_{R,M}$

e $n_{L,E}$, associados a modos de propagação RCP e LCP, respectivamente, com alguns deles apresentando intervalos de negatividade. O primeiro deles, n_R , ilustrado na Fig. 6.1, é positivo para todo valor de frequência, exceto no intervalo $\omega_c < \omega < \omega_-$, onde uma pequena zona de propagação livre com refração negativa ocorre em $\omega_r < \omega < \omega_-$. Neste caso, a modificação mais evidente ocorre para o limite em que $\omega \rightarrow 0$, quanto este assume um valor finito inversamente proporcional a V_0 , $n_R(0) = \omega_p^2/V_0\omega_c$. Por sua vez, o índice n_L é positivo para todo o $\omega > 0$, apresentando uma zona de absorção em $\omega_i < \omega < \omega_f$ sob a condição (4.2.15). O índice de refração n_E apresenta um pequeno intervalo de positividade, $0 < \omega < \omega_+$, podendo apresentar absorção e propagação, o que depende de valores para o *background*. Já o índice n_M apresenta-se sempre negativo, com absorção ocorrendo para o intervalo $\omega_c < \omega < \omega_-$, enquanto ocorre propagação para os demais valores de frequência. O limite de baixa frequência foi investigado, surgindo hélicons RCP e LCP em propagação devido à presença do fator quiral, V_0 , contrastando com o caso usual, onde apenas o hélicon RCP propaga. Dentro desse contexto, obtemos também o poder de rotação para plasma magnetizado, onde constatamos uma reversão de sinal, comportamento não ocorrente no caso padrão. Além disso, os efeitos ópticos desse sistema, envolvendo birrefringência e dicroísmo, foram também discutidos considerando os índices de refração n_L , n_R e n_E . Na Subseção 4.3.1, o PR δ_{LR} foi introduzido (veja a Eq. (4.3.2)), exibindo reversão de sinal em $\omega = \hat{\omega}$, para as condições (4.2.14) e (4.2.15). O PR δ_{ER} também exhibe mudança de sinal em $\omega = \omega'' > \omega_c$ para a condição (4.2.14), e $\omega = \omega'' < \omega_c$ sob a condição (4.2.15), conforme mostrado nas Figs. 4.11 e 4.12, respectivamente. O dicroísmo foi examinado na Seção 7.1.3, onde os coeficientes δ_{dLR} e δ_{dER} mostraram-se não nulos apenas no intervalo $\omega_c < \omega < \omega_r$, para a condição (4.2.14) – veja as Figs. 4.13, e nos intervalos $\omega_c < \omega < \omega_r$, $\omega_i < \omega < \omega_f$, para a condição (4.2.15), de acordo com as Figs. 4.14 e 4.15.

No Capítulo 5, abordamos o caso de vetor de violação tipo-espaco, que foi dividido em duas situações: para $\mathbf{V} \parallel \mathbf{B}_0$ e $\mathbf{V} \perp \mathbf{B}_0$. Para o caso de vetor quiral e campo magnético na mesma direção, os índices de refração modificados n_R e n_L foram obtidos, estando associados aos modos RCP e LCP, respectivamente. Examinamos suas propriedades para determinar como as zonas convencionais de propagação e absorção são afetadas. As Figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 exibem o comportamento dispersivo desses índices, que também são analisados nos gráficos das relações de dispersão (veja as Figs. 5.5, 5.6 e 5.7). O surgimento de novas zonas de absorção ou propagação, bem como o aumento ou a redução do comprimento dessas zonas, são os principais efeitos induzidos pelo vetor quiral. Em contraste com o caso de vetor de violação tipo-tempo, este modelo de plasma não manifesta refração negativa. Investigamos também o regime de baixa frequência, onde constatamos a possibilidade de propagação de hélicons RCP (Eq. (5.1.18a)) ou LCP (Eq. (5.1.18b)), outro efeito decorrente do vetor quiral. No entanto, apenas um deles pode se propagar para cada escolha da magnitude do vetor quiral. Este é um ponto adicional de distinção em comparação com o plasma frio com um fator quiral V_0 , onde ambos os hélicons RCP e LCP poderiam se propagar simultaneamente. Neste cenário, analisamos a birrefringência através do PR para os índices de refração n_R e n_L , sob duas condições para a magnitude do vetor quiral, $|\mathbf{V}| > \omega_p^2/\omega_c$ e $|\mathbf{V}| < \omega_p^2/\omega_c$. Os PRs correspondentes são mostrados nas Figs. 5.9 e 5.10, respectivamente, sendo o primeiro dotado de reversão de sinal, comportamento que também se manifesta no caso de vetor de violação tipo-tempo, onde o PR se reverte e tende a um valor assintótico, $-V_0/2$ (Vide Fig. 4.10). No presente caso, um comportamento análogo ocorre: o PR se reverte e tende ao valor assintótico $-|V|/2$. Portanto, vale

a pena discutir a possibilidade de usar o PR para caracterizar plasmas quirais descritos efetivamente pela eletrodinâmica de MCFJ. Nesse sentido, pode-se comparar o PR da Fig. 5.9 com o da Fig. 4.10 e notar uma similaridade substancial: ambos são dotados de reversão de sinal e valores assintóticos negativos. A principal diferença entre eles ocorre próximo à origem, quando o primeiro PR tende a zero. Quanto ao PR mostrado na Fig. 5.10, o comportamento é semelhante ao das Figs. 4.11 e 4.12 na faixa $0 < \omega < \omega_c$, mas diferente para $\omega > \omega_c$, onde as últimas se tornam positivas devido à refração negativa, enquanto o PR presente é negativo (veja a Fig. 5.10). Assim, reforçamos que o comportamento do PR pode constituir uma rota para distinguir entre os plasmas frios MCFJ com fatores quirais escalares ou vetoriais, isto é, plasmas frios com corrente magnética (CME) e AHE. Quanto às zonas de absorção, o coeficiente de dicroísmo circular revela um comportamento análogo ao do plasma frio convencional sob a condição (5.1.17). Além disso, o caso de propagação ao longo do campo magnético com vetor quiral ortogonal a ele, os índices de refração foram obtidos e suas propriedades foram examinadas, para os quais constatamos modos associados possuem componentes transversais e longitudinais misturadas, com polarização elíptica no setor transversal. Assim, a birrefringência e o dicroísmo foram medidos em termos de coeficientes de deslocamento de fase por unidade de comprimento.

Foi investigada também a propagação de ondas em plasma quiral não magnetizado, como realizado no Capítulo 6. Neste caso, adotamos um plasma quiral regido pela eletrodinâmica de MCFJ dotada de vetor de violação tipo-tempo, $V^\mu = (V^0, \mathbf{0})$, obtendo quatro índices de refração modificados, $n_{R,M}$ e $n_{L,E}$, associados aos modos RCP e LCP, respectivamente. As propriedades desses índices foram analisadas e destacadas nas Secs. 6.1.1 - 6.1.4 e Figs. 6.1 - 6.8, onde observamos refração negativa. Tais índices manifestam modificações significativas em relação aos de um plasma não magnetizado típico. Por exemplo, o índice de refração n_R , ilustrado na Fig. 6.1, possui um comportamento de refração negativa na faixa $0 < \omega < \omega_p$, ocorrendo uma propagação negativa livre na janela $\omega_{rad} < \omega < \omega_p$. Esta característica é diferente do que ocorre nos plasmas não magnetizados usuais, onde há absorção pura no intervalo $0 < \omega < \omega_p$. Para regime de frequência muito baixa foi analisado na Sec. 6.1.5, onde hélicons RCP e LCP foram obtidos, dados pelas Eqs. (6.1.12) e (6.1.13), respectivamente. No presente contexto, tanto hélicons RCP quanto LCP podem se propagar simultaneamente, um ponto comum com o caso magnetizado. Efeitos ópticos, incluindo PR e dicroísmo foram discutidos na Sec. 6.1.7 sob as condições $V_0^2/4 < \omega_p^2$ e $V_0^2/4 > \omega_p^2$. Constatamos que o fator quiral induz birrefringência (ausente em plasmas não magnetizados usuais), desempenhando o papel óptico desempenhado pelo campo magnético em plasmas frios. Esta birrefringência é expressa em termos do PR, através do qual destacamos uma reversão de sinal na frequência de plasma ω_p , conforme representado na Fig. 6.13. O PR também foi avaliado para os índices de refração n_L e n_R , implicando em PR constante (6.1.15). O efeito de dicroísmo foi examinado na Sec. 7.1.3, com o coeficiente δ_{dLR} , associado aos índices n_L e n_R , sendo nulo, o que é totalmente compatível com o PR constante. Por sua vez, para os índices n_E e n_R , o coeficiente δ_{dER} é não nulo na faixa $0 < \omega < \omega_{rad}$ e nulo para $\omega > \omega_{rad}$, sob a condição (6.1.8). Este comportamento é muito diferente do caso magnetizado, onde ambos os coeficientes, δ_{dLR} e δ_{dER} , são não nulos para vários intervalos. Veja a Subseção 4.3.2.

No Capítulo 7, examinamos a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma quiral tipo bi-isotrópico frio e magnetizado. As relações constitutivas bi-isotrópicas permitiram derivar quatro índices

de refração modificados fornecidos nas Eqs. (7.1.8) e (7.1.9), associados aos modos propagantes RCP e LCP, respectivamente. O termo quiral promove modificações significativas na propagação eletromagnética no plasma. Por exemplo, na Sec. 7.1, o comportamento de refração negativa aparece na faixa $\omega_c < \omega < \omega_-$ para o índice n_{R+} (veja a Fig. 7.1), com absorção ocorrendo para $\omega_c < \omega < \omega_{R+}$ e propagação livre (tipo metamaterial) na faixa $\omega_{R+} < \omega < \omega_-$. A existência de refração negativa em um plasma quiral já foi investigada e representa uma característica típica de plasmas bi-isotrópicos [38, 39]. Além disso, no regime de baixa frequência, obtemos hélicons RCP propagantes modificados, exibindo uma dependência linear no parâmetro quiral $\tilde{\xi}_c$, como discutido na Subseção. 6.1.5. Neste contexto, investigamos birrefringência e dicroísmo, adotando os índices de refração n_{R+} , n_{L+} e n_{L-} . Destacamos que o PR δ_{LR}^{++} , definido por Eq. (7.1.16) e ilustrado na Fig. 7.5, apresenta uma dupla reversão de sinal nas frequências $\omega = \omega'$ e $\omega = \omega''$, localizadas no intervalo $0 < \omega < \omega_c$. Para $\omega > \omega_c$, o PR é negativo e decresce com a frequência, como mostrado na Fig. 7.6. Da mesma forma, a dupla reversão também aparece no intervalo $0 < \omega < \omega_+$ para o PR δ_{LR}^{-+} dado em (7.1.18), conforme exibido na Fig. 7.7. Embora plasmas frios não exibam uma dupla reversão de PR como essa, uma assinatura óptica não comum, a dupla reversão de PR também foi encontrada em meios bi-isotrópicos com corrente de Hall anômala [226]. Esta propriedade birrefringente peculiar pode representar um caminho para uma caracterização óptica dos plasmas quirais bi-isotrópicos em configurações experimentais realistas. Da mesma forma, o fenômeno de dicroísmo foi avaliado através dos coeficientes δ_{dRL}^{++} e δ_{dLR}^{-+} , os quais são não nulos apenas nos intervalos $0 < \omega < \omega_{R+}$ e $\omega_c < \omega < \omega_{R-}$, conforme ilustrado na Fig. 7.8.

A fim de realizar restrições sobre a magnitude dos parâmetros quirais de CFJ, no Capítulo 8 tomamos dados astrofísicos relacionados a propagação de sinais em um meio cósmico quiral, tratado como um plasma interestelar (ISM) regido pela eletrodinâmica MCFJ. Investigamos os aspectos relacionados à dispersão e medida de rotação, utilizando dados de cinco pulsares: B1919+21, B1944+17, B1929+10, B2016+28 e B2020+28. Para tal meio, um tempo de atraso modificado (8.2.6) com uma contribuição quiral à medida de dispersão, DM_{CFJ} , foi obtido. Os parâmetros quirais K_{AF}^0 e $|\mathbf{K}_{AF}|$ (para configuração paralela ao campo magnético) têm seu limite estabelecido de acordo com Eq. (8.2.16), enquanto $|\mathbf{K}_{AF}|$ (para configuração ortogonal ao campo magnético) é restringido por Eq. (8.2.19). Usando dados de medida de dispersão (DM) dos pulsares selecionados, as magnitudes de K_{AF}^0 e $|\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}|$ foram restringidas à ordem de 10^{-22} GeV, enquanto $|\mathbf{K}_{AF}^{\perp}| \lesssim 10^{-23}$ GeV. Além disso, utilizando a medida de rotação (RM) (efeito Faraday) dos mesmos pulsares, estabelecemos K_{AF}^0 , $|\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}| \lesssim 10^{-36}$ GeV (veja a Tabela 8.2). Constatamos que, embora as restrições sobre K_{AF}^0 (ou K_{AF}^0) e $|\mathbf{K}_{AF}|$ (ou $|\mathbf{K}_{AF}^{\parallel}|$), usando dados de DM, não sejam tão restritivas quanto aquelas da polarização do CMB [198, 220] e birrefringência astrofísica [71], elas são mais restritivas do que os limites envolvendo ressonâncias de Schumann [195], cavidades ressonantes [196] e dados de vento solar [197]. Destacamos que os dados de RM forneceram limites mais rigorosos em comparação aos dados de DM, melhorados as restrições em 14 ordens de magnitude (veja a Tabela. 8.2). Na Tabela 8.3 comparamos nossas restrições a partir de dados de DM e RM com os cenários mencionados acima, na qual observamos que estas melhoram em 12 ordens de magnitude os limites decorrentes da investigação do vento solar, o mais restritivo além da polarização do CBM e da birrefringência astrofísica, representando restrições competitivas. Consideramos também a hipótese de um plasma interestelar do tipo bi-isotrópico, adotando um modelo regido pela eletrodinâmica

de Maxwell dotada das relações constitutivas (7.1.1). Neste contexto, a partir do atraso temporal (8.5.2), uma contribuição quiral para a medida de dispersão, DM_{chiral} , foi obtida e limitada de acordo com (8.5.7). Uma medida de rotação quiral, RM_{chiral} , foi obtida a partir da rotação de Faraday (8.5.5), e limitada em (8.5.8). Assim, usando dados de DM, a magnitude de $\tilde{\xi}$ foi restrita à ordem entre $10^{-16} - 10^{-18}$, conforme apresentado na quarta coluna da Tabela 8.1. Por fim, utilizando informações de RM, o fator quiral foi limitado como $\tilde{\xi} \lesssim 10^{-22} - 10^{-21}$ (veja a última coluna na Tabela 8.1). Tomando dados de DM e RM de FRBs extragaláticas e empregando correções cosmológicas, os parâmetros de CFJ foram restritos a magnitude na ordem de 10^{-25} GeV a 10^{-43} GeV, respectivamente. Neste contexto, portanto, os dados de RM de FRBs conduziram à uma melhoria de 7 ordens de grandeza em relação aos resultados obtidos com RM de pulsares. Tais resultados estão apresentados na Tabela 8.10.

Foram investigadas as influências do fator quiral tipo-tempo de CFJ sobre os modos de propagação de plasmas frios girantes, como realizado no Capítulo 9. Tomando resultados estabelecidos na literatura de plasmas em rotação (Refs. [156, 258]), derivamos os índices de refração modificados pelo fator quiral V_0 , associados à modos de propagação RCP e LCP. Tais índices também envolvem a frequência angular de rotação Ω do meio, como mostrados nas Eqs. (9.2.15) e (9.2.16), o que permite comparar os efeitos da rotação mecânica do plasma como os aqueles ocasionados pelo fator quiral. Para analisar isso, consideramos o coeficiente RP, no qual observamos que, separadamente, a rotação e o termo quiral ocasionam inversão de RP em frequências distintas, o que pode ser visto na Fig. 9.1. No entanto, quando considerados simultaneamente, a inversão de RP ocorre apenas em uma frequência específica, assinala como ω' na Fig. 9.2. Os casos em que $\Omega > 0$ e $\Omega < 0$ foram analisados, ambos apresentando frequências de ressonâncias em $\omega = \Omega$ e $\omega = \omega_c + \Omega$, como pode ser visto nas Refs. 9.3 e 9.4.

No Capítulo 10, abordamos o mecanismo de oscilação fóton-áxion em plasmas quirais regidos pelo eletrodinâmica de MCFJ. Após apresentar o formalismo padrão de mistura e evidenciar o papel da frequência de plasma na restauração da coerência da conversão, constatamos que os termos de CFJ associados à condutividade Hall anômala e à corrente magnética quiral conduzem a probabilidades de conversão distintas, dependentes para os estados polarização circular dos fótons. Neste cenário, o setor tipo-espaço favorece a conversão entre áxions e fótons RCP, enquanto o setor tipo-tempo privilegia os fótons LCP, como ilustramos nas Figs. 10.3 e 10.4. No vácuo, as condições de ressonância induzidas pelos parâmetros de CFJ são incompatíveis com áxions da QCD quando se consideram os limites experimentais mais restritivos, $k_{AF} 10^{-45}$ GeV, restringindo esse mecanismo a ALPs ultraleves, com massas da ordem de $m_a \lesssim 10^{-16}$ eV. Em plasmas quirais, por outro lado, a massa ressonante permanece predominantemente determinada pela frequência de plasma, podendo alcançar a faixa sub-eV. Esses resultados indicam que a seleção de uma polarização circular específica constitui uma possível assinatura da conversão áxion-fóton em meios quirais, abrindo perspectivas para aplicações em plasmas astrofísicos e em sistemas materiais.

O estudo desenvolvido nesta tese nos permitiu reavaliar algumas propriedades relacionadas à propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas frios, considerando a influência de parâmetros e correntes quirais anômalas. Os resultados presentes neste trabalho podem ser ainda estendidos para a teoria cinética de plasmas quirais, onde a velocidade térmica das partículas são levadas em consideração, fato que enriquece ainda mais o tratamento de propagação de ondas em plasmas.

No âmbito da matéria condensada, o estudo dos modos de excitação de fônons em sistemas quirais

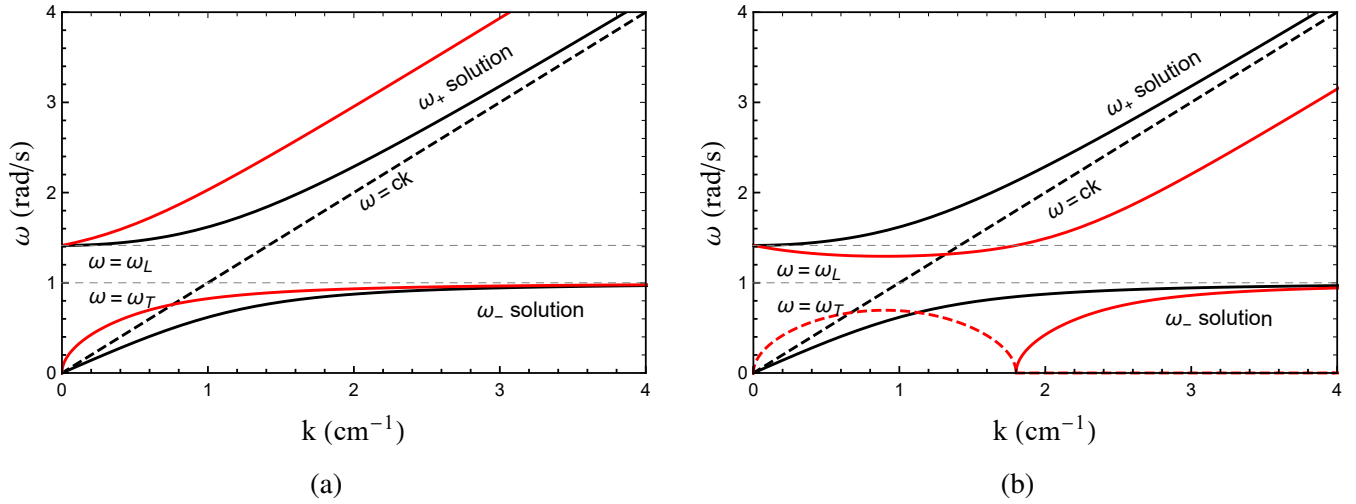


Figura 11.1: Plots dos ramos polaritônicos $\omega_{\pm}$ para os casos: (a) Eq. (11.0.1) e (b) Eq. (11.0.2), em função de k . As linhas pretas sólidas representam a relação de dispersão usual, enquanto as linhas vermelhas sólidas representam o caso quiral. A curva tracejada vermelha representa a parte imaginária de ω_{-} , associada à uma zona de não propagação e/ou instabilidade. Aqui escolhemos $\omega_T = \omega_p = 1$ rad/s e $K_{AF}^0 = 1.8\omega_p$.

é também um tópico de interesse. Os fônons-polaritons são excitações coletivas que emergem através do acoplamento entre ondas eletromagnéticas e modos ópticos de vibração da rede em cristais. Nesses materiais, os chamados fônons ópticos são associados aos deslocamentos relativos entre íons de cargas opostas, que produzem uma polarização elétrica de caráter oscilante capaz de interagir diretamente com o campo eletromagnético. Para frequências próximas às frequências características de vibração dos fônons, o campo eletromagnético e a vibração da rede se acoplam e passam a ser tratados como excitações dependentes, dando origem a novos modos normais de propagação denominados fônons-polaritons. A relação de dispersão correspondente apresenta dois ramos, geralmente designados como ramo polaritônico inferior e superior, separados por uma região de frequências na qual a propagação é proibida, delimitada pelas frequências ω_T e ω_L , como ilustrado pelas curvas pretas na Fig. 11.1a. Em tais sistemas, a corrente magnética quiral $\mathbf{J} = K_{AF}^0 \mathbf{B}$ modifica as relações de dispersão associadas aos modos polaritônicos, que passam a ser escritos como

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{(c^2 k^2 + \omega_T^2 + \omega_p^2 + K_{AF}^0 k)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(c^2 k^2 + \omega_T^2 + \omega_p^2 + K_{AF}^0 k)^2 - 4(c^2 k^2 + K_{AF}^0 k) \omega_T^2}, \quad (11.0.1)$$

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{(c^2 k^2 + \omega_T^2 + \omega_p^2 - K_{AF}^0 k)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(c^2 k^2 + \omega_T^2 + \omega_p^2 - K_{AF}^0 k)^2 - 4(c^2 k^2 - K_{AF}^0 k) \omega_T^2}. \quad (11.0.2)$$

Tais relações podem ser visualizadas nas Figs. 11.1a e 11.1b, onde são representadas pelas curvas vermelhas. Na Fig. 11.1b, as linhas tracejadas vermelhas representam a parte imaginária da frequência, onde percebe-se que a presença do fator quiral K_{AF}^0 possibilita o surgimento de instabilidade no ramo inferior, com $\text{Im}[\omega_{-}] > 0$. Além disso, percebe-se também que o fator quiral conduz à possibilidade de propagação em uma pequena região dentro do intervalo $\omega_T < \omega < \omega_L$, onde usualmente não ocorre propagação dos modos. Estes são alguns dos resultados que irão compor trabalhos futuros fundamentados

nos resultados desta tese.

OSICLAÇÕES DE DENSIDADE LONGITUDINAIS (LINEARIZAÇÃO DO TERMO DE PRESSÃO)

A descrição para as oscilações de densidade é realizada através das seguintes equações: Temos as equações:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0, \quad (\text{A.0.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{q}{m} \mathbf{E} - \frac{1}{mn} \nabla P, \quad (\text{A.0.2})$$

Para o último termo em Eq. (A.0.2), podemos escrever

$$\frac{1}{n} \nabla P = \frac{1}{n} \sum_i (\partial_i P) \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (\text{A.0.3})$$

onde $\hat{\mathbf{e}}_i$ é o vetor unitário. Então

$$\frac{1}{n} \nabla P = \frac{1}{n} \sum_i \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right) (\partial_i n) \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (\text{A.0.4})$$

$$\frac{1}{n} \nabla P = \frac{1}{n} \frac{\partial P}{\partial n} \sum_i (\partial_i n) \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (\text{A.0.5})$$

$$\frac{1}{n} \nabla P = \frac{1}{n} \frac{\partial P}{\partial n} (\nabla n). \quad (\text{A.0.6})$$

Agora podemos considerar pequenas perturbações (linearização), com $n = n_0 + n_1$ o que resulta em

$$\frac{1}{n} \nabla P = n_0^{-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_0} \right)^{-1} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right) (\underbrace{\nabla n_0}_{=0} + \nabla n_1), \quad (\text{A.0.7})$$

$$\frac{1}{n} \nabla P = \frac{1}{n_0} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right) \left(1 - \frac{n_1}{n_0} \right) (\nabla n_1), \quad (\text{A.0.8})$$

$$\frac{1}{n} \nabla P = \frac{1}{n_0} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right) \left(\nabla n_1 - \underbrace{\frac{n_1}{n_0} \nabla n_1}_{\approx 0} \right), \quad (\text{A.0.9})$$

$$\frac{1}{n} \nabla P = \frac{1}{n_0} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right) \nabla n_1. \quad (\text{A.0.10})$$

Agora também consideraremos uma pequena perturbação na quantidade $\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)$ em relação à sua configuração de equilíbrio,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right) \doteq \left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_1, \quad (\text{A.0.11})$$

então Eq. (A.0.11) se simplifica como

$$\frac{1}{n} \nabla P = \frac{1}{n_0} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_0 \nabla n_1 + \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_1}_{\approx 0} \nabla n_1 \right], \quad (\text{A.0.12})$$

$$\frac{1}{n} \nabla P = \frac{1}{n_0} \left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_0 \nabla n_1. \quad (\text{A.0.13})$$

TRANSFORMAÇÕES DISCRETAS

B.1 Comportamento de algumas grandezas sob operação de paridade

A operação de paridade consiste na transformação $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$:

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{E}, \quad A_0 \xrightarrow{\mathcal{P}} +A_0, \quad (\text{B.1.1})$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{P}} +\mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{A}, \quad (\text{B.1.2})$$

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} A^\mu, \quad J_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} J^\mu, \quad \partial_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} \partial^\mu, \quad (\text{B.1.3})$$

Campo elétrico sob paridade:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}; \quad (\text{B.1.4})$$

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(-\mathbf{r} + \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (\text{B.1.5})$$

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{E}; \quad (\text{B.1.6})$$

Densidade de corrente sob paridade:

$$\mathbf{J} = ne\mathbf{v}; \quad (\text{B.1.7})$$

$$\mathbf{J} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{J}' = -ne\mathbf{v}, \quad (\text{B.1.8})$$

$$\mathbf{J} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{J}. \quad (\text{B.1.9})$$

Além disso, para a **densidade de carga**:

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E};$$

$$\rho \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho' = \epsilon_0 (-\nabla) \cdot (-\mathbf{E}), \quad (\text{B.1.10})$$

$$\rho \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho. \quad (\text{B.1.11})$$

Com os dois resultados acima, podemos escrever para a **4-corrente**, adotando:

$$J_\mu = (J_0, J_i), \quad J_0 = \rho, \quad J_i = (\mathbf{J})_i. \quad (\text{B.1.12})$$

Assim, obtemos:

$$J_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} J'_\mu = (J_0, -J_i) = (J_0, J^i), \quad (\text{B.1.13})$$

$$J_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} J^\mu \quad (\text{B.1.14})$$

Potencial A_0 sob paridade (quantidade escalar):

$$A_0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A_0. \quad (\text{B.1.15})$$

Potencial vetor $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'; \quad (\text{B.1.16})$$

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{A}' = - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (\text{B.1.17})$$

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{A}. \quad (\text{B.1.18})$$

Com os resultados para A_0 e $\mathbf{A}$, podemos escrever para o **4-potencial**:

$$A_\mu = (A_0, A_i); \quad (\text{B.1.19})$$

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} A'_\mu = (A_0, -A_i) = (A_0, A^i), \quad (\text{B.1.20})$$

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} A^\mu. \quad (\text{B.1.21})$$

Campo magnético sob paridade:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad (\text{B.1.22})$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{B}' = (-\nabla) \times (-\mathbf{A}), \quad (\text{B.1.23})$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{B} \quad (\text{B.1.24})$$

Nesta seção usamos o fato das derivadas espaciais dependerem apenas da posição, o que permite escrever

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (\text{B.1.25})$$

$$\partial_i \xrightarrow{\mathcal{P}} \partial'_i = -\frac{\partial}{\partial x^i} = -\partial_i, \quad (\text{B.1.26})$$

$$\partial_i \xrightarrow{\mathcal{P}} \partial^i. \quad (\text{B.1.27})$$

Como a derivada temporal não sofre ação da paridade, escrevemos:

$$\partial_\mu = (\partial_0, \partial_i) \quad (\text{B.1.28})$$

$$\partial_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} \partial^\mu. \quad (\text{B.1.29})$$

B.2 Comportamento de algumas grandezas sob reversão temporal

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{E}, \quad A_0 \xrightarrow{\mathcal{T}} A_0, \quad (\text{B.2.1})$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{A}, \quad (\text{B.2.2})$$

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} A^\mu, \quad J_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} J^\mu, \quad (\text{B.2.3})$$

Para demonstrar esses resultados, consideramos, algumas grandezas clássicas, como velocidade ($\mathbf{v}$) e momento linear ($\mathbf{p}$), que são ímpares sob a inversão temporal:

$$\mathbf{v} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{v}, \quad \mathbf{p} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{p}. \quad (\text{B.2.4})$$

Por outro lado, a força ($\mathbf{F}$) e a aceleração ($\mathbf{a}$) são pares:

$$\mathbf{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{F}, \quad \mathbf{a} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{a}. \quad (\text{B.2.5})$$

Deste modo, a segunda lei de Newton $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ é invariante sob inversão temporal. Escrevendo a força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (\text{B.2.6})$$

podemos então perceber, considerando as equações anteriores, como o **campo elétrico** e **campo magnético** se transformam:

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{B}. \quad (\text{B.2.7})$$

Como a velocidade é ímpar sob inversão temporal, a **densidade de corrente** também será:

$$\mathbf{J} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{J}. \quad (\text{B.2.8})$$

Como a densidade de carga ρ , a componente (0) da **4-corrente**, é par sob tal transformação, podemos escrever:

$$J_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} J'_\mu = (J_0, -J_i) = (J_0, J^i), \quad (\text{B.2.9})$$

$$J_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} J^\mu. \quad (\text{B.2.10})$$

Comoo **potencial vetor** é determinado pela corrente **J**, também será revertido:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\mathbf{A}. \quad (\text{B.2.11})$$

O **potencial escalar** A_0 depende da densidade de carga ρ , sendo também par sob inversão temporal:

$$A_0 \xrightarrow{\mathcal{T}} A_0.$$

Esses resultados nos permite escrever a transformação para o **4-potencial**:

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} A^\mu. \quad (\text{B.2.12})$$

B.3 Comportamento de algumas grandezas sob conjugação de carga

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\mathbf{E}, \quad A_0 \xrightarrow{\mathcal{C}} -A_0, \quad (\text{B.3.1})$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\mathbf{A}, \quad (\text{B.3.2})$$

$$A_\mu \xrightarrow{\mathcal{C}} -A^\mu, \quad J_\mu \xrightarrow{\mathcal{C}} -J_\mu, \quad (\text{B.3.3})$$

Os resultados acima são obtidos facilmente, uma vez que a transformação $q \rightarrow -q$ garante que a **densidade de carga** (ρ) e a **densidade de corrente** (**J**) sejam ímpares sob conjugação de carga. O **campo elétrico** e o **potencial escalar** A_0 dependem da carga e da densidade de carga, respectivamente. Portando são também ímpares:

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\mathbf{E}, \quad A_0 \xrightarrow{\mathcal{C}} -A_0. \quad (\text{B.3.4})$$

O **potencial vetor** **A** depende da densidade de corrente, sendo também ímpar sob conjugação de carga. Consequentemente, o **campo magnético** **B** também será:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\mathbf{A}, \quad \mathbf{B} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\mathbf{B}. \quad (\text{B.3.5})$$

Com os resultados acima, a 4-corrente também será ímpar sob tal transformação:

$$J_\mu \xrightarrow{\mathcal{C}} -J_\mu. \quad (\text{B.3.6})$$

EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DA ELETRODINÂMICA DE ÁXIONS

Vamos obter a equação de movimento a partir da Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{a\gamma\gamma}a(x)F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu + \frac{1}{2}(\partial^\mu a)(\partial_\mu a) - \frac{1}{2}m^2 a^2(x) \quad (\text{C.0.1})$$

A equação de movimento é obtida através da equação de Euler-Lagrange,

$$\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha}. \quad (\text{C.0.2})$$

Facilmente obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = -J^\alpha. \quad (\text{C.0.3})$$

O lado esquerdo da Eq. (C.0.2) pode ser calculada separadamente para os termos de Maxwell, $\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, e de interação $\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4}g_{a\gamma\gamma}a(x)F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$:

$$\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} + \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)}. \quad (\text{C.0.4})$$

Teremos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)}, \quad (\text{C.0.5})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = -\frac{1}{4} \left(F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} + F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} \right), \quad (\text{C.0.6})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = -\frac{1}{4} \left(2F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} \right) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)}, \quad (\text{C.0.7})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\rho}), \quad (\text{C.0.8})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = -\frac{1}{2} (F^{\rho\alpha} - F^{\alpha\rho}) = -\frac{1}{2} (2F^{\rho\alpha}), \quad (\text{C.0.9})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = -F^{\rho\alpha}. \quad (\text{C.0.10})$$

Para o termo de interação, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = -\frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} a \frac{\partial (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)}, \quad (\text{C.0.11})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = -\frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} a \left(F_{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} + \tilde{F}^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} \right), \quad (\text{C.0.12})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = -\frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} a \left(2 F_{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} \right), \quad (\text{C.0.13})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = -\frac{1}{2} g_{a\gamma\gamma} a \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\eta} \right) F_{\mu\nu} (\delta^{\lambda\rho} \delta^{\eta\alpha} - \delta^{\lambda\alpha} \delta^{\eta\rho}), \quad (\text{C.0.14})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = -\frac{1}{2} g_{a\gamma\gamma} a \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\rho\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad (\text{C.0.15})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = -\frac{1}{2} g_{a\gamma\gamma} a (\tilde{F}^{\rho\alpha} - \tilde{F}^{\alpha\rho}) = -\frac{1}{2} g_{a\gamma\gamma} a (2\tilde{F}^{\rho\alpha}), \quad (\text{C.0.16})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = -g_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\rho\alpha}. \quad (\text{C.0.17})$$

Com isso, a Eq. (C.0.4) torna-se

$$\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho A_\alpha)} = -\partial_\rho F^{\rho\alpha} - g_{a\gamma\gamma} \partial_\rho (a \tilde{F}^{\rho\alpha}), \quad (\text{C.0.18})$$

que juntamente com $\partial \mathcal{L} / \partial A_\alpha = -J^\alpha$, fornece a seguinte equação de movimento

$$\partial_\rho F^{\rho\alpha} + g_{a\gamma\gamma} \partial_\rho (a \tilde{F}^{\rho\alpha}) = J^\alpha. \quad (\text{C.0.19})$$

Podemos também escrever a equação acima na forma

$$\partial_\rho F^{\rho\alpha} + g_{a\gamma\gamma} (\partial_\rho a) \tilde{F}^{\rho\alpha} = J^\alpha, \quad (\text{C.0.20})$$

uma vez que $\partial_\rho \tilde{F}^{\rho\alpha} = 0$, sendo este um termo que reproduz a identidade de Bianchi. A lei de Gauss modificada é obtida tomando a componente $\alpha = 0$ na Eq. (C.0.20):

$$\partial_\rho F^{\rho 0} + g_{a\gamma\gamma} (\partial_\rho a) \tilde{F}^{\rho 0} = J^0, \quad (\text{C.0.21})$$

$$\partial_i F^{i0} + g_{a\gamma\gamma} (\partial_i a) \tilde{F}^{i0} = J^0, \quad (\text{C.0.22})$$

$$\partial_i E^i + g_{a\gamma\gamma} (\partial_i a) B^i = \rho \quad (\text{C.0.23})$$

que resulta

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho - g_{a\gamma\gamma} \mathbf{B} \cdot \nabla a, \quad (\text{C.0.24})$$

onde usamos o as relações $F^{i0} = E^i$ e $\tilde{F}^{i0} = B^i$. Por sua vez, a lei de Ampère é obtida tomando $\alpha = i$ na Eq. (C.0.20):

$$\partial_\rho F^{\rho i} + g_{a\gamma\gamma} (\partial_\rho a) \tilde{F}^{\rho i} = J^i, \quad (\text{C.0.25})$$

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} + g_{a\gamma\gamma} (\partial_0 a) \tilde{F}^{0i} + g_{a\gamma\gamma} (\partial_j a) \tilde{F}^{ji} = J^i, \quad (\text{C.0.26})$$

$$-\partial_0 F^{0i} - \partial_j F^{ij} - g_{a\gamma\gamma} (\partial_0 a) \tilde{F}^{i0} - g_{a\gamma\gamma} (\partial_j a) \tilde{F}^{ij} = J^i, \quad (\text{C.0.27})$$

$$-\partial_0 E^i + \epsilon_{ijl} \partial_j B^l - g_{a\gamma\gamma} (\partial_0 a) B^i + g_{a\gamma\gamma} \epsilon_{ijl} (\partial_j a) E^l = J^i, \quad (\text{C.0.28})$$

$\tilde{F}^{ij} = -\epsilon_{ijl} E^l$ e $F^{ij} = -\epsilon_{ijl} B^l$. Assim, resultamos Temos portanto um conjunto de equações de Maxwell modificadas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho - g_{a\gamma\gamma} \mathbf{B} \cdot \nabla a, \quad (\text{C.0.29})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J} + g_{a\gamma\gamma} (\partial_t a) \mathbf{B} + g_{a\gamma\gamma} \nabla a \times \mathbf{E}, \quad (\text{C.0.30})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.0.31})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (\text{C.0.32})$$

Podemos derivar também uma equação dixâmica para o campo escalar:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu a) (\partial_\mu a) - \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} a (x) F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{m_a^2 a^2}{2}, \quad (\text{C.0.33})$$

$$\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho a)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}.$$

Teremos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = -\frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - m_a^2 a; \quad (\text{C.0.34})$$

$$\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho a)} = \frac{1}{2} \partial_\rho \left[(\partial_\mu a) \frac{\partial (\partial^\mu a)}{\partial (\partial_\rho a)} + (\partial^\mu a) \frac{\partial (\partial_\mu a)}{\partial (\partial_\rho a)} \right], \quad (\text{C.0.35})$$

$$\begin{aligned} \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho a)} &= \frac{1}{2} \partial_\rho [(\partial_\mu a) \eta^{\mu\rho} + (\partial^\mu a) \delta_{\mu\rho}] \\ \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho a)} &= \partial_\rho \partial^\rho a. \end{aligned} \quad (\text{C.0.36})$$

Assim, temos a equação de de movimento para o campo escalar:

$$\partial_\rho \partial^\rho a m_a^2 a = -\frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (\text{C.0.37})$$

ou também

$$(\square + m_a^2) a = g_{a\gamma\gamma} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}). \quad (\text{C.0.38})$$

EQUAÇÃO DE MOVIMENTO MCFJ

D.1 Forma indicial

Partiremos da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = 0. \quad (\text{D.1.1})$$

Reescrevendo a Lagrangiana (3.6.1) com termo de fonte,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu A^\nu F^{\alpha\beta} - J_\alpha A^\alpha, \quad (\text{D.1.2})$$

calculamos o primeiro termo da equação acima:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} = \frac{\partial (-J_\alpha A^\alpha)}{\partial A_\lambda} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial ((K_{AF})^\mu A^\nu F^{\alpha\beta})}{\partial A_\lambda}, \quad (\text{D.1.3})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} = -J_\alpha g^{\alpha\lambda} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta} g^{\nu\lambda}, \quad (\text{D.1.4})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} = -J^\lambda + \frac{1}{4} \epsilon^\lambda_{\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta}. \quad (\text{D.1.5})$$

O segundo termo de (3.8.1) será:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu A^\nu \frac{\partial (F^{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)}, \quad (\text{D.1.6})$$

onde as derivadas fornecem

$$\frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = 2 \frac{\partial (F_{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} F^{\alpha\beta} = 2 (\delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\lambda - \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\lambda) F^{\alpha\beta} = 2 (F^{\sigma\lambda} - F^{\lambda\sigma}) = 4F^{\sigma\lambda}, \quad (\text{D.1.7})$$

$$\frac{\partial (F^{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = \frac{\partial (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = (g^{\alpha\sigma} g^{\beta\lambda} - g^{\beta\sigma} g^{\alpha\lambda}). \quad (\text{D.1.8})$$

Com isso, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = -F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu A^\nu (g^{\alpha\sigma} g^{\beta\lambda} - g^{\beta\sigma} g^{\alpha\lambda}), \quad (\text{D.1.9})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = -F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu A^\nu g^{\alpha\sigma} g^{\beta\lambda} + \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu A^\nu g^{\beta\sigma} g^{\alpha\lambda}, \quad (\text{D.1.10})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = -F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\lambda} (K_{AF})^\mu A^\nu + \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma} (K_{AF})^\mu A^\nu, \quad (\text{D.1.11})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\lambda)} = -F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\lambda} (K_{AF})^\mu A^\nu. \quad (\text{D.1.12})$$

Substituindo (D.1.5) e (D.1.12) na Lagrangiana, teremos

$$-J^\lambda + \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\alpha\beta}^\lambda (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta} + \partial_\sigma F^{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\lambda} (K_{AF})^\mu \partial_\sigma A^\nu = 0, \quad (\text{D.1.13})$$

$$-J^\lambda + \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\alpha\beta}^\lambda (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta} + \partial_\sigma F^{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma}{}^\lambda (K_{AF})^\mu \partial^\sigma A^\nu = 0, \quad (\text{D.1.14})$$

$$\partial_\sigma F^\sigma{}_\lambda + \underbrace{\frac{1}{4} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu F^{\alpha\beta}}_{\frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu \partial^\alpha A^\beta} + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} (K_{AF})^\mu \partial^\sigma A^\nu = J_\lambda, \quad (\text{D.1.15})$$

$$\partial_\sigma F^\sigma{}_\lambda + \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu \partial^\alpha A^\beta + \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\sigma\nu} (K_{AF})^\mu \partial^\sigma A^\nu = J_\lambda, \quad (\text{D.1.16})$$

que resulta na equação de movimento

$$\partial_\sigma F^\sigma{}_\lambda + \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})^\mu \partial^\alpha A^\beta = J_\lambda. \quad (\text{D.1.17})$$

D.2 Forma vetorial das equações de movimento

A equação de movimento, abaixo reescrita,

$$\partial_\sigma F^{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} (K_{AF})_\mu F_{\alpha\beta} = J^\lambda,$$

fornece explicitamente a lei de Gauss quando tomamos $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_i F^{i0} + \frac{1}{2} \epsilon^{0ijk} (K_{AF})_i F_{jk} &= J^0 \quad \rightarrow \quad \partial_i F^{i0} - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (K_{AF})_i F_{jk} = J^0, \\ \partial_i E^i - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (K_{AF})_i \epsilon_{jkm} B_m &= J^0 \quad \rightarrow \quad \partial_i E^i - \frac{1}{2} \epsilon_{jki} \epsilon_{jkm} (K_{AF})_i (K_{AF})_m = J^0, \\ \partial_i E^i - \frac{1}{2} 2\delta_{mi} (K_{AF})_i B_m &= J^0 \quad \rightarrow \quad \partial_i E^i - (K_{AF})_m B_m = J^0, \end{aligned}$$

que na forma vetorial é

$$\partial_i E^i - \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B} = \rho \quad \text{ou} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{B} = \rho, \quad (\text{D.2.1})$$

onde ρ é densidade de carga. A lei de Ampère é obtida fazendo $\lambda = i$ na Eq. (D.2):

$$\partial_\sigma F^{\sigma i} + \frac{1}{2} \epsilon^{i\mu\alpha\beta} (K_{AF})_\mu F_{\alpha\beta} = J^i \quad (\text{D.2.2})$$

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} + \frac{1}{2} \epsilon^{i0lm} (K_{AF})_0 F_{lm} + \frac{1}{2} \epsilon^{ik0m} (K_{AF})_k F_{0m} + \frac{1}{2} \epsilon^{ikm0} (K_{AF})_k F_{m0} = J^i \quad (\text{D.2.3})$$

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} + \frac{1}{2} \epsilon^{i0lm} (K_{AF})_0 F_{lm} + \frac{1}{2} 2\epsilon^{ik0m} (K_{AF})_k F_{0m} = J^i, \quad (\text{D.2.4})$$

$$-\partial_t E^i + \epsilon_{jik} \partial_j B_k - \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} (K_{AF})_0 \epsilon_{lmp} B_p + \epsilon^{ikm} (K_{AF})_k E^m = J^i, \quad (\text{D.2.5})$$

onde usamos $\epsilon^{0ilm} = \epsilon^{ilm}$, que permite passar do símbolo de Levi-Civita 4-dimensional para o 3-dimensional. Assim,

$$-\partial_t E^i - \epsilon_{ijk} \partial_j B_k + \frac{1}{2} \epsilon_{ilm} \epsilon_{lmp} (K_{AF})_0 B_p + \epsilon^{ikm} (K_{AF})_k E^m = J^i, \quad (\text{D.2.6})$$

$$-\partial_t E^i - \epsilon_{ijk} \partial_j B_k + \frac{1}{2} 2\delta_{ip} (K_{AF})_0 B_p - \epsilon^{ikm} (K_{AF})^k E^m = J^i, \quad (\text{D.2.7})$$

$$-\partial_t E^i - \epsilon_{ijk} \partial_j B_k + (K_{AF})_0 B_i + \epsilon_{ikm} (K_{AF})^k E^m = J^i, \quad (\text{D.2.8})$$

$$-\partial_t E^i + \epsilon_{ijk} \partial_j B^k - (K_{AF})_0 B^i + (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E})^i = J^i, \quad (\text{D.2.9})$$

obtemos, usando a densidade de corrente $\mathbf{j}$,

$$-\partial_t E^i + (\nabla \times \mathbf{B})^i - (K_{AF})_0 B^i + (\mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E})^i = J^i, \quad (\text{D.2.10})$$

$$-\partial_t \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{B} - (K_{AF})_0 \mathbf{B} + \mathbf{K}_{AF} \times \mathbf{E} = \mathbf{j}. \quad (\text{D.2.11})$$

MATRIZ DE DISPERSÃO MCFJ

E.1 Determinante da matriz de dispersão de Carroll-Field-Jackiw

Trabalhando no espaço de Fourier, consideramos que o campo A^β tenha a seguinte dependência:

$$A^\beta = \tilde{A}^\beta \exp(-ip \cdot x) \rightarrow A^\beta = \tilde{A}^\beta e^{-(ip_0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}, \quad (\text{E.1.1})$$

valendo também a correspondência:

$$\partial_\mu \rightarrow -ip_\mu, \quad (\text{E.1.2})$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \rightarrow -ip_\mu (-ip^\mu) = -p_\mu p^\mu = -p^2. \quad (\text{E.1.3})$$

Assim, o operador $M_{\lambda\beta}$ pode ser escrito como

$$M_{\lambda\beta}(p) = -p^2 g_{\lambda\beta} - i\epsilon_{\lambda\beta\mu\alpha} (K_{AF})^\mu p^\alpha, \quad (\text{E.1.4})$$

que admite uma forma de matriz 4×4 , mostrada no final deste Apêndice. O determinante desta matriz, dado a seguir,

$$\begin{aligned} \det \mathbb{M} = & p^4 [-p^4 + (\mathbf{K}_{AF})^2 p_0^2 - 2(K_{AF})_0 p_0 ((\mathbf{K}_{AF}) \cdot \mathbf{p}) + (K_{AF})_0^2 \mathbf{p}^2 \\ & + 2(K_{AF})_1 p_3 (K_{AF})_3 p_1 + 2(K_{AF})_2 p_3 (K_{AF})_3 p_2 + 2(K_{AF})_1 p_1 (K_{AF})_2 p_2 \\ & - (K_{AF})_3^2 p_1^2 - (K_{AF})_2^2 p_3^2 - (K_{AF})_2^2 p_1^2 - (K_{AF})_3^2 p_2^2 - (K_{AF})_1^2 p_2^2 - (K_{AF})_1^2 p_3^2], \end{aligned} \quad (\text{E.1.5})$$

pode ser simplificado, após algumas manipulações algébricas, recaindo em

$$\det \mathbb{M} = p^4 [-p^4 - p^2 K_{AF}^2 + (K_{AF} \cdot p)^2]. \quad (\text{E.1.6})$$

A relação de dispersão é obtida pela condição $\det \mathbb{M} = 0$, o que nos leva a duas relações:

$$p^4 + p^2 K_{AF}^2 - (K_{AF} \cdot p)^2 = 0, \quad (\text{E.1.7})$$

onde adotamos

$$K_{AF}^2 = ((K_{AF})_0^2 - \mathbf{K}_{AF}^2), \quad p^2 = (p_0^2 - \mathbf{p}^2) \quad \text{e} \quad K_{AF} \cdot p = (K_{AF})_0 p_0 - (\mathbf{K}_{AF} \cdot \mathbf{p}), \quad (\text{E.1.8})$$

e descartamos $p^4 = 0$, que corresponde a modos de propagação não físicos. Esta é relação de dispersão para a eletrodinâmica de MCFJ, que será estudada em maiores detalhes a fim de descrever a propagação de sinais eletromagnéticos nesta teoria. Como a matriz é muito extensa, foi necessário colocá-la aqui separadamente, na página seguinte.

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} -p^2 & -i(K_{AF})_{2p_3} + i(K_{AF})_{3p_2} & i(K_{AF})_{1p_3} - i(K_{AF})_{3p_1} & -i(K_{AF})_{1p_2} + i(K_{AF})_{2p_1} \\ i(K_{AF})_{2p_3} - i(K_{AF})_{3p_2} & p^2 & i(K_{AF})_{0p_3} - i(K_{AF})_{3p_0} & -i(K_{AF})_{0p_2} + i(K_{AF})_{2p_0} \\ -i(K_{AF})_{1p_3} + i(K_{AF})_{3p_1} & -i(K_{AF})_{0p_3} + i(K_{AF})_{3p_0} & p^2 & i(K_{AF})_{0p_1} - i(K_{AF})_{1p_0} \\ i(K_{AF})_{1p_2} - i(K_{AF})_{2p_1} & i(K_{AF})_{0p_2} - i(K_{AF})_{2p_0} & -i(K_{AF})_{0p_1} + i(K_{AF})_{1p_0} & p^2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1.9})$$

ELETRODINÂMICA EM MEIOS CONTÍNUOS

A eletrodinâmica de Maxwell em meios contínuos é representada pela seguinte Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (\text{F.0.1})$$

onde $G^{\mu\nu}$ é o chamado *field-strength* em meios materiais, definido por

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (\text{F.0.2})$$

onde $\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$ é chamado de tensor constitutivo, por definir a estrutura das relações constitutivas do meio. O tensor constitutivo parametriza a resposta do meio quando submetido a campos eletromagnéticos. Tal tensor satisfaz as seguintes propriedades de simetria:

$$\chi^{\mu\nu\alpha\beta} = -\chi^{\nu\mu\alpha\beta}, \quad \chi^{\mu\nu\alpha\beta} = -\chi^{\mu\nu\beta\alpha}, \quad \chi^{\mu\nu\alpha\beta} = \chi^{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (\text{F.0.3})$$

As equações de movimento, podem ser obtidas através da equação e Euler-Lagrange, que fornecem

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (\text{F.0.4})$$

A equação acima gera as leis de Ampère e Gauss. As demais equações são obtidas através da identidade de Bianchi:

$$\partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) = 0. \quad (\text{F.0.5})$$

Com isso, é possível escrever as equações de movimento na forma vetorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{F.0.6})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (\text{F.0.7})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{F.0.8})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{F.0.9})$$

onde valem $\mathbf{D} = \tilde{\epsilon}\mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, as relações constitutivas para o deslocamento elétrico e campo magnético, respectivamente.

EQUAÇÃO DE ONDA EM MEIOS MATERIAIS NA ELETRODINÂMICA DE MCFJ

As equações de MCFJ num meio contínuo são:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = J^0 - \mathbf{K}_{\mathbf{AF}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{G.0.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{J} + (K_{AF})_0 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{b} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{G.0.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\text{G.0.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (\text{G.0.4})$$

Associamos uma dependência do tipo Fourier para os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ e corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (\text{G.0.5})$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{D}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (\text{G.0.6})$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{J}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (\text{G.0.7})$$

de modo que podemos escrever as equações de movimento no espaço de Fourier:

$$i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = J^0 - \mathbf{K}_{\mathbf{AF}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{G.0.8})$$

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) + i\omega \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{J}} + (K_{AF})_0 \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{K}_{\mathbf{AF}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{G.0.9})$$

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\text{G.0.10})$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) - \omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (\text{G.0.11})$$

Assim, as Eqs. (G.0.2) e (G.0.4) tornam-se

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) + i\omega \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{J}} + (K_{AF})_0 \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{K}_{\mathbf{AF}} \times \tilde{\mathbf{E}}, \quad (\text{G.0.12})$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} - \omega \tilde{\mu}(\omega) \tilde{\mathbf{H}} = 0. \quad (\text{G.0.13})$$

Tomando o produto vetorial de $\mathbf{k}$ com a Eq. (G.0.13),

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} = \omega \tilde{\mu}(\omega) \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}, \quad (\text{G.0.14})$$

e substituindo-a em (G.0.12) considerando (G.0.11), obtemos:

$$\frac{1}{\omega \tilde{\mu}(\omega)} \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} + \omega \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mathbf{E}} = -i \tilde{\mathbf{J}} - \frac{i(K_{AF})_0}{\omega} \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} - i \mathbf{K}_{AF} \times \tilde{\mathbf{E}}, \quad (\text{G.0.15})$$

ou também na forma indicial,

$$\begin{aligned} k^i \left(k^j \tilde{E}^j \right) - \mathbf{k}^2 \tilde{E}^i + \omega^2 \tilde{\mu}(\omega) \tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega) \tilde{E}^j = -i \omega \tilde{\mu}(\omega) \tilde{J}^i - i (K_{AF})_0 \tilde{\mu}(\omega) \epsilon_{imn} k^m \tilde{E}^n \\ - i \omega \tilde{\mu}(\omega) \epsilon_{imn} (K_{AF})^m \tilde{E}^n, \end{aligned} \quad (\text{G.0.16})$$

onde utilizamos as relações constitutivas $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}$ e $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mu}(\omega) \tilde{\mathbf{H}}$. Fazendo $\tilde{\mu} = \mu_0$, $\tilde{\mathbf{J}} = 0$, podemos escrever

$$k^i \left(k^j E^j \right) - k^2 E^i = -\omega^2 \mu_0 \tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega) E^j, \quad (\text{G.0.17})$$

onde definimos o tensor de permissividade,

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ij}(\omega) + i \frac{k_{AF}^0}{\omega^2} \epsilon_{ikj} k^k + i \epsilon_{ikj} \frac{k_{AF}^k}{\omega}. \quad (\text{G.0.18})$$

AUTOVALORES E AUTOVETORES DA MATRIZ DE MISTURA ÁXION-FÓTON

Determinando os autovalores:

$$\det \begin{bmatrix} \omega - \lambda & -i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_0 \\ i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_0 & \omega - \frac{m_a^2}{2\omega} - \lambda \end{bmatrix} = (\omega - \lambda) \left(\omega - \frac{m_a^2}{2\omega} - \lambda \right) - \left(-i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_0 \right) \left(i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_0 \right), \quad (\text{H.0.1})$$

$$= (\omega - \lambda) \left(\omega - \frac{m_a^2}{2\omega} - \lambda \right) - \frac{1}{4} (g_{\alpha\gamma}B_0)^2, \quad (\text{H.0.2})$$

$$= \omega \left(\omega - \frac{m_a^2}{2\omega} \right) - \omega\lambda - \lambda \left(\omega - \frac{m_a^2}{2\omega} \right) + \lambda^2 - \frac{1}{4} (g_{\alpha\gamma}B_0)^2, \quad (\text{H.0.3})$$

$$= \omega^2 - \frac{m_a^2}{2} - \lambda \left(2\omega - \frac{m_a^2}{2\omega} \right) + \lambda^2 - \frac{1}{4} (g_{\alpha\gamma}B_0)^2, \quad (\text{H.0.4})$$

$$= \lambda^2 - \lambda \left(2\omega - \frac{m_a^2}{2\omega} \right) + \left(\omega^2 - \frac{m_a^2}{2} \right) - \frac{1}{4} (g_{\alpha\gamma}B_0)^2. \quad (\text{H.0.5})$$

Igualando o determinando a zero e resolvendo a equação quadrática para λ , temos

$$\lambda_{\pm} = \frac{\left(2\omega - \frac{m_a^2}{2\omega} \right)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(2\omega - \frac{m_a^2}{2\omega} \right)^2 - 4 \left[\left(\omega^2 - \frac{m_a^2}{2} \right) - \frac{1}{4} (g_{\alpha\gamma}B_0)^2 \right]}. \quad (\text{H.0.6})$$

O radicando pode ser simplificado

$$\Delta = \left(2\omega - \frac{m_a^2}{2\omega} \right)^2 - 4 \left[\left(\omega^2 - \frac{m_a^2}{2} \right) - \frac{1}{4} (g_{\alpha\gamma}B_0)^2 \right], \quad (\text{H.0.7})$$

$$= 4\omega^2 + \frac{m_a^4}{4\omega^2} - 2m_a^2 - 4\omega^2 + 2m_a^2 + (g_{\alpha\gamma}B_0)^2, \quad (\text{H.0.8})$$

$$\Delta = \frac{m_a^4}{4\omega^2} + (g_{\alpha\gamma}B_0)^2. \quad (\text{H.0.9})$$

Podemos usar uma redefinição

$$\Delta' = 4\omega^2 \Delta, \quad (\text{H.0.10})$$

dessa forma, teremos

$$\lambda_{\pm} = \frac{\left(2\omega - \frac{m_a^2}{2\omega}\right)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta'}{4\omega^2}}, \quad (\text{H.0.11})$$

$$\lambda_{\pm} = \omega - \frac{m_a^2}{4\omega} \pm \frac{\sqrt{\Delta'}}{4\omega}. \quad (\text{H.0.12})$$

Agora podemos calcular os respectivos autovetores. Para o autovalor λ_+ , teremos

$$\left(\begin{bmatrix} \omega - \lambda_+ & -i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_0 \\ i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_0 & \omega - \frac{m_a^2}{2\omega} - \lambda_+ \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \langle A_y | \Psi(z) \rangle \\ \langle a | \Psi(z) \rangle \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{H.0.13})$$

$$\left(\begin{bmatrix} \omega - \left(\omega - \frac{m_a^2}{4\omega} + \frac{\sqrt{\Delta'}}{4\omega} \right) & -i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_0 \\ i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_0 & \omega - \frac{m_a^2}{2\omega} - \left(\omega - \frac{m_a^2}{4\omega} + \frac{\sqrt{\Delta'}}{4\omega} \right) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \langle A_y | \Psi(z) \rangle \\ \langle a | \Psi(z) \rangle \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{H.0.14})$$

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{m_a^2}{4\omega} - \frac{\sqrt{\Delta'}}{4\omega} & -i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_0 \\ i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_0 & -\frac{m_a^2}{4\omega} - \frac{\sqrt{\Delta'}}{4\omega} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \langle A_y | \Psi(z) \rangle \\ \langle a | \Psi(z) \rangle \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{H.0.15})$$

Temos o sistema,

$$\left(\frac{m_a^2}{4\omega} - \frac{\sqrt{\Delta'}}{4\omega} \right) \langle A_y | \Psi(z) \rangle - i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_0 \langle a | \Psi(z) \rangle = 0, \quad (\text{H.0.16})$$

$$i\frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}B_0 \langle A_y | \Psi(z) \rangle - \left(\frac{m_a^2}{4\omega} + \frac{\sqrt{\Delta'}}{4\omega} \right) \langle a | \Psi(z) \rangle = 0. \quad (\text{H.0.17})$$

Multiplicando por 4ω , temos

$$\left(m_a^2 - \sqrt{\Delta'} \right) \langle A_y | \Psi(z) \rangle - i2\omega g_{\alpha\gamma}B_0 \langle a | \Psi(z) \rangle = 0, \quad (\text{H.0.18})$$

$$i2\omega g_{\alpha\gamma}B_0 \langle A_y | \Psi(z) \rangle - \left(m_a^2 + \sqrt{\Delta'} \right) \langle a | \Psi(z) \rangle = 0. \quad (\text{H.0.19})$$

É fácil notar que, para o autovalor λ_- , obtém-se

$$\left(m_a^2 + \sqrt{\Delta'} \right) \langle A_y | \Psi(z) \rangle - i2\omega g_{\alpha\gamma}B_0 \langle a | \Psi(z) \rangle = 0, \quad (\text{H.0.20})$$

$$i2\omega g_{\alpha\gamma}B_0 \langle A_y | \Psi(z) \rangle - \left(m_a^2 - \sqrt{\Delta'} \right) \langle a | \Psi(z) \rangle = 0. \quad (\text{H.0.21})$$

Associado a λ_+ , temos

$$\left(m_a^2 - \sqrt{\Delta'}\right) \langle A_y | \Psi(z) \rangle - i2\omega g_{\alpha\gamma} B_0 \langle a | \Psi(z) \rangle = 0, \quad (\text{H.0.22})$$

$$\langle a | \Psi(z) \rangle = \frac{\left(m_a^2 - \sqrt{\Delta'}\right)}{2i\omega g_{\alpha\gamma} B_0} \langle A_y | \Psi(z) \rangle, \quad (\text{H.0.23})$$

$$\langle a | \Psi(z) \rangle^2 = \frac{\left(m_a^2 - \sqrt{\Delta'}\right)^2}{4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2} \langle A_y | \Psi(z) \rangle^2, \quad (\text{H.0.24})$$

$$\langle a | \Psi(z) \rangle^2 + \langle A_y | \Psi(z) \rangle^2 = \frac{\left(m_a^2 - \sqrt{\Delta'}\right)^2}{4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2} \langle A_y | \Psi(z) \rangle^2 + \langle A_y | \Psi(z) \rangle^2 = 1, \quad (\text{H.0.25})$$

$$\left[\frac{\left(m_a^2 - \sqrt{\Delta'}\right)^2}{4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2} + 1 \right] \langle A_y | \Psi(z) \rangle^2 = \left[\frac{\left(m_a^2 - \sqrt{\Delta'}\right)^2 + 4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2}{4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2} \right] \langle A_y | \Psi(z) \rangle^2 = 1, \quad (\text{H.0.26})$$

$$\langle A_y | \Psi(z) \rangle^2 = \frac{4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2}{2 \left(\Delta' - m_a^2 \sqrt{\Delta'} \right)} \quad (\text{H.0.27})$$

$$\langle A_y | \Psi(z) \rangle = \frac{2\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{\sqrt{2 \left(\Delta' - m_a^2 \sqrt{\Delta'} \right)}}. \quad (\text{H.0.28})$$

A segunda equação fornece

$$i2\omega g_{a\gamma} B_0 \langle A_y | \Psi(z) \rangle - \left(m_a^2 + \sqrt{\Delta'}\right) \langle a | \Psi(z) \rangle = 0,$$

$$\langle a | \Psi(z) \rangle = \frac{i2\omega g_{a\gamma} B_0}{\left(m_a^2 + \sqrt{\Delta'}\right)} \langle A_y | \Psi(z) \rangle,$$

$$\langle a | \Psi(z) \rangle = \frac{2i\omega g_{a\gamma} B_0}{\left(m_a^2 + \sqrt{\Delta'}\right)} \left[\frac{2\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{\sqrt{2 \left(\Delta' - m_a^2 \sqrt{\Delta'} \right)}} \right],$$

$$\langle a | \Psi(z) \rangle = \frac{4i\omega^2 (g_{a\gamma} B_0)^2}{\left(m_a^2 + \sqrt{\Delta'}\right)} \frac{1}{\sqrt{2 \left(\Delta' - m_a^2 \sqrt{\Delta'} \right)}}$$

Teremos o auto vetor

$$|\lambda_+\rangle = \frac{2\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{\sqrt{2(\Delta' - m_a^2 \sqrt{\Delta'})}} |A_y\rangle + \frac{4i\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2}{(m_a^2 + \sqrt{\Delta'})} \frac{1}{\sqrt{2(\Delta' - m_a^2 \sqrt{\Delta'})}} |a\rangle, \quad (\text{H.0.29})$$

$$|\lambda_+\rangle = \frac{2\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{\sqrt{2(\Delta' - m_a^2 \sqrt{\Delta'})}} \left[|A_y\rangle + \frac{2i\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{(m_a^2 + \sqrt{\Delta'})} |a\rangle \right]. \quad (\text{H.0.30})$$

Note que usamos

$$\begin{aligned} \sqrt{(m_a^2 - \sqrt{\Delta'})^2 + 4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2} &= \sqrt{m_a^4 - 2m_a^2 \sqrt{\Delta'} + \Delta' + 4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2}, \\ &= \sqrt{2(\Delta' - m_a^2 \sqrt{\Delta'})} \end{aligned}$$

com, $\Delta' = 4\omega^2 \left(\frac{m_a^4}{4\omega^2} + (g_{\alpha\gamma} B_0)^2 \right)$.

Associado a λ_- , temos:

$$(m_a^2 + \sqrt{\Delta'}) \langle A_y | \Psi(z) \rangle - i2\omega g_{\alpha\gamma} B_0 \langle a | \Psi(z) \rangle = 0, \quad (\text{H.0.31})$$

$$i2\omega g_{\alpha\gamma} B_0 \langle A_y | \Psi(z) \rangle - (m_a^2 - \sqrt{\Delta'}) \langle a | \Psi(z) \rangle = 0. \quad (\text{H.0.32})$$

A primeira gera

$$\langle a | \Psi(z) \rangle = \frac{(m_a^2 + \sqrt{\Delta'})}{i2\omega g_{\alpha\gamma} B_0} \langle A_y | \Psi(z) \rangle, \quad (\text{H.0.33})$$

$$\langle a | \Psi(z) \rangle^2 = \frac{(m_a^2 + \sqrt{\Delta'})^2}{4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2} \langle A_y | \Psi(z) \rangle^2, \quad (\text{H.0.34})$$

$$\langle a | \Psi(z) \rangle^2 + \langle A_y | \Psi(z) \rangle^2 = \frac{(m_a^2 + \sqrt{\Delta'})^2}{4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2} \langle A_y | \Psi(z) \rangle^2 + \langle A_y | \Psi(z) \rangle^2 = 1, \quad (\text{H.0.35})$$

$$\left(\frac{(m_a^2 + \sqrt{\Delta'})^2}{4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2} + 1 \right) \langle A_y | \Psi(z) \rangle^2 = \frac{(m_a^2 + \sqrt{\Delta'})^2 + 4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2}{4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2} \langle A_y | \Psi(z) \rangle^2 = 1 \quad (\text{H.0.36})$$

$$\langle A_y | \Psi(z) \rangle^2 = \frac{4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2}{(m_a^2 + \sqrt{\Delta'})^2 + 4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2}, \quad (\text{H.0.37})$$

$$\langle A_y | \Psi(z) \rangle = \frac{2\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{\sqrt{(m_a^2 + \sqrt{\Delta'})^2 + 4\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2}}, \quad (\text{H.0.38})$$

$$\langle A_y | \Psi(z) \rangle = \frac{2\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{\sqrt{2(\Delta' + m_a^2 \sqrt{\Delta'})}}. \quad (\text{H.0.39})$$

A segunda equação da

$$\langle a | \Psi(z) \rangle = \frac{2i\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{(m_a^2 - \sqrt{\Delta'})} \langle A_y | \Psi(z) \rangle, \quad (\text{H.0.40})$$

$$\langle a | \Psi(z) \rangle = \frac{2i\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{(m_a^2 - \sqrt{\Delta'})} \left[\frac{2\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{\sqrt{2(\Delta' + m_a^2 \sqrt{\Delta'})}} \right], \quad (\text{H.0.41})$$

$$\langle a | \Psi(z) \rangle = \frac{4i\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2}{(m_a^2 - \sqrt{\Delta'})} \frac{1}{\sqrt{2(\Delta' + m_a^2 \sqrt{\Delta'})}}. \quad (\text{H.0.42})$$

Teremos portanto o autovetor

$$|\lambda_{-}\rangle = \frac{2\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{\sqrt{2(\Delta' + m_a^2 \sqrt{\Delta'})}} |A_y\rangle + \frac{4i\omega^2 (g_{\alpha\gamma} B_0)^2}{(m_a^2 - \sqrt{\Delta'})} \frac{1}{\sqrt{2(\Delta' + m_a^2 \sqrt{\Delta'})}} |a\rangle, \quad (\text{H.0.43})$$

$$|\lambda_{-}\rangle = \frac{2\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{\sqrt{2(\Delta' + m_a^2 \sqrt{\Delta'})}} \left[|A_y\rangle + \frac{2i\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{(m_a^2 - \sqrt{\Delta'})} |a\rangle \right]. \quad (\text{H.0.44})$$

Assim, obtemos os autovetores $|e^{i\lambda_+z} - e^{i\lambda_-z}|^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{(\lambda_+ - \lambda_-)z}{2} \right)$. Tomemos

$$|\lambda_+\rangle = \frac{2\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{\sqrt{2(\Delta' - m_a^2 \sqrt{\Delta'})}} \left[|A_y\rangle + \frac{2i\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{(m_a^2 + \sqrt{\Delta'})} |a\rangle \right],$$

$$|\lambda_-\rangle = \frac{2\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{\sqrt{2(\Delta' + m_a^2 \sqrt{\Delta'})}} \left[|A_y\rangle + \frac{2i\omega g_{\alpha\gamma} B_0}{(m_a^2 - \sqrt{\Delta'})} |a\rangle \right].$$

Mostrando que:

$$|e^{i\lambda_+z} - e^{i\lambda_-z}|^2 = \left| \exp \left[i \frac{\lambda_+ z}{2} \right] \exp \left[i \frac{\lambda_- z}{2} \right] \left(\exp \left[i \frac{(\lambda_+ - \lambda_-) z}{2} \right] - \exp \left[i \frac{(\lambda_- - \lambda_+) z}{2} \right] \right) \right|^2 \quad (\text{H.0.45})$$

$$, = |e^{i\lambda_+z} - e^{i\lambda_-z}|^2 = \left| \exp \left[i \frac{\lambda_+ z}{2} \right] \exp \left[i \frac{\lambda_- z}{2} \right] \left(\exp \left[i \frac{(\lambda_+ - \lambda_-) z}{2} \right] - \exp \left[-i \frac{(\lambda_+ - \lambda_-) z}{2} \right] \right) \right|^2 \quad (\text{H.0.46})$$

$$, = \left| \exp \left[i \frac{\lambda_+ z}{2} \right] \exp \left[i \frac{\lambda_- z}{2} \right] \left(2i \sin \left[\frac{(\lambda_+ - \lambda_-) z}{2} \right] \right) \right|^2, \quad (\text{H.0.47})$$

resultando em

$$|e^{i\lambda_+z} - e^{i\lambda_-z}|^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{(\lambda_+ - \lambda_-) z}{2} \right). \quad (\text{H.0.48})$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D. A. Gurnett and A. Bhattacharjee, *Introduction to Plasma Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [2] T. J. M. Boyd and J. J. Sanderson, *The Physics of plasmas* (Cambridge University Press, New York, 2003).
- [3] J. A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*, 3rd ed. (Springer, New York, 2004).
- [4] I. Langmuir, Oscillations in Ionized Gases, [Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **14**, 627 \(1928\)](#).
- [5] A. Piel, *Plasmas Physics - An Introduction to Laboratory, Space, and Fusion Plasmas* (Springer, Heidelberg, 2010).
- [6] R. M. O. Galvão, *Introdução à física de plasmas e suas aplicações tecnológicas*. Rio de Janeiro: VI Escola do CBPF, [s.d.].
- [7] H. A. Bethe, Energy production in stars, [Phys. Rev. **55**, 103 \(1939\)](#).
- [8] H. A. Bethe, Energy production in stars, [Phys. Rev. **55**, 434 \(1939\)](#).
- [9] M Chen, Key Issues and Application Prospects in High-Temperature Plasma Physics, [Academic Journal of Science and Technology **12**, 03 \(2024\)](#).
- [10] J. A. Bittencourt, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, 3rd ed. (Springer, Los Angeles, CA, USA, 2016).
- [11] L. Spitzer, The Stellarator Concept, [Phys. Fluids **1**, 253 \(1958\)](#).
- [12] P. Helander, Theory of plasma confinement in non axisymmetric magnetic fields, [Rep. Prog. Phys **77**, 087001 \(2014\)](#).
- [13] A. E. Appleton, The Ionosphere As A Doubly Refracting Medium, Proc. Phys. Soc. 44 368, (1932).
- [14] A. E. Appleton, Wireless Studies Of The Ionosphere, [Inst. elect. Engrs, **71**, 642-650, \(1932\)](#).
- [15] A. E. Appleton, M. A. F. Barnett, Local reflection of wireless waves from the upper atmosphere, [Nature, **333**, VOL. **115** \(1925\)](#).
- [16] A. E. Appleton, M. A. F. Barnett, On some direct evidence for downward atmospheric reflection of electric rays, Roy. Soc. London Proc. Ser. A 109, 621-641 (1925).
- [17] A. E. Appleton, M. A. F. Barnett, On Wireless Interference Phenomena between Ground Waves and Waves Deviated by the Upper Atmosphere, Proc. R. Soc. Lond. A 1926 113, 450-458, (1926).

- [18] A. E. Kennelly, On the elevation of the electrically-conducting strata of the Earth's atmosphere, *Electr. World Eng.* **39**, 473-473 (1902).
- [19] J. A. Ratcliff, Edward Victor Appleton. 1892-1965, Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society. **12**, 1-21 (1966).
- [20] J. A. Ratcliff, The formation of the ionosphere. Ideas of the early years (1925-1955). *J. Atmos. Terr. Phys.* **36**, 2167 (1974).
- [21] H. Alfvén, Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves, *Nature* **150**, 405 (1942).
- [22] A. A. Vlasov, The vibrational properties of an electron gas, *Sov. Phys. Usp.* **10**, 721 (1968).
- [23] L. Landau, On the vibrations of the electronic plasma, *J. Phys.* **X**, 01 (1946).
- [24] D.E. Kharzeev, The chiral magnetic effect and anomaly-induced transport, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **75**, 133 (2014); D.E. Kharzeev, J. Liao, S.A. Voloshin, and G. Wang, Chiral magnetic and vortical effects in high-energy nuclear collisions – A status report, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **88**, 1 (2016);
- [25] Q. Li, D.E. Kharzeev, C. Zhang, Y. Huang, I. Pletikosić, A.V. Fedorov, R.D. Zhong, J.A. Schneeloch, G.D. Gu, and T. Valla, Chiral magnetic effect in ZrTe_5 , *Nat. Phys.* **12**, 550 (2016).
- [26] A. L. Levy, A. B. Sushkov, F. Liu, B. Shen, Ni Ni, H. D. Drew, and G. S. Jenkins, Optical evidence of the chiral magnetic anomaly in the Weyl semimetal TaAs, *Phys. Rev. B* **101**, 125102 (2020).
- [27] H. Tashiro and T. Vachaspati Chiral effects and cosmic magnetic fields, *Phys. Rev. D* **86**, 105033 (2012).
- [28] M. Dvornikov and V.B. Semikoz, Influence of the turbulent motion on the chiral magnetic effect in the early universe, *Phys. Rev. D* **95**, 043538 (2017).
- [29] E. V. Gorbar and I. A. Shovkovy, Chiral anomalous processes in magnetospheres of pulsars and black holes, *Eur. Phys. J. C* **82**, 625 (2022).
- [30] C. Dehman and J. A. Pons, Magnetar field dynamics shaped by chiral anomalies and helicity, *Phys. Rev. Research* **7**, 033231 (2025).
- [31] P. Pavlovic, N. Leite, and G. Sigl, Chiral magnetohydrodynamic turbulence, *Phys. Rev. D* **96**, 023504 (2017).
- [32] Y. Akamatsu and N. Yamamoto, Chiral Plasma Instabilities, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 052002 (2013); A. Boyarsky, O. Ruchayskiy, and M. Shaposhnikov, Long-Range Magnetic Fields in the Ground State of the Standard Model Plasma, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 111602 (2012).
- [33] G. Sigl and N. Leite, Chiral magnetic effect in protoneutron stars and magnetic field spectral evolution, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **01** (2016) 025.
- [34] M. Dvornikov and V.B. Semikoz, Magnetic field instability in a neutron star driven by the electroweak electron-nucleon interaction versus the chiral magnetic effect, *Phys. Rev. D* **91**, 061301(R) (2015).
- [35] K. Hattori, Y. Hirono, Ho-Ung Yee, and Yi Yin, Magnetohydrodynamics with chiral anomaly: Phases of collective excitations and instabilities, *Phys. Rev. D* **100**, 065023 (2019).

- [36] D. T. Son and P. Surówka, Hydrodynamics with Triangle Anomalies, [Phys. Rev. Lett. **103**, 191601 \(2009\)](#).
- [37] M. A. Stephanov and Y. Yin, Chiral Kinetic Theory, [Phys. Rev. Lett. **109**, 162001 \(2012\)](#).
- [38] B. Guo, Chirality-induced negative refraction in magnetized plasma, [Phys. Plasmas **20**, 093596 \(2013\)](#).
- [39] M. X. Gao, B. Guo, L. Peng, and X. Cai, Dispersion relations for electromagnetic wave propagation in chiral plasmas, [Phys. Plasmas **21**, 114501 \(2014\)](#).
- [40] G. R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, 2nd ed. (Dover Publications, INC., New York, 1975); A. K. Bain, *Crystal Optics: Properties and Applications* (Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Germany, 2019).
- [41] H. S. Bennett and E. A. Stern, Faraday effect in solids [Phys. Rev. **137**, A448 \(1965\)](#); L. M. Roth. Theory of the Faraday effect in solids, [Phys. Rev. **133**, A542 \(1964\)](#).
- [42] W. S. Porter and E. M. Bock Jr., Faraday effect in a plasma, [Am. J. Phys. **33**, 1070 \(1965\)](#).
- [43] J. Shibata, A. Takeuchi, H. Kohno, and G. Tatara, Theory of electromagnetic wave propagation in ferromagnetic Rashba conductor, [J. Appl. Phys. **123**, 063902 \(2018\)](#).
- [44] E. U. Condon, Theories of optical rotatory power, [Rev. Mod. Phys. **9**, 432 \(1937\)](#).
- [45] L. Ohnoutek *et al.*, Strong interband Faraday rotation in 3D topological insulator Bi₂Se₃, [Sci. Rep. **6**, 19087 \(2016\)](#).
- [46] W.-K. Tse and A. H. MacDonald, Giant Magneto-Optical Kerr Effect and Universal Faraday Effect in Thin-Film Topological Insulators, [Phys. Rev. Lett. **105**, 057401 \(2010\)](#); Magneto-optical and magnetoelectric effects of topological insulators in quantizing magnetic fields, [Phys. Rev. B **82**, 161104 \(2010\)](#); Magneto-optical Faraday and Kerr effects in topological insulator films and in other layered quantized Hall systems, [Phys. Rev. B **84**, 205327 \(2011\)](#).
- [47] I. Crassee, J. Levallois, A. L. Walter, M. Ostler, A. Bostwick, E. Rotenberg, T. Seyller, D. van der Marel, and A. B. Kuzmenko, Giant Faraday rotation in single- and multilayer graphene, [Nat. Phys. **7**, 48 \(2011\)](#); R. Shimano, G. Yumoto, J. Y. Yoo, R. Matsunaga, S. Tanabe, H. Hibino, T. Morimoto, and H. Aoki, Quantum Faraday and Kerr rotations in graphene, [Nat. Commun. **4**, 1841 \(2013\)](#).
- [48] D. R. Lorimer and M. Kramer, *Handbook of Pulsar Astronomy* (Cambridge University Press, New York 2005).
- [49] J. L. Han, R. N. Manchester, W. van Straten, and P. Demorest, Pulsar Rotation Measures and Large-scale Magnetic Field Reversals in the Galactic Disk, [ApJS **234**, 11 \(2018\)](#).
- [50] C. Ng *et al.*, Faraday rotation measures of Northern hemisphere pulsars using CHIME/Pulsar, [MNRAS **496**, 2836 \(2020\)](#).
- [51] S. P. O'Sullivan *et al.*, The Faraday rotation measure grid of the LOFAR two-metre sky survey: Data release 2, [MNRAS **519**, 5723 \(2023\)](#).
- [52] J. L. Feng, Dark matter candidates from particle physics and methods of detection, [Annu. Rev. Astron. Astrophys **48**, 495 \(2010\)](#).

- [53] R. D. Peccei and H. R. Quinn, CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles, [Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 \(1977\)](#).
- [54] S. Weinberg, A New Light Boson?, [Phys. Rev. Lett. **40**, 223 \(1978\)](#).
- [55] F. Wilczek, Problem of Strong P and T Invariance in the Presence of Instantons, [Phys. Rev. Lett. **40**, 279 \(1978\)](#).
- [56] F. Wilczek, Two Applications of Axion Electrodynamics, [Phys. Rev. Lett. **58**, 1799 \(1987\)](#).
- [57] J. Preskill, M. B. Wise, and F. Wilczek, Cosmology of the invisible axion, [Phys. Lett. B **120**, 127 \(1983\)](#).
- [58] L. F. Abbott, P. Sikivie, A cosmological bound on the invisible axion, [Phys. Lett. B **120**, 133 \(1983\)](#).
- [59] P. Sikivie, Experimental Tests of the "Invisible" Axion, [Phys. Rev. Lett. **51**, 1415 \(1983\)](#).
- [60] P. Sikivie, Invisible axion search methods, [Rev. Mod. Phys. **93**, 015004 \(2021\)](#).
- [61] A. Caputo, A. J. Millar, and E. Vitagliano, Revisiting longitudinal plasmon-axion conversion in external magnetic fields, [Phys. Rev. D **101**, 123004 \(2020\)](#).
- [62] M. Lawson, A. J. Millar, M. Pancaldi, E. Vitagliano, and F. Wilczek, Tunable Axion Plasma Haloscopes, [Phys. Rev. Lett. **123**, 141802 \(2019\)](#).
- [63] A. J. Millar *et al.*, Searching for dark matter with plasma haloscopes, [Phys. Rev. D **107**, 055013 \(2023\)](#).
- [64] J. I. McDonald and L. B. Ventura, Optical properties of dynamical axion backgrounds, [Phys. Rev. D **101**, 123503 \(2020\)](#).
- [65] H. Terças, J. D. Rodrigues, and J. T. Mendonça, Axion-Plasmon Polaritons in Strongly Magnetized Plasmas, [Phys. Rev. Lett. **120**, 181803 \(2018\)](#).
- [66] M. Khodadi, Shadow of black hole surrounded by magnetized plasma: Axion-plasmon cloud, [Nucl. Phys. B **985**, 116014 \(2022\)](#).
- [67] A. Sekine and K. Nomura, Axion electrodynamics in topological materials, [J. Appl. Phys. **129**, 141101 \(2021\)](#).
- [68] M. M. Vazifeh and M. Franz, Electromagnetic Response of Weyl Semimetals, [Phys. Rev. Lett. **111**, 027201 \(2013\)](#).
- [69] K. Fukushima, D.E. Kharzeev, and H.J. Warringa, Chiral magnetic effect, [Phys. Rev. D **78**, 074033 \(2008\)](#); D.E. Kharzeev and H. J. Warringa, Chiral magnetic conductivity, [Phys. Rev. D **80**, 034028 \(2009\)](#).
- [70] E. Barnes, J. J. Heremans, and Djordje Minic, Electromagnetic Signatures of the Chiral Anomaly in Weyl Semimetals, [Phys. Rev. Lett. **117**, 217204 \(2016\)](#).
- [71] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics, [Phys. Rev. D **41**, 1231 \(1990\)](#).

- [72] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Topologically massive gauge theories, [Ann. Phys. **140**, 372–411 \(1982\)](#).
- [73] G. V. Dunne, R. Jackiw, and C. A. Trugenberger, Topological (Chern–Simons) quantum mechanics, [Phys. Rev. D **41**, 661 \(1990\)](#).
- [74] G. V. Dunne, *Self-Dual Chern–Simons Theories*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1995).
- [75] V. A. Kostelecký and S. Samuel, Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories, [Phys. Rev. Lett. **63**, 224 \(1989\)](#).
- [76] V. A. Kostelecký and S. Samuel, Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory, [Phys. Rev. D **39**, 683 \(1989\)](#).
- [77] V. A. Kostelecký and S. Samuel, Photon and graviton masses in string theories, [Phys. Rev. Lett. **66**, 1811 \(1991\)](#).
- [78] V. A. Kostelecký and S. Samuel, Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings, [Phys. Rev. D **40**, 1886 \(1989\)](#).
- [79] D. Colladay and V. A. Kostelecký, CPT violation and the standard model, [Phys. Rev. D **41**, 661 \(1990\)](#).
- [80] D. Colladay and V. A. Kostelecký, Lorentz-violating extension of the standard model, [Phys. Rev. D **58**, 116002 \(1998\)](#).
- [81] Z. Qiu, G. Cao, and X. Huang, Electrodynamics of chiral matter, [Phys. Rev. D **95**, 036002 \(2017\)](#).
- [82] Filipe S. Ribeiro, Pedro D.S. Silva, M.M.Ferreira Jr., Cold plasma modes in the chiral Maxwell-Carroll-Field-Jackiw electrodynamics, [Phys. Rev. D **107**, 096018 \(2023\)](#).
- [83] Filipe S. Ribeiro, Pedro D.S. Silva, M.M.Ferreira Jr., Anisotropic cold plasma modes in chiral vector Maxwell-Carroll-Field-Jackiw electrodynamics, [Phys. Rev. D **109**, 076003 \(2024\)](#).
- [84] Filipe S. Ribeiro, Pedro D.S. Silva, M.M.Ferreira Jr., Optical effects in unmagnetized cold plasmas by a chiral axion factor, [Plasma Phys. Control. Fusion **67**, 015013 \(2024\)](#).
- [85] F. S. Ribeiro, P. D. S. Silva, Rodolfo Casana, and M. M. Ferreira Jr, Hypothesis of a bi-isotropic-like plasma permeating the interstellar space, [Phys. Rev. D **112**, 096014 \(2025\)](#).
- [86] F. S. Ribeiro, P. D. S. Silva, M. M. Ferreira Jr, Constraining CPT-odd electromagnetic chiral parameters with pulsar timing, [Phys. Rev. D **112**, 036002 \(2025\)](#).
- [87] F. S. Ribeiro, P. D. S. Silva, R. Casana and M. M. Ferreira Jr., Tight bounds on the Maxwell-Carroll-Field-Jackiw parameters using Fast Radio Bursts, [Phys. Rev. D \(no prelo\), arXiv:2602.22996 \[astro-ph.HE\]](#).
- [88] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics* (Cambridge University Press, New York, 2012).
- [89] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. (John Wiley & Sons, New York, 1999).
- [90] A. I. Eriksson, *Waves in Space Plasmas: An Introduction for the Course Space Physics II at Uppsala University* (Uppsala University, Uppsala, 2004).

- [91] D. G. Dimitriu and D. O. Dorohoi, New method to determine the optical rotatory dispersion of inorganic crystals applied to some samples of Carpathian Quartz, [Spectrochim. Acta Part A](#) **131**, 674 (2014).
- [92] L.A. Pajdzik and A.M. Glazer, Three-dimensional birefringence imaging with a microscope tilting-stage. I. Uniaxial crystals, [J. Appl. Cryst.](#) **39**, 326 (2006).
- [93] X. Liu, J. Yang, Z. Geng, and H. Jia, Simultaneous measurement of optical rotation dispersion and absorption spectra for chiral substances, [Chirality](#) **8**, 1071 (2022).
- [94] J.-M. Poumirol, P. Q. Liu, T. M. Slipchenko, A. Y. Nikitin, L. Martin-Moreno, J. Faist, and A. B. Kuzmenko, Electrically controlled terahertz magneto-optical phenomena in continuous and patterned graphene, [Nat. Commun.](#) **8**, 14626 (2017).
- [95] I. Tutunnikov, U. Steinitz, E. Gershnel, J.-M. Hartmann, A. A. Milner, V. Milner, and I. Sh. Averbukh, Rotation of the polarization of light as a tool for investigating the collisional transfer of angular momentum from rotating molecules to macroscopic gas flows, [Phys. Rev. Res.](#) **4**, 013212 (2022); U. Steinitz and I. Sh. Averbukh, Giant polarization drag in a gas of molecular super-rotors, [Phys. Rev. A](#) **101**, 021404(R) (2020).
- [96] E. Hecht, *Optics*, 4th ed. (Addison Wesley, San Francisco, 2002).
- [97] G. H. Wagniere, *On Chirality and the Universal Asymmetry: Reflections on Image and Mirror Image* (Wiley-VCH, Zurich, 2007).
- [98] P. Hosur, and X.-L. Qi, Tunable circular dichroism due to the chiral anomaly in Weyl semimetals, [Phys. Rev. B](#) **91**, 081106(R) (2015).
- [99] M. Nieto-Vesperinas, Optical theorem for the conservation of electromagnetic helicity: Significance for molecular energy transfer and enantiomeric discrimination by circular dichroism, [Phys. Rev. A](#) **92**, 023813 (2015).
- [100] Y. Tang and A. E. Cohen, Enhanced enantioselectivity in excitation of chiral molecules by super-chiral light, [Science](#) **332**, 333 (2011).
- [101] M. Amin, O. Siddiqui, and M. Farhat, Linear and Circular Dichroism in Graphene-Based Reflectors for Polarization Control, [Phys. Rev. Appl.](#) **13**, 024046 (2020).
- [102] L. D. Barron, *Molecular Light Scattering and Optical Activity*, 2nd ed. (Cambridge University Press, New York, 2004).
- [103] Y. Tang and A. E. Cohen, Optical Chirality and Its Interaction with Matter, [Phys. Rev. Lett.](#) **104**, 163901 (2010).
- [104] A. H. Sihvola and I. V. Lindell, Bi-isotropic constitutive relations, [Microw. Opt. Technol. Lett.](#) **4**, 295 (1991); Properties of bi-isotropic Fresnel reflection coefficients, [Opt. Commun.](#) **89**, 1 (1992); S. Ougier, I. Chenerie, A. Sihvola, and A. Priou, Propagation in bi-isotropic media: Effect of different formalisms on the propagation analysis, [Prog. Electromagn. Res.](#) **09**, 19 (1994).
- [105] P. Hillion, Manifestly covariant formalism for electromagnetism in chiral media, [Phys. Rev. E](#) **47**, 1365 (1993); Y. Itin, Dispersion relation for electromagnetic waves in anisotropic media, [Phys. Lett. A](#) **374**, 1113 (2010); N.J. Damaskos, A.L. Maffett, and P.L.E. Uslenghi, Dispersion relation for general anisotropic media, [IEEE Trans. Antennas Propagat.](#) **30**, 991 (1982).

- [106] J. A. Kong, *Electromagnetic Wave Theory* (Wiley, New York, 1986).
- [107] Y. T. Aladadi and M. A. S. Alkanhal, Classification and characterization of electromagnetic materials, *Sci. Rep.* **10**, 11406 (2020).
- [108] W. Mahmood and Q. Zhao, The double Jones birefringence in magneto-electric medium, *Sci. Rep.* **5**, 13963 (2015).
- [109] V. A. De Lorenci and G. P. Goulart, Magnetolectric birefringence revisited, *Phys. Rev. D* **78**, 045015 (2008).
- [110] P. D. S. Silva, R. Casana, and M. M. Ferreira Jr., Symmetric and antisymmetric constitutive tensors for bi-isotropic and bi-anisotropic media, *Phys. Rev. A* **106**, 042205 (2022).
- [111] E. O. Kamenetskii, Energy balance equation for electromagnetic waves in bianisotropic media, *Phys. Rev. E* **54**, 4359 (1996).
- [112] Ming-Che Chang and Min-Fong Yang, Optical signature of topological insulators, *Phys. Rev. B* **80**, 113304 (2009).
- [113] A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso and L. F. Urrutia, The magnetoelectric coupling in Electrodynamics. *Int. J. Mod. Phys. A* **34**, 1941002 (2019).
- [114] A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso, and L.F. Urrutia, Electro- and magnetostatics of topological insulators as modeled by planar, spherical, and cylindrical θ boundaries: Green's function approach, *Phys. Rev. D* **93**, 045022 (2016).
- [115] A. Lakhtakia and T. G. Mackay, Classical electromagnetic model of surface states in topological insulators, *J. Nanophoton.* **10** (3), 033004 (2016).
- [116] T. M. Melo, D. R. Viana, W. A. Moura-Melo, J. M. Fonseca, A. R. Pereira, Topological cutoff frequency in a slab waveguide: Penetration length in topological insulator walls, *Phys. Lett. A* **380**, 973 (2016).
- [117] Z.-X. Li, Yunshan Cao, Peng Yan, Topological insulators and semimetals in classical magnetic systems, *Phys. Report* **915**, 1 (2021).
- [118] R. Li, J. Wang, Xiao-Liang Qi and S.-C. Zhang, Dynamical axion field in topological magnetic insulators, *Nature Phys.* **6**, 284 (2010).
- [119] V. G. Veselago, The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ , *Sov. Phys. Usp.* **10**, 509 (1968).
- [120] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4184 (2000).
- [121] R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, Experimental verification of a negative index of refraction, *Science* **292**, 77 (2001).
- [122] C. G. Parazzoli, R. B. Greegor, K. Li, B. E. C. Koltenbah, and M. Tanielian, Experimental Verification and Simulation of Negative Index of Refraction using Snells' Law, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 107401 (2003).

- [123] A. A. Houck, J. B. Brock, and I. L. Chuang, Experimental Observations of a Left-Handed Material that Obeys Snell's Law, [Phys. Rev. Lett. **90**, 137401 \(2003\)](#).
- [124] M. Kadic, G. W. Milton, M. van Hecke, and M. Wegener, 3D metamaterials, [Nat. Rev. Phys. **1**, 198 \(2019\)](#).
- [125] *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations*, edited by N. Engheta and R. W. Ziolkowski (Wiley-Interscience, New Jersey, 2006).
- [126] J. Liu, M. J. Luo, Q. Wang, and H.-J. Xu, Refractive index of light in the quark-gluon plasma with the hard-thermal-loop perturbation theory, [Phys. Rev. D **84**, 125027 \(2011\)](#).
- [127] M. Y. Jamal, S. Mitra, and V. Chandra, Optical properties of an anisotropic hot QCD medium, [J. Phys. G **47**, 035107 \(2020\)](#).
- [128] C.-W. Qiu, H.-Y. Yao, L.-W. Li, S. Zouhdi, and T.-S. Yeo, Routes to left-handed materials by magnetoelectric couplings, [Phys. Rev. B **75**, 245214 \(2007\)](#).
- [129] L. Zhang, T. Koschny, and C. M. Soukoulis, Creating double negative index materials using the Babinet principle with one metasurface, [Phys. Rev. B **87**, 045101 \(2013\)](#).
- [130] S. Zhang, Y.-S. Park, J. Li, X. Lu, W. Zhang, and X. Zhang, Negative Refractive Index in Chiral Metamaterials, [Phys. Rev. Lett. **102**, 023901 \(2009\)](#).
- [131] J. Zhou, J. Dong, B. Wang, T. Koschny, M. Kafesaki, and C. M. Soukoulis, Negative refractive index due to chirality [Phys. Rev. D **79**, 121104 \(2009\)](#).
- [132] C.-Y. Chen, M.-C. Hsu, C. D. Hu, and Y. c. Lin, Natural Negative-Refractive-Index Materials, [Phys. Rev. Lett. **127**, 237401 \(2021\)](#).
- [133] P. Ball, Bending the rules, naturally, [Nat. Mater. **21**, 2 \(2022\)](#).
- [134] O. Sakai and K. Tachibana, Plasmas as metamaterials: A review, [Plasma Sources Sci. Technol. **21**, 013001 \(2012\)](#).
- [135] O. Sakai, A. Iwai, Y. Omura, S. Lio, and T. Naito, Wave propagation in and around negative-dielectric-constant discharge plasma, [Phys. Plasmas **25**, 03191 \(2018\)](#).
- [136] K. Kamada, N. Yamamoto, and D. Yang, Chiral effects in astrophysics and cosmology, [Prog. Part. Nucl. Phys. **129**, 104016 \(2023\)](#).
- [137] M. E. Tobar, B. T. McAllister, and M. Goryachev, Modified axion electrodynamics as impressed electromagnetic sources through oscillating background polarization and magnetization, [Phys. Dark Universe **26**, 100339 \(2019\)](#).
- [138] P. Arias, A. Arza, J. Jaeckel, and D. Vargas-Arancibia, Hidden photon dark matter interacting via axion-like particles, [JCAP **5**, 70 \(2021\)](#).
- [139] W. Chao, J.-J. Feng, and M. Jin, Direct detections of the axionlike particle revisited, [Phys. Rev. D **109**, 075044 \(2024\)](#).
- [140] E.G.M. Ferreira, Ultra-light dark matter, [Astron Astrophys Rev **29**, 7 \(2021\)](#).

- [141] G. Franz, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory* (John Wiley and Sons, New York, 1993).
- [142] J. J. Sakurai, *Invariance Principles and Elementary Particles* (Princeton University Press, Princeton, 1964).
- [143] M. Kaku, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction* (Oxford University Press, Oxford, 1993).
- [144] M. M. Ferreira Jr., *Notas de Aula – Simetrias Discretas na Teoria de Dirac* (UFMA, 2019).
- [145] S. Jia, S.-Y. Xu, M. Z. Hasan, Weyl semimetals, Fermi arcs and chiral anomalies, [Nature Materials](#) **15**, 1140 (2016).
- [146] V. A. Miransky and I. A. Shovkovy, Quantum field theory in a magnetic field: From quantum chromodynamics to graphene and Dirac semimetals, [Phys. Rep.](#) **576**, 1 (2015).
- [147] F. D. M. Haldane, Berry Curvature on the Fermi Surface: Anomalous Hall Effect as a Topological Fermi-Liquid Property, [Phys. Rev. Lett](#) **93**, 206602 (2004).
- [148] V.A. Kostelecký and M. Mewes, Cosmological Constraints on Lorentz Violation in Electrodynamics, [Phys. Rev. Lett.](#) **87**, 251304 (2001); Signals for Lorentz violation in electrodynamics, [Phys. Rev. D](#) **66**, 056005 (2002); Sensitive Polarimetric Search for Relativity Violations in Gamma-Ray Bursts, [Phys. Rev. Lett.](#) **97**, 140401 (2006).
- [149] L. Shao and B.-Q. Ma, Lorentz-violation-induced vacuum birefringence and its astrophysical consequences, [Phys. Rev. D](#) **83**, 127702 (2011).
- [150] E. J. Post, *Formal Structure of Electromagnetics: General Covariance and Electromagnetics* (Norht-Holland Publishing Company, Amsterdam, Dover Publications, 1997).
- [151] J. H. Woo, B. K. M. Gwon, J. H. Lee, D-W. Kim, W. Jo, D. H. Kim, and J. W. Wu, Time-resolved pump-probe measurement of optical rotatory dispersion in chiral metamaterial, [Adv. Opt. Mater.](#) **5**, 1700141 (2017).
- [152] Q. Zhang, E. Plum, J-Y. Ou, H. Pi, J. Li, K. F. MacDonald, and N. I. Zheludev, Electrogyration in metamaterials: Chirality and polarization rotatory power that depend on applied electric field, [Adv. Opt. Mater.](#) **9**, 2001826 (2021).
- [153] J. Mun *et al.*, Electromagnetic chirality: From fundamentals to nontraditional chiroptical phenomena. [Light Sci. Appl.](#) **9**, 139 (2020).
- [154] J. Ma, and D. A. Pesin, Dynamic Chiral Magnetic Effect and Faraday Rotation in Macroscopically Disordered Helical Metals, [Phys. Rev. Lett.](#) **118**, 107401 (2017).
- [155] U. Dey, S. Nandy, and A. Taraphder, Dynamic chiral magnetic effect and anisotropic natural optical activity of tilted Weyl semimetals, [Sci. Rep.](#) **10**, 2699 (2020).
- [156] R. Gueroult, Y. Shi, J-M. Rax, and N. J. Fisch, Determining the rotation direction in pulsars, [Nat. Commun.](#) **10**, 3232 (2019).
- [157] R. Gueroult, J.-M. Rax, and N. J. Fisch, Enhanced tuneable rotatory power in a rotating plasma, [Phys. Rev. E](#) **102**, 051202(R) (2020).

- [158] P. D. S.Silva and M. M. Ferreira Jr., Rotatory power reversal induced by magnetic current in bi-isotropic media, *Phys. Rev. B* **106**, 144430 (2022).
- [159] H. Li, J. Liu, W. Ding, L. Bai, and Z. Wu, Propagation of arbitrarily polarized terahertz Bessel vortex beam in inhomogeneous unmagnetized plasma slab, *Phys. Plasmas* **25**, 123505 (2018).
- [160] H. Li, W. Ding, J. Liu, L. Bai, and Z. Wu, OAM crosstalk of multiple coaxial THz vortex beams propagating through an inhomogeneous unmagnetized plasma slab, *Phys. Plasmas* **26**, 123507 (2019).
- [161] J. Wang, Z. Lu, J. Tu, Z. Huang, and D. Deng, Propagation properties of the Pearcey Gaussian vortex electron plasma wave, *Phys. Plasmas* **30**, 102107 (2023).
- [162] L. Wu, Y. Liu, J. Wu, S. Hong, L. Wu, Y. Chen, J. Xie, and D. Deng, Airy vortex electron plasma wave, *Phys. Plasmas* **26**, 092111 (2019).
- [163] S. V. Vladimirov, Amplification of electromagnetic waves in dusty nonstationary plasmas, *Phys. Rev. E* **49**, R997(R) (1994).
- [164] S. V. Vladimirov, Scattering of electromagnetic waves in dusty plasmas with variable charges on dust particles, *Phys. Rev. E* **50**, 1422 (1994).
- [165] R. K. Varma, P. K. Shukla, and V. Krishan, Electrostatic oscillations in the presence of grain-charge perturbations in dusty plasmas, *Phys. Rev. E* **47**, 3612 (1993).
- [166] P. K. Shukla and I. Sandberg, Radiation-condensation instability in a self-gravitating dusty astrophysical plasma, *Phys. Rev. E* **67**, 036401 (2003).
- [167] M. R. Amin, T. Ferdous, and M. Salimullah, Decay instability of an electron plasma wave in a dusty plasma, *Phys. Rev. E* **53**, 2740 (1996).
- [168] I. Y. Dodin and N. J. Fisch, Nonlinear Dispersion of Stationary Waves in Collisionless Plasmas, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 035005 (2011).
- [169] C. D. Decker and W. B. Mori, Group velocity of large-amplitude electromagnetic waves in a plasma, *Phys. Rev. E* **51**, 1364 (1995).
- [170] J. Vranješ, G. Marić, and P. K. Shukla, Nonlinear magnetic electron tripolar vortices in streaming plasmas, *Phys. Rev. E* **61**, 7009 (2000).
- [171] S. Mahmood and H. Ur-Rehman, Electrostatic solitons in unmagnetized hot electron?positron?ion plasmas, *Phys. Lett. A* **373**, 2255 (2009).
- [172] N. Chakrabarti and M.S. Janaki, Nonlinear evolution of ion-acoustic waves in unmagnetized plasma, *Phys. Lett. A* **305**, 393 (2002).
- [173] M. Ghosh, S. Pramanik, and S. Ghosh, Nonlinear coherent structures of electron acoustic waves in unmagnetized plasmas, *Phys. Lett. A* **396**, 127242 (2021).
- [174] K. Walia, Self-focusing of high power beam in unmagnetized plasma and its effect on Stimulated Raman scattering process, *Optik* **225**, 165592 (2021).
- [175] K. Walia, Self-focusing of q-Gaussian beam in unmagnetized plasma and its impact on second harmonic generation, *Optik* **277**, 170681 (2023).

- [176] C. P. Dettmann, N. E. Frankel, and V. Kowalenko, Plasma electrodynamics in the expanding Universe, [Phys. Rev. D **48**, 5655 \(1993\)](#).
- [177] S. Koide, Charge separation instability in an unmagnetized disk plasma around a Kerr black hole, [Phys. Rev. D **83**, 023003 \(2011\)](#).
- [178] V. Perlick and O. Yu. Tsupko, Light propagation in a plasma on Kerr spacetime: Separation of the Hamilton-Jacobi equation and calculation of the shadow, [Phys. Rev. D **95**, 104003 \(2017\)](#).
- [179] J. Badía and E. F. Eiroa, Shadows of rotating Einstein-Maxwell-dilaton black holes surrounded by a plasma, [Phys. Rev. D **107**, 124028 \(2023\)](#).
- [180] G. Briozzo, E. Gallo, and T. Mädler, Shadows of rotating black holes in plasma environments with aberration effects, [Phys. Rev. D **107**, 124004 \(2023\)](#).
- [181] S. Kumar, A. Uniyal, and S. Chakrabarti, Shadow and weak gravitational lensing of rotating traversable wormhole in nonhomogeneous plasma spacetime, [Phys. Rev. D **109**, 104012 \(2024\)](#).
- [182] D. Zou, X. Cao, X. Lu, and K. Ostrikov, Chiral streamers, [Phys. Plasmas **22**, 103517 \(2015\)](#).
- [183] D. Zou, C. TU and C. Cui, Helical streamers guided by surface electromagnetic standing waves, [Plasma Sci. Technol. **25**, 072001 \(2023\)](#).
- [184] L. Nie, F. Liu, X. Zhou, X. Lu, and Y. Xian, Characteristics of chiral plasma plumes generated in the absence of external magnetic field [Phys. Plasmas **25**, 053507 \(2018\)](#).
- [185] S. Jin, D. Zou, X. Lu, and M. Laroussi, The effect of tube geometry on the chiral plasma, [Phys. Plasmas **26**, 093507 \(2019\)](#).
- [186] R. Martínez von Dossow, E. Barredo-Alamilla, M. A. Gorlach, and L. F. Urrutia, Cherenkov radiation in isotropic chiral matter: the space-frequency domain, [Phys. Lett. A **556**, 130810 \(2025\)](#).
- [187] A. D. Kuz'min, B. Ya. Losovsky, S. V. Logvinenko, I. I. Litvinov, and W. Yan, Deviation of the Arrival-Time Delay of Pulses for the Crab Pulsar from a Quadratic Frequency Region, [Astronomy Reports **52**, 910 \(2008\)](#).
- [188] B. Altschul, Limits on neutron Lorentz violation from pulsar timing, [Phys. Rev. D **75**, 023001 \(2007\)](#).
- [189] Y. Dong, Z. Wang, and Lijing Shao, New limits on the local Lorentz invariance violation of gravity in the standard model extension with pulsars, [Phys. Rev. D **109**, 084024 \(2024\)](#).
- [190] M. Ahmadvand, L. Bian, and S. Shakeri, Heavy QCD axion model in light of pulsar timing arrays, [Phys. Rev. D **108**, 115020 \(2023\)](#).
- [191] G. Servant and P. Simakachorn, Constraining postinflationary axions with pulsar timing arrays, [Phys. Rev. D **108**, 123516 \(2023\)](#).
- [192] S.-Y. Guo, M. Khlopov, X. Liu, L. Wu, Y. Wu, and B. Zhu. Footprints of axion-like particle in pulsar timing array data and James Webb Space Telescope observations, [Sci. China Phys. Mech. Astron. **67**, 111011 \(2024\)](#).
- [193] A. Caputo, L. Sberna, M. Frías, D. Blas, P. Pani, L. Shao, and W. Yan, Constraints on millicharged dark matter and axionlike particles from timing of radio waves, [Phys. Rev. D **100**, 063515 \(2019\)](#).

- [194] T. Liu, X. Lou, and J. Ren, Pulsar Polarization Arrays. [Phys. Rev. Lett. 130, 121401 \(2023\)](#).
- [195] M. Mewes, Bounds on Lorentz and CPT violation from the Earth-Ionosphere cavity, [Phys. Rev. D 78, 096008 \(2008\)](#).
- [196] Y. M. P. Gomes, P. C. Malta, Lab-based limits on the Carroll-Field-Jackiw Lorentz-violating electrodynamics, [Phys. Rev. D 94, 025031 \(2016\)](#).
- [197] A.D.A.M. Spallicci, G. Sarracino, O. Randriamboarison, J. A. Helayël-Neto, A. Dib, Testing the Ampère-Maxwell law on the photon mass and Lorentz symmetry violation with MMS multi-spacecraft data, [Eur. Phys. J. Plus 139, 551 \(2024\)](#).
- [198] L. Caloni, S. Giardiello, M. Lembo, M. Gerbino, G. Gubitosi, M. Lattanzi and L. Pagano, Probing Lorentz-violating electrodynamics with CMB polarization, [JCAP 03 \(2023\) 018](#).
- [199] A. Lyne and F. Graham-Smith, *Pulsar astronomy* (Cambridge University Press, New York, 2012).
- [200] G. B. Rybicki and A. P. Lightman, *Radiative processes in astrophysics* (Cambridge University Press, New York, 2012).
- [201] M. A. Krishnakumar *et al.*, High precision measurements of interstellar dispersion measure with the upgraded GMRT, [A&A A5, 651 \(2021\)](#).
- [202] A. N. Lommen and P. Demorest, Pulsar timing techniques, [Class. Quantum Grav. 30, 224001 \(2003\)](#).
- [203] C. Tiburzi *et al.*, The impact of solar wind variability on pulsar timing, [A&A 647, A84 \(2021\)](#).
- [204] K. Ferrière, Plasma turbulence in the interstellar medium , [Plasma Phys. Control. Fusion 62, 014014 \(2019\)](#).
- [205] M. Xue *et al.*, Pulsar discovery prospect of FASTA, [Res. Astron. Astrophys. 23, 095005 \(2023\)](#).
- [206] R. N. Manchester *et al.*, The Parkes multibeam pulsar survey I. Observing and data analysis systems, discovery and timing of 100 pulsars, [Mon. Not. R. Astron. Soc. 328, 17 \(2001\)](#).
- [207] S. Johnston *et al.*, The Thousand-Pulsar-Array programme on MeerKAT I: Science objectives and first results, [Mon. Not. R. Astron. Soc. 493, 3608 \(2020\)](#).
- [208] M. P. van Haarlem *et al.*, LOFAR: The LOW-Frequency ARray, [A&A 556, A2 \(2013\)](#).
- [209] A. V. Bilous *et al.*, A LOFAR census of non-recycled pulsars: average profiles, dispersion measures, flux densities, and spectra (2016), [Astron. Astrophys. 591, A134 \(2016\)](#).
- [210] A. V. Bilous *et al.*, Low-frequency Faraday rotation measures towards pulsars using LOFAR: probing the 3D Galactic halo magnetic field [MNRAS 484, 3646 \(2019\)](#).
- [211] P. D. S. Silva, L. L. Santos, M. M. Ferreira, Jr., and M. Schreck, Effects of CPT-odd terms of dimensions three and five on electromagnetic propagation in continuous matter, [Phy. Rev. D 104, 116023 \(2021\)](#).
- [212] D. Kharzeev, K. Landsteiner, A. Schmitt and H.U. Yee, *Strongly Interacting Matter in Magnetic Fields*, Lecture Notes in Physics. Vol. 871 (Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg, 2013).

- [213] C.-X. Liu, P. Ye, and X.-L. Qi, Chiral gauge field and axial anomaly in a Weyl semimetal, [Phys. Rev. B **87**, 235306 \(2013\)](#).
- [214] D. Xiao, M. Chang, Q. Niu, Berry phase effects on electronic properties, [Phys. Rev. Lett **82**,1959 \(2010\)](#).
- [215] X. G. Huang, Simulating Chiral Magnetic and Separation Effects with Spin-Orbit Coupled Atomic Gases, [Sci Rep **6**, 20601 \(2016\)](#).
- [216] P. D. S. Silva, M. M. Ferreira Jr., M. Schreck, and L. F. Urrutia, Magnetic-conductivity effects on electromagnetic propagation in dispersive matter, [Phys. Rev. D **102**, 076001 \(2020\)](#).
- [217] P. D. S. Silva, M.J. Neves, M. M. Ferreira Jr., Optical properties and energy propagation in a dielectric medium supporting magnetic current, [Phys. Rev. B **109**, 184439 \(2024\)](#).
- [218] Z. Qiu, G. Cao and X.-G. Huang, Electrodynamics of chiral matter, [Phys. Rev. D **95**, 036002 \(2017\)](#).
- [219] J. P. W. Verbiest, J. M. Weisberg, A. A. Chael, K. J. Lee, and D. R. Lorimer, On pulsar distance measurements and their uncertainties, [APJ **775**, 39 \(2012\)](#).
- [220] V. A. Kostelecký and N. Russell, Data tables for Lorentz and CPT violation, [Rev. Mod. Phys **83**, \(2011\)](#).
- [221] Andrew K. Yi et al., Axion Dark Matter Search around $4.55 \mu\text{eV}$ with Dine-Fischler-Srednicki-Zhitnitskii Sensitivity, [Phys. Rev. Lett. **130**, 071002 \(2023\)](#).
- [222] K. Altenmüller et al., New Upper Limit on the Axion-Photon Coupling with an Extended CAST Run with a Xe-Based Micromegas Detector, [Phys. Rev. Lett. **133**, 221005 \(2024\)](#).
- [223] C. Dessert, D. Dunskey, and B. R. Safdi, Upper limit on the axion-photon coupling from magnetic white dwarf polarization, [Phys. Rev. D **105**, 103034 \(2022\)](#).
- [224] P. Adshead, P. Draper, and B. Lillard, Time-domain properties of electromagnetic signals in a dynamical axion background, [Phys. Rev. D **102**, 123011 \(2020\)](#).
- [225] L. Hui, J. P. Ostriker, S. Tremaine, and E. Witten. Ultralight scalars as cosmological dark matter, [Phys. Rev. D **95**, 043541 \(2017\)](#).
- [226] A. Q. Costa, P. D. S. Silva, M. M. Ferreira Jr, Double rotatory power reversal, continuous Kerr angle, and enhanced reflectance in bi-isotropic media with anomalous Hall current, [Phys. Rev. B **112**, 085140 \(2025\)](#).
- [227] E. Petroff, J.W.T Hessels, and D.R. Lorimer, Fast radio bursts, [Astron. Astrophys. Rev. **27**, 4 \(2019\)](#).
- [228] D. R. Lorimer, M. Bailes, M. A. McLaughlin, D. J. Narkevic, and F. Crawford, A bright millisecond radio burst of extragalactic origin, [Science **318**, 777 \(2007\)](#).
- [229] L. G. Spitler *et al.*, A repeating fast radio burst, [Nature **531**, 202 \(2016\)](#).
- [230] B.C. Andersen *et al.*, CHIME/FRB discovery of 25 repeating fast radio burst sources, [Astrophys. J. **947**, 83 \(2023\)](#).

- [231] D. R. Lorimer and M. Kramer, *Handbook of Pulsar Astronomy* (Cambridge University Press, New York 2005).
- [232] W. Deng and B. Zhang, Cosmological implications of fast radio burst/gamma-ray burst associations, [ApJL **783**, L35 \(2014\)](#); S. Bhandari and C. Flynn, Probing the Universe with Fast Radio Bursts, [Universe **7**, 85 \(2021\)](#).
- [233] J. M. Cordes, T. J. W. Lazio, NE2001. II. Using radio propagation data to construct a model for the galactic distribution of free electrons, [arXiv:astro-ph/0301598 \(2003\)](#).
- [234] J. M. Yao, R. N. Manchester, and N. Wang, A new electron-density model for estimation of pulsar and frb distances, [Astrophys. J. **835**, 29 \(2017\)](#); J. H. Taylor and J. M. Cordes, Pulsar distances and the galactic distribution of free electrons, [Astrophys. J. **411**, 674 \(1993\)](#).
- [235] W. Zhu and L.-L. Feng, The dispersion measure and scattering of fast radio bursts: Contributions from the intergalactic medium, foreground halos, and hosts, [Astrophys. J. **906**, 95 \(2021\)](#).
- [236] J.-P. Macquart et al., A census of baryons in the Universe from localized fast radio bursts, [Nature **581**, 391 \(2020\)](#).
- [237] S. Simha et al., Disentangling the cosmic web toward FRB 190608, [Astrophys. J. **901**, 134 \(2020\)](#).
- [238] S. P. Tendulkar et al., The host galaxy and redshift of the repeating fast radio burst FRB 121102, [Astrophys. J. Lett. **834**, L7 \(2017\)](#).
- [239] L. Shao and B. Zhang, Bayesian framework to constrain the photon mass with a catalog of fast radio bursts, [Phys. Rev. D **95**, 123010 \(2017\)](#).
- [240] S. D. Ryder *et al.*, A luminous fast radio burst that probes the Universe at redshift 1, [Science **382**, 294 \(2023\)](#).
- [241] T. Akahori and D. Ryu, Faraday rotation measure due to the intergalactic magnetic field. II. The cosmological contribution, [ApJ **738**, 134 \(2011\)](#);
- [242] J. L. Han, Observing interstellar and intergalactic magnetic fields, [Ann. Review Astronomy and Astrophysics **55**, 111 \(2017\)](#).
- [243] D. Michilli *et al.*, An extreme magneto-ionic environment associated with the fast radio burst source FRB 121102, [Nature **553**, 182 \(2018\)](#).
- [244] V. Ravi *et al.*, The magnetic field and turbulence of the cosmic web measured using a brilliant fast radio burst, [Science **354**, 1249 \(2016\)](#); B. Zhang, The physics of fast radio bursts, [Rev. Mod. Phys. **95**, 035005 \(2023\)](#).
- [245] Alexandra G. Mannings *et al.*, Fast Radio Bursts as Probes of Magnetic Fields in Galaxies at $z < 0.5$, [Astrophys. J. **954**, 179 \(2023\)](#).
- [246] Cherie K. Day *et al.*, High time resolution and polarization properties of ASKAP-localized fast radio bursts, [Mon. Not. R. Astron. Soc. **497**, 3335 \(2020\)](#).
- [247] Alexandra G. Mannings *et al.*, A High-resolution View of Fast Radio Burst Host Environments, [Astrophys. J. **917**, 75 \(2021\)](#).

- [248] G. H. Hilmarsson *et al.*, Rotation Measure Evolution of the Repeating Fast Radio Burst Source FRB 121102, *Astrophys. J. Lett.* **980**, L10 (2021).
- [249] D. Michilli *et al.*, Subarcminute localization of 13 repeating fast radio bursts detected by CHIME/FRB, *Astrophys. J.* **950**, 134 (2023).
- [250] S. Bethapudi *et al.*, Rotation Measure study of FRB 20180916B with the uGMRT, *Astron. Astrophys.* **694**, A75 (2025).
- [251] R. Mckinven *et al.*, Revealing the Dynamic Magnetoionic Environments of Repeating Fast Radio Burst Sources through Multiyear Polarimetric Monitoring with CHIME/FRB, *Astrophys. J.* **951**, 82 (2023).
- [252] Liam Connor *et al.*, A bright, high rotation-measure FRB that skewers the M33 halo, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **499**, 4716 (2020).
- [253] Planck Collaboration *et al.*, Planck 2018 results, *Astron. Astrophys.* **641**, A6 (2020); Erratum in *Astron. Astrophys.* **652**, C4 (2021).
- [254] The Astropy Collaboration *et al.*, Astropy: A community Python package for astronomy, *Astron. Astrophys.* **558**, A33 (2013).
- [255] The Astropy Collaboration *et al.*, The Astropy Project: Building an Open-science Project and Status of the v2.0 Core Package, *Astron. J.* **156**, 123 (2018).
- [256] D. Thornton *et al.*, A Population of Fast Radio Bursts at Cosmological Distances, *Science* **341**, 53 (2013).
- [257] G.F. de Carvalho, M. Fillion, P.C. Malta, C.A.D. Zarro, Limits on the Carroll-Field-Jackiw electrodynamics from geomagnetic data, *J. High Energ. Phys.* 2026, 163 (2026).
- [258] M. A. Player, On the dragging of the plane of polarization of light propagating in a rotating medium, *Proceedings of the Royal Society of London A* **349**, 441–445 (1976).
- [259] F. S. Ribeiro, J. P. Melo, P. D. S. Silva, and M. M. Ferreira Jr., Electromagnetic modes in rotating chiral plasma (Working in preparation).
- [260] I. G. Irastorza and J. Redondo, New experimental approaches in the search for axion-like particles, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **102**, 89–159 (2018).
- [261] P. Sikivie, Experimental tests of the “invisible” axion, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1415 (1983); Erratum: *Phys. Rev. Lett.* **52**, 695 (1984).
- [262] R. Bradley, J. Clarke, D. Kinion, L. J. Rosenberg, K. van Bibber, S. Matsuki, M. Muck, and P. Sikivie, Microwave cavity searches for dark-matter axions, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 777 (2003).
- [263] S. J. Asztalos *et al.*, SQUID-based microwave cavity search for dark-matter axions, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 041301 (2010).
- [264] N. Du *et al.* (ADMX Collaboration), Search for invisible axion dark matter with the Axion Dark Matter Experiment, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 151301 (2018).
- [265] B. M. Brubaker *et al.*, First results from a microwave cavity axion search at 24 μeV , *Phys. Rev. Lett.* **118**, 061302 (2017).

- [266] K. M. Backes et al., A quantum enhanced search for dark matter axions, *Nature* **590**, 238–242 (2021).
- [267] X. Bai et al., Dark matter axion search with HAYSTAC Phase II, *Phys. Rev. Lett.* **134**, 151006 (2025).
- [268] O. Kwon et al., First results from an axion haloscope at CAPP around $10.7 \mu\text{eV}$, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 191802 (2021).
- [269] Y. Lee, B. Yang, H. Yoon, M. Ahn, H. Park, B. Min, D. Kim, and J. Yoo, Searching for invisible axion dark matter with an 18 T magnet haloscope, *Phys. Rev. Lett.* **128**, 241805 (2022).
- [270] D. Alesini et al., Galactic axions search with a superconducting resonant cavity, *Phys. Rev. D* **99**, 101101(R) (2019).
- [271] A. Rettaroli et al., Search for axion dark matter with the QUAX–LNF tunable haloscope, *Phys. Rev. D* **110**, 022008 (2024).
- [272] B. T. McAllister, G. Flower, E. N. Ivanov, M. Goryachev, J. Bourhill, and M. E. Tobar, The ORGAN experiment: An axion haloscope above 15 GHz, *Phys. Dark Universe* **18**, 67–72 (2017).
- [273] A. Quiskamp, B. T. McAllister, P. Altin, E. N. Ivanov, M. Goryachev, and M. E. Tobar, Direct search for dark matter axions excluding ALPogenesis in the $63\text{--}67 \mu\text{eV}$ range with the ORGAN experiment, *Sci. Adv.* **8**, eabq3765 (2022).
- [274] K. van Bibber, P. M. McIntyre, D. E. Morris, and G. G. Raffelt, Design for a practical laboratory detector for solar axions, *Phys. Rev. D* **39**, 2089 (1989).
- [275] K. Zioutas et al. (CAST Collaboration), First results from the CERN Axion Solar Telescope (CAST), *Phys. Rev. Lett.* **94**, 121301 (2005).
- [276] V. Anastassopoulos et al. (CAST Collaboration), New CAST limit on the axion–photon interaction, *Nature Phys.* **13**, 584–590 (2017).
- [277] E. Armengaud et al. (IAXO Collaboration), Conceptual design of the International Axion Observatory (IAXO), *JINST* **9**, T05002 (2014).
- [278] R. Bähre et al., Any light particle search II — Technical Design Report, *JINST* **8**, T09001 (2013).
- [279] M. D. Ortiz et al., Design of the ALPS II optical system, *Phys. Dark Universe* **35**, 100968 (2022).
- [280] G. Raffelt and L. Stodolsky, Mixing of the photon with low-mass particles, *Phys. Rev. D* **37**, 1237 (1988).
- [281] A. Mirizzi, G. G. Raffelt, and P. D. Serpico, Photon-axion conversion in intergalactic magnetic fields and cosmological consequences, *Lect. Notes Phys.* **741**, 115–134 (2008).
- [282] A. De Angelis, M. Roncadelli, and O. Mansutti, Evidence for a new light spin-zero boson from cosmological gamma-ray propagation?, *Phys. Rev. D* **76**, 121301(R) (2007).
- [283] T. Moroi, K. Nakayama, and Y. Tang, Axion-photon conversion and effects on 21 cm observation, *Phys. Lett. B* **783**, 301–305 (2018).

- [284] A. Hook, Y. Kahn, B. R. Safdi, and Z. Sun, Radio signals from axion dark matter conversion in neutron star magnetospheres, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 241102 (2018).
- [285] H. Terças, J. T. Mendonça, R. Bingham, Resonant Axion-Plasmon Conversion in Neutron Star Magnetospheres, *Phys. Rev. Lett.* **135**, 111001 (2025).
- [286] F. S. Ribeiro, H. Terças, P. D. S. Silva, and M. M. Ferreira Jr., Photon-axion conversion in chiral matter (Working in preparation).
- [287] G. G. Raffelt, *Stars as Laboratories for Fundamental Physics: The Astrophysics of Neutrinos, Axions, and Other Weakly Interacting Particles* (University of Chicago Press, Chicago, 1996).
- [288] E. Arik et al. (CAST Collaboration), Probing eV-scale axions with CAST, *JCAP* **02**, 008 (2009).
- [289] M. Arik et al. (CAST Collaboration), CAST search for sub-eV mass solar axions with ^3He buffer gas, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 261302 (2011).
- [290] M. Arik et al. (CAST Collaboration), Search for solar axions by the CERN Axion Solar Telescope with ^3He buffer gas: Closing the hot dark matter gap, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 091302 (2014).
- [291] D. Sa, Chiral magnetic effect and Maxwell–Chern–Simons electrodynamics in Weyl semimetals, *Eur. Phys. J. B* **94**, 31 (2021). <https://doi.org/10.1140/epjb/s10051-020-00042-2>